Le dispositif « Faits reliés » : développer des habiletés de calcul au service de la résolution de problèmes basiques chez des élèves de 6 à 11 ans

Carine REYDY
INSPE de l'académie de Bordeaux
Laboratoire LaB-E3D, université de Bordeaux
Carine.Reydy@u-bordeaux.fr

Résumé : Nous décrivons dans cet article un dispositif mathématique à destination d'élèves de 6 à 11 ans qui a été conçu de manière collaborative et dans lequel des tâches de calcul s'articulent avec la résolution régulière de problèmes arithmétiques élémentaires. Les tâches de calcul ont pour objectif de développer chez les élèves des habiletés qui sont mises au service de la résolution des problèmes proposés grâce à une méthode particulière. Nous détaillons le dispositif, puis nous exposons les résultats d'une étude visant à évaluer les premiers effets de son implantation et à déterminer si l'on observe une corrélation entre la mise en place du dispositif et une amélioration des compétences des élèves en résolution de problèmes arithmétiques élémentaires.

Mots-clés : résolution de problèmes, habiletés de calcul, automatisme, mémorisation

The "Related facts" device: Helping students aged 6 to 11 develop calculation skills to facilitate basic problem solving

Abstract: In this article, we describe a collaboratively designed mathematical device for 6-11 year-old students, in which arithmetic tasks are linked to basic arithmetic problem solving on a regular basis. The arithmetic tasks aim to develop students' problem-solving skills using a specific method. We describe the device in detail, then present the results of a study designed to assess the initial effects of its implementation, and to determine whether there is a correlation between the introduction of the system and an improvement in students' basic arithmetic problem-solving skills.

Keywords: problem solving, calculation, skills, automaticity, memorization

Revue québécoise de didactique des mathématiques, 2024, *vol 5*, p. 3-50.
https://doi.org/10.71403/jyahtg49

Introduction

La résolution de problèmes occupe une place centrale en mathématiques à l'école primaire. Les programmes d'enseignement français actuels la qualifient de « critère principal de la maîtrise des connaissances dans tous les domaines des mathématiques » et de « moyen d'en assurer une appropriation qui en garantit le sens » (Ministère de l'Éducation nationale [MEN], 2020, p. 98). Pourtant, les résultats des élèves français aux évaluations nationales[1] en mathématiques dans le domaine « Résoudre des problèmes » parlent d'eux-mêmes : en septembre 2023 au CP (6-7 ans), ce sont les items les moins bien réussis avec 32,8 % d'élèves « à besoins » ou « fragiles » (Direction de l'Evaluation, de la Prospective et de la Performance [DEPP], 2023a, p. 30) et la situation s'aggrave en début de CE1 avec 52,2 % d'élèves « à besoins » ou « fragiles » (p. 32). Parallèlement en septembre 2023, seuls 31,9 % des élèves évalués en début de CM1 (9-10 ans) atteignent un niveau satisfaisant dans le domaine « Mémoriser des faits numériques » (DEPP, 2023b, p. 20). Ainsi, la résolution de problèmes est une source importante de difficultés au début de l'école élémentaire[2]. De nombreuses questions liées à son enseignement et son apprentissage se posent et parmi elles figure celle des relations que l'on peut établir entre compétences en résolution de problèmes et compétences en calcul.

Le dispositif « Faits reliés » est un dispositif d'enseignement en mathématiques destiné à tous les niveaux de classe de l'école élémentaire. Des tâches spécifiques concernant la mémorisation de faits numériques sont articulées avec un travail visant leur mobilisation dans le cadre de la résolution de problèmes arithmétiques verbaux[3]. L'objectif est d'automatiser la résolution d'un certain type de problèmes arithmétiques élémentaires en prenant appui sur le développement d'habiletés de calcul chez les élèves. Ce dispositif a été conçu, puis testé et amélioré de manière collaborative dans le cadre d'un projet de recherche-action conduit auprès de deux

[1] En France chaque année, des évaluations nationales sont organisées au début du CP, du CE1 et du CM1 pour fournir à l'enseignant des repères sur les compétences de ses élèves en mathématiques. Différents domaines sont évalués et pour chacun d'eux, trois groupes d'élèves sont distingués en fonction de leurs résultats : les élèves « à besoins » qui nécessitent un accompagnement, les élèves « fragiles » pour lesquels l'enseignant doit maintenir un niveau de vigilance particulier et les élèves de niveau « satisfaisant » pour lesquels il n'y a pas de difficultés identifiées.

[2] En France, l'école élémentaire concerne les élèves de 6 à 11 ans et réunit les classes de CP, CE1, CE2, CM1 et CM2.

[3] Un problème arithmétique verbal est constitué d'une situation de la vie quotidienne donnée sous la forme d'une histoire courte et pour laquelle une ou des questions sont posées. La réponse est obtenue en appliquant à des données numériques du texte une ou plusieurs opérations arithmétiques de base (addition, soustraction, multiplication, division).

écoles françaises. Certains aspects qualitatifs issus des expérimentations menées sont analysés dans Reydy (2022), Foulquier et al. (2022) et Laroche et al. (2023). Dans cet article, nous nous intéressons plus spécifiquement aux effets du dispositif sur les apprentissages des élèves dans des classes de CP (6-7 ans) et de CE1 (7-8 ans) lors des deux premières années de son implantation. Nous proposons une étude quantitative prenant appui sur les résultats des élèves à un test passé à plusieurs reprises dans des classes-test et des classes-témoin afin de déterminer si la mise en place du dispositif améliore la connaissance des faits numériques, les habiletés de calcul et les compétences des élèves en résolution de problèmes arithmétiques élémentaires.

1. Appuis théoriques

Comme Butlen (2007, p. 81), nous questionnons l'activité de résolution de problèmes dans les rapports qu'elle entretient avec l'utilisation de la mémoire. Nous nous appuyons pour cela sur des résultats de la psychologie cognitive que nous décrivons dans les paragraphes suivants.

1.1 Les limitations de la mémoire de travail

Pour décrire le fonctionnement de la mémoire, les psychologues en définissent différents types : la mémoire de travail d'une part, qui est un « système cérébral fournissant un stockage et une manipulation temporaires des informations nécessaires pour accomplir des tâches cognitives complexes telles que la compréhension du langage, l'apprentissage et le raisonnement » (Baddeley, 1992) et la mémoire à long terme d'autre part (elle-même composée de plusieurs sous-types), qui permet le stockage et le rappel d'informations sur une longue période de temps. Le fait que la mémoire de travail soit très limitée, que ce soit en taille (quelques unités) ou en durée (quelques secondes), fait l'objet d'un large consensus. Pour surmonter ces limitations, il est possible de récupérer des schémas cognitifs stockés en mémoire à long terme. En effet, « parce qu'un schéma intègre et regroupe souvent plusieurs éléments d'information en un seul élément, il réduit considérablement la charge sur la mémoire de travail » (Ding et al., p. 34). On peut aussi convoquer un automatisme qui, au sens adopté par les psychologues, est un processus vérifiant trois critères : il se produit sans intention, il est inconscient et il n'interfère pas avec une autre activité mentale en cours (Worthen et Hunt, 2012). Il ne requiert pas d'effort et nécessite des ressources cognitives limitées (Ponser et Snyder, 1975) qui sollicitent peu la mémoire de travail.

1.2 Mémoire et résolution de problèmes

L'activité de résolution de problèmes est complexe. Elle mobilise la mémoire de travail et la mémoire à long terme pour la compréhension de l'énoncé dont la lecture met en jeu « une activité de déchiffrage du texte et une activité de codage et de stockage de l'information en mémoire » (Richard, 1982, p. 13), la rétention de données de l'énoncé ou de résultats déjà calculés, l'exécution de calculs, l'identification de sous-buts, leur planification, etc. Les limitations de la mémoire de travail évoquées précédemment peuvent alors générer des difficultés chez l'élève lorsque sa capacité mnésique est dépassée et l'empêcher de mener à son terme la résolution du problème. Dans les paragraphes suivants, nous allons voir comment la constitution de schémas de problèmes, la mémorisation de faits numériques et l'automatisation de procédures de calcul peuvent constituer des leviers pour pallier ces difficultés.

1.3 Schémas de problèmes et problèmes basiques

Julo (1995, 2002) s'intéresse aux rapports entre apprentissage et résolution de problèmes en termes de processus cognitifs qui font « que l'on est capable ou non de mettre cette situation sous une forme telle que nos connaissances deviennent mobilisables pour les traiter » (Julo, 2002, p. 35). Ces processus non linéaires interagissent pour permettre la construction d'une représentation du problème et l'élaboration d'une stratégie de résolution. Certaines connaissances liées « aux situations particulières que nous avons rencontrées auparavant et à l'expérience représentationnelle que nous avons acquise à leur propos » (Julo, 1995, p. 88) jouent pour lui un rôle déterminant dans la mise en place de la représentation du problème par le sujet. C'est ce qu'il nomme des « schémas de problèmes » et qui se forment à partir « des différents problèmes auxquels nous sommes confrontés, des représentations que nous nous en faisons pour les résoudre et des analogies que nous percevons entre eux » (Julo, 1995, p. 88). Ainsi, lorsqu'un élève associe par analogie un problème à un schéma de problèmes déjà mémorisé, il dispose automatiquement d'une stratégie de résolution, ce qui est très peu coûteux en termes de mémoire de travail. Butlen (2007) distingue dans ce sens les sujets novices qui, « ne disposant pas de schéma en mémoire à long terme, doivent stocker en mémoire à court terme les informations du problème et en élaborer une représentation globale. Dès lors, il y a risque de surcharge en mémoire de travail » des sujets experts qui « à la lecture de l'énoncé du problème, peuvent sélectionner et activer en mémoire le schéma adéquat » (Butlen, 2007, p. 84).

Dans une étude conduite auprès d'élèves de 8 à 11 ans, Houdement (2017) cherche à identifier des connaissances qui aideraient à résoudre les problèmes arithmétiques et celles dont l'absence serait pénalisante. En faisant référence à la notion de schéma de problèmes, elle déclare qu'il est « urgent et crucial d'enrichir la mémoire des problèmes de chaque élève » (p. 64). Les problèmes arithmétiques verbaux qui « valent la peine d'être mémorisés » (Houdement, 2017, p. 64) sont les problèmes basiques qu'elle définit comme étant « les problèmes à deux données [resp. $2n + 1$ données pour les problèmes liés à la proportionnalité], où il s’agit de déterminer une troisième valeur [resp. une $(2n + 2)^e$], à énoncé court, syntaxe simple, sans information superflue » (Houdement, 2017, p. 64). Elle insiste par ailleurs sur le fait qu’un enseignement progressif de ces problèmes doit être pensé. Ces préconisations sont reprises dans les instructions officielles françaises actuelles. On peut par exemple lire dans le guide fondamental pour enseigner sur la résolution de problèmes au cours moyen que ces problèmes constituent des « briques élémentaires formant la plupart des problèmes verbaux que vont devoir résoudre les élèves de cours moyen » (MEN, 2022, p. 21). En somme à l’école primaire, il est primordial que les élèves constituent une mémoire de problèmes qui leur permet de résoudre par analogie des problèmes basiques relevant des quatre opérations. Ainsi, leur mémoire de travail est davantage disponible pour les processus cognitifs nécessaires à la résolution de « vrais » problèmes plus complexes.

1.4 Faut-il apprendre par cœur les tables d’addition?

Des travaux ont mis en évidence le fait que l’automatisation des faits numériques est directement corrélée aux capacités en mathématiques, mais que la fluence arithmétique est en diminution globale chez l’adulte comme chez l’enfant depuis les 30 dernières années (voir par exemple LeFevre et al., 2014 ou DEPP, 2019). Bien que la plupart des programmes d’enseignement préconisent la mémorisation des tables[4] d’addition et de multiplication[5], Cumming et Elkins (1999) notent que les activités basées sur un apprentissage par cœur des tables et en particulier des tables d’addition sont devenues impopulaires dans la culture professionnelle de nombreux enseignants car elles sont jugées inutiles à l’ère du développement des technologies. Par ailleurs, l’approche constructiviste de l’enseignement des mathématiques que l’on retrouve dans un large corpus de la littérature privilégie la compréhension par rapport à l’apprentissage par cœur. Néanmoins, plusieurs chercheurs pensent qu’un apprentissage essentiellement conceptuel des mathématiques de base n’est pas suffisant pour maîtriser les mathématiques dans les classes supérieures et qu’une automatisation des tables d’addition et de multiplication est nécessaire : leur hypothèse est qu’un traitement inefficace de ces faits numériques génèrerait une charge cognitive trop élevée dans la mémoire de travail lors de la réalisation d'une tâche plus complexe et risquerait de conduire à

[4] On appelle indifféremment tables d’addition (resp. de multiplication) ou répertoire additif (resp. multiplicatif) l’ensemble des faits numériques du type $a + b = c$ (resp. $a \times b = c$) où a et b sont deux entiers compris entre 1 et 10.

[5] Dans les programmes d’enseignement français, les tables d’addition et de multiplication doivent être mémorisées à la fin du cycle 2, c’est-à-dire à l’âge de 9 ans.

l'échec (par exemple pour les tables d'addition, Kaye et al., 1986; Svenson et al., 1976; Svenson et Sjoberg, 1983).

Pour les tables de multiplication, il ne fait pas débat que seule une mémorisation complète basée sur des connaissances déclaratives est satisfaisante car les stratégies de reconstruction deviennent à terme trop coûteuses en temps et sont fréquemment sources d'erreurs. En effet, des recherches ont montré que les élèves proposent alors souvent le résultat d'une multiplication proche (Campbell, 1994) et qu'en se trompant plusieurs fois de la même façon, ils risquent de mémoriser l'erreur correspondante. Il existe en revanche deux types d'apprentissage jugés pertinents pour les tables d'addition (Fischer, 1998; Fanget et al., 2011). Le premier est un apprentissage visant la mémorisation de tout le répertoire en connaissances déclaratives qui pourront être directement récupérées dans la mémoire à long terme (apprentissage « par cœur »). Il permet, lors de l'exécution d'une tâche plus complexe comme la résolution d'un problème, de très peu solliciter la mémoire de travail. Le second est un apprentissage visant la mémorisation d'une partie du répertoire en connaissances déclaratives et la reconstruction de l'autre partie via des connaissances procédurales mobilisant des connaissances déclaratives de la partie mémorisée. Pour qu'il ne génère pas de surcharge en mémoire de travail, il faut que la partie mémorisée du répertoire soit suffisamment étendue (a minima les faits du type $a + b = c$ avec $c \leq 10$, les doubles et les faits du type $10 + n$, ce qui représente plus de la moitié du répertoire). De plus, des procédures de calcul réfléchi efficaces (« presque-double », passage par 10, connaissance des propriétés des opérations, etc.) doivent être automatisées par les élèves afin qu'ils puissent reconstruire la partie non mémorisée. En particulier, ces procédures efficaces s'opposent à la procédure par surcomptage qui engorge la mémoire de travail. En situation de résolution de problème, le premier type d'apprentissage permet de rappeler n'importe quel résultat des tables d'addition en mobilisant très peu la mémoire de travail alors que le second est plus coûteux en termes de mémoire de travail lorsqu'il s'agit de rappeler des résultats reconstruits par l'intermédiaire de connaissances procédurales. En contrepartie, il y a un réel intérêt dans la seconde approche à enseigner des procédures efficaces qui pourront par la suite être transférées à la réalisation de calculs plus complexes.

Enfin, plusieurs auteurs soulignent l'intérêt de coordonner l'apprentissage des tables de l'addition à la perception de la relation inverse qui lie addition et soustraction. D'après Vilette (2002), « une transformation n'est pas compréhensible en soi mais seulement par rapport aux autres » (p. 1379) et les élèves ne peuvent raisonner arithmétiquement en utilisant les relations parties-tout et la composition additive des nombres que lorsque l'addition et la soustraction sont présentées comme des opérations interdépendantes. Baroody et al. (2009) suggèrent de se concentrer sur la structure plutôt que sur la mémorisation individuelle de faits numériques et préconisent « une mémorisation significative des combinaisons de base » telles que 3 + 5 = 8, 5 + 3 = 8, 8 – 3 = 5 et 8 – 5 = 3, ce qui peut « réduire le temps et la pratique nécessaires pour parvenir à la maîtrise, maintenir l'efficacité et faciliter l'application des connaissances existantes à des combinaisons inconnues ou non pratiquées » (p. 71). Des occasions sont alors données aux élèves de découvrir et d'automatiser des stratégies qui pourront être transférées à d'autres nombres.

1.5 Influence de la connaissance des faits numériques et des habiletés calculatoires sur la résolution de problèmes

Butlen (2007) distingue deux catégories de calculs en jeu lors de la résolution d'un problème : « le calcul numérique renvoyant aux opérations classiques et le calcul relationnel concernant les opérations mentales nécessaires à la saisie des relations en jeu » (p. 83) qui permet une représentation correcte du problème. Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que la connaissance des tables et le développement d'habiletés de calcul soulagent la mémoire de travail au profit de l'exécution de tâches plus complexes en activité de résolution de problèmes. Par exemple, Ding et al. (2021) rapportent que lors de la résolution de problèmes, l'automaticité de faits arithmétiques de base favorise les performances arithmétiques en libérant des ressources de mémoire de travail. La réalisation des calculs « numériques » est ainsi facilitée. Butlen et Pézard (2003) s'intéressent également à l'impact de ces habiletés sur le calcul « relationnel » qui s'opère lors de la résolution d'un problème. Ils démontrent qu'un entraînement au calcul mental, en allégeant les tâches de calcul, favorise une prise de sens et contribue à accélérer la reconnaissance de l'opération en jeu dans la résolution de problèmes familiers pour les élèves. Cela s'expliquerait par le fait que la mémorisation de faits numériques et l'automatisation de procédures de calcul libèrent de l'espace dans la mémoire de travail au profit des opérations mentales nécessaires à la saisie des relations en jeu et à la construction de représentations (Butlen, 2007).

1.6 Problématique

Le dispositif d'enseignement « Faits reliés » a été conçu et amélioré par un collectif de professeurs et de chercheurs dans le cadre d'une recherche-action avec trois objectifs : concevoir des outils et des démarches pour permettre aux élèves de mémoriser les tables d'addition et de multiplication; développer chez eux la capacité à percevoir la relation inverse entre addition et soustraction (resp. entre multiplication et division) et à passer rapidement d'une écriture mathématique à une autre écriture équivalente; enfin, mettre cette fluence et cette flexibilité calculatoire au service de la résolution de problèmes basiques pour enrichir leur mémoire de problèmes. Nous nous intéressons ici aux effets des deux premières années de mise en œuvre du dispositif. Pour cela, nous suivons une cohorte d'élèves du CP (6-7 ans) au CE1 (7-8 ans) : la première année, la moitié des classes utilise le dispositif et l'autre non alors que la seconde année, toutes les classes utilisent le dispositif. Un test est soumis aux élèves au début de la première année, puis au début et à la fin de la seconde année. Seule la partie concernant le champ additif est évaluée, le champ multiplicatif n'étant pas abordé au CP. Nous voulons dans cet article apporter des réponses à quatre questions de recherche.

1) Quel est l'effet de l'utilisation du dispositif sur la disponibilité des résultats des tables d'addition et la perception de l'équivalence entre écritures additives et soustractives chez les élèves?
2) Quel est l'effet de l'utilisation du dispositif sur les performances des élèves en résolution de problèmes basiques?
3) Est-ce que l'enseignement proposé dans le dispositif a un effet plus ou moins bénéfique sur les performances des élèves en termes de mémorisation des tables d'une part et de résolution de problèmes basiques d'autre part selon qu'il est proposé pendant une année (CE1) ou deux années (CP et CE1)?
4) Observe-t-on une corrélation positive entre les scores des élèves au test dans le domaine du calcul et dans celui de la résolution de problèmes basiques? Le cas échéant, peut-on conclure à une relation de causalité entre l'utilisation du dispositif et des performances accrues chez les élèves en résolution de problèmes basiques et, si oui, dans quelle mesure?

Plus généralement, nous cherchons donc à savoir si un travail spécifique sur la mémorisation des tables d'addition et la perception d'équivalence entre écritures additives et soustractives mené en parallèle d'un travail sur le réinvestissement de ces habiletés pour résoudre des problèmes basiques a une incidence positive sur les performances des élèves en résolution de problèmes basiques du champ additif. Dans la partie 2 de l'article, nous décrivons les origines du questionnement qui a mené à la constitution du collectif d'enseignants et de chercheurs puis à la conception du dispositif que nous décrivons ensuite en détail. Dans la partie 3, nous rendons compte de la méthodologie utilisée pour tester les effets du dispositif. La partie 4 est dédiée à la restitution des résultats obtenus et à leur analyse. Enfin dans la partie 5, nous développons nos perspectives de recherche.

2. Le dispositif « Faits reliés »

Dans les paragraphes suivants, nous décrivons le questionnement duquel est né le dispositif, le fonctionnement du collectif qui l'a fondé et les grandes lignes de son contenu.

2.1 Genèse du projet

Plusieurs constats ont initié la réflexion qui a conduit à la constitution d'un collectif d'enseignants et de chercheurs et à la réalisation collaborative de ce dispositif. D'une part, quelques enseignantes ont soumis leurs interrogations au groupe des cinq chercheurs et formateurs sur la façon d'accompagner leurs élèves dans le processus de mémorisation des tables : quels sont les faits numériques qui doivent être appris par cœur? Quels sont ceux pour lesquels une mémorisation complète n'est pas indispensable? Quelle démarche d'enseignement adopter pour que les élèves mémorisent les tables? De quels outils doter les élèves pour qu'ils s'exercent en classe, voire en dehors du temps scolaire? Ces questionnements concordaient avec des difficultés fréquemment exprimées par des enseignants lors de séances de formation continue que nous avions animées. D'autre part, notre équipe de chercheurs-formateurs faisait le constat suivant : connaître pleinement un fait numérique, c'est être capable de percevoir l'équivalence entre quatre écritures différentes, mais mathématiquement analogues (par exemple, entre $6 + 4 = 10$, $10 - 6 = 4$, $4 + 6 = 10$ et $10 - 4 = 6$ ou entre $3 \times 8 = 24$, $24 : 8 = 3$, $8 \times 3 = 24$ et $24 : 8 = 3$). Or, la perception de ces équivalences n'est pas spontanée et nécessite d'être enseignée. Dans un certain nombre de pays, cela fait l'objet d'un apprentissage systématique comme l'illustrent par exemple les extraits de manuels portugais (Tavares et al., 2017a, 2017b) de la figure 1. Ce n'est pas le cas de la plupart des manuels français, ce qui nous a incités à explorer cette piste.

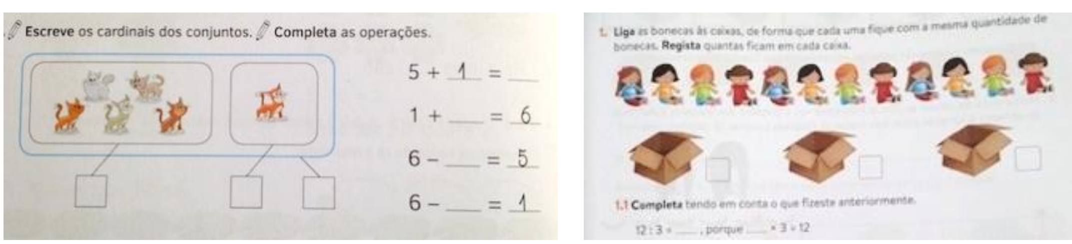

Figure 1. À gauche, extrait du manuel *Todos Juntos, matemática 1° ano* (élèves de 6 à 7 ans) et à droite, extrait du manuel *Todos Juntos, matemática 2° ano* (élèves de 7 à 8 ans)

De plus, être capable de restituer un fait numérique n'implique pas toujours de savoir le mobiliser pour résoudre un problème. Par exemple, un élève peut répond immédiatement « 42 » à la question « Combien font 6 fois 7? » sans être en mesure de résoudre le problème : « Combien de bandes de 6 mètres de long peut-on découper dans un rouleau de tissu de 42 mètres? ». Or une connaissance numérique n'est utile que si elle permet de répondre à des questions mathématiques. De ces constats et questionnements a résulté la volonté commune de créer un dispositif d'enseignement mathématique répondant à un triple objectif : i) il dote les enseignants de l'école élémentaire d'outils et de démarches pour accompagner leurs élèves dans la mémorisation des tables d'addition et de multiplication; ii) il permet de conduire un travail spécifique sur la perception des équivalences entre écritures mathématiques; iii) et de mener un travail en parallèle sur la mobilisation de ces faits numériques pour la résolution de problèmes arithmétiques verbaux. Nous utilisons le terme de dispositif dans le sens que Sensevy (2021) lui attribue pour désigner « un agencement d'éléments qui concourent à une action ou à un but » (Sensevy, 2021, p. 164). Ce dispositif est constitué d'un ensemble de ressources de différents types (représentations particulières, matériel, supports de jeux, listes de problèmes, séquences d'enseignement, manières d'agir et discours associés) que nous allons décrire dans le paragraphe 2.3.

2.2 Un projet de recherche-action de type collaboratif

Une ébauche du dispositif a été conçue et expérimentée de manière informelle par une enseignante de CP (élèves de 6 à 7 ans) et deux enseignantes de CM1-CM2 (élèves de 9 à 11 ans) lors de l'année scolaire 2018-2019 : un travail dans le domaine du calcul était articulé à un travail en résolution de problèmes sur quelques exemples circonscrits. À partir de 2019, un collectif réunissant un groupe de cinq chercheurs et formateurs en didactique des mathématiques et un groupe d'enseignants d'une puis de deux écoles[6] de REP[7] s'est constitué pour conduire pendant trois ans un projet de recherche-action intitulé « Favoriser la mémorisation et la mobilisation des faits numériques pour la résolution de problèmes ». Il s'agissait de compléter l'ébauche de dispositif initialement produite, de l'expérimenter et d'en évaluer les effets, de l'améliorer collectivement pour essayer d'apporter des réponses aux questions initiales posées par le collectif.

Voici le processus que nous avons suivi.

a) Le collectif a tout d'abord défini le but commun qu'il se fixait, à savoir la conception d'un dispositif visant les objectifs i), ii) et iii) énoncés ci-dessus.
b) Les chercheurs-formateurs ont exposé au collectif des résultats de recherches pour guider les premières actions puis lui ont soumis les représentations que l'on se proposait d'utiliser accompagnées de premiers exemples de tâches de calcul et des listes de problèmes que nous décrivons plus en détail dans le paragraphe 2.3.
c) Le collectif (enseignants et chercheurs-formateurs) a amendé le dispositif en fonction des débats qui ont eu lieu et des idées qui ont émané.
d) Les enseignants du collectif ont mis en œuvre le dispositif en procédant aux adaptations qui leur semblaient nécessaires à l'écologie de leur classe. Les

[6] École Ferdinand Buisson à Bègles et école Albert Camus à Floirac, France.
[7] Réseau d'éducation prioritaire.

chercheurs ont réalisé des visites de classe, chacune suivie d'un entretien entre l'enseignant ayant mené la séance et le chercheur l'ayant observée ou filmée.

e) Des réunions restreintes et des séances plénières ont été organisées pour débattre sur les points ayant émergé des visites et des entretiens.

Les étapes c), d) et e) du processus ont été réitérées pendant les trois années du projet. Ce processus de boucle itérative a permis d'enrichir le dispositif de manière collaborative. Le projet a débuté avec 6 enseignants de l'école Ferdinand Buisson. Onze autres enseignants de l'école ont rejoint le collectif la deuxième année. Enfin pour la troisième année, tous les enseignants de l'école Ferdinand Buisson participaient au projet ainsi que tous ceux de l'école Albert Camus, ce qui représentait 27 classes et balayait tous les niveaux de l'école élémentaire (élèves de 6 à 11 ans). En agrandissant progressivement le collectif, nous avons pu expérimenter le dispositif auprès de tous les niveaux de classe en la confrontant à des pratiques enseignantes variées. Par la même occasion, nous avons commencé à étudier les conditions de sa diffusion en observant la dynamique qui s'installait dans le collectif au travers des échanges entre pairs experts et pairs novices.

Le projet conduit entre 2019 et 2022 est une recherche-action, c'est-à-dire « un processus destiné à doter tous les participants de la scène éducative […] des moyens d'améliorer leur pratique grâce à leurs expériences éclairées et nourries des savoirs théoriques en cours » (Catroux, 2002, p. 8). De plus, son fonctionnement présente plusieurs des caractéristiques d'une ingénierie collaborative (Sensevy, 2021, p. 166) : des enseignants et des chercheurs coopèrent pour produire une œuvre commune – le dispositif –, ils en déterminent ensemble les fins et les moyens, il y a égalité des intelligences entre professeurs et chercheurs et les différences de compétences entre les acteurs constituent le moteur de l'invention collective. Enfin, puisque le dispositif est « tributaire des situations, il peut être révisé et amélioré à chaque itération […]. L'ensemble du système de recherche progresse donc par raffinements successifs » (Collectif Didactique pour enseigner, 2024, p. 86).

2.3 Description du dispositif

Dans le domaine du calcul, des tâches d'entraînement visant la mémorisation des tables d'addition et de multiplication et la perception des équivalences entre écritures mathématiques sont menées tout au long de l'année en abordant les faits numériques selon une certaine programmation (paragraphe 2.3.2). En parallèle, les élèves résolvent des problèmes basiques (Houdement, 2017) tirés d'une liste créée et amendée par le collectif pour chaque année de l'école élémentaire (paragraphe 2.3.3). Sa progressivité est établie grâce aux classifications issues de la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1986) et articulée à la progression dans le domaine du calcul dans le sens où les nombres en jeu dans les problèmes proposés mobilisent les faits numériques déjà travaillés. Des exemples de séances autour de tâches spécifiques (paragraphe 2.3.4) complètent le dispositif.

2.3.1 Des représentations particulières

Les tâches menées dans le domaine du calcul sont rattachées à des représentations particulières (cf. Foulquier et al., 2022) pour une étude de l'usage fait par les élèves et les enseignants de ces représentations) et à une terminologie spécifique. Les expressions entre guillemets sont celles qui sont utilisées en classe avec les élèves.

Boîtes et trios. Pour les faits numériques additifs, nous appelons « trio » trois nombres liés par une relation additive (3, 7 et 10 par exemple). Un trio peut être placé dans une « boîte » et est accompagné de quatre faits numériques appelés « faits reliés de l'addition » et qui illustrent la structure additive liant les trois nombres du trio (figure 2).

10	
3	7

$3 + 7 = 10$
$7 + 3 = 10$
$10 - 3 = 7$
$10 - 7 = 3$

Figure 2. Le trio (3; 7; 10) placé dans une boîte
et les quatre faits reliés de l'addition associés

Cette représentation en boîte a été analysée par Fischer (1993). On la retrouve également dans l'ouvrage de Bonhême et Descaves (2007, p. 65) avec un usage relativement similaire à celui que nous en faisons dans le dispositif. Elle a pour nous une fonction de support visuel qui peut aider les élèves à percevoir les équivalences du type « $3 + 7 = 10 \Leftrightarrow 10 - 3 = 7$ » par le biais de tâches d'entraînement ritualisées. De plus, nous l'avons choisie car elle permet d'illustrer plus ou moins facilement des problèmes de toutes les catégories que nous souhaitons aborder avec les élèves dans le champ additif. En effet, avec une boîte, on peut aisément représenter un problème de composition d'états ou de comparaison et un peu moins aisément un problème de transformation ou de composition de transformations. Enfin, il est possible d'introduire cette représentation en s'appuyant sur du matériel afin qu'elle soit porteuse de sens pour les élèves (figure 3).

Figure 3. Une enseignante de CP du projet introduit les boîtes à l'aide de réglettes Cuisenaire

Rectangles et triplettes. De même, pour les faits multiplicatifs, nous appelons « triplette » trois nombres liés par une relation multiplicative (3, 8 et 24 par exemple). La triplette peut être placée dans un « rectangle » et elle est accompagnée de quatre faits numériques que nous appelons « les faits reliés de la multiplication » (figure 4).

$$\begin{array}{cc} & 8 \\ 3 & \boxed{24} \end{array} \qquad \begin{array}{c} 3 \times 8 = 24 \\ 8 \times 3 = 24 \\ 24 : 3 = 8 \\ 24 : 8 = 3 \end{array}$$

Figure 4. La triplette (3; 8; 24) placée dans un rectangle et les quatre faits reliés de la multiplication

Ici aussi, la représentation en rectangle sert de support visuel pour aider les élèves à retrouver des équivalences du type « 3 × 8 = 24 ⇔ 24 : 3 = 8 » au moyen de tâches d'entraînement ritualisées. Nous l'avons en outre choisie car elle permet d'illustrer plus ou moins facilement des problèmes de multiplication vue comme une addition itérée, de division-partition, de division-quotition, de configuration rectangulaire, d'aire, de produit cartésien, etc. Sur la photo de la figure 5, le rectangle illustre un problème de configuration rectangulaire (« Un fermier a planté 5 rangées de 4 carottes. Combien a-t-il planté de carottes? ») qui a servi à une enseignante de CE1 (7-8 ans) à introduire le sens de la multiplication, les signes « × » et « : », les triplettes et les rectangles.

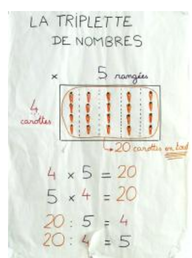

Figure 5. Trace écrite dans la classe de CE1 d'une enseignante du collectif

2.3.2 Domaine du calcul

Choix opérés. Les tâches proposées aux élèves dans le domaine du calcul ont pour objectif de développer chez eux deux types d'automatismes :

- être capable de restituer rapidement n'importe quel résultat des tables d'addition ou de multiplication (par exemple, être capable d'énoncer rapidement 3 × 8 = 24 ou 8 × 3 = 24 selon le résultat le plus disponible pour l'élève),
- être capable d'écrire rapidement les faits reliés aux faits mémorisés en s'aidant si besoin d'une boîte ou d'un rectangle (par exemple à partir de 3 × 8 = 24, savoir retrouver 8 × 3 = 24, 24 : 3 = 8 et 24 : 8 = 3 en s'appuyant éventuellement sur le support visuel du rectangle contenant la triplette [3, 8, 24]).

Le fait qu'une mémorisation complète des tables de multiplication soit visée n'a pas fait débat dans le collectif : les programmes français l'exigent (MEN, 2020, p. 58) et tous les enseignants du groupe avaient déjà pu constater des difficultés chez leurs élèves liées à une mauvaise connaissance de ces faits numériques. Par ailleurs, trois arguments ont finalement conduit le collectif à opter pour le premier type d'apprentissage des tables d'addition décrit dans le paragraphe 1.4, c'est-à-dire un apprentissage par cœur de toutes les tables d'addition, tout en prévoyant dans la programmation une explicitation des procédures de calcul réfléchi dites efficaces. Le premier argument tient aux programmes français (MEN, 2020, p. 58) : les élèves doivent avoir mémorisé les tables d'addition à la fin du CE2 (8-9 ans) et les repères de progression (MEN, 2019) précisent que la plupart des résultats des tables d'addition sont mémorisés dès le CP (6-7 ans). Le deuxième argument réside dans le fait que pour que le second type d'apprentissage (paragraphe 1.4) soit efficace, il faut que les élèves aient mémorisé plus de la moitié des tables d'addition et automatisé plusieurs procédures de calcul réfléchi. Outre le fait que dans le choix de stratégie d'enseignement que nous adoptions, des procédures de calcul (« presque-double », passage par 10 », « ajouter 9 ») seraient étudiées et pourraient être réinvesties par les élèves avec des nombres plus grands, les enseignants du collectif, forts de leur expérience, ont pensé qu'il était moins risqué de transmettre comme message à leurs élèves qu'« il faut connaître par cœur ses tables d'addition » (quitte à ce qu'elles ne soient pas entièrement mémorisées par tous) plutôt que « il n'est pas utile de tout savoir par cœur », ce qui conduirait immanquablement certains élèves à penser que « les tables d'addition, ça ne s'apprend pas par cœur »… Enfin, le troisième argument tient à la place que la mémorisation des tables d'addition occupe dans la programmation : il est proposé dès le CP (6-7 ans) et il a semblé aux enseignants du collectif qu'il constituait une bonne occasion d'enseigner des compétences méthodologiques aux élèves, de les doter d'outils et de méthodes efficaces qui pourraient leur servir dès l'année suivante pour mémoriser les tables de multiplication ou tout autre résultat qui nécessiterait un apprentissage par cœur, en d'autres termes une occasion de « leur apprendre à apprendre ».

Programmation des apprentissages en calcul. Tout le répertoire additif est étudié en vue d'être mémorisé dès l'année de CP (6-7 ans) puis systématiquement passé en revue pour être consolidé au début de chaque année jusqu'au CM2 (10-11 ans). Le répertoire multiplicatif est abordé dès la période[8] 3 du CE1 (7-8 ans). Les tables de 2, 3, 4, 5 et 10 sont mémorisées au cours de l'année de CE1 (7-8 ans) et celles

---

[8] L'année scolaire française est découpée en 5 périodes qui correspondent aux temps de classes situés entre deux temps de vacances scolaires.

de 6, 7, 8 et 9 au CE2 (8-9 ans) conformément au curriculum français (MEN, 2019, 2020). Le répertoire multiplicatif est ensuite revu pour être consolidé en CM1 (9-10 ans) et en CM2 (10-11 ans). En particulier, le fait d'adopter cette programmation implique d'introduire le signe « : » dès le CE1 (7-8 ans) en même temps que le signe « × », ce qui est inhabituel en France[9]. Les tâches de calcul décrites dans les deux paragraphes suivants sont mises en œuvre en classe dans un champ numérique respectant cette programmation. De plus, à partir de la période 4 de l'année de CP, les enseignants organisent des séances ponctuelles au cours desquelles ces mêmes tâches sont proposées aux élèves avec des nombres plus grands dans le but de favoriser le transfert des habiletés développées sur les petits nombres à des calculs plus complexes.

Exemples de tâches dans le domaine du calcul. Initialement, seules quelques tâches visant à favoriser la mémorisation des tables et le lien entre addition et soustraction ou entre multiplication et division ont été proposées aux enseignants du collectif. Ces derniers les ont pleinement investies et ont fait preuve de beaucoup d'inventivité pour en créer de nouvelles. En voici quelques exemples (de gauche à droite et de haut en bas sur la figure 6) :

- à partir d'une boîte contenant un trio ou d'un rectangle contenant une triplette, écrire les quatre faits reliés;
- à partir d'un trio ou d'une triplette, dessiner/remplir la boîte contenant le trio ou le rectangle contenant la triplette puis écrire les quatre faits reliés;
- compléter une boîte contenant deux des trois nombres d'un trio ou un rectangle contenant deux des trois nombres d'une triplette;
- trier les vraies boîtes/rectangles et les fausses boîtes/rectangles (c'est-à-dire les nombres ne constituent pas un trio/une triplette ou ne sont pas placés correctement);
- assembler des étiquettes pour retrouver des faits numériques;
- retrouver toutes les décompositions d'un nombre (loto);
- trouver tous les rectangles pour lesquels le nombre du centre est le même, mais les deux autres nombres de la triplette sont différents : ces résultats à antécédents multiples des tables de multiplication étant particulièrement sources d'erreurs, il est intéressant de les faire identifier aux élèves afin qu'ils prennent conscience de l'origine de la difficulté.

[9] Dans les programmes d'enseignement français, les symboles « = », « + », « - », « × » et « : » sont introduits dans en cycle 2 (CP, CE1, CE2) sans indication explicite concernant l'année. Le signe « : » est souvent introduit en CE2 dans les manuels.

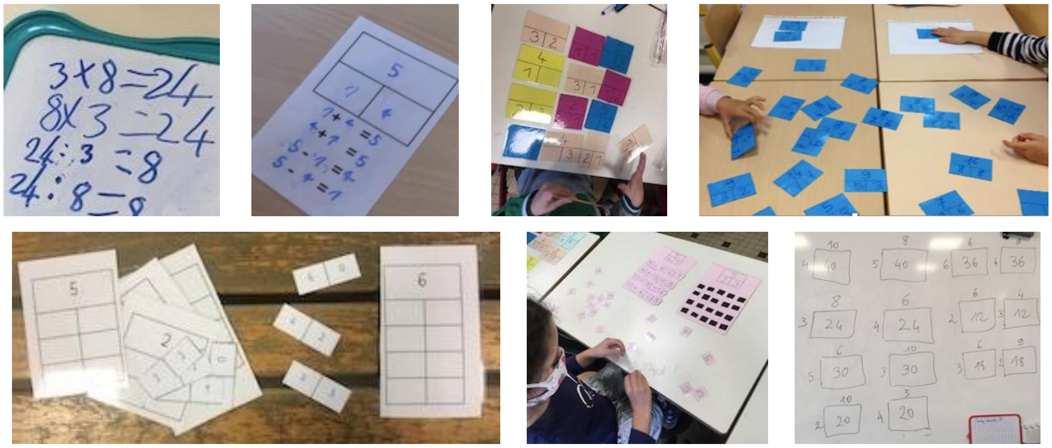

Figure 6. Exemples de tâches de calcul

Exemples de tâches mobilisant des écritures préalgébriques. Nous confrontons les élèves dès le CP (6-7 ans) à des écritures mathématiques dans lesquelles le symbole « ? » est utilisé pour désigner une inconnue. Nous les appelons « écritures préalgébriques » car dans l'usage que nous en faisons dans le dispositif, elles permettent aux élèves une entrée dans la pensée algébrique selon les trois caractéristiques énoncées par Radford (2013, p. 260) : l'indétermination, la dénotation et l'analycité. Toutefois de notre point de vue, elles ne présentent pas encore la généricité des écritures algébriques auxquelles ils seront confrontés plus tard car elles ont dans notre dispositif des formes particulières dues au fait qu'elles modélisent des problèmes basiques. Dans une démarche sensiblement similaire à la nôtre, Bonhême et Descaves (2007) utilisent la lettre « x » pour représenter l'inconnue et emploient l'expression « programme opératoire » pour désigner ce que nous appelons les écritures préalgébriques.

Les tâches suivantes sont proposées régulièrement (figure 7, de gauche à droite) :

- jeux ou entraînement individuel à l'aide de cartes recto verso contenant au recto une écriture mathématique avec un « ? » et au verso la valeur du « ? »;
- dominos d'association entre écriture préalgébrique et valeur du « ? »;
- à partir d'une boîte ou d'un rectangle contenant deux nombres et un « ? », écrire les quatre faits reliés avec « ? ».

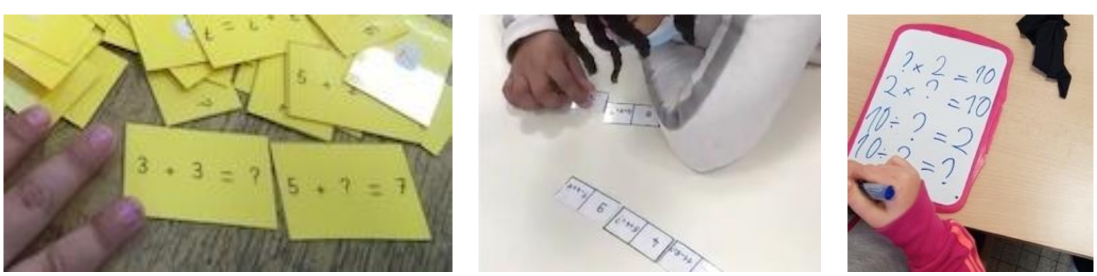

Figure 7. Exemples de tâches de calcul mobilisant des écritures préalgébriques

Ces écritures sont ensuite mobilisées par les élèves en situation de résolution de problème comme nous le décrivons dans le paragraphe suivant.

2.3.3 Domaine de la résolution de problèmes

Dans le dispositif, nous proposons aux enseignants une liste de problèmes basiques pour chaque année de l'école élémentaire. Dans la lignée des travaux d'Houdement (2017) décrits au paragraphe 1.3, notre objectif est d'enrichir la mémoire de problèmes des élèves afin qu'ils automatisent la résolution des problèmes basiques, c'est-à-dire qu'ils soient capables de les résoudre de façon quasi immédiate à la fin de l'école élémentaire. Il s'agit de cette façon d'alléger la charge en mémoire de travail afin de la rendre plus disponible pour la réalisation de tâches nécessaires à la résolution de problèmes plus complexes.

Choix opérés pour établir les listes de problèmes. La progressivité des listes de problèmes fournies aux enseignants (tableau 1) est établie selon plusieurs critères. D'une part, le champ numérique concerné dans les problèmes est articulé à la programmation dans le domaine du calcul décrite dans le paragraphe 2.3.2 : il s'élargit progressivement car les problèmes mobilisent les faits numériques déjà travaillés. En fin de certaines périodes, des nombres plus grands ou des nombres décimaux sont également convoqués[10]. D'autre part, nous nous appuyons sur les classifications issues de la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1986) pour choisir et ordonner les problèmes des cinq listes. En effet, plusieurs études ont montré qu'à l'instar de la taille des nombres ou des difficultés lexicales de l'énoncé, l'appartenance à l'une des catégories de cette classification et la place de l'inconnue dans le problème ont une incidence significative sur la réussite des élèves (Riley et al., 1983). Nous opérons les choix suivants :

- les énoncés de six problèmes basiques sont proposés chaque semaine;
- les catégories sont abordées successivement semaine après semaine : une catégorie, puis une seconde, puis deux catégories mêlées, etc.;
- dans une même catégorie, la place de l'inconnue varie d'un problème à l'autre.

[10] Période 5 pour le CP, périodes 3 à 5 pour le CE1, périodes 2 à 5 pour le CE2, le CM1 et le CM2.

Tableau 1 : Extrait de la programmation en résolution de problèmes pour le CP (6-7 ans), période 4

Semaine	Champ numérique	Catégorie(s) de problème
Semaine 1	Maison[11] du 2 à maison du 10, doubles	Transformation d'état, composition d'états
Semaine 2	Maison du 2 à maison du 10, doubles	Transformation d'état, composition d'états
Semaine 3	Maison du 2 à maison du 10, doubles, 10 + n	Transformation d'état, composition d'états
Semaine 4	Maison du 2 à maison du 10, doubles, 10 + n	Comparaison d'états
Semaine 5	Maison du 2 à maison du 10, doubles, presque-doubles, 10 + n	Comparaison d'états
Semaine 6	Maison du 2 à maison du 10, doubles, presque-doubles, 10 + n	Transformation d'état, composition d'états, comparaison d'états
Semaine 7	Maison du 2 à maison du 10, doubles, presque-doubles, 10 + n, n + 9	Transformation d'état, composition d'états, comparaison d'états

Une méthode pour résoudre les problèmes. Lorsqu'un enseignant commence à utiliser le dispositif, il instaure la méthode suivante dans la classe pour résoudre les problèmes de la liste des « Faits reliés » : après la découverte à l'oral ou à l'écrit de l'énoncé, on produit d'abord une écriture mathématique qui traduit le problème (une écriture préalgébrique congruente[12] à l'énoncé), puis on utilise si besoin la boîte ou le rectangle pour transformer l'écriture en une écriture mathématiquement équivalente qui permet d'obtenir plus facilement le résultat. Enfin, on communique la réponse grâce à une phrase réponse. Par exemple, pour le problème « Il y a des élèves dans le bus. 8 élèves descendent et maintenant, il en reste 9. Combien y avait-il d'élèves dans le bus? », l'écriture préalgébrique congruente à l'énoncé est « ? – 8 = 9 ». Avec ou sans l'aide de la boîte, on la transforme en « 8 + 9 = ? », ce qui permet d'obtenir le résultat numérique « 17 » et de fournir la phrase réponse « Il y avait 17 élèves dans le bus ». La boîte (ou le rectangle pour les problèmes du champ multiplicatif) a un statut d'outil transitoire qui facilite si nécessaire la réalisation des calculs.

Les listes de problèmes de chaque niveau de classe commencent volontairement par des problèmes de transformation d'état énoncés dans l'ordre chronologique

[11] On appelle « maison du n » les faits du répertoire additif dont le résultat est égal à n. Par exemple, la maison du 4 est constituée de 1 + 3 = 4, 2 + 2 = 4 et 3 + 1= 4.

[12] Chaque unité signifiante élémentaire de l'énoncé est traduite par une et une seule unité signifiante élémentaire de l'écriture, ces unités étant arrangées dans le même ordre.

d'occurrence des événements : en effet, leur dimension dynamique associée à la présence de verbes d'action facilite la production d'une écriture préalgébrique et l'installation de cette méthode avec les élèves. Assez rapidement, des problèmes de composition d'états puis de comparaison d'états sont abordés afin d'éviter que l'aspect très guidé de la méthode n'induise des démarches superficielles (Fagnant, 2018) chez les élèves qui pourraient venir à penser que résoudre un problème, c'est appliquer un simple algorithme. En effet, pour les problèmes de composition et de comparaison d'états, la production d'une écriture mathématique qui traduit l'énoncé n'est pas aussi simple et nécessite une réflexion sur le sens du problème. De plus, si la méthode enseignée peut dans un premier temps sembler séquentielle, l'enseignant fait constater aux élèves dès que les problèmes de composition sont abordés qu'il est parfois plus simple de commencer par remplir la boîte pour ensuite en déduire l'écriture préalgébrique. Il est à noter que lorsque d'autres temps consacrés à la résolution de problèmes atypiques ou complexes sont organisés dans la classe, cette méthode n'est pas forcément utilisée par les élèves. Elle n'est explicitement contractualisée avec eux par l'enseignant que pour les temps dédiés à la résolution des « problèmes des Faits reliés ».

Le fait de demander systématiquement aux élèves, dès le CP, d'écrire une phrase mathématique avec « ? » qui modélise le problème constitue l'une des singularités de notre démarche, motivée par le fait que pour un grand nombre de problèmes basiques, la production de cette écriture préalgébrique est relativement aisée. Le travail spécifique conduit dans le domaine du calcul permet alors le traitement de cette écriture lorsqu'il est nécessaire pour parvenir au résultat. À terme, les élèves sont conduits à transformer l'écriture produite de manière à obtenir une écriture dans laquelle le « ? » est à droite du signe « = », ce qui prend tout son sens quand les nombres de l'énoncé sont grands ou décimaux et que les calculs sont alors effectués à la calculatrice ou en posant une opération.

2.3.4 Tâches isolées

Lors de séances plénières du collectif, la nécessité de travailler spécifiquement certains aspects du processus de résolution de problèmes a émergé pour essayer de lever certaines difficultés qui avaient été constatées chez les élèves. Nous avons donc exhibé des « tâches isolées » qui permettent aux élèves de s'exercer sur des points localisés de ce processus, étant préalablement entendu que la maîtrise de l'exécution de ces tâches ne serait pas suffisante pour savoir résoudre des problèmes basiques. Chaque tâche conduit à une résolution effective du problème afin d'éviter les « fausses routes » soulignées par Houdement (2018) :

> On trouve ainsi, assez classiquement, à propos des problèmes, et en amont de leur résolution, des consignes du type : trouver la question, souligner les informations utiles, barrer les informations inutiles, voire trouver l'opération… Or ce sont des tâches qui ne peuvent pas être faites sans résoudre le problème, elles sont partie prenante de la résolution, elles ne peuvent pas précéder la résolution. Des travaux plus anciens ont déjà mis en garde sur ces « fausses routes », (Coppé et Houdement 2002; Houdement, 1999, 2003), mais celles-ci résistent. (p. 115).

Voici un premier exemple de tâche isolée que nous avons nommée « Faire parler les écritures mathématiques » avec les enseignants de notre projet : une écriture préalgébrique étant donnée, il s'agit de produire un énoncé de problème contextualisé qui peut être modélisé par cette écriture, puis de résoudre le problème. Par exemple, à partir de l'écriture « 12 - ? = 5 », on peut proposer le problème « Yanis avait 12 cartes. Il en a perdu pendant la partie et maintenant, il lui en reste 5. Combien a-t-il perdu de cartes pendant la partie? » qui est ensuite résolu selon la méthode présentée au paragraphe précédent. Comme Sander (2018, p. 124), nous avons nous aussi remarqué lors des expérimentations que les élèves rédigent des énoncés en privilégiant spontanément certaines catégories de problèmes : en particulier dans le champ additif, ils créent presque exclusivement des problèmes de transformation d'états. Pour pallier ce phénomène, il est possible d'affiner la consigne en précisant un contexte dans lequel le problème imaginé doit se dérouler ou bien en donnant à l'avance la question du problème (par exemple, inventer un problème qui se modélise par « 11 - ? = 5 » et qui parle d'une équipe avec des filles et des garçons ou bien dont la question est « Combien y a-t-il de filles dans cette équipe? »). La tâche « Faire parler les écritures mathématiques » correspond en quelque sorte à l'inverse de la production de l'écriture préalgébrique traduisant l'énoncé dans le processus de résolution de problème. Il est nécessaire de savoir la réaliser lorsque dans une démarche d'évaluation de sa stratégie, on souhaite vérifier si la modélisation du problème que l'on a fournie est correcte.

Un autre exemple de tâche isolée très investie par les enseignants du collectif est le « nombre mystère ». On part d'un « énoncé mathématique », c'est-à-dire un énoncé de problème qui décrit des actions mathématiques portant sur des nombres comme, par exemple, « J'ai 3. Je lui ajoute le nombre mystère. J'obtiens 8. Quel est le nombre mystère? ». Il faut produire une écriture préalgébrique qui modélise le problème (« 3 + ? = 8 » dans notre exemple) puis déterminer la valeur du « ? »[13]. Plusieurs raisons ont motivé la mise en place de cette tâche dans le cadre de notre projet : d'une part, pour que les élèves puissent appliquer la méthode

---

[13] C'est un « programme de calcul » dans l'enseignement secondaire français.

pour résoudre les problèmes, décrite dans le paragraphe 2.3.3, il est nécessaire qu'ils sachent manier et produire des écritures préalgébriques. La forme particulière des énoncés mathématiques permet de lever un certain nombre de difficultés habituellement présentes dans le processus de résolution de problème (compréhension du lexique, interprétation de l'énoncé, etc.) afin que les élèves puissent se concentrer sur l'élaboration de l'écriture préalgébrique, ce qui fait du nombre mystère la tâche dédiée du dispositif pour que les élèves s'exercent à la production de ces écritures. D'autre part, cette tâche permet de conduire avec les élèves un travail spécifique sur le langage mathématique et sa traduction en signes mathématiques. Nous proposons également une variante intitulée « nombre mystère inversé » : une écriture préalgébrique est donnée, il faut produire un énoncé mathématique associé à cette écriture puis déterminer la valeur du « ? ». Pour différencier la tâche, on peut ajouter des contraintes sur l'énoncé : par exemple à partir de « ? : 6 = 8 », produire un énoncé qui contient le mot « quotient ».

3. Méthodologie

Afin de répondre aux questions de recherche formulées dans le paragraphe 1.6, nous nous appuyons sur les résultats obtenus à un test soumis à plusieurs reprises à une cohorte composée de tous les élèves de l'école Ferdinand Buisson dans laquelle a débuté la recherche-action et qui étaient scolarisés en CP (6-7 ans) lors de la première année du projet.

3.1 Échantillons étudiés

La cohorte a été suivie pendant deux ans : en année 1, les élèves étaient en classe de CP (6-7 ans) et en année 2 en classe de CE1 (7-8 ans). Dans l'analyse des résultats au test, la cohorte est scindée en deux catégories : la catégorie A constituée de 20 élèves qui étaient dans des classes n'ayant pas utilisé le dispositif « Faits reliés » en année 1 (CP) mais l'ayant utilisé en année 2 (CE1) et la catégorie B constituée de 28 élèves qui étaient dans des classes l'ayant utilisé en année 1 (CP) et en année 2 (CE1). La cohorte ne comprend pas d'élèves n'ayant utilisé le dispositif ni en année 1 (CP) ni en année 2 (CE1) car tous les enseignants de CE1 de l'école avaient souhaité rejoindre le projet en année 2. Lors de l'année 1, les enseignantes de CP des élèves de la catégorie A utilisaient la MHM[14] (Pinel, 2019) pour enseigner les mathématiques. Les 48 élèves de la cohorte ont passé le même

[14] Méthode heuristique de mathématiques (Pinel, 2019) : il s'agit d'un ensemble de ressources mathématiques (programmation, séquences, supports de jeux, matériel) conçues par Nicolas Pinel et disponibles gratuitement en ligne. C'est la version 2024 qui est actuellement consultable (Pinel, 2024).

test[15] à trois reprises (figure 8) : une première fois au mois de septembre de l'année 1, une deuxième fois au mois de septembre de l'année 2 (CE1) et une troisième fois au mois de juin de l'année 2 (CE1) du projet. Les élèves absents à l'une des trois passations n'ont pas été pris en compte dans la cohorte. Initialement, une passation était également prévue en fin d'année 1 (CP), mais elle a été empêchée par le confinement décrété en France en raison de la pandémie de Covid-19.

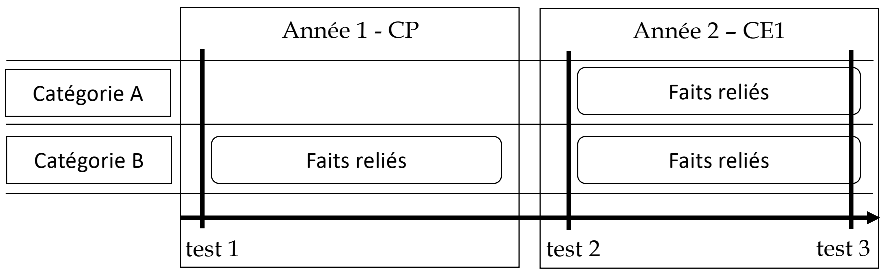

Figure 8. Passation du test au cours des deux années

3.2 Composition du test

Le test est constitué de deux parties : une première composée de calculs à effectuer et une seconde composée de problèmes basiques du champ additif à résoudre.

3.2.1 Description et analyse des items de la partie Calcul

La partie Calcul est formée de 3 séries de calculs à effectuer : 12 calculs d'addition, 12 calculs de soustraction et 12 calculs d'addition à trou ou de soustraction à trou.

2 + 2 = …	2 + 6 = …	10 + 4 = …
4 + 6 = …	7 + 5 = …	8 + 3 = …
3 + 2 = …	8 + 8 = …	7 + 4 = …
6 + 7 = …	6 + 9 = …	5 + 8 = …

7 – 2 = …	8 – 4 = …	9 – 3 = …
14 – 7 = …	12 – 5 = …	13 – 6 = …
10 – 4 = …	18 –10 = …	14 – 8 = …
15 – 6 = …	12 – 7 = …	11 – 6 = …

6 + … = 12	2 + … = 6	7 – … = 3
9 + … = 18	3 + … = 7	10 – … = 4
5 + … = 10	6 + … = 13	16 – … = 8
2 + … = 10	8 + … = 15	15 – … = 9

Figure 9. Les trois séries de calcul

Les enseignants de CP ont pour consigne de faire passer le test à leurs élèves après avoir introduit les signes « + », « - » et « = », ce qui a lieu traditionnellement dans le courant du mois de septembre. Tous les calculs se situent dans le champ numérique des tables d'addition. Nous rappelons que selon les programmes actuels français (MEN, 2019, 2022), elles doivent être complètement mémorisées à

[15] Les passations étant espacées de respectivement 1 an et 9 mois et les items ne faisant l'objet d'aucune reprise écrite ou orale en classe en dehors des passations, nous supposons qu'un phénomène d'oubli naturel des énoncés se produit entre deux passations.

la fin du cycle 2 (9 ans) et pour la plupart dès la fin du CP (7 ans). De plus, les programmes français stipulent qu'à la fin de l'école maternelle, les élèves doivent savoir composer et décomposer des nombres jusqu'à 10 (MEN, 2015). Parmi les items du test, on note que 4 des 12 calculs d'addition, 4 des 12 calculs de soustraction et 6 des 12 calculs d'addition à trou ou de soustraction à trou correspondent à la décomposition d'un nombre inférieur ou égal à 10. Ils sont donc associés à des faits numériques déjà côtoyés par les élèves au début du CP sans être nécessairement mémorisés.

Dans la MHM (Pinel, 2019) utilisée par les enseignantes de CP des élèves de la catégorie A, un travail visant la mémorisation des tables d'addition est conduit tout au long de l'année. Par exemple, les élèves effectuent régulièrement des « Chronomaths », exercices en temps limité au cours desquels ils doivent effectuer un certain nombre de calculs d'addition, de soustraction ou d'addition à trou. Des procédures de calcul telles que les « presque-doubles » sont enseignées. En revanche, on ne trouve pas de séance spécifique concernant la perception d'équivalence entre écritures mathématiques additives et soustractives.

3.2.2 Description et analyse des items de la partie Problèmes

La partie Problèmes est constituée de huit problèmes basiques du champ additif :

A. Léa a des bonbons. Paul lui en donne 7. Maintenant, elle a 15 bonbons. Combien avait-elle de bonbons au début?
B. Dans l'équipe bleue, il y a 8 élèves. 5 sont des filles. Combien y a-t-il de garçons dans cette équipe?
C. En arrivant à l'école, Léo a 18 billes. Il fait une partie à la récréation et il en perd. En rentrant chez lui le midi, il lui reste 9 billes. Combien a-t-il perdu de billes?
D. Pierre a 9 € dans son porte-monnaie. Il a 6 € de moins que moi. Combien ai-je dans mon porte-monnaie?
E. À la boulangerie, je dépense 4 €. En rentrant chez moi, il reste 8 € dans mon porte-monnaie. Combien avais-je d'argent en arrivant à la boulangerie?
F. Eliot a 13 ans. Il a 3 ans de plus que sa sœur. Quel âge a sa sœur?
G. Il y a des bonbons dans la boîte. J'en ajoute 28. Maintenant il y en a 45. Combien y avait-il de bonbons dans la boîte au départ?
H. Paul a 35 billes. Il en perd à la récréation. Quand il retourne en classe, il lui en reste 23. Combien a-t-il perdu de billes à la récréation?

Nous croisons trois variables (tableau 2) pour analyser le degré de complexité de ces problèmes : la première se rapporte à la nature des nombres en jeu, la deuxième correspond à la catégorie à laquelle appartient le problème dans la typologie de Vergnaud (1986) associée à la place de l'inconnue. Nous nous appuyons sur l'étude de Riley et al. (1983) qui montre que cette variable a une incidence sur la complexité du problème. Enfin, la troisième variable est la présence ou l'absence de mots induisant favorablement ou défavorablement une opération.

Tableau 2 : Récapitulatif des valeurs des variables pour les huit problèmes du test

Problème	Nombres en jeu	Cat. Vergnaud; inconnue	Mot inducteur
A	Presque double, $10 < \sum < 20$	Transformation +; état initial	« donne »
B	$5 + n < 10$, $\sum < 10$	Composition; un des états	
C	Double, $10 < \sum < 20$	Transformation -; transformation	« perd »
D	$10 < \sum < 20$	Comparaison -; un des états	« moins »
E	$10 < \sum < 20$	Transformation -; état initial	« dépense »
F	$10 + n$, $10 < \sum < 20$	Comparaison +; un des états	« plus »
G	a, b > 10, $\sum < 50$	Transformation +; état initial	« ajoute »
H	a, b > 10, $\sum < 50$	Transformation -; transformation	« perd »

L'analyse des trois variables sera effectuée plus en détail lors de l'étude des résultats des élèves. Voici quelques remarques préliminaires : concernant la première variable, les nombres en jeu les plus facilitateurs sont ceux présents dans le problème B (décomposition étudiée dès la maternelle d'un nombre inférieur à 10), C (double compris entre 10 et 20, étudié dans toutes les classes de CP) et F (décomposition du type 10 + n d'un nombre inférieur à 20, étudiée dans toutes les classes de CP) alors que les plus complexes sont ceux des problèmes G et H (champ numérique non travaillé en maternelle). Au regard de la deuxième variable, l'étude de Riley et al. (1983) montre que le problème F est le plus complexe des huit problèmes posés, que ce soit chez des élèves de 6-7 ans (CP) que chez ceux de 7-8 ans (CE1). Enfin la variable 3 est favorable dans les problèmes C et H, absente dans le problème B et défavorable dans les problèmes A, D, E, F et G.

Dans la MHM (Pinel, 2019) utilisée par les enseignantes de CP des élèves de la catégorie A, une progression en résolution de problèmes basiques du champ additif est proposée. Des problèmes de transformation avec recherche de l'état final ou de l'état initial et des problèmes de composition avec recherche du composé y sont abordés. L'auteur précise qu'en CP, « ne pas aborder toutes les typologies trop tôt est volontaire : il faut du temps d'entraînement à résoudre des problèmes afin de permettre à l'élève de se constituer une première mémorisation de problèmes » (Pinel, 2019, p. 14 du guide CP).

3.3 Conditions de passation

Nous avons donné les mêmes consignes de passation à tous les enseignants faisant passer le test à leurs élèves : les élèves reçoivent un livret papier individuel au format A5. Pour la partie Calcul, chaque série est proposée sur une page différente sous la forme d'un tableau (cf. figure 9). L'enseignant précise avant le début du test que l'on peut effectuer les calculs d'une série dans l'ordre que l'on souhaite. Les élèves disposent de 90 secondes par série pour répondre à l'écrit. L'enseignant n'effectue pas de lecture à voix haute. Plusieurs auteurs tels que Van de Walle (2007) parlent d'automaticité concernant la restitution d'un fait numérique si une réponse est produite en moins de 3 secondes. En proposant 90 secondes par série de calcul (soit 7,5 secondes en moyenne par calcul), nous ne pourrons pas attester d'une forme d'automaticité chez les élèves. Nous avons toutefois fait le choix d'accorder un temps plus long pour permettre la lecture du calcul et l'écriture du résultat car nous souhaitions adopter une modalité de passation du test qui perturbe peu le rythme habituel de la classe. Pour la partie Problèmes, chaque page du livret contient un énoncé et un emplacement pour la réponse qui est suffisamment vaste pour permettre d'écrire des calculs, de dessiner, de poser une opération, etc. Les problèmes sont traités l'un après l'autre : l'enseignant lit l'énoncé à voix haute, puis les élèves disposent de 15 secondes pour répondre pour les problèmes A à F (45 secondes pour les problèmes G et H). Enfin puisque le même test est proposé à 3 reprises, il est demandé aux enseignants qu'après chaque passation, les calculs et les problèmes ayant servi de support ne soient pas réexploités en classe.

4. Effets sur les performances des élèves : analyse des résultats

Nous analysons dans les paragraphes suivants les résultats obtenus par les élèves aux tests qui viennent d'être décrits.

4.1 Analyse des résultats en calcul

Pour la partie Calcul, la moyenne des pourcentages de réussite au test 1 (au début du CP) des élèves de la catégorie A (élèves ayant utilisé le dispositif en CE1 seulement) est égale à 21,25 % et celle de la catégorie B (élèves ayant utilisé le dispositif en CP et en CE1) est égale à 12,9 %. Cette différence importante nous conduit à questionner l'équivalence des deux échantillons de population étudiés au début de l'expérimentation. La condition de normalité n'étant pas vérifiée pour les séries associées aux catégories A et B, le test t de Student ne peut pas être utilisé. Nous effectuons donc un test U de Mann-Whitney, test non paramétrique qui permet de savoir si deux échantillons sont statistiquement équivalents ou significativement différents en s'affranchissant de la condition de normalité. Nous prenons 0,05 comme valeur limite pour accepter ou rejeter notre hypothèse.

Appliqué aux scores des deux catégories d'élèves au test 1, le test U fournit une valeur $p \approx 0,04 < 0,05$, ce qui permet de rejeter l'hypothèse d'équivalence des deux catégories d'élèves. On constitue la catégorie B′ en supprimant de la catégorie B les 10 élèves ayant les scores les plus faibles au test 1 afin que le score le plus faible soit le même pour les deux catégories d'élèves. Le test U de Mann-Whitney appliqué aux scores des catégories A et B′ d'élèves au test 1 fournit alors une valeur $p \approx 0,96$. Ces deux échantillons sont donc statistiquement équivalents au départ de l'expérimentation. Le tableau 3 contient les moyennes des pourcentages de réussite aux trois tests pour les catégories A et B′, accompagnés des différences de moyennes et des calculs de valeur p.

Tableau 3 : Moyennes des pourcentages de réussite aux tests 1, 2 et 3 sur la partie « Calcul »

	Test 1	Test 2	Test 3
M_1 = Moyenne % réussite cat. A	21,25	46,39	73,19
M_2 = Moyenne % réussite cat. B′	18,98	68,83	88,43
$M_2 - M_1$	-2,27	22,44	15,24
Valeur p	0,96	0,02	0,12

Le tableau 4 recense les scores moyens obtenus par les élèves aux trois séries de calculs pour les tests 1, 2 et 3 : la série Additions correspond aux 12 calculs d'additions, la série Soustraction aux 12 calculs de soustractions et la série Calculs à trou aux 12 calculs d'additions à trou et de soustractions à trou. Les différences de moyennes entre catégorie A et catégorie B′ ainsi que les valeurs p sont précisées.

Tableau 4 : Moyennes des pourcentages de réussite par séries aux tests 1, 2 et 3 sur la partie « Calcul » pour les catégories A et B′

	Additions			Soustractions			Calculs à trou		
	Test 1	Test 2	Test 3	Test 1	Test 2	Test 3	Test 1	Test 2	Test 3
m_1 = moy. % réussite cat. A	33,33	65,00	82,92	15,42	34,17	65,00	15,00	40,00	71,67
m_2 = moy. % réussite cat. B′	29,63	75,93	91,67	13,89	58,33	83,80	13,43	72,22	89,81
$m_2 - m_1$	-3,70	10,93	8,75	-1,53	24,16	18,80	-1,57	32,22	18,14
Valeur p	0,84	0,17	0,44	0,77	0,01	0,06	0,94	0,01	0,27

Pour apporter des réponses à la question de recherche (1), nous comparons les moyennes des scores au test 2 entre les élèves de la catégorie A et ceux de la catégorie B′. Les résultats du tableau 3 sont nettement favorables à l'utilisation du dispositif, la moyenne des scores des élèves de la catégorie B′ étant supérieure de 22,44 % à celle des élèves de la catégorie A après un an d'utilisation du dispositif. De plus, la différence de réussite est statistiquement significative ($p \approx 0{,}02 < 0{,}05$). Si l'on compare les scores en fonction des séries de calcul, on constate dans le tableau 4 que les élèves ayant utilisé le dispositif réussissent davantage quelle que soit la série, mais que la différence n'est statistiquement pas significative pour les calculs d'addition ($p \approx 0{,}17 > 0{,}05$), ce qui peut s'expliquer par le fait que la mémorisation des tables d'addition est un objectif d'enseignement fixé par les programmes français dès le CP et que la ressource utilisée par les enseignantes de CP des élèves de la catégorie A (la MHM) propose un travail dédié à cette mémorisation. La différence de réussite est en revanche statistiquement significative pour les calculs de soustraction et les calculs à trou ($p \approx 0{,}01$ dans les deux cas).

Nous nous intéressons maintenant à la partie Calcul de la question de recherche (3). Pour cela, nous comparons les moyennes des scores au test 3 des élèves de la catégorie A à ceux de la catégorie B′. Après deux ans d'utilisation du dispositif, nous lisons dans le tableau 3 que les élèves de la catégorie B′ réussissent mieux les items en Calcul que ceux de la catégorie A qui n'en ont bénéficié qu'un an (+15,24 %). Toutefois, cette différence n'est statistiquement pas significative ($p \approx 0{,}12 > 0{,}05$). Dans le détail, on peut constater dans le tableau 4 que c'est surtout pour les calculs de soustraction que les élèves de la catégorie B′ marquent la différence ($p = 0{,}06$).

Pour finir, voici dans les tableaux 5a et 5b les moyennes globales et par série des pourcentages de réussite aux tests 1, 2 et 3 obtenus par les élèves de la catégorie C constituée des 10 élèves de la catégorie B ayant les scores les plus faibles au test 1, comparées à celles des élèves de la catégorie A. Ces 10 élèves sont ceux qui ont été éliminés de la catégorie B pour obtenir la catégorie B′ dans les tableaux 3 et 4.

Tableau 5a : Moyennes des pourcentages de réussite aux tests 1, 2 et 3 sur la partie « Calcul » pour les élèves des catégories A et C

	Test 1	Test 2	Test 3
Moy. % réussite cat. A	21,25	46,39	73,19
Moy. % réussite cat. C = cat. B\cat. B′	1,94	37,50	75,28

Tableau 5b : Moyennes des pourcentages de réussite par séries aux tests 1, 2 et 3 sur la partie « Calcul » pour les élèves des catégories A et C

	Additions			Soustractions			Calculs à trou		
	Test 1	Test 2	Test 3	Test 1	Test 2	Test 3	Test 1	Test 2	Test 3
Moy. % réussite cat. A	33,33	65,00	82,92	15,42	34,17	65,00	15,00	40,00	71,67
Moy. % réussite cat. C	4,17	54,17	89,17	0,00	25,00	69,17	1,67	33,33	67,50

On constate dans le tableau 5a qu'au test 3, la moyenne de leurs pourcentages de réussite dépasse légèrement celle de l'ensemble de la catégorie A. Dans le détail (tableau 5b) après deux ans d'utilisation du dispositif, ces 10 élèves obtiennent en moyenne des résultats relativement meilleurs que ceux de la catégorie A pour les calculs d'addition ou de soustraction et un peu plus faibles pour les calculs à trou. Ces scores concernant les élèves les plus en difficulté sont eux aussi favorables à l'utilisation du dispositif pour la dimension « Calcul ».

4.2 Analyse globale des résultats en résolution de problèmes

Pour les items de la partie Problèmes, les deux séries de scores moyens au test 1 ne vérifient pas la condition de normalité. Les hypothèses pour un test t de Student n'étant pas vérifiées, nous utilisons donc à nouveau un test U de Mann-Whitney pour savoir si les échantillons de départ sont statistiquement équivalents. Le test U appliqué aux moyennes des scores[16] des catégories A et B d'élèves pour les huit questions de la partie « Problèmes » du test 1 fournit une valeur $p \approx 0{,}58 > 0{,}05$. Nous supposons par conséquent que les catégories A et B sont équivalentes au début de l'expérimentation et nous conservons les catégories telles quelles pour l'analyse.

Tableau 6 : Moyennes des pourcentages de réussite et de non-réponse des élèves des catégories A et B aux huit problèmes pour les tests 1, 2 et 3, écarts de réussite et valeurs p associées

	Réussite aux huit problèmes			Non-réponse aux huit problèmes		
	Test 1	Test 2	Test 3	Test 1	Test 2	Test 3
μ_1 = moyenne % cat. A	10,63	20,00	48,75	41,88	35,00	23,13
μ_2 = moyenne % cat. B	9,82	40,63	65,18	40,18	25,89	4,91
$\mu_2 - \mu_1$	-0,81	20,63	16,43	-1,70	-9,11	-18,22
Valeur p	0,58	0,01	0,05	0,59	0,28	0,001

16 Une question de la partie Problème est considérée comme réussie si la valeur numérique correcte figure dans la réponse de l'élève.

Dans le tableau 6, la comparaison des scores moyens au test 2 de la catégorie A avec ceux de la catégorie B nous permet, en réponse à la question de recherche (2), de conclure à une amélioration plus importante des performances en résolution de problèmes basiques chez les élèves ayant bénéficié du dispositif. En effet, si les deux catégories d'élèves progressent en moyenne entre le test 1 et le test 2, on note que la progression est beaucoup plus importante pour les élèves de la catégorie B que pour ceux de la catégorie A au cours de l'année de CP et qu'ils atteignent après un an d'utilisation du dispositif des scores moyens supérieurs de plus de 20 % à ceux de la catégorie A. Cette différence est statistiquement significative avec une valeur p nettement inférieure à 0,05 ($p \approx 0,01$).

Nous pouvons également répondre positivement à la partie Problèmes de la question (3). Nous comparons dans le tableau 6 les pourcentages moyens de réussite au test 3 des élèves de la catégorie A avec ceux de la catégorie B. À nouveau, nous notons que les deux catégories d'élèves progressent en moyenne entre le test 2 et le test 3, c'est-à-dire pendant l'année de CE1 au cours de laquelle les élèves de la catégorie A commencent à utiliser le dispositif alors que ceux de la catégorie B l'utilisent pour la deuxième année consécutive. À la fin de l'année 2, les scores moyens des élèves de la catégorie B restent supérieurs de plus de 16 % à ceux des élèves de la catégorie A, ce qui, d'un point de vue statistique, représente une différence « tout juste » significative ($p \approx 0,05$). De plus, les élèves de la catégorie A progressent beaucoup plus au cours de l'année pendant laquelle ils suivent le dispositif qu'au cours de l'année pendant laquelle ils ne le suivent pas.

Il nous semble particulièrement intéressant de porter un regard sur le pourcentage moyen de non-réponse : le taux est similaire dans les deux catégories en début de CP. Toutefois on note une très forte diminution chez les élèves de la catégorie B après deux ans d'utilisation du dispositif, ce qui constitue une différence très significative avec le taux moyen des élèves de la catégorie A (nous avons volontairement arrondi la valeur $p \approx 0,001$ à la troisième décimale pour ne pas faire apparaître une valeur $p = 0,00$ dans le tableau). Nous pouvons en partie l'attribuer à l'augmentation plus conséquente du taux de réponses justes, mais on peut également l'interpréter comme un gain plus important de confiance en soi en situation de résolution de problèmes chez les élèves de cette catégorie. Nous pouvons supposer que les élèves sont accoutumés à la résolution de ces problèmes et qu'ils se sentent également outillés face à ce type de situation.

4.3 Analyse par problème des résultats en résolution de problèmes

Pour analyser plus finement les scores moyens des élèves, nous étudions chaque problème individuellement en nous appuyant sur les trois variables identifiées dans le paragraphe 3.2.2. Le tableau 7 permet de porter un regard sur la nature des problèmes faisant réussir ou échouer les élèves au début de l'année de CP.

Tableau 7 : Moyennes des pourcentages de réussite des élèves des catégories A et B réunies à chaque problème pour le test 1

	Test 1							
Problème	A	B	C	D	E	F	G	H
Moy. % réussite cat. A+ cat. B	4,17	20,83	12,50	6,25	12,50	22,92	0,00	2,08

Les problèmes les plus réussis sont les problèmes B et F. La réussite au problème B peut s'expliquer par la nature de la variable 1 d'une part (8 = 5 + 3 est un fait numérique souvent mémorisé avant l'entrée au CP car il correspond à une décomposition de 8 visible sur les doigts de la main travaillée en maternelle) et de la variable 2 d'autre part (c'est un problème de composition dans lequel on cherche un des états : il est réussi par 39 % des élèves de cet âge dans l'étude menée par Riley et al.,1983). Le problème F est un problème de comparaison positive dans lequel la valeur d'un des deux états est recherchée, ce qui en fait un type de problème (variable 2) relativement échoué à cet âge (11 % de réussite) dans l'étude de Riley et al. (1983). De plus, la présence de l'expression « de plus » dans l'énoncé induit une addition alors qu'une soustraction (13 - 3) est nécessaire pour obtenir le résultat (variable 3 défavorable). Toutefois, on peut faire l'hypothèse que le test ayant lieu en début d'année de CP, le formalisme mathématique (signe « + » et sa verbalisation « plus ») n'a encore quasiment pas été utilisé, ce qui atténue l'effet défavorable de la variable 3. De plus, les nombres en jeu sont dans un champ numérique assez bien maîtrisé par les élèves à ce stade de la scolarité française (variable 1). Inversement, les problèmes les plus échoués lors du test 1 sont les problèmes A, G et H avec moins de 5 % de réussite. Pour les problèmes G et H, l'échec quasi systématique s'explique facilement par la nature de la variable 1 : en effet, le champ numérique concerné dans ces deux problèmes est très peu connu des élèves à cet âge, ce qui suffit à les décourager. Le problème A, quant à lui, est un problème de transformation dans lequel on cherche l'état initial. La nature de la variable 2 permet d'expliquer le faible taux de réussite. En effet, Riley et al. (1983) montrent que ces problèmes sont nettement plus difficiles que ceux pour lesquels on cherche l'état final. De plus, la variable 3 joue défavorablement.

Comparons maintenant le taux moyen de réussite des élèves de la catégorie A à celui des élèves de la catégorie B pour chacun des huit problèmes aux tests 2 et 3 (tableau 8).

Tableau 8 : Moyennes des pourcentages de réussite des élèves des catégories A et B à chaque problème pour les tests 2 et 3

	Problème	A	B	C	D	E	F	G	H
Test 2	μ'_1 = moyenne % réussite cat. A	5,00	30,00	20,00	5,00	25,00	25,00	20,00	30,00
	μ'_2 = moyenne % réussite cat. B	28,57	46,43	67,86	25,00	46,43	64,29	14,29	32,14
	$\mu'_2 - \mu'_1$	23,57	16,43	47,86	20,00	21,43	39,29	-5,71	2,14
Test 3	μ''_1 = moyenne % réussite cat. A	55,00	60,00	65,00	40,00	40,00	60,00	20,00	50,00
	μ''_2 = moyenne % réussite cat. B	64,29	64,29	89,29	50,00	57,14	82,14	46,43	67,86
	$\mu''_2 - \mu''_1$	9,29	4,29	24,29	10,00	17,14	22,14	26,43	17,86
Δ test 3 - test 2	Cat. A : $\mu''_1 - \mu'_1$	50,00	30,00	45,00	35,00	15,00	35,00	0,00	20,00
	Cat. B : $\mu''_2 - \mu'_2$	28,57	17,86	21,43	25,00	10,71	17,85	32,14	35,72

En première lecture du tableau 8, nous remarquons que la catégorie B obtient presque toujours des scores supérieurs à ceux de la catégorie A. Seul le problème G fait exception lors du test 2 et ce n'est qu'à la fin de la deuxième année d'expérimentation que le score de la catégorie B dépasse alors largement celui de la catégorie A pour ce problème.

Pour affiner les réponses apportées à la question de recherche (2), nous étudions plus particulièrement les problèmes G et H pour lesquels on observe des taux de réussite au test 2 sensiblement similaires dans les deux catégories d'élèves et les problèmes C et F qui sont beaucoup mieux réussis lors du test 2 par les élèves ayant bénéficié du dispositif.

Les problèmes G et H se distinguent naturellement des 6 autres problèmes par la nature de la variable 1 : les nombres en présence sont en dehors du champ numérique des tables. Les élèves ne s'appuient donc pas sur un fait numérique mémorisé pour reconnaître l'opération en jeu dans le problème. La nature de la variable 2 de ces deux problèmes (recherche de l'état initial dans un problème de transformation positive et recherche de la transformation dans un problème de transformation négative) en fait des problèmes complexes au regard des résultats de l'étude de Riley et al. (1983). Pour le problème G, l'écriture congruente à l'énoncé est « ? + 28 = 45 ». Si l'élève produit cette écriture, il peut soit chercher à déterminer la valeur de « ? » sans transformer l'écriture, mais il doit alors

« franchir une dizaine », soit transformer cette écriture en « 45 – 28 = ? » pour pouvoir poser ou effectuer de tête une soustraction à retenues (variable 1).

Pour le problème H, l'écriture congruente à l'énoncé est « 35 - ? = 23 ». Que ce soit en transformant cette écriture en « 35 - 23 = ? » ou non, il est possible de raisonner directement sur le nombre de dizaines et le nombre d'unités (variable 1), ce qui peut en partie expliquer que ce problème soit mieux réussi que le problème G dans chacune des deux catégories d'élèves. Une autre raison tient à ce que la variable 3 est défavorable pour le problème G alors qu'elle est favorable pour le problème H.

Analysons maintenant le problème C. Le fait numérique en présence (variable 1) est un double, il est censé être connu de tous les élèves en début de CE1. La nature de la variable 2 (recherche de la transformation dans une transformation négative d'état) en fait un problème assez difficile dans les résultats de l'étude de Riley et al. (1983). L'écriture congruente à l'énoncé est « 18 -? = 9 » : le fait numérique « 9 + 9 = 18 » ne peut pas être convoqué directement, il faut transformer cette écriture en « 9 + ? = 18 » pour pouvoir y faire appel. Enfin, la variable 3 joue favorablement, le mot « perd » induisant une soustraction. Dans ce problème, l'application de la méthode du dispositif décrite au paragraphe 2.3.3 est efficace et permet de surmonter les difficultés générées par la nature de la variable 2.

Dans le problème F, les nombres en jeu (variable 1) correspondent à une décomposition d'un nombre inférieur à 20 connue des élèves en début de CE1 car elle est liée aux apprentissages en numération décimale (13 = 10 + 3). Pour la variable 2 (recherche d'un des états dans une comparaison positive d'états), il s'agit d'un problème identifié comme très complexe dans l'étude de Riley et al. (1983) avec un des plus faibles taux de réussite chez les élèves de cet âge dans leur expérimentation. L'écriture congruente à l'énoncé « 13 = ? + 3 » permet de convoquer directement le résultat des tables mémorisé « 10 + 3 = 13 ». Enfin, la variable 3 joue défavorablement, le mot « plus » induisant une addition. De nouveau dans ce problème, l'application de la méthode du dispositif est efficace car elle permet à une majorité d'élèves de la catégorie B (18 élèves sur 28) de surmonter les difficultés générées par la nature des variables 2 et 3. On peut noter que les élèves de la catégorie A obtiennent un score moyen très peu supérieur à celui obtenu au test 1 par l'ensemble de la cohorte (+2,08 %), ce que l'on pourrait expliquer par le fait que l'effet défavorable de la variable 3 s'est développé chez les élèves dans le courant de l'année de CP en lien avec le travail conduit sur le langage mathématique associé au formalisme. On peut supposer que l'enseignement reçu dans le cadre du dispositif pallie cet effet défavorable.

Nous cherchons pour finir à compléter la réponse que nous apportons à la partie Problèmes de la question de recherche (3) en étudiant les scores moyens des élèves à chaque problème lors du test 3. La lecture des deux dernières lignes du tableau 8 nous permet de constater que les deux catégories d'élèves progressent de manière conséquente lors de l'année de CE1 sur la résolution de tous les problèmes, à l'exception du problème G pour lequel les élèves de la catégorie A ne progressent pas en moyenne (le pourcentage de réussite est identique pour le test 2 et le test 3, mais ce ne sont pas les mêmes élèves qui échouent et qui réussissent). Pour les problèmes A à F, la progression est plus importante chez les élèves de la catégorie A (ligne μ''_1 - μ'_1) que chez ceux de la catégorie B (ligne μ''_2 - μ'_2). Toutefois, les élèves de la catégorie B conservent un score moyen supérieur à celui des élèves de la catégorie A pour tous les problèmes (ligne μ''_2 - μ''_1), ce qui joue en faveur de l'utilisation du dispositif dès le CP.

Pour les problèmes G et H pour lesquels le champ numérique est en dehors de celui des tables d'addition (variable 1), les élèves de la catégorie B progressent plus que ceux de la catégorie A au cours de l'année de CE1 (lignes μ''_1 - μ'_1 et μ''_2 - μ''_1). De plus pour ces deux problèmes, le score moyen des élèves de la catégorie B à la fin du CE1 est nettement supérieur à celui des élèves de la catégorie A, alors que ce n'était pas le cas en début de CE1 lors du test 2. Nous interprétons ces résultats de la façon suivante : le transfert des habiletés de calcul aux plus grands nombres et le gain en situation de résolution de problèmes ne s'opèrent qu'au cours de l'année de CE1 (7-8 ans), ils sont prématurés à l'âge du CP (6-7 ans). Mais il est nécessaire que ces habiletés aient été développées sur les petits nombres au cours de l'année de CP pour qu'elles soient transférées efficacement aux grands nombres dès le CE1.

Les scores moyens de réussite des problèmes C et F qui étaient nettement meilleurs pour la catégorie B que pour la catégorie A à l'issue de la première année le restent à la fin de la deuxième année et ce de manière assez marquée (ligne μ''_2 - μ''_1). On note d'ailleurs que les élèves de la catégorie A n'atteignent pas tout à fait en fin de CE1 les scores moyens qu'obtenaient ceux de la catégorie B au début du CE1.

En revanche pour les problèmes A et B, on ne constate plus de bénéfice notable à l'utilisation du dispositif dans les scores obtenus au test 3. On remarque que la variable 1 est très favorable pour des élèves de fin de CE1 (8 + 7 = 15 et 5 + 3 = 8).

4.4 Corrélation entre réussite en calcul et en résolution de problèmes

Pour apporter des éléments de réponse à la question de recherche (4), nous calculons le coefficient de corrélation *r* de Pearson[17] entre les pourcentages de

[17] Le coefficient de corrélation de Pearson détermine la force de la relation linéaire entre deux variables. Sa valeur, qui est un nombre réel compris entre -1 et 1, détermine l'intensité et le sens

réussite en calcul et les pourcentages de réussite en résolution de problème de chaque élève de la cohorte pour les différentes séries de calcul. On parle usuellement de forte corrélation pour $0{,}5 < r < 0{,}7$ et de très forte corrélation pour $0{,}7 \leq r \leq 1$.

Tableau 9 : Coefficients de corrélation de Pearson pour tous les élèves de la cohorte

		Coefficient *r* de Pearson		
Séries de calcul considérées	Problèmes	Test 1	Test 2	Test 3
Additions + Soustractions + Calculs à trou	A à H	0,71	0,69	0,72
Additions	A à H	0,68	0,53	0,61
Soustractions + Calculs à trou	A à H	0,66	0,70	0,72

Nous constatons qu'il existe une corrélation forte à très forte entre le pourcentage moyen de bonnes réponses aux questions de calcul et celui de bonnes réponses aux questions de résolution de problèmes pour les trois passations du test, ce qui va dans le même sens que les résultats obtenus par Butlen et Pézard (2003) dans leur recherche. Il importe toutefois de nuancer ce constat en rappelant que notre expérimentation porte sur un échantillon très réduit. De plus, une corrélation ne représentant pas une preuve de causalité[18], nous ne pouvons pas conclure de ces seuls résultats que la corrélation positive est attribuable à l'utilisation du dispositif. L'analyse conduite dans les deux paragraphes précédents sur les réussites des élèves des deux catégories aux problèmes C et F laisse toutefois penser que l'enseignement dispensé dans le dispositif a une incidence sur cette relation. De plus, nous constatons dans le tableau 9 que le degré de corrélation est plus fort quand on étudie le lien entre réussite aux problèmes et réussite aux séries de calculs Soustractions et Calculs à trou – qui sont ceux sur lesquels on évalue les habiletés de calcul puisqu'on mobilise les faits reliés – que quand on regarde celui entre réussite aux problèmes et aux items de la série Addition – qui sont ceux sur lesquels on évalue la mémorisation du répertoire.

4.5 Réponses aux questions de recherche

En réponse à la question (1), l'étude montre que l'utilisation du dispositif pendant l'année de CP permet de manière très significative aux élèves en ayant bénéficié de construire plus solidement l'équivalence entre différentes écritures d'addition

de la corrélation entre les deux variables. Plus la relation est forte, plus le coefficient est proche de 1.

18 Relation de cause à effet.

et de soustraction et que dans une moindre mesure, elle favorise une meilleure mémorisation du répertoire additif.

Pour la question (2), l'analyse des résultats au test permet de conclure que l'utilisation du dispositif « Faits reliés » au cours de l'année de CP améliore significativement les performances des élèves en résolution de problèmes basiques du champ additif. Les bénéfices sont plus particulièrement marqués si les nombres en jeu sont dans le champ numérique des tables d'addition et le problème considéré présente au moins l'une des deux caractéristiques suivantes :

- il est échoué par une forte proportion d'élèves dans l'étude de Riley et al. (1983) en raison de la catégorie à laquelle il appartient dans la typologie de Vergnaud (1986) et de la place de l'inconnue,
- un terme de l'énoncé induit l'opération contraire à celle qui conduit à la réponse correcte.

Dans ce cas, la méthode enseignée dans le dispositif « Faits reliés » qui consiste à produire une écriture préalgébrique traduisant le problème avec ou sans transformation permet de déterminer l'inconnue en s'appuyant sur un fait numérique mémorisé, ce qui permet à une majorité d'élèves ayant bénéficié du dispositif de surmonter les difficultés liées aux caractéristiques du problème.

Concernant la partie Calcul de la question (3), l'étude révèle pour toutes les séries de calcul un gain sur les apprentissages chez les élèves utilisant le dispositif pendant deux années plutôt qu'une, mais ce gain n'est pas significatif d'un point de vue statistique, hormis pour les calculs de soustraction pour lesquels il se rapproche d'une différence significative. Pour la partie Problèmes, notre étude fait apparaître un bénéfice sur les performances des élèves en résolution de problèmes basiques du champ additif lorsque le dispositif est utilisé dès le CP plutôt qu'à partir du CE1. Cet avantage reste particulièrement marqué pour les problèmes présentant les caractéristiques énoncées ci-dessus. Il le devient aussi pour les problèmes dont les nombres en présence sont en dehors du champ des tables : il semblerait que pour les élèves ayant bénéficié du dispositif dès le CP, les habiletés de calcul sur les petits nombres qui ont été installées lors de la première année sont mieux transférées aux plus grands nombres au cours de l'année de CE1. De plus, l'utilisation du dispositif dès le CP entraîne une diminution considérable du taux de non-réponse chez les élèves.

Enfin, en réponse à la question (4), il existe une corrélation positive forte à très forte entre les scores obtenus par les élèves à la partie Calcul et ceux qu'ils ont obtenus pour la résolution des huit problèmes. L'analyse des réussites des élèves aux problèmes présentant les caractéristiques énoncées ci-dessus laisse penser que cette corrélation pourrait être en partie attribuée à l'utilisation du dispositif, mais cette expérimentation ne permet pas de conclure de manière certaine.

Les réponses aux questions de recherche sont très encourageantes et nous incitent à continuer à explorer les potentialités de ce dispositif, tant pour les aspects liés au domaine du calcul que pour ceux liés à la résolution de problèmes basiques. Elles sont toutefois à prendre avec précaution car plusieurs points biaisent très certainement les résultats obtenus. Tout d'abord, le nombre d'élèves compris dans l'échantillon étudié est beaucoup trop faible pour tirer des conclusions généralisables. De plus, les tests ont été proposés aux élèves par leur enseignant(e) sur le temps de classe. Malgré un cadrage précis des modalités, nous ne pouvons pas écarter un effet-maître concernant la passation. Enfin, il ne faut pas négliger le fait que l'existence d'un projet de recherche-action a une incidence conséquente sur les pratiques : les enseignants qui y participent consacrent probablement aux mathématiques davantage de temps et d'attention qu'à l'accoutumée, indépendamment du contenu du dispositif proposé. Cela peut avoir un impact non négligeable sur les performances des élèves et ne garantit pas que de tels effets seraient observés avec une diffusion « ordinaire » de ce dispositif.

5. Perspectives

Nous développons dans cette partie nos perspectives de recherche.

5.1 Entrée dans l'algèbre

L'une des spécificités de notre projet réside dans le fait que nous conduisons les élèves dès l'année de CP à produire des écritures préalgébriques pour résoudre des problèmes basiques, puis nous les exerçons à les transformer dans le volet « Calcul » du dispositif. Plusieurs auteurs dont les travaux s'inscrivent dans le domaine de recherche *Early algebra* prônent la pertinence d'un développement de la pensée algébrique dès l'école primaire. Par exemple, Squalli et al. (2020) mentionnent qu'« il ne fait maintenant aucun doute chez les chercheurs de ce mouvement que les élèves du primaire sont capables de penser algébriquement » et que « la formation des enseignants du primaire au développement de la pensée algébrique est sans aucun doute un enjeu important » (p. 10). Fagnant et Hindryckx (2008) rapportent « les difficultés importantes éprouvées par les élèves [de fin de CP] pour créer des liens entre le symbolisme conventionnel (les calculs) et des histoires (des problèmes) ou des stratégies de comptage (les stratégies de résolution de ces problèmes) » (p. 7-8). Aussi plaident-elles en faveur d'un travail sur le sens des opérations et du symbolisme mathématique dès les premiers apprentissages. Grugeon-Allys et Pilet (2021) pointent quant à elles le caractère préalgébrique que peut revêtir la résolution de problèmes basiques dès l'école primaire : « les élèves peuvent, très tôt, être amenés à produire des équations, sous la forme d'égalités à trous, et à raisonner sur des relations équivalentes » (p. 14). Elles soulignent par ailleurs que « les relations exprimées dans la langue naturelle, utilisées pour énoncer un problème, qui ne sont pas congruentes sémantiquement (Duval, 1993) avec le calcul mais le sont avec l'égalité à trous sont particulièrement intéressantes pour le développement de l'activité numérico-algébrique. » (p. 14), ce qui coïncide étroitement avec les situations rencontrées dans notre dispositif. Enfin, pour conduire les élèves à adopter une « démarche experte » en situation de résolution de problème, Fagnant (2018) conseille de les aider à se concentrer non seulement sur les données importantes de l'énoncé (nombres), mais surtout sur les relations qui existent entre les quantités connues et inconnues de la situation (relations algébriques entre ces nombres). Elle cite les travaux de Polotskaïa et Consultant (2010) qui soulignent le manque d'entraînement à la pensée algébrique en primaire.

> Nous pouvons formuler l'hypothèse que les difficultés dans l'apprentissage de l'algèbre sont grandement liées à l'habitude acquise par les élèves de considérer de préférence les nombres eux-mêmes (raisonnement arithmétique) plutôt que les relations entre les nombres (raisonnement pro-algébrique). Cette habitude, causée par un manque d'entraînement à l'analyse de relations entre les quantités, se développe durant les années passées à l'école primaire. (Polotskaïa et Consultant, 2010, p. 13)

La démarche que nous adoptons dans le dispositif « Faits reliés » semble aller dans le sens de plusieurs travaux récents du domaine *Early algebra*. Cela nous incite à nous intéresser à des questions vives présentes dans différentes études de ce mouvement, ce qui ouvre pour nous des perspectives de recherche en lien avec l'entrée dans l'algèbre. En particulier dans notre collectif, des questions restent ouvertes concernant l'utilisation des signes « ? » ou « x » (à partir de quand introduire la lettre?) et de l'expression « phrase mathématique » (à partir de quand parler d'équation?). Nous souhaiterions également suivre une cohorte d'élèves ayant utilisé le dispositif à l'école élémentaire afin d'observer leurs premiers pas en algèbre au cycle 4 (élèves de 12 à 15 ans).

5.2 D'autres travaux sur la résolution de problèmes arithmétiques

De nombreux auteurs se sont penchés sur la question de la résolution des problèmes arithmétiques verbaux et ont cherché des leviers pour aider les élèves à surmonter les difficultés qu'ils rencontrent. Nous revenons sur trois démarches poursuivant cet objectif afin d'expliquer les points communs avec la nôtre et les différences dans les choix conceptuels effectués.

5.2.1 Le raisonnement par analogie

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe 1.3, Julo (2002) décrit l'activité de résolution de problèmes comme un ensemble de processus cognitifs permettant la construction d'une représentation du problème et l'élaboration d'une stratégie de résolution. Il se penche plus particulièrement sur la question de l'analogie qu'il définit comme étant « le traitement de la "ressemblance" qui existe entre des objets ou leurs représentations » (Julo, 2002, p. 32). Selon lui, c'est en raisonnant par analogie à partir des problèmes que nous avons déjà résolus que nous nous constituons des schémas de problèmes. Ainsi,

> c'est le premier problème résolu, avec sa procédure spécifique, qui servirait d'ancrage pour aborder le suivant et l'interpréter. Le fait de résoudre ce second problème et sa forte ressemblance avec le premier entraîneraient alors une modification du prototype en renforçant sa disponibilité et son effet structurant. (Julo, 1995, p. 90).

La présentation de notre démarche peut laisser penser que le raisonnement par analogie y joue un rôle secondaire dans le sens où face à un énoncé de problème, l'élève fournit une écriture préalgébrique qui le modélise, quelle que soit la catégorie à laquelle appartient ce problème et sans qu'un problème tenant lieu de prototype ne soit identifié. Or dans plusieurs cas, une analogie est nécessaire à la construction d'un schéma de problème. Prenons l'exemple des problèmes de produit cartésien du type « Pour jouer au foot, Timéo a 4 shorts différents. Il a assez de maillots pour faire 28 tenues "short + maillot" ». Des problèmes de cette catégorie évoquant différents contextes apparaissent régulièrement dans les listes de problèmes du dispositif à partir de la fin du CE1 (7-8 ans). L'objectif est que les élèves perçoivent les ressemblances entre les problèmes de cette catégorie afin qu'ils soient capables de les traduire automatiquement par une écriture multiplicative. Au cours des expérimentations, il est apparu aux membres du collectif qu'une dialectique s'installait entre l'analogie faite avec les problèmes de produit cartésien déjà rencontrés et la production de l'écriture multiplicative. En effet, l'analogie aidait à produire le modèle (« Ce problème est comme le problème des tenues de foot, donc il faut écrire une multiplication ») et inversement, le fait de produire ce modèle ancrait l'analogie entre les problèmes considérés (« Tous ces problèmes sont liés entre eux par une écriture multiplicative »), ce qui renforçait les compétences des élèves à faire des analogies. Pour que cette analogie soit visible pour tous les élèves, c'est à l'enseignant qu'il revient de l'expliciter. Cela nous invite à être vigilants pour la diffusion de notre dispositif : nous devrons mettre en évidence la nécessité pour l'enseignant de verbaliser les analogies entre certains problèmes.

5.2.2 Le dispositif ACE

Le dispositif ACE[19] (Arithmétique et compréhension à l'école) est un ensemble de ressources conçues dans le cadre d'une recherche collaborative nationale qui propose une progression en mathématiques au CP et au CE1 centrée sur le calcul et la résolution de problèmes. Il existe plusieurs similarités entre ce dispositif et celui des « Faits reliés ». Par exemple, la représentation en boîte de Fischer est régulièrement mobilisée : elle est parfaitement identique à la boîte utilisée dans notre démarche et les élèves s'entraînent également à retrouver toutes les écritures possibles que la boîte peut produire. Parmi les choix qu'effectuent les auteurs, la soustraction est abordée à partir d'une situation de comparaison plutôt qu'une situation plus classique dans laquelle on retire une quantité à une autre et qui « associe la soustraction à une signification très spécifique de perte qui rend difficile par la suite le transfert à une situation de gain, car il est difficile de faire comprendre qu'un gain est assimilable à une opération de retrait. » (Vilette et al., 2017, p. 108). En référence aux variables que nous avons définies dans le paragraphe 3.2.2, les auteurs traduisent ici les difficultés éprouvées par les élèves à surmonter l'obstacle lié à une variable 3 défavorable. Sur ce point, nos démarches diffèrent : en effet, nous abordons les problèmes du champ additif, qu'ils conduisent à faire une addition ou une soustraction pour parvenir au résultat, par des problèmes de transformation d'état car ce sont ceux pour lesquels il est le plus simple de produire une écriture mathématique congruente à l'énoncé. Lorsqu'une perte est décrite dans l'énoncé, c'est bien une soustraction qui traduit le problème, mais elle conduira peut-être l'élève à effectuer une addition lorsque l'écriture sera transformée pour obtenir le résultat.

5.2.3 Le recodage sémantique

Dans le cadre qu'il propose, Sander (2018) s'intéresse comme Julo (1995, 2002) au raisonnement par analogie. Il identifie trois formes d'analogies intuitives qui peuvent orienter l'interprétation que fait un élève d'un énoncé : les analogies de substitution (une notion est conçue par analogie avec une connaissance familière, par exemple la soustraction et l'idée de quantité restante après un retrait à laquelle font référence les auteurs d'ACE dans le paragraphe précédent), les analogies de scénario (un énoncé de problème est associé à une catégorie de scénarios de situations quotidiennes jugées analogues entre elles d'un point de vue abstrait, comme des scénarios de partage) et les analogies de simulation (l'action décrite dans l'énoncé est simulée mentalement). Ces analogies peuvent être facilitatrices ou obstructives selon que l'on se situe à l'intérieur ou en dehors de leur domaine

[19] Pour plus de précisions, voir le site internet Arithmétique et compréhension à l'école élémentaire (Recherche ACE, s. d.).

de validité, ou encore que le scénario évoqué dans l'énoncé du problème est congruent avec la structure mathématique ou ne l'est pas. Prenant l'exemple de la notion de soustraction, Sander (2018) identifie deux modes d'intervention scolaire

> l'un conduisant à ce que la notion de soustraction embrasse d'autres cas que ceux de recherche de reste, l'autre permettant à un élève de lire différemment l'énoncé et de pouvoir y percevoir une recherche de reste par un glissement d'interprétation. (p. 125).

Alors que notre démarche tendrait plutôt à s'inscrire dans le premier mode décrit, il explore le second au travers du « recodage sémantique » dont l'objectif est « de faire apparaître la ressemblance profonde entre deux situations qui, en dépit des différences sémantiques, sont analogues sur le plan des notions disciplinaires » (Sander, 2018, p. 133). Prenons l'exemple du problème « Pierre avait 13 billes. Il en perd. Il lui en reste 8. Combien en a-t-il perdu? ». L'écriture mathématique congruente à l'énoncé du problème est « 13 – ? = 8 ». Dans la démarche proposée par Sander, comme les élèves ne disposent a priori pas de stratégie pour déterminer l'inconnue à partir de cette écriture, l'énoncé est recodé sémantiquement en un autre énoncé, « Pierre avait 13 billes, des bleues et des rouges. Il a perdu toutes les billes bleues et il lui reste les 8 billes rouges. Combien avait-il de billes bleues? », qui est congruent avec l'écriture « 8 + ? = 13 » pour laquelle les élèves disposent d'un fait numérique mémorisé (8 + 5 = 13) leur permettant d'obtenir le résultat. Dans la démarche adoptée dans le dispositif « Faits reliés », c'est l'écriture « 13 – ? = 8 » congruente à l'énoncé qui est « recodée mathématiquement » en « 8 + ? = 13 » pour obtenir le résultat. En d'autres termes, alors que le recodage sémantique consiste à agir en opérant un traitement dans le registre de la langue naturelle (Duval, 1993), le recodage mathématique se fait en opérant un traitement dans le registre symbolique. De notre point de vue, ces deux approches diffèrent mais ne s'opposent pas : en effet comme nous l'avons déjà évoqué dans le paragraphe 2.3.3, des raisonnements dans le registre de la langue naturelle sont également nécessaire dans notre démarche pour plusieurs types de problèmes. C'est le cas en particulier des problèmes de comparaison pour lesquels le collectif a élaboré un scénario de classe : par exemple, pour le problème « Lise a fait 14 exercices de mathématiques. C'est 6 de plus de Lucie. Combien Lucie a-t-elle fait d'exercices? », le professeur et les élèves se mettent d'accord sur le fait que pour produire correctement une écriture mathématique traduisant l'énoncé, on commence par réfléchir sur le sens de la situation décrite pour déterminer qui a fait le plus (ou le moins) d'exercices.

5.3 Caractérisation des problèmes traités dans le dispositif

Notre dispositif se centre sur un ensemble de problèmes canoniques et ne balaie pas l'intégralité des types de problèmes arithmétiques abordés à l'école élémentaire. En cela, notre approche ne se suffit pas à elle-même pour l'enseignement de la résolution de problèmes. Nous nous fixons actuellement plusieurs objectifs. D'une part, nous voulons déterminer les types de problèmes qui sont traités ou pourraient être traités avec cette approche, c'est-à-dire définir précisément un domaine de validité de notre démarche. Traite-t-on tous les types de problèmes basiques? Est-il possible d'étendre ce domaine de validité, par exemple en le complétant avec certains types de problèmes à étapes ou de problèmes problématiques (Fagnant, 2018)? D'autre part, nous cherchons à caractériser dans ce domaine de validité les problèmes pour lesquels la modélisation à l'aide d'une écriture préalgébrique est relativement aisée et ceux pour lesquels les élèves rencontrent plus de difficulté, dans le but d'identifier des leviers pour les aider à les surmonter. Cela nous conduit en particulier à envisager plus finement la dimension langagière présente dans l'activité de résolution de problème. Enfin, les professeurs de notre collectif ont constaté que le transfert à des nombres plus grands des habiletés de calcul développées dans le champ des tables s'opérait difficilement pour certains élèves. Dans leur étude, Butlen et Pézard (2007) notent que « les techniques élémentaires de calcul ainsi automatisées peuvent jouer le rôle de modules de calcul pouvant être mobilisés pour construire des procédures plus complexes » (Butlen et Pézard, 2007, p. 14). C'est une dimension que le collectif souhaite approfondir afin que ces « modules de calcul » puissent être mis au service de la résolution de problèmes plus robustes, ce qui permettrait à nouveau d'étendre le domaine de validité de notre démarche.

5.4 Diffusion du dispositif

Depuis septembre 2023, le collectif qui s'était constitué au début du projet est à nouveau réuni au sein d'un groupe IREM[20]. Nous continuons à travailler sur le dispositif qui est, de ce fait, toujours en évolution : les listes de problèmes sont régulièrement modifiées, d'autres tâches de calcul sont imaginées et le groupe conçoit des scénarios de classe accompagnés de vidéos. De plus, l'axe principal de travail du groupe concerne les conditions de diffusion ordinaire du dispositif qui a vu le jour dans les circonstances extraordinaires d'une recherche-action. Nous rejoignons les préoccupations des auteurs d'ACE qui notent que le travail collaboratif conduit pour concevoir de tels dispositifs amène les professeurs du collectif à « appréhender peu à peu certains gestes didactiques nécessaires à cette

---

[20] IREM : Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques (2024).

mise en œuvre, et qui vont parfois à l'encontre de certaines habitudes d'enseignement des mathématiques » (Vilette et al., 2017, p. 115). C'est pourquoi Perrin-Glorian (2011) souligne la nécessité de questionner les « possibilités d'adaptation des situations par les enseignants dans les conditions ordinaires de fonctionnement de l'enseignement avec la double perspective de l'étude de la robustesse d'une suite de situations et de la formation des enseignants » (p. 57). De premiers parcours de formation incluant des témoignages d'enseignants de notre collectif ont été déployés auprès de professeurs des écoles ou de formateurs. Les retours des enseignants, très différents selon le public auquel le parcours est adressé, nous permettent de réajuster notre action et d'interroger plus spécifiquement certains aspects, par exemple celui de l'acceptabilité pour l'enseignant de l'implantation du dispositif dans sa classe en termes de temps consacré, de modification des habitudes, etc. Enfin, des modalités de diffusion prenant appui sur des situations de coenseignement entre pair expert et pair novice feront prochainement l'objet d'expérimentations.

Conclusion

Le dispositif « Faits reliés » a été conçu, testé et amélioré de manière collaborative dans le cadre d'un projet de recherche-action dans le but de doter les enseignants de l'école élémentaire d'outils et de démarches pour que leurs élèves mémorisent efficacement le répertoire additif et le répertoire multiplicatif, qu'ils développent des habiletés de calcul liées à la perception de l'équivalence entre addition et soustraction ou entre multiplication et division et enfin qu'ils mobilisent ces faits numériques et ces habiletés pour résoudre des problèmes basiques afin d'enrichir leur mémoire de problèmes.

Dans cet article, nous avons étudié les effets d'une première implantation du dispositif chez des élèves de 6 à 8 ans en nous centrant sur les tables d'addition et les problèmes basiques du champ additif. L'analyse des résultats aux tests proposés aux élèves a permis de conclure que l'utilisation du dispositif pendant l'année de CP (6-7 ans) favorise une meilleure mémorisation du répertoire additif et améliore significativement la perception d'équivalences entre différentes écritures d'addition et de soustraction ainsi que les performances des élèves en résolution de problèmes basiques du champ additif. Lorsque les nombres sont situés dans le champ des tables d'addition, les bénéfices en termes de résolution de problèmes sont plus importants pour les problèmes réputés complexes dans l'étude de Riley et al. (1983) ou pour les problèmes dont l'énoncé contient des mots induisant la mauvaise opération. L'étude a également fait apparaître un intérêt à utiliser le dispositif dès le CP (6-7 ans) plutôt qu'à partir du CE1 (7-8 ans), en particulier pour la résolution des problèmes identifiés comme complexes dans l'étude de Riley et al. (1983), ceux dont l'énoncé contient des mots inducteurs défavorables et ceux dont les nombres en présence sont plus grands que le champ numérique des tables. En effet, il semble que la flexibilité calculatoire développée sur les petits nombres soit mieux transférée aux plus grands nombres lorsque le dispositif est utilisé dès le CP. L'étude a également montré que l'utilisation du dispositif entraîne une diminution très importante du taux de non-réponse chez les élèves. Enfin, nous avons décelé une forte corrélation entre les habiletés calculatoires des élèves dans le champ numérique des tables et leurs performances en résolution de problèmes basiques du champ additif. Plusieurs éléments laissent penser que cette corrélation pourrait être attribuée au dispositif mais ne permettent pas de démontrer rigoureusement un lien de cause à effet.

Ces résultats particulièrement encourageants nous incitent à poursuivre notre démarche et notre réflexion. D'autres études qualitatives récemment menées sur le dispositif « Faits reliés » (Foulquier et al., 2022; Laroche et al., 2023; Reydy, 2022) ont permis d'obtenir des conclusions concernant l'étude des gestes professionnels d'enseignants et les possibilités d'exploitation dans des dispositifs d'éducation inclusive. Plusieurs perspectives de recherche se présentent actuellement. Nous retenons principalement les questions liées au développement de la pensée algébrique à l'école élémentaire et celles relatives à l'étude des conditions de diffusion du dispositif à une plus large échelle. En effet, le projet de recherche-action qui a été conduit a offert des circonstances extraordinaires permettant de faire évoluer les points de vue des enseignants, des formateurs et des chercheurs impliqués grâce à une dynamique d'enrichissement mutuel. Il nous reste désormais à penser des modalités de formation qui permettent d'établir une relation de confiance et d'agir sur les pratiques des enseignants dans un contexte ordinaire de formation.

Remerciements

Nous souhaitons remercier Éric Bacqué, Natalia Berton-Jacques, Rachel Bourès, Vanessa Couesnon, Cédric Coursin, Cyril Dadat, Laetitia Dicharry, Laurianne Foulquier, Charlotte Fourcade, Élisa Guitton, Patricia Lambert, Cynthia Laroche, Élisa Moulin, Sylvaine Panabière, Flore Salmon, Elorri Soubelet, Clotilde Souza, Stéphane Théas, Sophie Trochu et Patrick Urruty, membres du collectif lors des deux premières années du projet qui, par leur indéfectible implication, ont permis au dispositif « Faits reliés » de voir le jour et continuent à contribuer à son amélioration.

Références

Baddeley, A. D. (1992). Working memory. *Science, 255(5044)*, 556–559. https://doi.org/10.1126/science.1736359

Baroody, A. J., Bajwa, N. P. et Eiland, M. (2009). Why can't Johnny remember the basic facts? *Developmental Disabilities Research Reviews, 15*(1), 69-79. https://doi.org/10.1002/ddrr.45

Bonhême, B. et Descaves, A. (2007). *Activités numériques et résolution de problèmes au cycle 2*. Hachette Éducation.

Butlen, D. (2007). *Le calcul mental, entre sens et technique.* Presses universitaires de Franche-Comté.

Butlen, D. et Pézard, M. (2003). Une contribution à l'étude des rapports entre habiletés calculatoires et résolution de problèmes numériques à l'école élémentaire et au début du collège. *Spirale, revue de recherche en éducation, 31,* 117-140. https://doi.org/10.3406/spira.2003.1415

Butlen, D. et Charles-Pézard, M. (2007). Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté. Le calcul mental, entre sens et technique. *Grand N, 79*, 7-32.

Campbell, J. (1994) Architectures for numerical cognition. *Cognition*, vol 53, 1-44. https://doi.org/10.1016/0010-0277(94)90075-2

Catroux, M. (2002) Introduction à la recherche-action : modalités d'une démarche théorique centrée sur la pratique. *Cahiers de l'Apliut*, *23*(3), 8-20. https://doi.org/10.4000/apliut.4276

Collectif Didactique pour enseigner. (2024). *Un art de faire ensemble. Les ingénieries coopératives*. Presses universitaires de Rennes.

Coppé, S. et Houdement, C. (2002). Réflexions sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire. *Grand N*, 69, 53-62.

Cumming, J. J. et Elkins, J. (1999). Lack of automaticity in the basic addition facts as a characteristic of arithmetic learning problems and instructional needs. *Mathematical cognition, 5(2),* 149-180. https://doi.org/10.1080/135467999387289

Ding, Y., Zhang, D., Liu, R.-D., Wang, J. et Xu, L. (2021). Effect of automaticity on mental addition: the moderating role of working memory. *The Journal of Experimental Education, 89*(1), 33-53. https://doi.org/10.1080/00220973.2019.1648232

Direction de l'Évaluation, de la Prospective et de la Performance (2019). *L'évolution des performances en calcul des élèves de CM2 à trente ans d'intervalle (1987-2017).* Ministère de l'Éducation nationale.

Direction de l'Évaluation, de la Prospective et de la Performance (2023a). *Évaluations 2023 : repères CP, CE1.* Ministère de l'Éducation nationale.

Direction de l'Évaluation, de la Prospective et de la Performance (2023b) *Évaluations 2023 : repères CM1.* Ministère de l'Éducation nationale.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.

Fagnant, A. (2018). Des illustrations qui accompagnent les problèmes à la construction de représentations schématiques par les élèves : quels enjeux face aux problèmes standards et problématiques? *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM,* 94-113.

Fagnant, A. et Hindryckx, G. (2008). Les opérations additives et soustractives : quand les symbolisations informelles et plus conventionnelles s'en mêlent (ou s'emmêlent?). *Cahiers des Sciences de l'Éducation*, 8-23.

Fanget, M., Thevenot, C., Castel, C. et Fayol, M. (2011). Retrieval from memory or procedural strategies for addition problems. The use of the operand- recognition paradigm in 10-year-old children. *Swiss Journal of Psychology*, *70*(1), 35-39. https://doi.org/10.1024/1421-0185/a000036

Fischer, J.-P. (1993). La résolution des problèmes arithmétiques verbaux : propositions pour un enseignement proactif, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5,* 177-210.

Fischer, J.P. (1998). La distinction procédural/déclaratif : une application à l'étude de l'impact d'un « passage du cinq » au CP. *Revue française de pédagogie*, 122, 99-111. https://doi.org/10.3406/rfp.1998.1139

Foulquier, L., Lambert, P., Laroche, C., Reydy, C. et Urruty, P. (2022). Un projet de formation-recherche sur la mémorisation et la mobilisation des faits numériques pour la résolution de problèmes arithmétiques élémentaires. *Actes du XLVIII*[ee] *colloque de la COPIRELEM*, 352-365.

Grugeon-Allys, B. et Pilet, J. (2021). L'activité numérico-algébrique à la transition entre l'arithmétique et l'algèbre. *Éducation et didactique, 15*(2), 9-26. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.8580

Houdement, C. (1999). Le choix des problèmes pour la résolution de problèmes. *Grand N*, *63*, 59-76.

Houdement, C. (2003). La résolution de problèmes en question. *Grand N*, *71*, 7-23.

Houdement, C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N*, *100*, 59-78.

Houdement, C. (2018). Problèmes arithmétiques basiques : le cœur du problème. Dans : Pilet, J. et Vendeira, C. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2018*, 114-121.

Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques. (2024). *Unité de formation. Mathématiques et interactions.* https://math-interactions.u-bordeaux.fr/irem/groupes/faits-relies

Julo, J. (1995). Représentation des problèmes et réussite en mathématiques. Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement. Presses Universitaires de Rennes. https://doi.org/10.4000/books.pur.140957

Julo, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes? *Grand N*, *69*, 31-52.

Kaye, D. B., Post, T. A., Hall, V. C. et Dineen, J. T. (1986). Emergence of information-retrieval strategies in numerical cognition: A developmental study. *Cognition and Instruction, 3*, 127– 150.

Laroche, C., Reydy, C. et Urruty, P. (2023). Adaptations d'une ressource mathématique conçue pour l'école élémentaire par deux enseignants spécialisés exerçant dans des dispositifs d'éducation inclusive. *Actes du XLIXème colloque de la COPIRELEM*, 601-615.

LeFevre, J.-A., Penner-Wilger, M., Pyke, A. A., Shanahan, T. et Deslauriers, W. A. (2014). *Putting two and two together: Declines in arithmetic fluency among young Canadian adults, 1993 to 2005.* Institute of Cognitive Science and Department of Psychology, Carleton University.

Ministère de l'Éducation nationale (2015). *Programmes d'enseignement de l'école maternelle. Bulletin officiel n°2 du 26 mars 2015.*

Ministère de l'Éducation nationale (2019). *Attendus de fin d'année et repères annuels de progression. Bulletin officiel* n°22 du 29 mai 2019.

Ministère de l'Éducation nationale (2020). *Programmes d'enseignement. Cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), cycle de consolidation (cycle 3) et cycle des approfondissements (cycle 4). Modification. Bulletin officiel n°31 du 30 juillet 2020.*

Ministère de l'Éducation nationale (2022). *Les guides fondamentaux pour enseigner. La résolution de problèmes au cours moyen*. Eduscol.

Perrin-Glorian, M.-J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. Dans C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck et F. Wozniak (dir.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (p. 57-78). La pensée sauvage.

Pinel, N. (2019). *La méthode Heuristique de Mathématiques. Enseigner les mathématiques autrement à l'école!* Nathan.

Pinel, N. (2024) *Méthode Heuristique de Mathématiques.* https://methodeheuristique.com

Polotskaïa, E. et Consultant, P. (2010). Des représentations graphiques dans l'enseignement des mathématiques – Deux jeux pour apprendre. *Bulletin AMQ, 50*(1), 12-28.

Ponser, M. I. et Snyder, C. R. R. (1975). Attention and cognitive control. Dans R. L. Solso (dir.), *Information processing and cognition: The Loyola symposium* (p.-55-85). Erlbaum.

Radford, L. (2013). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 257-277. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Reydy, C. (2022). Étude de gestes professionnels didactiques d'enseignants de Cours Préparatoire en séance de résolution de problèmes, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* 53-88. https://doi.org/10.4000/adsc.1282

Richard, J.-F. (1982). Mémoire et résolution de problèmes. *Revue française de pédagogie*, *60*, 9-17. https://doi.org/10.3406/rfp.1982.1750

Riley, M. S., Greeno, J. G. et Heller, J. I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. Dans H. P. Ginsburg (dir.), *The development of mathematical thinking* (p. 153-196). Academic Press.

Sander, E. (2018). Une perspective interprétative sur la résolution de problèmes arithmétiques : le cadre A-S^3. *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM,* 119-138.

Sensevy, G. (2021). Des sciences interventionnelles ancrées sur des alliances entre recherche et terrain? Le cas des ingénieries coopératives. *Raisons éducatives*, *25*, 163–194. https://doi.org/10.3917/raised.025.0163

Squalli, H., Oliveira, I., Bronner, A. et Larguier, M. (2020). *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires*. Livres en ligne du CRIRES. https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches

Svenson, O., Hedenborg, M-L. et Lingman, L. (1976). On children's heuristics for solving simple additions. *Scandinavian Journal of Educational Research, 20*, 161–173. https://doi.org/10.1080/0031383760200111

Svenson, O. et Sjoberg, K. (1983). Evolution of cognitive processes for solving simple additions during the first three school years. *Scandinavian Journal of Psychology, 24*, 117–124. https://doi.org/10.1111/j.1467-9450.1983.tb00483.x

Tavares, D., Gonçalves, F., Menino, H. et Cadima, R. (2017a). *Todos Juntos, matemática 1° ano.* Santillana.

Tavares, D., Gonçalves, F., Menino, H. et Cadima, R. (2017b). *Todos Juntos, matemática 2° ano.* Santillana.

Van de Walle, J. A. (2007). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally.* Pearson.

Vergnaud, G. (1986). Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques. Un exemple : les structures additives. *Grand N*, 38, 21-40.

Vilette, B. (2002). Do young children grasp the inverse relationship between addition and subtraction? Evidence against early arithmetic. *Cognitive Development, 17,* 1365-1383. https://doi.org/10.1016/S0885-2014(02)00125-9

Vilette, B., Fischer, J.-P., Sander, E., Sensevy, G., Quilio, S. et Richard, J.-F. (2017). Peut-on améliorer l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique au CP? Le dispositif ACE. *Revue française de pédagogie*, 201, 105-120. https://doi.org/10.4000/rfp.7296

Worthen, J.B. et Hunt, R.R. (2012). Automaticity in Memory. Dans N. M. Seel (dir.), *Encyclopedia of the Sciences of Learning.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1428-6_466