Ressources sémiotiques et enseignement-apprentissage des nombres rationnels

Virginie HOULE
Université du Québec à Montréal
houle.virginie@uqam.ca
Myriam RINFRET
Université du Québec à Montréal
rinfret.myriam@uqam.ca
Audrey DEVEAULT
Université du Québec à Montréal
deveault.audrey.2@uqam.ca

Résumé : Cet article explore le potentiel d'un appui sur les registres de représentation sémiotique et, plus largement, sur les ressources sémiotiques, pour analyser les interactions didactiques dans des situations d'enseignement-apprentissage sur les nombres rationnels. Diverses ressources sémiotiques inhérentes aux nombres rationnels sont ainsi dégagées et, à la lumière de celles-ci, quatre situations expérimentées auprès d'un élève de 6e année faible en mathématiques sont analysées. Les résultats montrent le défi que représentent les opérations de conversion pour l'élève – en particulier celles du gestuel vers la langue formelle – ainsi que le jeu sur les différentes ressources sémiotiques réalisé par l'expérimentatrice pour favoriser son apprentissage.

Mots-clés : ressources sémiotiques, nombres rationnels, difficultés en mathématiques

Semiotic resources and teaching-learning rational numbers

Abstract: This article explores the potential of using the theory of registers of semiotic representation, and more broadly semiotic resources, to analyze didactic interactions in teaching-learning situations involving rational numbers. Based on this framework, we identified a number of semiotic resources inherent to rational numbers and, in light of those, we analyzed four experimental teaching situations with a sixth-grade student experiencing difficulties in mathematics. The results highlighted the challenge that conversion operations represents for the student, particularly when converting gestures

https://doi.org/10.71403/qjywf503

into formal language, and shed light on the experimenter's use of different semiotic resources to support the student's learning.

Keywords: semiotic resources, rational numbers, mathematical difficulties

Introduction

L'apprentissage et l'enseignement des nombres rationnels représentent un défi important au primaire. Les difficultés inhérentes à leur apprentissage peuvent conduire à l'enseignement de techniques qui favorisent des réussites (à tout le moins à court terme) sans toutefois assurer une réflexion approfondie sur les propriétés de ces nombres (Chesné et Fischer, 2015). Si certains élèves comprennent ce qui fonde les techniques qui leur sont enseignées, ceux qui n'y arrivent pas sont contraints de les mémoriser et peinent à reconnaître les situations où ils doivent les appliquer. Bien souvent, les connaissances des élèves faibles en mathématiques restent attachées au contexte dans lequel elles ont été acquises (Houle, 2016; Perrin-Glorian, 1993). Ils ont ainsi du mal à reconnaître l'utilité de leurs connaissances lorsqu'ils sont confrontés à de nouvelles situations, surtout lorsque celles-ci divergent de la situation qui a servi à leur introduction.

Dans le cadre de notre recherche[1], nous avons choisi d'explorer le potentiel d'un appui sur les ressources sémiotiques (Arzarello et al., 2009) pour analyser les interactions didactiques dans des situations d'enseignement-apprentissage sur les nombres rationnels, et ainsi mieux comprendre les difficultés qui y sont rencontrées et ce qui permet, ou non, de les surmonter. Pour atteindre cet objectif, nous avons construit un maillage de situations[2] convoquant une variété de ressources sémiotiques et l'avons expérimenté auprès de différents élèves.

Ce texte expose d'abord nos références théoriques sur l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques ainsi que les principales difficultés rencontrées dans l'enseignement et l'apprentissage des nombres rationnels au primaire. Par la suite, après avoir présenté la méthodologie de notre recherche, nous procédons à l'analyse d'une expérimentation réalisée auprès d'un élève de fin de 6e année faible en mathématiques, et ce, en prenant en compte les interactions entre différentes ressources sémiotiques telles que les gestes, le langage et les figures.

---

[1] Nous remercions le Conseil de recherches en sciences humaines du Canada (CRSH) qui a soutenu financièrement cette recherche dans le cadre de la subvention de développement de partenariat.

[2] Nous utilisons l'expression « maillage de situations », car celles-ci ne suivent pas une progression linéaire; elles s'entrecroisent dans des allers-retours.

1. Références théoriques sur l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques

Notre projet s'appuie sur un triple cadre théorique : 1) la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990, 2007), qui met en évidence que les connaissances se construisent dans l'action par la confrontation à une variété de situations; 2) la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), qui souligne la nécessité d'organiser des situations qui permettent aux élèves de participer à la construction de leurs connaissances en ne reniant toutefois pas l'importance de la transmission des savoirs; 3) les registres de représentation sémiotique (Duval, 1993, 1995, 2001, 2011) et, plus largement, les ressources sémiotiques (Arzarello et al., 2009), qui sont utiles pour porter un regard fin sur les connaissances des élèves et les interventions de la personne enseignante, selon les caractéristiques des situations.

L'apprentissage d'un savoir mathématique nécessite une expérience avec une variété de situations. La théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1990, 2007) s'intéresse à la relation entre les savoirs mathématiques et les situations qui permettent aux sujets de leur donner sens, et ce, par le biais de la notion de schèmes. Le schème, selon Vergnaud (2007), est « une forme invariante d'organisation de l'activité et de la conduite pour une classe de situations déterminée » (p. 17). Au cours du développement d'un schème, celui-ci a d'abord une portée locale, c'est-à-dire qu'il est associé à la situation dans laquelle il a émergé, et sa portée s'élargit progressivement à un nombre de plus en plus important de situations. Le schème n'a d'ailleurs pas, d'emblée, un caractère explicite, ce qui ne l'empêche toutefois pas d'être opératoire. La notion de schème rompt ainsi avec les modèles suggérant que l'information précède l'action. Comme le soulève Vergnaud (2007), « les schèmes gèrent en effet de manière entremêlée la suite des actions, des prises d'information et des contrôles nécessaires. L'efficacité se construit au fur et à mesure » (p. 18). Pour mettre en évidence le caractère dynamique du schème, qui se développe dans et par l'action, Vergnaud introduit la notion de « concept-en-acte », qui consiste en un concept tenu pour pertinent dans l'action, et celle de « théorème-en-acte », qui consiste en une proposition tenue pour vraie dans l'activité. Un concept-en-acte peut ainsi être reconnu pertinent et un théorème-en-acte être jugé valide pour une situation donnée, sans toutefois qu'ils soient mobilisés pour toute une classe de situations. Un appui sur les notions de concept-en-acte et de théorème-en-acte paraît utile pour prendre en compte les connaissances engagées par les élèves dans l'action et pour étudier les ruptures et les filiations de connaissances selon les caractéristiques des situations.

Pour mettre en place des situations permettant à la fois aux élèves de prendre des décisions qui leur appartiennent et d'acquérir les savoirs mathématiques visés, nous nous appuyons sur la théorie des situations didactiques (TSD) (Brousseau, 1998), et en particulier sur les concepts de dévolution et d'institutionnalisation. La dévolution consiste à faire accepter aux élèves la responsabilité de trouver des solutions aux problèmes par et pour eux-mêmes. Pour ce faire, le choix des situations est déterminant. Elles doivent permettre aux élèves de mettre en place des stratégies par leurs propres moyens, mais aussi les amener à rencontrer les limites de celles-ci pour qu'ils aient besoin des savoirs mathématiques visés par l'enseignement. La TSD reconnaît donc l'importance de la dévolution pour que les élèves construisent du sens. Or, elle reconnaît également le rôle fondamental de l'institutionnalisation pour que les élèves identifient dans les connaissances produites en situation ce qui renvoie à des savoirs mathématiques socialement reconnus. Le processus d'institutionnalisation vise à favoriser le « passage » d'une connaissance personnalisée et contextualisée à un savoir culturel et décontextualisé (Brousseau, 1998). Il s'agit là d'un défi important dans l'enseignement, car certains élèves retiennent tel quel ce qui a été institutionnalisé, sans l'attacher à ce qu'ils ont fait lors de la phase de dévolution (Perrin-Glorian, 1993). Par conséquent, ils ne peuvent réutiliser ce qu'ils ont appris lorsqu'ils font face à de nouvelles situations. Pour favoriser tant le « passage » d'une connaissance à un savoir que celui d'un savoir à une connaissance, un va-et-vient entre des phases de dévolution et d'institutionnalisation paraît essentiel. Les élèves doivent éventuellement pouvoir mobiliser, en situation, des connaissances qui ont déjà fait l'objet d'une institutionnalisation, tout en reconnaissant que celles-ci renvoient à des savoirs partagés par une communauté.

Les élèves, en particulier ceux faibles en mathématiques, ne réinvestissent pas d'emblée ce qu'ils ont fait dans une situation lors de la présentation d'une nouvelle situation mettant pourtant en jeu les mêmes savoirs mathématiques (Houle, 2016; Perrin-Glorian, 1993). Cette difficulté peut être étudiée sous l'angle des registres de représentation sémiotique (Duval, 1993, 1995, 2001, 2011). Les défis que pose la coordination de différents registres (que ce soit d'une situation à une autre ou au sein d'une même situation) sont un élément central des travaux de Duval. Ce cadre paraît intéressant pour analyser les connaissances engagées ou non par les élèves selon les représentations sémiotiques en jeu dans les situations. Selon Duval (2011), les représentations sémiotiques jouent un rôle fondamental dans l'apprentissage des mathématiques, car les élèves ne peuvent accéder directement aux objets mathématiques. En effet, contrairement aux objets appartenant à d'autres domaines de connaissances, les objets mathématiques ne sont pas accessibles perceptivement. C'est d'ailleurs dans cette perspective que Fischer (2009) considère, en s'appuyant sur les travaux piagétiens, que l'apprentissage des mathématiques repose sur l'abstraction réfléchissante, qui est une construction de l'esprit. Les représentations sont toutefois nécessaires pour que les élèves donnent du sens aux objets mathématiques et les utilisent. Il paraît de plus essentiel, selon Duval (1993), que les élèves soient confrontés à une variété de représentations sémiotiques d'un même objet, car elles ne mettent pas en évidence les mêmes propriétés de celui-ci. Ainsi, un objet mathématique ne peut être pleinement circonscrit par une seule de ses représentations. Lorsqu'un ou une élève associe un objet mathématique uniquement à l'une de ses représentations, ses connaissances ne peuvent être réinvesties dans d'autres contextes, d'autant plus qu'un même objet peut être associé à des représentations radicalement différentes. La présentation de situations faisant appel à une diversité de représentations est ainsi nécessaire pour éviter que les objets mathématiques soient confondus avec leurs représentations et pour qu'ils soient reconnus dans des situations variées.

Duval (2011) appelle registres « tous les types de représentations ou, plus exactement, tous les systèmes de représentations sémiotiques, qui permettent des opérations de transformation interne de représentation, c'est-à-dire sans avoir à recourir à d'autres types de représentation ou à des sources externes d'information » (p. 153). Ainsi, chaque registre ouvre sur des possibilités de traitement qui lui sont propres. La notion de registre permet de distinguer deux types de transformation de représentation sémiotique : le traitement et la conversion. Le traitement d'une représentation consiste en la transformation d'une représentation dans le même registre que celui où elle a été formée (Duval, 1993). Le traitement se déploie ainsi tout au long de la résolution d'un problème ou de plusieurs problèmes mettant en jeu des représentations d'un même registre. La conversion consiste quant à elle à passer d'un registre de représentation à un autre. Le passage de 0,3 à 0,300 ou encore celui de $\frac{1}{2}$ à $\frac{3}{6}$ nécessite une transformation interne à un registre et donc, un traitement, tandis que l'établissement de l'égalité entre 0,4 et $\frac{2}{5}$ requiert un changement de registres et donc, une conversion. Selon Duval (2001), les opérations de conversion d'un registre à l'autre représentent un défi particulier pour les élèves et sont souvent un point de « blocage ». Cela s'explique en grande partie par la différence considérable entre certaines représentations, qui entraîne que les élèves ne voient pas comment celles-ci peuvent être associées à un même objet mathématique. La difficulté de conversion d'une représentation vers une autre varie d'ailleurs selon leur proximité ou, pour reprendre les expressions de Duval (1995), selon les congruences et les non-congruences entre les représentations. Ainsi, plus des registres de représentation sont différents, plus la conversion est difficile pour les élèves.

Arzarello et al. (2009) élargissent le concept de représentations sémiotiques pour prendre en compte, en particulier, les gestes, qui ne répondent pas à toutes les caractéristiques des registres de représentation mais sont néanmoins importants dans l'apprentissage et également, dans l'enseignement des mathématiques. L'expression *semiotic bundle*, que nous traduisons par faisceau sémiotique, englobe les registres sémiotiques mais ne s'y limite pas. Un faisceau sémiotique est un système de signes, produits par des élèves ou par la personne enseignante, qui évolue dans le temps. Le mot « signe » ici est pris au sens de Peirce (1978), c'est-à-dire que tout ce qui représente quelque chose pour quelqu'un peut être considéré comme un signe. Des signes peuvent se produire simultanément (par exemple, un ou une élève peut faire des gestes et parler en même temps) et ils peuvent se transformer en d'autres signes (ce serait le cas du passage d'un geste à un mot ou encore, à un signe écrit), ce qui renvoie au concept de conversion défini par Duval. Il existe différents moyens de produire des signes, appelés *semiotic resources,* que nous traduisons par ressources sémiotiques. Une ressource sémiotique n'est donc pas un signe en soi, mais plutôt le canal par lequel sont produits des signes. Ainsi parlera-t-on notamment de ressources gestuelles ou encore, de ressources langagières.

Dans le cadre de notre projet, pour construire un maillage de situations sur les nombres rationnels et analyser les interactions didactiques, en plus de nous appuyer sur ces trois cadres, nous prenons en compte la spécificité du savoir mathématique en jeu. Nous nous intéressons ainsi, dans ce qui suit, à divers travaux de recherche qui mettent en évidence les difficultés inhérentes à l'apprentissage et à l'enseignement des nombres rationnels.

2. Enseignement et apprentissage des nombres rationnels au primaire

L'apprentissage des nombres rationnels représente un défi important au primaire, ce qui s'explique notamment par le fait qu'il oblige les élèves à rompre avec certaines connaissances acquises en travaillant avec les nombres naturels. Une difficulté relevée, dans les premiers apprentissages des nombres rationnels, consiste à concevoir que l'unité est divisible, et ce, indéfiniment (Kieren, 1993). Cette difficulté conduit à considérer la fraction comme étant formée de deux nombres naturels (le numérateur et le dénominateur), ce qui n'est pas indépendant de la façon dont celle-ci est enseignée. La fraction est généralement introduite comme étant la partie d'un tout. Ainsi, $\frac{a}{b}$ représente un tout partagé en b parties égales dont a parties sont prélevées. Or, une fois le tout partitionné, aux yeux de plusieurs jeunes élèves, celui-ci disparaît et les sous-unités (en l'occurrence les b parties) deviennent les nouvelles unités. Cela explique la difficulté des élèves à situer les fractions parmi les nombres entiers (bien des élèves placent par exemple $\frac{2}{3}$ sur une droite numérique vis-à-vis le nombre 2 ou encore, entre les nombres 2 et 3). Les tâches de partition sont néanmoins nécessaires pour amener les élèves à considérer à la fois le critère de l'égalisation des parties et celui de l'épuisement du tout (Desjardins et Hétu, 1974). C'est ainsi que, progressivement, les élèves reconnaissent que la fraction $\frac{1}{b}$ se réplique exactement b fois dans le tout auquel elle se rapporte. Cette relation, que l'on peut modéliser par l'écriture $b \times \frac{1}{b} = \frac{b}{b} = 1$, paraît fondamentale dans l'apprentissage des fractions, car les élèves établissent dès lors la relation multiplicative entre une fraction unitaire ($\frac{1}{b}$) et son tout, qui constitue l'unité de référence (Houle et Giroux, 2018).

Bien que l'interprétation de la fraction en tant que partie d'un tout soit la première à être construite par les élèves (Behr et al., 1993), d'autres interprétations s'y greffent progressivement et viennent ainsi enrichir le concept de nombre rationnel. C'est notamment le cas de la fraction en tant que mesure. Cette interprétation, dans le modèle de Kieren (1989), sous-tend l'existence d'une unité de mesure de type $\frac{1}{b}$. La fraction $\frac{a}{b}$ est alors interprétée comme l'itération de la fraction $\frac{1}{b}$, a fois, ce qui peut être modélisé par l'écriture suivante : $a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$. Il est possible de travailler cette relation à partir de l'interprétation partie/tout; on peut par exemple interpréter $\frac{3}{4}$ comme $3 \times \frac{1}{4}$ en s'appuyant sur le partage d'un tout continu. Or, la conception d'une fraction $\frac{a}{b}$ comme l'itération de $\frac{1}{b}$, a fois, permet également de dépasser l'interprétation partie/tout et de traiter des fractions impropres, c'est-à-dire supérieures à 1. Il est ainsi possible de situer une fraction telle que $\frac{7}{4}$ sur une droite numérique en réitérant 7 fois $\frac{1}{4}$.

Une autre difficulté importante dans l'apprentissage des nombres rationnels est que, contrairement aux nombres naturels, ceux-ci ont différentes écritures. Un même nombre peut non seulement être représenté par une infinité de fractions équivalentes, mais aussi par différentes formes d'écriture telles que des fractions (p. ex., $\frac{5}{4}$), des nombres fractionnaires (p. ex., $1\ \frac{1}{4}$) et des écritures décimales (p. ex., 1,25). Lorsqu'un nombre non entier est représenté par une écriture décimale, il est composé d'une partie entière (représentée par les chiffres à gauche de la virgule) et d'une partie non entière (représentée par les chiffres à droite de la virgule). Les groupements sont réguliers, c'est-à-dire qu'il faut toujours dix unités d'un ordre pour former une unité de l'ordre supérieur adjacent (ex. 10 centièmes = 1 dixième; 10 dixièmes = 1 unité; 10 unités = 1 dizaine, etc.). Certaines règles construites avec les nombres naturels rencontrent néanmoins leur limite dans l'ensemble des nombres rationnels. C'est le cas notamment dans les tâches de comparaison de nombres rationnels où il n'est plus possible de considérer que plus un nombre a de chiffres, plus il est grand (ex. 1,289 < 1,4). Pour favoriser la réussite des élèves dans les tâches de comparaison de nombres rationnels écrits sous la forme décimale, différentes techniques sont enseignées telles qu'ajouter des zéros pour que les parties non entières des nombres à comparer aient le même nombre de chiffres. Lorsque la partie entière de deux nombres est la même, les élèves comparent alors la partie non entière de chaque nombre comme s'il s'agissait de nombres naturels. Les réussites ainsi produites peuvent masquer une conceptualisation déficiente des nombres rationnels (Chesné et Fischer, 2015). Ce type de techniques conduit de plus à considérer la partie entière et la partie non entière séparément et peut ainsi générer de fausses conceptions (Chambris, 2017; Roditi, 2008).

Enfin, comme les élèves reproduisent généralement les techniques enseignées sans avoir à se questionner sur ce qui les fonde, ils ont souvent une conceptualisation déficiente des nombres rationnels et ont ainsi du mal, notamment, à établir des relations entre les écritures décimales et fractionnaires. La virgule et le trait de fraction sont d'ailleurs parfois interprétés comme un « séparateur » entre deux entiers, ce qui conduit à des erreurs telles que $\frac{1}{3}$ = 1,3 (Guille-Biel Winder, 2017). L'établissement de relations entre les écritures fractionnaire et décimale est de plus difficile pour les élèves du primaire, car ces deux formes d'écritures, tant dans la vie courante que dans les tâches scolaires, sont utilisées dans des contextes très différents. D'ailleurs, dans les cahiers d'exercices, les fractions et l'écriture décimale sont généralement abordées dans des chapitres différents, car les techniques enseignées pour comparer les nombres rationnels et opérer sur ceux-ci varient selon la forme d'écriture utilisée. Les opérations de conversion entre les écritures fractionnaire et décimale des nombres rationnels semblent ainsi présenter un défi de taille non seulement en raison des non-congruences entre ces représentations, mais également en raison de l'enseignement reçu.

3. Méthodologie

Dans le cadre de notre recherche, nous avons construit un maillage de situations sur les nombres rationnels mettant en jeu différentes ressources sémiotiques et l'avons expérimenté auprès d'élèves faibles en mathématiques. Nous appuyant sur la TSD, des phases de dévolution et d'institutionnalisation sont prévues afin de faire participer les élèves à la construction de leurs connaissances tout en les accompagnant pour qu'ils reconnaissent dans ce qu'ils ont fait ce qui relève du savoir mathématique. Les phases de dévolution paraissent intéressantes non seulement pour favoriser des apprentissages signifiants, mais aussi, sur le plan méthodologique, pour avoir accès aux traitements et conversions réalisés (ou non) par les élèves selon les caractéristiques des situations. Le maillage de situations que nous avons organisé vise plus particulièrement les contenus mathématiques suivants :

- La relation $b \times \frac{1}{b} = \frac{b}{b} = 1$;
- La relation $a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$;
- La représentation d'un nombre rationnel selon différentes écritures (fractions équivalentes, nombre fractionnaire, écriture décimale);
- La valeur d'un chiffre ou d'un groupe de chiffres dans un nombre rationnel écrit sous la forme décimale.

Le maillage de situations a été expérimenté à trois reprises. Le déroulement de chacune des expérimentations est toutefois très différent, car les expérimentatrices (c'est-à-dire chacune des auteures de ce texte) ont adapté leurs interventions en fonction des interactions au cours des séances. Ce texte s'intéresse à l'une de ces expérimentations, qui a été réalisée auprès d'un élève de fin de 6e année – que nous appellerons Étienne pour conserver son anonymat – qui peine à obtenir la note de passage (60 %). Quatre séances d'environ une heure chacune ont été réalisées auprès d'Étienne, à raison d'une séance par semaine. Les séances ont été filmées et transcrites afin de permettre leur analyse.

Pour éclairer l'analyse des données, nous distinguons huit ressources sémiotiques (voir figure 1) :

1) l'écriture fractionnaire;
2) l'écriture décimale;
3) les codes oraux;
4) les figures;
5) la droite numérique;
6) la langue naturelle;
7) la langue formelle;
8) le gestuel.

La figure ci-dessous présente chacune de ces ressources en l'illustrant par un exemple associé au nombre $\frac{7}{4}$. Bien que ces ressources sémiotiques ne soient pas exhaustives, elles permettent toutefois de couvrir celles qui sont convoquées dans le maillage de situations que nous avons aménagé.

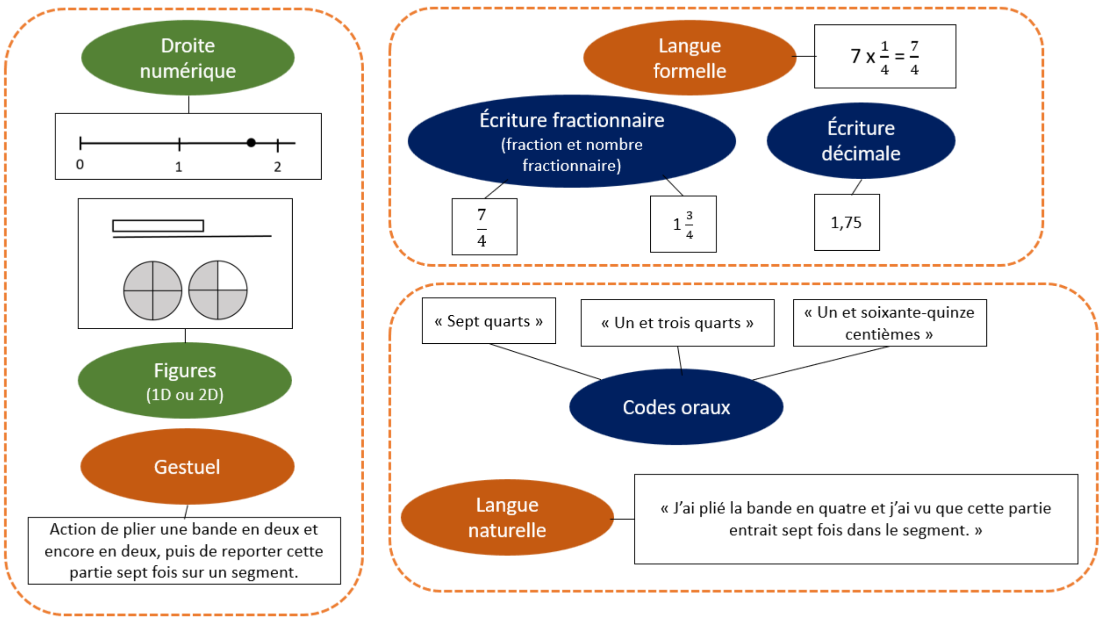


Figure 1. Ressources sémiotiques convoquées
dans le maillage de situations sur les nombres rationnels

Les ressources sémiotiques représentées en bleu dans la figure 1 concernent les codes écrits et oraux des nombres rationnels. À l'écrit, le nombre rationnel est, le plus souvent, représenté par une écriture fractionnaire ou décimale (Adjiage, 2007; Duval, 1995). L'écriture fractionnaire concerne les fractions (ex. $\frac{7}{4}$) et, aussi, les nombres fractionnaires (ex. $1\,\frac{3}{4}$), qui ne sont cependant pas acceptés dans tous les pays. Ils sont toutefois utiles pour favoriser l'établissement de relations entre la fraction et l'écriture décimale, en particulier lorsque la fraction est décimale (c'est-à-dire que le dénominateur correspond à une puissance de 10). De plus, selon Chambris (2017), les codes oraux peuvent participer à la liaison des écritures décimales et fractionnaires. En effet, lorsqu'il s'agit d'une fraction décimale, les mêmes codes oraux peuvent être utilisés pour désigner un nombre représenté au moyen d'une écriture décimale et d'une écriture fractionnaire; par exemple, $1\,\frac{75}{100}$ et 1,75 se lisent, tous deux, « un et soixante-quinze centièmes ». Bien entendu, ces codes oraux ne sont pas d'emblée utilisés par les élèves, qui lisent souvent $1\,\frac{75}{100}$, « un et soixante-quinze sur cent » et 1,75, « un virgule soixante-quinze ». Le recours aux codes oraux conformes peut néanmoins favoriser les conversions entre ces deux formes d'écriture.

Les figures et la droite numérique (en vert sur la figure 1) permettent de représenter visuellement l'ordre de grandeur des nombres rationnels. Pour ce faire, il est possible de faire appel à des représentations bidimensionnelles (2D), comme les figures, ou unidimensionnelles (1D), comme les segments et la droite numérique. La représentation de fractions à partir de figures est courante dans l'enseignement à l'école primaire où l'interprétation de la fraction en tant que partie d'un tout domine. Bien que cette représentation permette la représentation visuelle d'une fraction, le traitement des figures présente certains défis dans la mesure où il met en jeu, pour le partage égal des figures 2D, des connaissances sur l'aire (Rouche, 1998). La droite numérique est quant à elle reconnue comme étant un contexte difficile à interpréter par les élèves (Charalambous et Pitta-Pantazi, 2007; Ni, 2001). Elle paraît toutefois pertinente pour l'enseignement des nombres rationnels, notamment en raison de son intérêt pour le traitement tant des écritures fractionnaires que décimales (Adjiage, 2007). Un travail sur la mesure de segments au moyen de bandes de papier peut par ailleurs être intéressant pour introduire la droite numérique (Douady et Perrin-Glorian, 1986).

La langue naturelle, la langue formelle et le gestuel (en orange sur la figure 1) permettent pour leur part de mettre en évidence le caractère dynamique, opératoire des nombres rationnels. Duval (1995) distingue la langue naturelle, qui correspond à une suite de mots (à l'oral ou à l'écrit) et la langue formelle, qui correspond, en mathématiques, à une suite de symboles impliquant des nombres (notamment des nombres rationnels exprimés à partir d'une écriture fractionnaire ou décimale), des opérations, etc. La langue naturelle est utile pour aider les élèves à donner du sens aux écritures mathématiques, en prenant appui sur une situation de référence. Elle permet de plus d'accéder aux théorèmes-en-acte, c'est-à-dire aux propositions tenues pour vraies par l'élève au cours de la situation. Cela étant dit, les connaissances mobilisées en situation ne sont pas toujours formulées et formulables par les élèves (Brousseau, 1998). Il arrive aussi qu'elles s'expriment par leurs actions, ce qui conduit à l'importance de prendre en compte les ressources gestuelles. L'analyse des gestes posés par l'élève permet notamment d'étudier les concepts-en-acte, c'est-à-dire les connaissances reconnues comme pertinentes par l'élève en situation.

Il est à noter que la langue formelle peut mettre en jeu des écritures décimales et/ou fractionnaires, alors que la langue naturelle peut faire appel aux codes oraux des nombres rationnels. Le gestuel entretient pour sa part un lien étroit avec les figures et la droite numérique dans la mesure où les gestes peuvent être posés sur les figures ou sur la droite, par exemple pour les séparer en parts égales. Les traits pointillés sur la figure 1 représentent ces relations.

L'identification de ces huit ressources a été d'une grande utilité pour l'analyse des données. En effet, tout au long des analyses, nous avons dégagé, dans les interactions didactiques, les ressources sémiotiques en jeu tant dans les stratégies de l'élève que dans les interventions de l'expérimentatrice, et ce, en les articulant avec les notions de concept-en-acte et de théorème-en-acte (Vergnaud, 2007) ainsi qu'avec celles de dévolution et d'institutionnalisation (Brousseau, 1998).

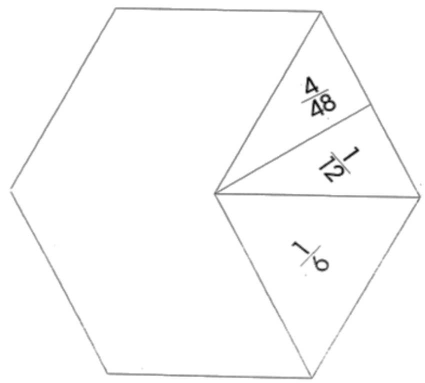
4. Présentation et analyse des résultats

Nous présentons, dans ce qui suit, quatre situations expérimentées auprès d'Étienne : la première implique des figures 2D et des fractions inférieures à 1; la deuxième met en jeu des figures 1D (des segments), des fractions inférieures et supérieures à 1 ainsi que des nombres fractionnaires; la troisième convoque une demi-droite numérique et implique à la fois des écritures fractionnaires et décimales; et la quatrième s'inscrit dans un contexte purement numérique et fait uniquement appel à l'écriture décimale. Ces situations ne possèdent pas toutes les caractéristiques des situations modélisées dans la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998); par exemple seulement deux d'entre elles offrent un milieu qui renvoie directement une rétroaction aux élèves. Elles sont néanmoins chacune organisées de façon à favoriser un va-et-vient entre des phases de dévolution, qui visent à amener l'élève à s'engager dans la recherche de solution, et des phases d'institutionnalisation, qui visent à amener l'élève à reconnaître, dans ce qu'il a fait et dit en situation, ce qui relève du savoir mathématique. Dans les sections qui suivent, chacune des situations est décrite et les interactions didactiques sont analysées en portant une attention particulière aux ressources sémiotiques convoquées. Les situations sont présentées dans l'ordre où elles ont été proposées à Étienne.

4.1 Situation mettant en jeu des figures 2D

La situation faisant appel à des figures 2D, qui s'appuie sur les travaux de Desjardins et Hétu (1974), permet un travail sur l'écriture fractionnaire, et plus particulièrement sur les fractions inférieures à 1. La tâche pour l'élève consiste à quantifier une partie d'un tout par une fraction. Les pièces d'un casse-tête sont remises à l'élève. Sur une seule de ces pièces, la fraction n'est pas inscrite. L'élève doit identifier à quelle fraction du casse-tête correspond cette pièce. Une stratégie possible consiste à mettre en relation deux pièces du casse-tête. Par exemple, si une pièce de $\frac{1}{6}$ entre exactement 4 fois dans la pièce sans écriture, alors la fraction manquante est $\frac{4}{6}$, ce qui convoque la relation $a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$. Nous présentons, dans ce qui suit, les interactions didactiques autour du premier[3] casse-tête présenté à Étienne (voir figure 2).

[3] Trois casse-têtes comportant une pièce sans écriture ont été présentés à Étienne. Faute d'espace, nous ne présentons ici que l'analyse du premier.



Figures 2. Casse-tête avec une pièce sans écriture

Après la présentation de la consigne, Étienne engage par lui-même une stratégie pour déterminer la fraction qui quantifie la grande pièce du casse-tête, ce qui montre une dévolution réussie. Pour ce faire, il cherche la somme de $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$ et $\frac{4}{48}$. Il a cependant du mal à contrôler la relation d'inclusion partie/partie/tout, et donc, à identifier une partie du tout en considérant simultanément le tout et les autres parties du tout (Kamii, 1990). En effet, il indique : « Il faudrait que j'additionne ça, ça, ça (en pointant les trois pièces avec une fraction) pour que ça me donne ça (en pointant la pièce sans écriture) ». Cette difficulté peut être occasionnée par le fait que le nombre 1, soit le tout, n'est pas explicite dans cette situation. Étienne cherche à mettre les fractions $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$ et $\frac{4}{48}$ sous le même dénominateur en appliquant la règle $\times \frac{y}{y}$ pour produire des fractions équivalentes. Ce théorème-en-acte, « il faut multiplier le numérateur et le dénominateur par le même nombre », est prégnant tout au long des séances. L'expérimentatrice tente alors de s'appuyer sur les figures pour aider l'élève à donner du sens à la règle qu'il utilise. La possibilité pour l'élève de faire cette conversion semble agir comme indice, du point de vue de l'expérimentatrice, que l'élève donne du sens aux actions qu'il pose. Après avoir mis les fractions sous un dénominateur commun et avoir trouvé la somme de celles-ci, Étienne ne peut poursuivre son raisonnement. Au lieu de partir de sa stratégie et de l'aider à reconnaître qu'il faudrait soustraire la somme obtenue de 1 pour trouver la fraction manquante, l'expérimentatrice choisit de l'orienter vers une stratégie mettant en jeu la relation $a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$, et ce, dans le but de favoriser un travail autour des contenus mathématiques visés par la situation. Elle demande à Étienne : « Est-ce que tu pourrais t'aider de cette pièce-là (en pointant la pièce sur laquelle est écrit $\frac{1}{6}$) pour me dire ça ici (en pointant la pièce sans écriture), ça correspond à quelle fraction du tout? ». L'élève constate alors : « Si je faisais ça (en pointant $\frac{1}{6}$) fois 6, ça égalerait à un… Mais ça ne marche pas parce que ce n'est pas tout ça (en pointant la partie manquante) ». Étienne établit la relation multiplicative entre une partie correspondant à une fraction unitaire et son tout, mobilisant ainsi dans l'action la relation $b \times \frac{1}{b} = 1$, mais il ne peut adapter cette connaissance pour établir la relation multiplicative entre deux parties d'un même tout. L'expérimentatrice l'oriente alors vers la stratégie attendue de façon plus explicite en s'appuyant sur les ressources figurales et gestuelles : « Par curiosité, cette pièce-là (en pointant la pièce de $\frac{1}{6}$), elle entre combien de fois dans cette pièce-là (en pointant la pièce sans écriture)? ». L'élève reporte la pièce de $\frac{1}{6}$ sur celle sans écriture, reconnaît qu'elle entre quatre fois et conclut : « Alors ce serait quatre sixièmes! ». Bien que les gestes d'Étienne aient été largement guidés par les interventions de l'expérimentatrice, il passe néanmoins des gestes posés sur la figure au numérique (codes oraux) par lui-même, faisant ainsi appel, dans l'action, à des connaissances sur la relation $a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ (concept-en-acte). L'élève ici ne mobilise pas une stratégie par ses propres moyens et dans cette mesure, on ne peut pas considérer que la dévolution est totalement réussie. Cependant, il est engagé dans la recherche d'une solution et le soutien de l'expérimentatrice ne semble pas l'empêcher de construire du sens.

L'expérimentatrice demande ensuite à Étienne s'il peut exprimer ce qu'il a fait à l'aide d'une écriture mathématique, visant ainsi à rendre explicite le modèle implicite qu'il a utilisé dans l'action. Après quelques secondes de réflexion, Étienne écrit $\frac{1}{6} = \frac{4}{6}$. L'expérimentatrice lui indique : « Tu es parti de $\frac{1}{6}$, puis là tu as fait quelque chose avec ton $\frac{1}{6}$, et tu es arrivé à $\frac{4}{6}$. Qu'est-ce que tu as fait avec ton $\frac{1}{6}$ pour arriver à $\frac{4}{6}$? ». Elle écrit, au même moment : $\frac{1}{6}$ ______ $= \frac{4}{6}$. Étienne indique alors qu'il a fait « fois quatre », mais ajoute ensuite $\times 4$ au numérateur et au dénominateur, mobilisant ainsi la règle $\times \frac{y}{y}$. Cette règle prend le dessus sur la relation multiplicative véritablement en jeu ici, soit $\frac{1}{6} \times 4 = \frac{4}{6}$. L'écriture de $\times 4$ à côté d'une fraction semble générer chez Étienne la réminiscence d'une règle souvent surinvestie en classe ($\times \frac{y}{y}$). Il en résulte une multiplication correspondante appliquée également au dénominateur, par une sorte d'automatisme, sous l'effet - selon notre hypothèse – de l'enseignement reçu. Afin de relancer l'élève, l'expérimentatrice s'appuie sur la langue naturelle pour lier les figures, le gestuel et la langue formelle : « Ce que tu as fait, c'est que tu l'as répété quatre fois ton sixième. On pourrait dire (elle prend la pièce de $\frac{1}{6}$ et la reporte sur la pièce sans écriture) un sixième plus un sixième plus un sixième plus un sixième est égal à quatre sixièmes ». La langue naturelle utilisée par l'expérimentatrice, qui lie les raisonnements multiplicatif et additif, est très près ici de la langue formelle, mais elle s'appuie sur les figures et le gestuel pour aider l'élève à interpréter ce qu'elle dit. Étienne indique alors : « Ok, alors je ferais ça (il écrit $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$) ». L'expérimentatrice approuve et, souhaitant favoriser une opération de traitement de l'écriture additive à l'écriture multiplicative, lui demande s'il y a une façon plus rapide de l'écrire. Comme Étienne ne suggère pas de recourir à la multiplication (ce qui peut s'expliquer par le fait que de son point de vue, cette opération n'a pas été jugée appropriée auparavant), l'expérimentatrice l'oriente plus explicitement vers l'écriture $\frac{1}{6} \times 4 = \frac{4}{6}$, qu'il accepte comme étant équivalente à l'addition répétée de $\frac{1}{6}$, 4 fois. La tâche se conclut ainsi par une phase d'institutionnalisation dans laquelle l'expérimentatrice met en évidence la langue formelle en s'appuyant sur les gestes, sur les figures et sur la langue naturelle qui ont émergé dans les interactions entre l'élève et elle au cours de la phase de dévolution.

4.2 Situation mettant en jeu des figures 1D

Après la situation convoquant des figures 2D, une situation faisant appel à des figures 1D a été proposée. Cette situation, construite par Douady et Perrin-Glorian (1986) et adaptée par Houle (2016) pour le contexte orthopédagogique, rend l'écriture fractionnaire utile pour exprimer la longueur de segments. Elle permet d'investir la relation $a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ ainsi que l'équivalence entre les nombres fractionnaires et les fractions impropres. L'élève reçoit un segment dessiné sur une feuille, un bon de commande et une bande de papier. L'expérimentatrice dispose d'une bande de papier de la même longueur que celle de l'élève et d'un transparent. La tâche pour l'élève consiste à élaborer un message numérique qui représente la longueur du segment. L'expérimentatrice trace ensuite, sur le transparent, un segment à partir du message produit par l'élève et la superposition du transparent sur le segment de l'élève permet de juger de l'adéquation du message.

Nous présentons, dans ce qui suit, les interactions autour des deux premiers segments remis à Étienne. La mesure du premier segment correspond à $2\,\frac{1}{2}$ bandes. Étienne s'engage rapidement dans la recherche d'une solution. Il utilise la bande et la reporte sur le segment sans faire de traits pour assurer une certaine précision, ce qui lui permet néanmoins de constater que la mesure du segment est plus grande que 2 bandes, mais plus petite que 3 bandes. Il conclut alors : « ça marche pas ». Il continue néanmoins à chercher et reporte à nouveau la bande sur le segment. L'expérimentatrice lui indique qu'il peut utiliser son crayon s'il le souhaite pour être plus précis. Cette intervention conduit Étienne à tracer un trait sur le segment après la première bande, puis après la deuxième bande. Cependant, son manque de précision fait en sorte que le bout de segment restant correspond à moins de $\frac{1}{2}$ bande. Il sépare alors la bande en trois en faisant un geste avec son doigt. L'expérimentatrice lui indique qu'il peut plier la bande s'il le souhaite. Il plie alors la bande, mais ses difficultés à faire trois parties égales l'amènent à effectuer un pliage en accordéon. Il obtient ainsi quatre parties inégales, en considérant toutefois qu'il y en a trois, sans doute en se centrant sur les trois plis sur la bande. Il prend le bon de commande et dit : « Hum... Je pense que ça pourrait être... Attends. Deux... (Il écrit 2). Oh non! Deux tiers... Non, non, je sais pas comment je pourrais le dire. » L'élève n'arrivant pas à produire un message, l'expérimentatrice choisit de l'aider à contrôler ses gestes. Elle le soutient ainsi, dans sa stratégie, pour qu'il mesure plus précisément le segment avec la bande, en l'invitant à tracer un trait sur le segment après chaque bande. Lorsque la bande est placée vis-à-vis le bout de segment restant, Étienne s'exclame : « Ah! Une demie! Alors, ça va être... Ah là, je sais ce que je vais faire. » Et il écrit $2\frac{1}{2}$ sur le bon de commande. La conversion des ressources figurale et gestuelle à l'écriture fractionnaire paraît donc complexe pour Étienne lorsque le bout de segment restant ne correspond pas à $\frac{1}{2}$, mais cette conversion ne lui pose pas de problème pour une mesure de $2\frac{1}{2}$ bandes. C'est ainsi davantage le gestuel qui présente un défi pour l'élève dans cette tâche que la conversion vers l'écriture fractionnaire de $2\frac{1}{2}$. La dévolution, dans ce cas-ci, paraît réussie, dans la mesure où l'élève met en place une stratégie de son propre chef, et ce, même si un certain soutien est apporté par l'expérimentatrice pour l'aider à contrôler ses gestes. La rétroaction du milieu permet finalement à Étienne de confirmer la justesse de son message : il est d'ailleurs très content lorsqu'il constate, au moment de la superposition du segment tracé sur un transparent par l'expérimentatrice sur son segment, qu'il a réussi.

L'expérimentatrice mentionne ensuite qu'elle a déjà fait cette situation avec d'autres élèves et que l'un d'eux avait indiqué que le segment mesurait « cinq demi-bandes » (code oral), puis elle écrit $\frac{5}{2}$ bandes. Elle demande à Étienne si ce message est correct et ce dernier répond par la négative. Il n'est donc pas en mesure d'établir l'équivalence entre les écritures $2\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{2}$. Pour comprendre son raisonnement, l'expérimentatrice le questionne : « Est-ce que tu penses que le segment serait plus long ou plus petit? ». Étienne considère que le segment de $\frac{5}{2}$ bande serait plus long que celui de $2\frac{1}{2}$ bandes et explique ainsi son choix : « Il y en aurait cinq plus une demie ». Il confond donc $\frac{5}{2}$ et $5\frac{1}{2}$. Les codes oraux des nombres peuvent participer à cette confusion. En effet, « cinq demis » est très similaire à « cinq et une demie ». Cette difficulté se manifestera d'ailleurs à plusieurs reprises au cours des séances. Pour favoriser l'apprentissage de l'élève, l'expérimentatrice s'appuie alors sur les figures, le gestuel et la langue naturelle : elle plie la bande en deux parties égales en expliquant qu'elle a maintenant une demi-bande et elle trace un segment en reportant à cinq reprises cette demi-bande. Elle s'appuie ensuite sur ce qu'elle a fait et dit, puis procède à une conversion vers la langue formelle. Elle écrit $\frac{1}{2}$ au-dessus de chaque partie de segment mesurant $\frac{1}{2}$ bande et dégage les écritures $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

Elle établit ensuite la relation avec le nombre fractionnaire, $2\frac{1}{2}$, en s'appuyant sur les figures (1D) afin de montrer que la mesure de deux demi-bandes est équivalente à celle d'une bande. Pour que l'élève donne du sens aux écritures mathématiques produites, l'expérimentatrice prend ainsi appui sur la situation de référence, et plus précisément sur les figures et sur la langue naturelle. Les conduites de l'élève, ici, ne permettent pas à l'expérimentatrice de procéder à une institutionnalisation en mettant en évidence, dans ce qu'il a fait et dit, ce qui relève du savoir mathématique. L'expérimentatrice procède plutôt à un enseignement en s'appuyant sur différentes ressources sémiotiques en jeu dans la situation afin de favoriser la construction de sens.

L'expérimentatrice présente ensuite à Étienne un deuxième segment, qui mesure cette fois $2\frac{1}{4}$ bandes. La proximité de cette tâche avec la précédente facilite son appropriation. L'élève réinvestit certains gestes appris précédemment pour mesurer un segment à partir d'une bande utilisée comme unité, c'est-à-dire que, par lui-même, il fait des traits avec le crayon sur le segment et plie la bande. Malgré un certain manque de précision encore présent, il réussit, avec très peu de soutien, à trouver un message adéquat, soit $2\frac{1}{4}$ bandes, et il établit sans difficulté la relation avec la fraction impropre $\frac{9}{4}$. Le va-et-vient entre des phases de dévolution et des phases d'institutionnalisation (ou d'enseignement), semble favorable à l'apprentissage d'Étienne, qui réalise de façon autonome lors de cette tâche des conversions entre différentes ressources sémiotiques : les figures (segment), le gestuel, la langue naturelle et l'écriture fractionnaire (nombre fractionnaire et fraction).

4.3 Situation mettant en jeu une demi-droite numérique

À la suite de la situation convoquant des figures 1D, nous avons expérimenté auprès d'Étienne une situation visant la construction d'une demi-droite numérique tirée des travaux de l'équipe de recherche en didactique des mathématiques de l'Institut national de recherche pédagogique (2005). L'élève reçoit une demi-droite numérique et une bande correspondant à $\frac{1}{b}$ unité. La tâche consiste à situer des nombres donnés sur la demi-droite ou, au contraire, à identifier à quel nombre correspond un point donné sur la demi-droite. Cette situation permet un travail sur les relations $b \times \frac{1}{b} = \frac{b}{b} = 1$ et $a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$, ainsi que sur l'équivalence de différentes représentations d'un même nombre rationnel (fractions, nombres fractionnaires et écriture décimale).

L'expérimentatrice remet d'abord à Étienne une bande correspondant à $\frac{1}{2}$ unité ainsi qu'une demi-droite et lui demande de situer le nombre 1. L'élève place la bande sur la demi-droite à partir de 0, trace un trait et écrit 1. Il interprète ainsi que la bande représente 1. Cela pourrait être un effet de la situation précédente, où la bande représentait l'unité, mais pourrait aussi s'expliquer par la difficulté à considérer un étalon différent de 1. La situation n'offrant pas de rétroaction à l'élève, l'expérimentatrice est contrainte d'intervenir. Souhaitant susciter les réflexions d'Étienne, elle lui demande d'écrire $\frac{1}{2}$ sur la bande et insiste sur le fait que cette bande ne représente pas 1 mais bien $\frac{1}{2}$. Elle lui demande ensuite à nouveau de situer le nombre 1 sur la demi-droite, mais Étienne ne comprend pas ce qu'il doit faire. La demi-droite numérique, où les nombres sont représentés par des points sur la demi-droite, se distingue des segments, où les nombres représentent la mesure d'un segment. En effet, la tâche ne consiste pas à tracer un segment mesurant une bande (ce qui renvoie au contexte cardinal), mais bien à situer le nombre 1 sur la demi-droite (ce qui s'inscrit à la fois dans un contexte cardinal et dans un contexte ordinal). Les gestes du report de la bande représentant $\frac{1}{b}$ de l'unité sur la demi-droite renvoie à un contexte cardinal (on peut d'ailleurs considérer le segment de 0 à 1 sur la demi-droite), mais à la fin de cette démarche, il convient de situer un nombre (en l'occurrence, le nombre 1) sur la demi-droite, faisant ainsi appel à l'ordre des nombres et donc au contexte ordinal. Bien que ces ressources sémiotiques aient certaines congruences, la conversion des segments (figure 1D) à la demi-droite numérique ne va pas de soi pour Étienne, d'autant plus que l'étalon ne correspond plus à 1 mais plutôt à $\frac{1}{b}$ unité. Une intervention de l'expérimentatrice est ainsi nécessaire pour qu'il situe correctement 1 sur la demi-droite, et ce, même si ses conduites lors des situations impliquant des figures (2D et 1D) suggèrent qu'il contrôle bien, dans l'action, la relation b $\times \frac{1}{b} = \frac{b}{b} = 1$ (concept-en-acte).

Par la suite, Étienne situe relativement aisément le nombre 2 sur la demi-droite, mais il rencontre des difficultés à situer $\frac{3}{2}$, qu'il interprète comme $3\,\frac{1}{2}$, en raison sans doute de la similitude des codes oraux de ces deux nombres. Pour le relancer, l'expérimentatrice le questionne en favorisant la coordination de différentes ressources sémiotiques : l'écriture fractionnaire ($\frac{3}{2}$), les codes oraux (trois demis), le gestuel (répétition de la bande de $\frac{1}{2}$ trois fois sur la demi-droite), la langue naturelle et la langue formelle ($\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$). La tâche suivante, situer 1 $\frac{1}{4}$ à partir d'une bande représentant $\frac{1}{2}$, nécessite de considérer que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ et que $\frac{1}{4}$ entre deux fois dans $\frac{2}{4}$, faisant ainsi appel à l'équivalence des fractions et à la relation $a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$. Pour placer 1 $\frac{1}{4}$, Étienne plie la bande représentant $\frac{1}{2}$ en 4. La difficulté à mettre en relation $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ semble le ramener à l'interprétation de la bande comme unité de référence, et ce, même si le nombre $\frac{1}{2}$ est écrit sur celle-ci. L'expérimentatrice tente alors d'amener Étienne à diviser la bande de $\frac{1}{2}$ en deux pour obtenir $\frac{1}{4}$, mais le jeu de questions/réponses entre l'élève et elle ne produit pas les effets escomptés. L'expérimentatrice se rabat alors sur une ressource classique dans l'enseignement des fractions, soit celle des figures (2D), pour montrer à Étienne que dans une demie, il y a deux quarts. L'élève a cependant du mal à faire la conversion vers la demi-droite numérique pour situer 1 $\frac{1}{4}$.

L'expérimentatrice remet ensuite à Étienne une demi-droite numérique vierge ainsi qu'une nouvelle bande, correspondant cette fois à $\frac{1}{10}$ unité. Elle lui demande d'abord de situer « un dixième » et il situe correctement ce nombre en l'écrivant sous la forme fractionnaire ($\frac{1}{10}$). Visant à favoriser la conversion d'une écriture fractionnaire à une écriture décimale, l'expérimentatrice lui demande s'il connaît une autre façon d'écrire ce nombre, et Étienne remplace le trait de fraction par une virgule, suggérant ainsi à tort 1,10. Plutôt que de corriger son erreur, l'expérimentatrice lui demande de situer 1 sur la demi-droite. Il reporte alors 10 fois la bande de $\frac{1}{10}$, convoquant ainsi, par ses gestes, la relation $10 \times \frac{1}{10} = \frac{10}{10} = 1$ (concept-en-acte). L'expérimentatrice lui fait alors remarquer que $\frac{1}{10}$ est plus petit que 1 et donc, que 1,10 ne peut pas être égal à $\frac{1}{10}$. L'élève reconnaît que l'écriture décimale doit commencer par 0, et l'expérimentatrice poursuit en lui montrant que $\frac{1}{10} = 0{,}1$. Elle met en évidence que ces deux nombres se lisent de la même façon : « un dixième ». L'institutionnalisation s'appuie ainsi sur la coordination de différentes ressources sémiotiques : l'écriture fractionnaire, l'écriture décimale et les codes oraux. L'élève place ensuite sans difficulté les nombres 2 et $\frac{13}{10}$ sur la demi-droite. L'expérimentatrice demande s'il y a une autre façon d'écrire $\frac{13}{10}$ et Étienne répond d'abord $1\,\frac{1}{3}$, mais il se corrige par lui-même et reconnaît que $\frac{13}{10} = 1\,\frac{3}{10} = 1{,}3$.

Par la suite, la tâche est inversée : il ne s'agit plus de repérer sur la demi-droite le point qui correspond à un nombre donné, mais plutôt d'identifier un nombre qui correspond à un point donné sur la demi-droite. Ainsi, l'expérimentatrice demande à Étienne d'identifier à quel nombre correspondent différents points sur la demi-droite, notamment des nombres dans les centièmes (p. ex. $\frac{45}{100}$). Cela conduira Étienne, avec le soutien de l'expérimentatrice, à séparer les dixièmes en dix parties.

4.4 Situation s'inscrivant dans un contexte uniquement numérique

Contrairement aux situations précédentes, cette situation met en jeu un contexte purement numérique et n'implique donc aucune représentation visuelle des nombres rationnels. Elle mise sur des allers-retours entre l'anticipation du résultat à des calculs et la rétroaction de la calculette[4], et permet un travail sur l'écriture décimale des nombres rationnels. Elle s'inscrit dans le prolongement d'une situation élaborée par Houle et Giroux (2017) visant l'apprentissage de la valeur d'un chiffre et d'un groupe de chiffres dans l'ensemble des nombres naturels. Dans cette situation, l'action d'appuyer sur le signe = à répétition sur une calculette agit comme compteur d'une puissance de 10. Des calculs tels que 1815 + 100 = = = = sont présentés aux élèves. Après avoir anticipé ce qu'affichera la calculette, il y a validation à l'aide de celle-ci. En l'occurrence, l'écran affichera, à la suite de chaque signe =, les nombres suivants : 1915, 2015, 2115, 2215. La rétroaction de la calculette, mais aussi le jeu sur les valeurs des variables didactiques (par exemple, le choix du nombre initial, de la puissance de 10 et du nombre de signes =), amène progressivement les élèves à s'appuyer sur la valeur d'un groupe de chiffres pour opérer sur les nombres et ainsi anticiper efficacement ce qu'affichera la calculette. Par exemple, dans le calcul précédent (1815 + 100 = = = =), en ajoutant 100 à 4 reprises, on passe de 18 centaines à 22 centaines, tout en conservant les 15 unités.

La situation se découpe en deux grandes parties : dans un premier temps, des calculs sont proposés et la tâche consiste à anticiper le résultat; dans un deuxième temps, le calcul et le résultat sont donnés et la tâche consiste à anticiper le nombre de signe = nécessaire pour obtenir le résultat.

---

[4] Nous utilisons le terme « calculette » pour désigner une calculatrice basique, servant à effectuer des opérations simples.

4.4.1 Anticipation du résultat de différents calculs

Après une phase d'exploration permettant à Étienne de découvrir l'effet d'appuyer à répétition sur le signe = de la calculette, l'expérimentatrice lui présente des calculs dans lesquels la puissance de 10 (soit le deuxième terme) correspond à 10 ou à 100. Pour trouver le résultat, Étienne compte par intervalles de 10 ou de 100 à partir du terme initial (en ordre croissant lorsque c'est une addition et en ordre décroissant lorsque c'est une soustraction). Il anticipe ainsi correctement le résultat des calculs suivants : 57 + 10 = = = =, 220 – 10 = = = = = = = et 589 + 10 = = =. Il rencontre cependant les limites de cette stratégie lorsqu'il fait face au calcul 2172 – 100 = = = =, car le terme initial (deux mille cent soixante-douze) comporte plusieurs mots à l'oral, ce qui rend difficile, en raison des limites de la mémoire de travail, le comptage par intervalles de 100 à partir de ce nombre, d'autant plus qu'il s'agit d'une soustraction et que le comptage doit donc être fait en ordre décroissant. Comme l'élève n'adapte pas sa stratégie par lui-même, l'expérimentatrice l'oriente vers la stratégie attendue en l'amenant notamment à dégager le nombre de centaines dans 2172, soit 21, puis à retrancher 4 centaines des 21 centaines, obtenant ainsi 17 centaines, et finalement à ajouter les 72 unités qui n'ont pas été affectées par la transformation, obtenant ainsi 1772. L'enseignement réalisé ici vise à favoriser l'avancement du savoir. Elle propose ensuite un autre calcul à Étienne pour voir s'il réinvestira ce qu'elle a enseigné : 4891 + 100 = = = = =. Or, malgré la proximité avec le calcul précédent, Étienne ne s'appuie pas sur le nombre de centaines dans le terme initial, soit 48, et tente à nouveau de compter par intervalles de 100 à partir du terme initial, soit 4891. Ni le jeu sur les valeurs des variables didactiques ni l'enseignement dispensé par l'expérimentatrice n'ont permis de faire évoluer ses stratégies. Un plus grand nombre d'allers-retours entre ses anticipations et la rétroaction du milieu aurait sans doute été nécessaire pour lui permettre d'adapter par lui-même sa stratégie et de construire du sens. Il nous semble, de plus, que le fait que cette situation s'inscrive dans un contexte purement numérique et n'implique donc pas de représentation visuelle pourrait agir comme obstacle à la compréhension de l'élève.

Malgré les difficultés d'Étienne à s'appuyer sur la valeur d'un groupe de chiffres pour opérer sur les nombres naturels, l'expérimentatrice choisit de présenter des calculs ayant comme deuxième terme 0,1, puis 0,01. Étonnamment, pour chacun des calculs suivants, Étienne anticipe correctement le résultat, et ce, sans soutien de l'expérimentatrice.

- 0 + 0,1 = = = = = = (Il hésite, anticipe 0,1, puis change d'avis pour 0,6 en se disant certain de son choix).
- 0 + 0,1 = = = = = = = = = = (Il répond rapidement 1).

- 12,5 + 0,1 = = = = = (Il répond rapidement 13).
- 4,3 – 0,1 = = = = (Il dit « Ça égalerait trois et neuf » et écrit 3,9).
- 6,3 + 0,01 = = = (Il écrit rapidement 6,33).
- 3,36 – 0,01 = = = = = = (Il répond rapidement « trois virgule trois » et écrit 3,3).
- 2,2 – 0,01 = = = = (Il écrit 1,8, puis s'autocorrige, il efface et écrit 2,16, en expliquant qu'il a ajouté un zéro à 2,2 (donc 2,20) pour trouver la réponse).

Dans les calculs impliquant seulement des nombres naturels, Étienne recourt au comptage par intervalles à partir du terme initial pour anticiper les résultats, ce qui l'oblige à coordonner deux ressources sémiotiques, les codes oraux et écrits des nombres. Lorsque le deuxième terme est 0,1 ou 0,01, les difficultés d'Étienne dans la lecture des nombres rationnels semblent le conduire à modifier sa stratégie. Il s'appuie alors essentiellement sur les codes écrits, ce qui l'amène à considérer les chiffres qui sont affectés dans la transformation et facilite l'anticipation du résultat. Ses conduites suggèrent qu'il reconnaît, dans ce contexte, qu'il y a 10 dixièmes dans 1 (concept-en-acte) et que le fait d'ajouter ou d'enlever 0 après le développement décimal ne modifie pas le nombre. La dévolution ici est donc réussie, et l'expérimentatrice peut ainsi partir des stratégies de l'élève pour mettre en évidence les éléments mathématiques à retenir.

4.4.2 Anticipation du nombre de signes = pour atteindre un résultat donné

L'expérimentatrice présente ensuite des calculs dans lesquels on cherche le nombre de fois où il faut appuyer sur le signe = pour obtenir un nombre donné. Elle propose d'abord des calculs impliquant uniquement des nombres naturels afin d'amener Étienne à établir la relation entre ses connaissances sur les nombres naturels et celles sur les nombres rationnels. La première tâche est la suivante : Si tu fais 0 + 10 sur la calculette et que tu appuies à répétition sur la touche =, est-ce que la calculette affichera les nombres suivants : 40, 100, 160, 188, 200, 222. Étienne reconnaît que la calculette n'affichera pas les nombres 188 et 222 « parce que ça ne finit pas par zéro » (théorème-en-acte). Elle demande ensuite à l'élève d'anticiper le nombre de fois qu'il faut appuyer sur la touche = pour obtenir les autres nombres (40, 100, 160 et 200) et Étienne trouve sans difficulté les réponses (4, 10, 16 et 20). L'expérimentatrice lui propose une deuxième tâche : Si tu fais 0 + 100 et que tu appuies à répétition sur la touche =, est-ce que tu peux obtenir les nombres suivants (600, 1100, 1110, 1900, 2111, 3000, 3130), et si oui, en appuyant combien de fois sur la touche =. Étienne reconnaît immédiatement qu'il peut seulement obtenir les nombres qui terminent par « deux zéros », adaptant ainsi le théorème-en-acte dégagé précédemment, et identifie sans difficulté le nombre de fois qu'il doit appuyer sur la touche = pour obtenir les nombres 600, 1100, 1900 et 3000.

L'expérimentatrice propose ensuite des calculs impliquant des nombres non naturels. Elle demande à Étienne si, en faisant zéro plus un dixième sur la calculette (elle écrit 0 + 0,1) et en appuyant à répétition sur la touche =, la calculette affichera les nombres suivants : 0,4; 1; 1,8; 3; 3,31; 4,2. Elle rappelle qu'un dixième peut s'écrire 0,1 ou $\frac{1}{10}$, visant ainsi à favoriser la coordination des codes oraux, de l'écriture décimale et de l'écriture fractionnaire. Étienne ne peut dégager un théorème-en-acte lui permettant rapidement de trouver les nombres qu'affichera la calculette. Il les analyse un à la fois, mais identifie néanmoins correctement non seulement les nombres qui seront affichés sur la calculette, mais également le nombre de signe = nécessaire pour les obtenir. Il vérifie ensuite ses anticipations à l'aide de la calculette. Puis, l'expérimentatrice établit la relation entre ce que fait l'élève sur la calculette et les écritures mathématiques conformes. Elle explique par exemple que, pour obtenir quatre dixièmes, il faut appuyer quatre fois sur la touche = après avoir fait 0 + 0,1, car en répétant quatre fois un dixième, on obtient quatre dixièmes, puis elle écrit : 4 × 0,1 = 0,4. L'institutionnalisation s'appuie ainsi sur la coordination du gestuel (gestes sur la calculette), de la langue naturelle (incluant les codes oraux des nombres rationnels) et de la langue formelle (incluant l'écriture décimale).

Cette phase d'institutionnalisation se poursuit par une phase de dévolution. L'expérimentatrice propose à Étienne une tâche semblable, mais cette fois, avec des centièmes : en faisant 0 + 0,01 sur la calculette et en appuyant à répétition sur la touche =, est-ce que les nombres suivants apparaîtront : 0,001; 0,1; 0,311; 0,33; 0,4; 1. Étienne commet une seule erreur, c'est-à-dire qu'il anticipe qu'il ne peut pas obtenir 0,1. Au moment de la rétroaction avec la calculette, il constate qu'il obtient 0,1 en appuyant 10 fois sur la touche =. L'expérimentatrice dégage alors l'écriture suivante, 10 × 0,01 = 0,1, en expliquant à l'oral qu'en répétant dix fois un centième, on obtient un dixième.

Un calcul dans lequel le premier terme ne correspond pas à 0 est ensuite proposé à Étienne. L'expérimentatrice lui demande si, en faisant 2,3 + 0,1 sur la calculette et en appuyant à répétition sur la touche =, la calculette affichera les nombres suivants : 2,9; 3,2; 3,33; 4. Étienne reconnaît que la calculette affichera les nombres 2,9 et 4 et qu'elle n'affichera pas le nombre 3,33, mais anticipe, à tort, qu'elle n'affichera pas 3,2. Il n'arrive pas à anticiper correctement le nombre de fois qu'il doit appuyer sur la touche = pour obtenir 2,9 (il indique 3 fois) et 4 (il indique 6 fois). Il ne peut donc pas adapter les théorèmes-en-acte dégagés précédemment pour anticiper correctement le nombre de signes = lorsque le premier terme du calcul correspond à un autre nombre que 0. Cela conduit à se questionner sur le sens que l'élève donne aux régularités numériques qu'il a dégagées précédemment.

5. Discussion

Dans le cadre de notre recherche, nous nous sommes intéressées à l'enseignement et à l'apprentissage des nombres rationnels, en prenant en compte la spécificité du savoir visé, les caractéristiques des situations proposées et les ressources sémiotiques convoquées. Nos résultats montrent notamment que si les codes oraux peuvent faciliter l'établissement de liens entre les écritures fractionnaires et décimales (par exemple, $\frac{1}{10}$ et 0,1 se lisent tous les deux « un dixième »), il arrive en revanche que les codes oraux soient à la source de certaines confusions, notamment entre les fractions impropres et les nombres fractionnaires. C'est le cas, par exemple, lorsqu'Étienne considère à tort que les écritures $\frac{5}{2}$ et $5\,\frac{1}{2}$ désignent le même nombre en raison, sans doute, de la ressemblance des codes oraux : « cinq demis » et « cinq et une demie ».

Par ailleurs, à l'instar d'Arzarello et al. (2009), nous considérons que la prise en compte du gestuel, qui est en quelque sorte mis de côté dans les travaux de Duval, est indispensable. Pour un même objet mathématique, des gestes différents peuvent être posés dans des situations faisant pourtant appel à la même représentation visuelle. Par exemple, dans les tâches scolaires classiques convoquant des figures 2D, la fraction $\frac{4}{6}$ renvoie à la séparation d'une figure en six parties d'aire égale pour ensuite prélever quatre de ces parties. Or, dans la première situation de notre maillage, qui met aussi en jeu des figures 2D, la stratégie optimale pour trouver à quelle fraction d'un casse-tête correspond une de ses pièces consiste, dans l'exemple que nous avons présenté, à utiliser une autre pièce du casse-tête, qui correspond à $\frac{1}{6}$ de celui-ci, et à la reporter quatre fois dans la pièce sans écriture pour ainsi en déduire que cette pièce correspond à $\frac{4}{6}$ du casse-tête. La fraction $\frac{4}{6}$ est alors interprétée comme l'itération de $\frac{1}{6}$, 4 fois, ce qui fait appel à la relation $a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$. Les tâches scolaires classiques qui exigent de prélever $\frac{a}{b}$ d'une figure 2D et la situation du casse-tête avec une pièce sans écriture favorisent chacune une interprétation différente de la fraction : dans le premier cas, la fraction $\frac{a}{b}$ est interprétée comme la partie d'un tout où b représente le nombre total de parties et a, le nombre de parties prélevées, alors que dans le deuxième cas, elle renvoie à l'interprétation de la fraction en tant que mesure où $\frac{a}{b}$ est interprétée comme l'itération de $\frac{1}{b}$, a fois. Il convient, dans cette perspective, non seulement de prendre en compte la représentation visuelle (dans ce cas-ci, des figures 2D), mais aussi de réfléchir aux gestes posés par les élèves pour choisir des situations qui permettent d'introduire, en passant par les ressources du gestuel et de la langue naturelle qui leur sont associées, la langue formelle visée.

La prise en compte du gestuel apparaît de plus comme fondamentale, car elle permet d'identifier des concepts-en-acte que l'élève mobilise en situation sans nécessairement pouvoir convertir ses gestes en langue naturelle ou en langue formelle. Nos résultats montrent d'ailleurs que le passage du gestuel et de la langue naturelle vers la langue formelle peut représenter un défi important. Par exemple, dans la première situation, bien que l'élève reconnaisse que la pièce sans écriture correspond à $\frac{4}{6}$ du casse-tête en reportant une pièce de $\frac{1}{6}$ de ce casse-tête 4 fois dans celle-ci, il ne peut pas, par lui-même, dégager l'écriture $4 \times \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$.

Dans cet exemple, le gestuel ne pose aucun problème, ce qui peut s'expliquer par le fait que le report de la pièce de $\frac{1}{6}$ du casse-tête dans la pièce sans écriture est facilité par la forme de cette pièce et du casse-tête (un hexagone). Il en est autrement dans la deuxième situation, soit celle qui convoque des figures 1D, où des difficultés sont rencontrées au moment de poser les gestes. Dans cette situation, l'élève est appelé à plier une bande pour obtenir des parties correspondant à $\frac{1}{b}$ de l'unité bande et, ensuite, à reporter la bande (ou $\frac{1}{b}$ bande) sur le segment pour le mesurer. Pour assurer une certaine précision lors du report de la bande, l'élève doit alors faire des traits sur le segment, ce qui peut représenter un défi au niveau de la manipulation. Nous avons montré que la difficulté à réaliser ces gestes n'indique pas nécessairement une méconnaissance des savoirs mathématiques visés par la situation.

Les gestes posés dans cette situation sont étroitement liés à ceux effectués lors de la situation faisant appel à la construction d'une demi-droite numérique. En effet, cette situation nécessite aussi de faire des traits en utilisant une bande pour séparer la demi-droite en parties égales. Cependant, la partie à reporter est à construire dans le cas de la situation des segments à mesurer, où la bande représente l'unité, tandis qu'elle est (généralement) donnée dans la situation mettant en jeu la demi-droite, où la bande représente $\frac{1}{b}$ de l'unité. De plus, la construction de la demi-droite se distingue de la mesure des segments, car l'élève doit également situer des nombres sur la demi-droite. Le nombre rationnel représente ainsi non seulement une mesure (le nombre 1 par exemple peut être interprété comme la mesure du segment de 0 à 1 sur la demi-droite), mais aussi un point sur la demi-droite. Cette situation convoque ainsi à la fois le caractère cardinal et le caractère ordinal des nombres. Le fait de présenter des situations sollicitant diverses représentations visuelles permet ainsi de travailler différentes propriétés des nombres rationnels.

Contrairement aux autres situations, celle misant sur des allers-retours entre des anticipations et des rétroactions de la calculette s'inscrit dans un contexte uniquement numérique. Un intérêt de cette situation est qu'elle investit le nombre rationnel en articulation avec les opérations. De plus, le geste d'appuyer à répétition sur la touche = permet d'observer, sur la calculette, comment l'écriture du nombre se transforme chaque fois qu'on ajoute ou retranche une puissance de 10. Cela permet de mettre en évidence l'emboîtement des unités de numération et d'investir la valeur d'un groupe de chiffres dans un nombre. Cette situation, centrée sur l'aspect numérique, ne permet toutefois pas un travail sur l'ordre de grandeur des nombres rationnels et semble favoriser l'identification de régularités sans nécessairement que l'élève comprenne ce qui les fonde. Elle peut alors provoquer des réussites locales, qui ne sont pas reproduites lorsque la situation est modifiée, notamment lorsque le terme initial dans les calculs n'est plus 0. Il paraît ainsi souhaitable de prévoir un va-et-vient relativement rapide entre des situations impliquant un contexte uniquement numérique et des situations permettent de représenter visuellement l'ordre de grandeur des nombres rationnels (à partir d'une droite numérique ou de figures 1D ou 2D), pour ainsi permettre aux élèves d'établir des relations entre elles et de produire du sens.

Soulignons, en terminant, que bien que les situations aient été choisies en s'inspirant de situations modélisées dans la TSD (Brousseau, 1998), le travail auprès d'un seul élève faible en mathématiques complexifie la dévolution. Des interventions de l'expérimentatrice paraissent effectivement nécessaires pour soutenir l'élève dans sa recherche de solution et permettre l'avancement du savoir. Tout au long des séances, l'expérimentatrice tente de favoriser la coordination de différentes ressources sémiotiques, en s'appuyant sur celles qui semblent les mieux contrôlées par l'élève, et ce, tant pour le relancer et ainsi favoriser la dévolution, que pour permettre le « passage » d'une connaissance à un savoir. L'institutionnalisation consiste effectivement bien souvent à partir du gestuel et de la langue naturelle convoqués par l'élève en situation pour introduire la langue formelle. Des phases de dévolution sont ensuite à nouveau aménagées pour permettre à l'élève de réinvestir, en situation, ce qui a été institutionnalisé (ou enseigné dans certains cas). Cette perspective paraît intéressante pour articuler la dévolution et l'institutionnalisation : l'institutionnalisation d'un savoir est suivie de la dévolution d'un nouveau problème, qui est à son tour suivi d'une phase d'institutionnalisation et ainsi de suite.

Conclusion

Pour éviter que les élèves reproduisent mécaniquement les techniques enseignées sans comprendre ce qui les fonde (comme c'est souvent le cas notamment avec la règle $\times \frac{y}{y}$ pour produire des fractions équivalentes), nous avons privilégié des situations qui favorisent la dévolution et permettent ainsi de partir des connaissances des élèves pour enseigner les nombres rationnels. Étant donné que ces nombres sont liés au fractionnement des grandeurs et s'inscrivent dans le prolongement des naturels (Chambris, 2017), nous avons plus particulièrement aménagé un maillage de situations en partant des connaissances des élèves sur les fractions en tant que partie d'un tout d'une part, et de leurs connaissances sur la numération de position décimale dans les naturels d'autre part. Pour construire ce maillage, nous nous sommes appuyées sur diverses ressources sémiotiques impliquées dans l'enseignement-apprentissage des nombres rationnels afin de proposer des situations variées, ce qui nous a conduites à dégager, en nous appuyant sur les travaux de Duval (1993, 1995, 2001, 2011) et ceux d'Arzarello et al. (2009), huit ressources sémiotiques. Notre recherche montre l'utilité de ces ressources pour choisir des situations qui mettent en évidence différentes propriétés des nombres rationnels, pour analyser les connaissances engagées par l'élève selon les caractéristiques des situations et pour analyser les interventions mises en œuvre par l'expérimentatrice.

Les interventions misant sur la coordination de différentes ressources sémiotiques semblent favoriser la construction de sens. Notre étude montre plus particulièrement l'intérêt de prendre en compte les ressources gestuelles et leur coordination avec les ressources de la langue naturelle et de la langue formelle tant dans le choix des situations que dans l'analyse des interactions didactiques. Dans la même lignée que les travaux de Duval, nos analyses suggèrent que les opérations de conversion représentent un défi de taille, et ce, en particulier lors de la conversion vers la langue formelle. Il serait intéressant, dans de futures recherches, d'explorer comment se coordonnent (ou non) différentes ressources sémiotiques dans l'enseignement-apprentissage d'autres savoirs mathématiques.

Références

Adjiage, R. (2007). Rationnels et proportionnalité : complexité et enseignement au début du collège. *Petit x*, *74*, 5-33.

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O. et Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematic*, *70*(2), 97-109. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9163-z

Behr, M. J., Harel, G., Lesh, R. et Post, T. R. (1993). Rational numbers: Towards a semantic analysis-emphasis on the operator construct. Dans T. P. Carpenter, E. Fennema et T. A. Romberg (dir.), *Rational numbers: An integration of research* (p. 13-47). Lawrence Erlbaum Associates.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Éditions la Pensée sauvage.

Chambris, C. (2017). Questions sur l'enseignement des nombres, notamment décimaux, au cycle 3. Dans B. Lebot et F. Vandebrouck (dir.), *Mathématiques au cycle 3. Actes du colloque du plan national de formation* (p. 12-25). IREM de Poitiers.

Charalambous, C. Y. et Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *64*(3), 293-316. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9036-2

Chesné J.-F. et Fischer J.-P. (2015). *Les acquis des élèves dans le domaine des nombres et du calcul à l'école primaire.* Rapport pour la conférence de consensus Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire. Centre national d'étude des systèmes scolaires.

Desjardins, M. et Hétu, J.-C. (1974). *L'activité mathématique dans l'enseignement des fractions.* Presses de l'Université de Montréal.

Douady, R. et Perrin-Glorian, M.-J. (1986). *Liaison École-Collège, Nombres décimaux.* Université-Paris VII, Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 37-65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine.* Peter Lang.

Duval, R. (2001). Comment décrire et analyser l'activité mathématique? Cadres et registres. *Actes de la journée en hommage à R. Douady.* Université Paris VII, Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques.

Duval, R. (2011). Idées directrices pour analyser les problèmes de compréhension dans l'apprentissage des mathématiques. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 8*(11), 149-161.

Fischer, J.-P. (2009). Six questions ou propositions pour cerner la notion de dyscalculie développementale. *Approche neuropsychologique des apprentissages numériques chez l'enfant (ANAE)*, *21*(102), 117-134.

Guille-Biel Winder, C. (2017). Un jeu de fractions pour le cycle 3. *Petit x*, 103, 57-82.

Houle, V. (2016). *Fondements didactiques pour une intervention orthopédagogique sur la notion de fraction.* [Thèse de doctorat, Université du Québec à Montréal]. Archipel. https://archipel.uqam.ca/10649/1/D3115.pdf

Houle, V. et Giroux, J. (2017). Enseigner la numération de position autrement : le cas d'une situation expérimentée en classe spécialisée. *Bulletin de l'AMQ, LVII*(3), 55-69.

Houle, V. et Giroux, J. (2018). Interprétations de la fraction et enseignement/ apprentissage des fractions équivalentes au primaire. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et de la technologie*, *18*(1), 1-13. https://doi.org/10.1007/s42330-018-0033-0

Institut national de recherche pédagogique (2005). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes. CM1 (cycle 3)*. Éditions Hatier.

Kamii, C. (1990). *Les jeunes enfants réinventent l'arithmétique.* Éditions Peter Lang.

Kieren, T. E. (1989). Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. Dans J. Hiebert et M. Behr (dir.), *Number concepts and operations in the middle grades* (p. 162-181). Lawrence Erlbaum.

Kieren, T. E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. Dans T. P. Carpenter, E. Fennema et T.A. Romberg (dir.), *Rational numbers: An integration of research* (p. 49-84). Lawrence Erlbaum.

Ni, Y. (2001). Semantic domains of rational numbers and the acquisition of fraction equivalence. *Contemporary Educational Psychology, 26*, 400-417. https://psycnet.apa.org/doi/10.1006/ceps.2000.1072

Peirce, C.S. (1978), *Écrits sur le signe. Textes rassemblés, traduits et commentés par G. Deladalle*. Éditions du Seuil.

Perrin-Glorian, M.-J. (1993). Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes « faibles ». *Recherches en didactique des mathématiques, 13*(1.2), 95-118.

Roditi, E. (2008). La comparaison des nombres décimaux. Comprendre les difficultés, aider à les surmonter. *Le Bulletin Vert (APMEP)*, *477*, 479-483.

Rouche, N. (1998). *Pourquoi ont-ils inventé les fractions?* Éditions Ellipses.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, *10*(2.3), 133-170.

Vergnaud, G. (2007). Représentation et activité : deux concepts étroitement associés. *Recherches en éducation*, 4, 9-22.