Discours autour du raisonnement mathématique : ajouter la voix d'enseignantes du primaire à la conversation

Doris JEANNOTTE
Université du Québec à Montréal
jeannotte.doris@uqam.ca
Sarah DUFOUR
Université de Montréal
sarah.dufour.3@umontreal.ca
Stéphanie SAMPSON
Université du Québec à Montréal
sampson.stephanie@courrier.uqam.ca

Résumé : La personne enseignante du primaire favorise et évalue, dans sa pratique quotidienne, le développement du raisonnement mathématique [RM]. Toutefois, le concept de RM reste flou autant en recherche que dans la pratique. Par exemple, on en connait très peu sur les différentes façons dont les personnes enseignantes utilisent ce concept dont les usages viennent façonner plusieurs choix didactiques (Hill et al., 2005). Cet article a pour but de contribuer à la clarification du concept de RM en particulier dans le contexte de l'enseignement primaire par l'enrichissement d'un modèle théorique développé à partir de la littérature scientifique. Fondée sur la commognition, une analyse du discours de six enseignantes et sa mise en dialogue avec le modèle de Jeannotte (2015) a permis d'élaborer un réseau conceptuel entourant le RM. À la suite de cette analyse, le processus « expliquer » a été ajouté en tant que support au RM. Par ailleurs, les éléments partagés ou non par les enseignantes et le milieu de la recherche sont mis en lumière dans ce texte.

Mots-clés : raisonnement mathématique, enseignement primaire, commognition, discours, modèle

Revue québécoise de didactique des mathématiques, 2020, *vol 1*, p. 5-37.
https://doi.org/10.71403/ny1mxs41

Mathematical reasoning discourse: elementary teachers' voice added to the conversation

Abstract: Elementary teachers promote and evaluate the development of mathematical reasoning in their daily practices. However, the concept of mathematical reasoning remains vague both in research and in practice. For example, very little is known about the different ways in which teachers use this concept, uses that shape several of their pedagogical choices (Hill et al., 2005). This article aims to contribute to the clarification of the concept of mathematical reasoning in the context of elementary education by enriching a theoretical model developed from the scientific literature. we develop a conceptual network of RM base on a commognitive analysis of the discourse of six teachers and the model previously develop by Jeannotte (2015). Through this analysis explaining was added to the model and defined as a mathematical reasoning support process. Likewise, the elements shared or not by the teachers and the research community are highlighted.

Keywords: mathematical reasoning, elementary teaching, commognition, discourse, model

Introduction

Cet article a pour objectif de contribuer à clarifier le concept de RM pour l'enseignement et l'apprentissage au primaire. Pour ce faire, le modèle théorique de RM développé à partir d'une analyse d'écrits scientifiques de Jeannotte (2015) est mis en dialogue avec le discours d'enseignantes du primaire.

Depuis environ 30 ans, le RM est placé au premier plan dans les évaluations internationales (voir Lindquist et al., 2019; Organisation de coopération et de développement économiques [OCDE], 2006) tout comme dans les programmes de formation mathématiques des pays qui y participent (par exemple le programme de formation de l'école québécoise (PFEQ, Gouvernement du Québec, 2001), le *Common Core* aux États-Unis (National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers, 2010).

Au Québec, en particulier lors des deux dernières réformes, le RM est passé d'aucune mention spécifique (Gouvernement du Québec, 1984) à un objectif global, « raisonner » (Gouvernement du Québec, 1995) et encore, à l'une des trois compétences disciplinaires, « raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques » (Gouvernement du Québec, 2001). Le raisonnement y est alors défini comme:

> établir des relations, […] les combiner entre elles et […] les soumettre à diverses opérations pour créer de nouveaux concepts et pousser plus loin l'exercice de la pensée mathématique. (Gouvernement du Québec, 2001 p. 124)
>
> organiser de façon logique un enchainement de faits, d'idées ou de concepts pour arriver à une conclusion qui se veut plus fiable que si elle était le seul fait de

> l'impression ou de l'intuition[…] organiser signifie effectuer des activités mentales telles qu'abstraire, coordonner, différencier, intégrer, construire et structurer. (Gouvernement du Québec, 2001, p. 128)

Ainsi, il y a maintenant prescription, pour les personnes enseignantes, de développer et d'évaluer le RM chez les élèves.

Bien que cette importance du RM dans les politiques éducatives soit justifiée par sa relation avec la compréhension du monde, sa définition varie grandement d'un document institutionnel à l'autre. Il y est associé à une pléthore de termes tels que pensée, déduction, argumentation, preuve et démonstration (Jeannotte, 2015). Or, les évaluations internationales et les documents ministériels ont des incidences sur les manuels scolaires développés et sur la formation initiale des maitres qui doit prendre en compte les prescriptions du programme du ministère de l'Éducation (MEQ). Enfin, les personnes enseignantes doivent aussi répondre de ces exigences. Ces personnes sont effectivement amenées à créer, choisir ou encore discriminer, dans le cadre de leur pratique, des moyens de développer et d'évaluer le RM de leurs élèves. De plus, le discours des personnes enseignantes à propos du RM contingenterait plusieurs choix didactiques qu'ils effectuent (Hill et al., 2005 ; Stylianides et Ball, 2008).

Du côté de la recherche, plusieurs études se penchent sur le développement du RM en classe du primaire ou du secondaire. Le raisonnement s'inscrit alors dans le développement des processus de preuve (Balacheff, 1988), l'apprentissage de la démonstration (Cabassut, 2005; Duval, 1995), la réussite en mathématiques (Stylianides, 2005) et la résolution de problème (Lithner, 2008). Là encore, le terme RM est polysémique. Or, comme le mentionne Reid (2002), « le but de développer le RM en classe demande que la communauté de recherche clarifie ce qu'est le RM et à quoi il ressemble en contexte scolaire » (p. 7, traduction libre[1]).

Dans le but de clarifier ce qu'est le RM en classe, Jeannotte (2015; voir aussi Jeannotte et Kieran, 2017) propose un modèle du RM pour l'enseignement et l'apprentissage à l'école élaboré à partir d'une analyse de la littérature scientifique. Quoique le modèle réponde en partie à l'assertion de Reid (2002) en proposant une façon de caractériser le RM, cette caractérisation ne prend pas en compte le point de vue des personnes enseignantes. C'est donc dans le but d'enrichir le modèle théorique de Jeannotte (2015) par la prise en compte du discours d'acteurs du milieu que cette étude a été entreprise. Dans un premier temps, il s'agit de voir si le modèle théorique trouve écho chez les personnes enseignantes. Ensuite, à partir

[1] The aim of developing mathematical reasoning in classrooms calls on the research community to clarify what is mathematical reasoning and what it looks like in school contexts (Reid, 2002, p. 7).

du discours de ces dernières, le modèle sera modifié. La prise en compte du point de vue des personnes enseignantes n'est pas en opposition avec les savoirs développés par les chercheurs, mais vient plutôt rendre les modèles développés plus pertinents socialement (Guignon et Morrissette, 2006). L'idée est de construire un modèle qui tient compte de la vision de la pratique pour ensuite interpréter et analyser cette dernière.

1. Un modèle de raisonnement mathématique

Afin de développer un modèle conceptuel du RM (figure 1), Jeannotte a mis en place une recherche théorique ancrée dans une perspective commognitive (Sfard, 2008). Dans cette perspective, Sfard (2008) définit la recherche comme une forme de communication :

> La recherche, […] peut se définir comme un type de discours particulier et bien circonscrit qui produit des récits convaincants avec lesquels d'autres pratiques humaines peuvent être médiées, modifiées et progressivement améliorées quant à leur efficacité et à leur productivité. (p. 35, traduction libre[2])

Ainsi, basé sur cette idée de partir du discours existant, un corpus d'écrits scientifiques en didactique des mathématiques autour du RM contenant 145 références a été construit.

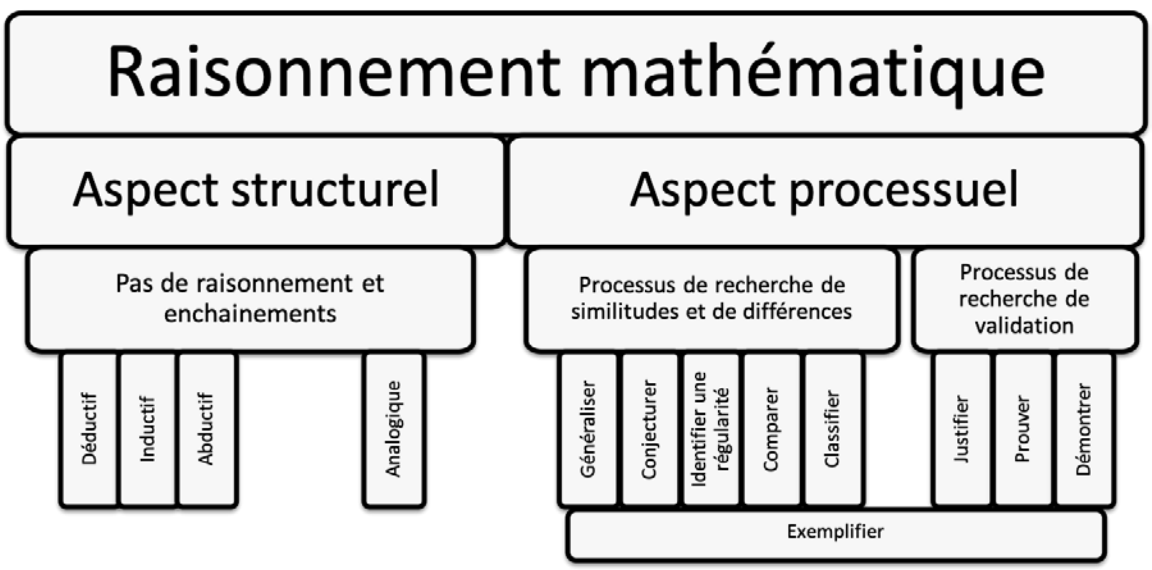


Figure 1 : Modèle de RM (Jeannotte, 2015, p. 277)

[2] Research, [...], can be defined as a particular, well-defined kind of discourse producing cogent narrative with which other human practices can be mediated, modified, and gradually improved in their effectiveness and productivity (Sfard, 2008, p. 35).

De ce fait, la littérature scientifique, en tant que réalisation des discours[3] présents dans la communauté de didacticiennes et de didacticiens des mathématiques, est apparue comme une source riche pour mieux comprendre le concept de RM et ainsi en proposer un modèle conceptuel.

De même, ce modèle s'appuie sur la prémisse que l'apprentissage débute dans la sphère publique dans un mouvement d'individualisation et de (re)communication. « C'est par la communication avec les autres qu'une personne développe des façons de vivre exclusivement humaine et devient partie intégrante de la communauté humaine. » (Sfard, 2008, p. 280, traduction libre[4]). Dans le modèle de Jeannotte (2015), le RM est alors défini comme une activité particulière de communication avec soi-même ou les autres qui permet d'inférer des énoncés mathématiques à partir d'autres énoncés mathématiques. Cette activité de communication, qui est une forme de pensée mathématique, débute lorsqu'elle se fait sur des énoncés mathématiques. Ainsi, tout raisonnement n'est pas mathématique. De plus, le RM développe le discours mathématique en extension, c'est-à-dire qu'il ajoute des énoncés à propos d'un objet ou d'un énoncé déjà inclus dans ce même discours. Les règles du discours ne changent pas, contrairement à un développement métadiscursif (autre forme de pensée). Lors du développement du premier modèle, la commognition a servi autant à fonder la méthodologie qu'à la formulation de définitions liées aux différents aspects du modèle (voir Jeannotte, 2015).

Le modèle définit le RM selon deux aspects essentiels : structurel (lié à la forme de l'activité discursive) et processuel (lié à la temporalité et à l'intention de l'activité discursive). Ces aspects sont deux façons différentes de parler de cette activité de communication. L'aspect structurel s'appuie sur la littérature qui traite de la logique mathématique. On y retrouve les structures déductives, inductives, abductives et analogiques. L'aspect processuel, pour sa part, émerge d'un corpus plus éclectique dans lesquels plusieurs verbes d'action sont utilisés en lien avec le RM. L'aspect processuel comprend huit processus de raisonnement, dont quatre processus de recherche de similitudes et de différences :

> Généraliser : ... infère un énoncé à propos d'un ensemble d'objets mathématiques, ou d'une relation entre différents objets de cet ensemble, à partir d'un ensemble plus restreint d'objets contenus dans ce premier.

---

3 En commognition, le développement d'un discours (ici sur le RM) passe par l'extension d'un discours existant.

4 It is through communication with others that a person develops uniquely human forms of life and turns into an integral part of the human community (Sfard, 2008, p. 280).

> Conjecturer : … par la recherche de similitudes et de différences, permet d'inférer un énoncé à propos d'une régularité, ou d'une relation, pour lequel la valeur épistémique qui lui est rattachée est vraisemblable, et qui a un potentiel de théorisation mathématique.
>
> Identifier une régularité : … infère un énoncé à propos d'une relation récursive entre différents objets ou relations mathématiques, par la recherche de similitudes et de différences entre ces objets ou relations mathématiques.
>
> Comparer: ... permet d'inférer, par la recherche de similitudes et de différences, un énoncé à propos d'objets et de relations mathématiques.
>
> Classifier : … par la recherche de similitude et de différences entre des objets mathématiques, permet d'inférer des énoncés à propos de classes en s'appuyant sur des propriétés ou des définitions mathématiques. (Jeannotte, 2015, p. 270)

L'aspect processuel comprend également trois processus de recherche de validation :

> Justifier : ... processus de RM qui, par la recherche de données, de permis d'inférer et de fondement mathématique, permet de modifier la valeur épistémique d'un énoncé.
>
> Prouver : … processus de RM qui, par la recherche de données, de permis d'inférer et de fondement mathématique, permet de modifier la valeur épistémique de vraisemblable à vraie d'un énoncé. Ce processus est contingenté par :
>
> 1. des énoncés acceptés par la communauté de la classe (ensemble d'énoncés acceptés) qui sont vrais (du point de vue du discours mathématique de l'expert) et disponibles sans autre justification;
> 2. une restructuration finale déductive;
> 3. des réalisations appropriées et connues ou accessibles à la classe.
>
> Démontrer : ... processus de RM qui, par la recherche de données, de permis d'inférer et de fondement mathématique, permet de modifier la valeur épistémique de vraisemblable à vraie d'un énoncé. Ce processus est contingenté par :
>
> 1. des énoncés acceptés par la communauté de la classe (ensemble d'énoncés acceptés) qui sont vrais (du point de vue du discours mathématique de l'expert) et systématisés dans une théorie mathématique;
> 2. une restructuration finale déductive;
> 3. des réalisations formalisées et acceptées par la communauté de la classe et par la communauté mathématique. (Jeannotte, 2015, p. 271-272)

2. Les personnes enseignantes et le raisonnement mathématique

À notre connaissance, quoique plusieurs recherches étudient les sens accordés à la preuve par des personnes enseignantes, peu d'études portent sur ce qu'est le RM pour des personnes enseignantes du primaire. Clarke et al. (2012) ont demandé à 104 personnes enseignantes du primaire quels termes liés au RM ils utilisaient fréquemment en classe de mathématiques parmi une liste donnée[5]. Cette liste avait été développée par les chercheurs à partir de la littérature et des programmes de formations. Seuls les termes « expliquer », « justifier », « prouver » et « raisonner » ont été choisis par plus de 50 % des personnes enseignantes.

Herbert et al. (2015) se sont intéressés aux différentes conceptions données au RM par des personnes enseignantes de l'Australie et du Canada (Vancouver). Ils ont recueilli des données à partir d'entretiens individuels auprès de 24 personnes enseignantes du primaire participant à une formation sur le développement du RM en classe. Leur analyse a permis de mettre en évidence sept catégories de conceptions que peuvent avoir les personnes enseignantes du primaire du RM :

- Penser
- Communiquer
- Résoudre des problèmes
- Valider
- Conjecturer
- Utiliser la logique pour valider
- Connecter différents aspects mathématiques

Ces catégories sont définies par : 1) le récepteur du raisonnement (soi-même et/ou les autres); 2) les buts du raisonnement (raconter, comparer/contraster, choisir, expliquer, argumenter étape par étape, articuler les raisons, justifier, poser des hypothèses, généraliser, prouver, évaluer, établir des liens); 3) quatre types de représentations (symbolique, orale, diagrammatique/écrite et gestuelle); et 4) quatre types de raisonnement (adaptatif, déductif, inductif et abductif).

On retrouve ici des similitudes avec le modèle de RM de Jeannotte (2015) et Jeannotte et Kieran (2017), à tout le moins en termes de vocabulaire. De même, certaines catégories et certaines fonctions de Herbert et al. (2015) peuvent être associées à l'aspect processuel, et les types de raisonnement, à l'aspect structurel. Par ailleurs, le modèle de Herbert et al. (2015) est un modèle qui caractérise la façon dont la compréhension individuelle de ce qu'est le RM pour un enseignant a évolué à la suite d'une formation. Or, le but du présent article n'est pas d'évaluer

[5] Expliquer, justifier, prouver, raisonner, analyser, évaluer, généraliser, inférer, déduire, adapter, transférer, contraster.

le développement de la compréhension à la suite d'une formation, mais davantage d'identifier ce qu'est le RM pour des enseignantes du primaire n'ayant pas reçu de formation particulière sur le RM et d'enrichir le modèle de RM développé par Jeannotte (2015) par l'ajout de la voix des personnes enseignantes.

3. La commognition

Pour Sfard (2008), les mathématiques sont un discours, c'est-à-dire un type particulier de communication constitué d'actions couplées à des (ré)actions qui seront reconnues comme mathématiques par une communauté donnée. Pour une communauté donnée, les mathématiques (le discours mathématique) seront reconnaissables par le vocabulaire, les médiateurs visuels et les règles métadiscursives utilisés, les routines mises en place et les énoncés acceptés par la communauté. Le vocabulaire, lié à ses routines d'utilisation, aura souvent un ou des sens différents selon la communauté donnée. Par exemple, le terme démontrer en mathématiques universitaires est associé à un type bien particulier de routines qui permet de déterminer le domaine de validité d'un énoncé. Or, démontrer dans le langage courant est plutôt lié à montrer; démontrer qu'on sait nager est équivalent à montrer qu'on en est capable. Les médiateurs visuels peuvent aussi prendre différentes formes. Les représentations de nombres à l'aide de chiffres, de lettres, de blocs base-dix ou encore d'un abaque en sont des exemples. Les règles métadiscursives relèvent de règles, souvent implicites, qui sont partagées par une communauté donnée. Par exemple, ce qui est considéré comme une « belle » preuve peut varier selon la communauté dans laquelle elle vit. Les routines sont des *patterns* d'actions discursives qui permettent de communiquer. Enfin, les énoncés généralement acceptés réfèrent à des énoncés reconnus comme vrais ou valides par une communauté donnée. Les définitions de diagonale au primaire et au secondaire en sont de bons exemples. Au primaire, on définit souvent la diagonale comme un segment de droite reliant deux sommets opposés. Or, au secondaire, cette définition devient inutilisable pour les polygones autres que les quadrilatères et pourrait ainsi être reformulée comme étant un segment de droite reliant deux sommets non consécutifs d'un polygone. Notons que le discours ne se restreint pas à la langue, mais englobe toute action qui communique des informations aux autres ou à soi-même, notamment les actions physiques (gestes, mouvements du corps, etc.).

Dans cette recherche, les personnes enseignantes du primaire sont considérées comme membre d'une communauté professionnelle. En tant que communauté distincte, le discours mathématique qui s'y développe diffère de celui de la communauté de didacticiennes et didacticiens des mathématiques. On n'a qu'à penser aux contraintes liées aux évaluations ministérielles du primaire que les chercheurs n'ont pas à prendre en compte. Ou encore, la visée du chercheur, de la chercheuse est habituellement de mieux comprendre les phénomènes d'enseignement-apprentissage. Celle de l'enseignante, de l'enseignant, est d'amener un maximum d'élèves à réussir. Ainsi, la prise en compte des discours à propos du RM des deux communautés dans l'élaboration d'un modèle de RM s'avère nécessaire à une meilleure communication entre ces deux communautés.

4. Méthodologie

Dans ce projet, l'enseignant, en tant que membre d'une communauté, est compétent au sens qu'il agit selon l'interprétation qu'il a de la situation (Morrissette, 2011). En réunissant plusieurs acteurs dans certaines situations, il est alors possible de dégager l'interprétation qu'ils se font de ces dernières, les routines qu'ils partagent, les règles métadiscursives qui régissent leur discours. Ces règles ne déterminent pas les interactions entre acteurs, mais les contraignent (Sfard, 2008). Ainsi, les acteurs compétents se servent de ces règles pour interagir avec les autres membres d'une communauté. De même, le modèle d'acteur compétent de Giddens (1987) met de l'avant que le langage est « constitutif des activités des acteurs, porteur des savoirs nécessaires à ces activités quotidiennes organisées, ce qui met également en relief l'intérêt d'examiner ce qu'ils peuvent en dire » (Morrissette, 2009, p. 74). C'est donc par le biais du discours des personnes enseignantes, tel que constitué à travers les interactions avec une chercheuse et d'autres collègues, que nous chercherons à dégager comment ces dernières définissent le RM. Nous chercherons à dégager plus particulièrement, le vocabulaire et les énoncés généralement acceptés qui teinte leur discours à propos du RM. Par la suite, nous pourrons mettre en relation ces éléments d'analyse avec le modèle théorique proposé par Jeannotte (2015). Pour ce faire, nous avons fait le choix d'utiliser la méthode d'entretiens individuels et collectifs.

4.1 Participantes

Six enseignantes du primaire ayant entre 2 et 16 ans d'expérience ont participé à notre étude. Toutes sont entrées en fonction après la réforme de 2001. L'enseignement par compétences incluant la compétence « Raisonner à l'aide de concepts et processus mathématiques » fait donc partie de leur pratique depuis leur début. Enseignantes de la 1re année à la 6e année du primaire, elles proviennent de cinq écoles et de cinq commissions scolaires (maintenant centres de services scolaires) différentes.

4.2 Collecte de données

La collecte de données consistait en un entretien individuel (30 à 60 minutes) et en un entretien collectif (120 minutes). Chaque entretien a été filmé ou enregistré au moyen d'une bande audio. Les entretiens ont été conduits en personne ou via la plateforme *Zoom*, en raison d'une grande distance entre l'intervieweuse et les participantes. Pour cette même raison, l'entretien collectif s'est déroulé via la plateforme *Zoom*.

4.2.1 L'entretien individuel

L'entretien individuel avait deux objectifs : entamer une réflexion autour du RM chez les participantes et expliciter leur conception du RM afin d'en faire un premier portrait. Les entretiens se sont déroulés en trois temps. D'abord, une discussion autour de leur vision du RM était lancée au moyen de l'expérience passée des participantes. L'intervieweuse demandait à chacune des participantes de raconter un moment de leur enseignement ou de présenter une tâche qu'elles font vivre à leurs élèves dans lesquelles elles jugent que les élèves sont en situation de raisonnement. Cela permettait de, premièrement, rester dans un domaine connu des participantes. Deuxièmement, cela informait sur les situations d'apprentissage que les enseignantes jugent favorables à la mise en œuvre et au développement du RM.

Ensuite, deux exemples de tâches tirées de manuels scolaires, dont une accompagnée d'une résolution orale d'élève, étaient proposés aux participantes (figure 2). Il s'agit de tâches accessibles à la fin du primaire. Les participantes étaient alors invitées à se prononcer sur la possibilité pour un élève résolvant ces tâches de mettre en place un RM ou non et de justifier sa réponse. Dans le cas d'une réponse positive, on lui demandait de décrire dans ses propres mots les raisonnements mis en œuvre.

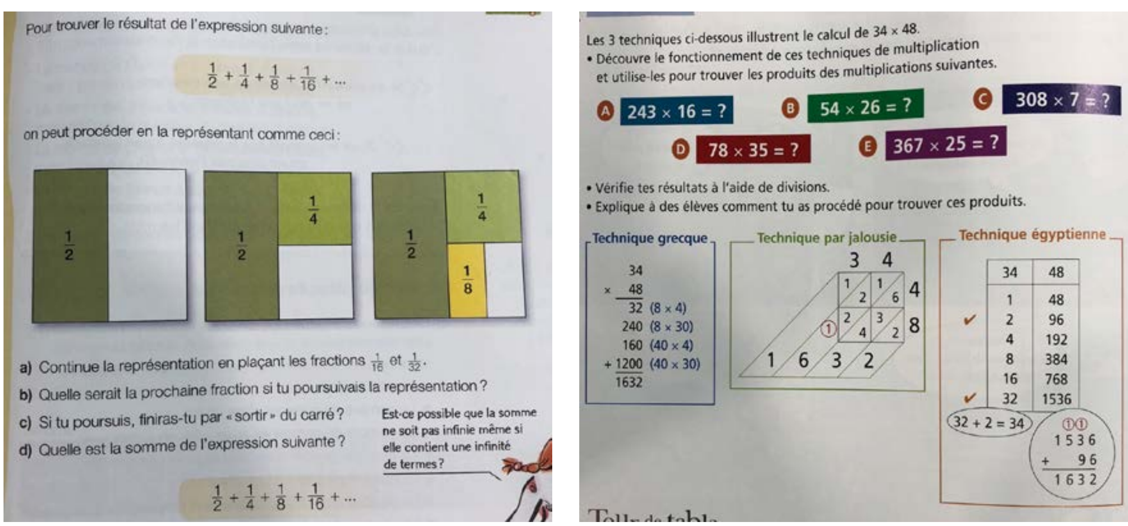


Figure 2 : Les deux tâches discutées lors de l'entretien individuel
(Coupal et Marotte, 2005, p. 145; Lacasse, 2005, p. 34)

La tâche de gauche, tirée de Coupal et Marotte (2005), met en jeu le concept de somme infinie qui n'est pas au programme du primaire. Toutefois, tous les autres concepts en jeu le sont. Du point de vue du raisonnement, l'exploration de cette tâche demande d'identifier une régularité, de généraliser, de conjecturer. La sous-tâche d) peut mener à prouver la valeur de la somme à l'aide de la représentation visuelle.

La tâche de droite, tirée de Lacasse (2005), demande d'explorer trois algorithmes non conventionnels et d'en expliquer le fonctionnement. Du point de vue du raisonnement, la tâche met l'accent sur l'utilisation d'exemples qui peuvent supporter la mise en œuvre d'autres processus. L'élève peut comparer ces exemples et ensuite généraliser. Il peut également prouver pourquoi ils fonctionnent, peu importe les nombres en jeu, quoique ce ne soit pas demandé.

Enfin, pour clore la rencontre, on demandait à la participante de définir ce qu'était, selon elle, le RM.

4.2.2 L'entretien collectif

L'objectif de l'entretien collectif était de favoriser les échanges entre praticiennes autour du RM et de faire ressortir des éléments discursifs partagés par ces dernières (Morrissette, 2009), en particulier le vocabulaire et des énoncés généralement acceptés. De même, par la remise en question de certains énoncés, les enseignantes ont pu clarifier leur pensée.

Cinq des six participantes ont participé à l'entretien collectif. La première partie de l'entretien se voulait un rappel et une mise en commun de leurs différentes façons de définir le RM. L'entretien commençait donc avec la question qui avait terminé l'entretien individuel soit : « Comment définissez-vous le RM en quelques mots ou phrases ? »

La deuxième partie était une activité autour du vocabulaire. L'activité se centrait sur le vocabulaire utilisé par les participantes pendant leur entretien individuel ainsi que certains mots utilisés dans le modèle de Jeannotte (2015). L'activité s'est déroulée en deux temps. Une première liste de vocabulaire tirée des entretiens individuels a été fournie. Il a été demandé aux enseignantes d'en faire une première carte conceptuelle. Puis, une seconde liste de mots a été ajoutée pour continuer d'enrichir la carte conceptuelle développée. La figure 3 présente les deux listes utilisées.

Liste 1	**Liste 2**
Justifier	Généraliser
Comprendre	Argumenter
Expliquer comment	Résoudre
Expliquer pourquoi	Conjecturer
Logique	Connaissances antérieures
Communiquer	Exemplifier
Procédures	Contexte
Analyser	Déduction
Concepts	Induction
Traces	Réfléchir
Prouver	Se questionner
	Faire des choix
	Vocabulaire

Figure 3 : Les deux listes de vocabulaire proposées aux enseignantes

La troisième partie avait pour but de voir comment les enseignantes allaient pouvoir réinvestir la carte conceptuelle et les mots qu'elle contenait pour commenter des productions d'élèves. Une solution d'élève à la tâche Charrière (figure 4) leur a été proposée. Cette solution, tirée de Jeannotte (2015), a été choisie, car elle présente un grand potentiel d'éléments à associer aux différents termes proposés plus tôt dans l'entretien[6].

2	**.**	**7**	**.**	**: 4**
milliers	centaines	dizaines	unités	

A. Trouve (et écris) toutes les façons de compléter ce nombre pour que la division par 4 ne donne pas de reste.

B. Remplace le 7 des dizaines par d'autres chiffres (1, 2, 3, ...);

- Combien y aura-t-il, dans chaque cas, de nombres divisibles par 4 ?

Essaie d'énoncer des lois.

Note : pour B, utilise une calculatrice de poche ou bien travaille avec deux autres camarades et répartissez-vous la tâche.

Figure 4 : La tâche Charrière tirée de Charrière (1991, dans Del Notaro, 2013)

[6] Pour une analyse de la tâche et de la solution en termes de RM, il est possible de consulter le chapitre 6 de Jeannotte (2015).

Enfin, l'entretien collectif s'est terminé en offrant la possibilité à chacune des participantes de revenir sur leur définition du RM.

4.3 La démarche d'analyse

Pour fin d'analyse, les vidéos et bandes audios ont été visionnées/écoutées à plusieurs reprises et des verbatims de chacune ont été transcrits (Powell et al. 2003). Plusieurs cycles de codage des entretiens individuels et de l'entretien collectif ont permis de repérer les mots-clés et les énoncés généralement acceptés. Chaque unité de sens a reçu un ou plusieurs codes. Un codage semi-émergent a été utilisé. Le vocabulaire des modèles de Jeannotte (2015) et de Herbert et al. (2015) a été utilisé pour coder, et de nouveaux codes ont été ajoutés lorsque cela s'est avéré nécessaire. Enfin, l'ensemble du corpus a été codé par deux chercheuses et une triangulation interjuge a été effectuée. Cette triangulation a permis de clarifier les interprétations des codes, d'en fusionner certains et ainsi, d'assurer une cohérence dans les codages.

5. Analyse et résultats

L'analyse et la présentation des résultats seront effectuées en deux temps. Premièrement, l'analyse des tâches apportées par les enseignantes et des discussions autour des tâches apportées par l'intervieweuse sera présentée. Cette analyse permet de mettre en lumière certaines caractéristiques du RM dans le discours des enseignantes. Deuxièmement, une synthèse des analyses des six entretiens individuels et de l'entretien collectif permet de proposer une version modifiée du modèle de Jeannotte (2015).

5.1 Les tâches apportées par les enseignantes

Deux des enseignantes n'ont pas apporté d'énoncé spécifique. Agathe, enseignante de 1re année, fait référence à l'exploration des nombres pairs et impairs à l'aide de matériel de manipulation (construction de tours avec des blocs emboitables). Dans cette exploration, elle s'attend à ce que les élèves soient en mesure de justifier qu'un nombre est pair ou impair à partir du fait qu'on peut partager le nombre en deux groupes égaux ou non (deux tours de blocs égaux ou non) et non parce que le nombre se termine par 0, 2, 4, 6, ou 8. Ceci peut être lié à la définition du processus prouver. En effet, Agathe cherche à développer l'utilisation de raisons mathématiques pour justifier la parité d'un nombre. Pour cette enseignante, ses élèves développent un RM, car, dans d'autres situations, ils arrivent à expliquer la parité d'un nombre à l'aide de cette idée de partage et non en faisant référence à un truc (le dernier chiffre qui compose le nombre).

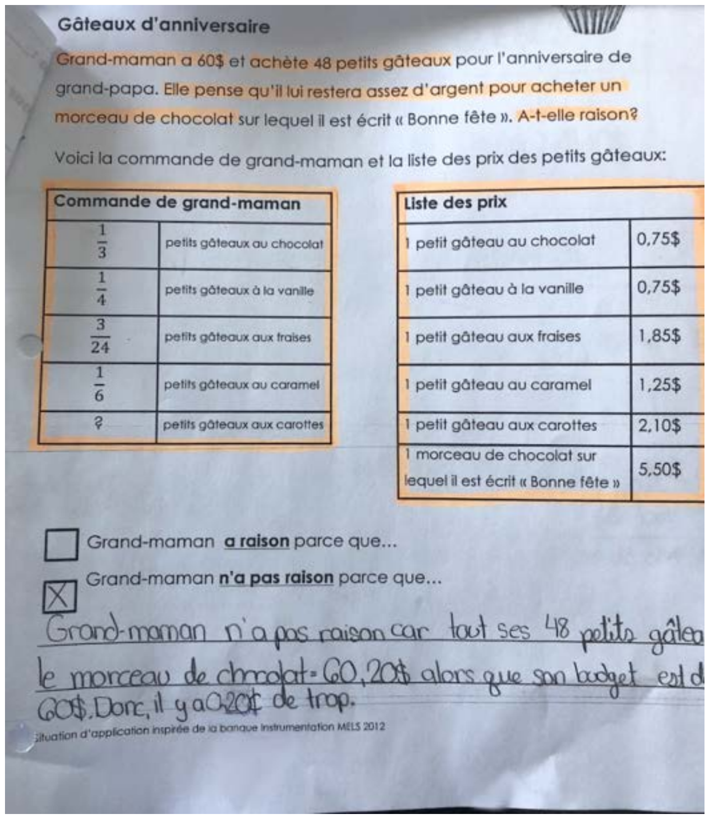
> Agathe : … Hey! 19, ça, c'est un nombre impair. Oh yeah! c'est vrai, t'as raison. Comment tu le sais? Bien là, les enfants me disaient : « Ben je l'sais parce que j'sais

> que 9+9, ça fait 18. Pis là, j'en rajoute un autre, fak c'est pas deux tours égales. » « Excellent! » C'est ce genre de trucs-là qu'ils sont capables de faire avec ça, le type de raisonnement qu'ils sont capables de faire avec ça.

Alice, aussi enseignante de 1re année, décrit une activité qu'elle utilise pour introduire le concept de fraction où les élèves doivent prendre des photos d'objets de la vie courante puis, par le biais d'une plateforme numérique, séparer l'objet en parties égales (en demi, en quart, etc.). Par la suite, elle demande aux élèves si l'objet est bien séparé en parties égales (équivalentes), s'il y a d'autres façons de le séparer en parties égales. Alice considère que, dans cette tâche, les élèves développent un raisonnement précis portant sur le sens de la fraction comme partition d'un tout. Tout comme dans le cas d'Agathe, justifier à l'aide de raisons mathématiques est à développer chez les élèves. Dans cette activité, on retrouve aussi les processus de recherche de similitudes et de différences, soit comparer et classifier ces objets selon leur partitionnement. Durant la discussion, Alice soulève la différence entre raisonner et résoudre. Elle précise que l'activité dont elle parle n'est pas une situation de résolution. Alice voit le développement du raisonnement, dans le cas de cette tâche, comme une construction de sens d'un concept (« se bâtir une boite à outils ») qu'on utilise éventuellement en résolution de problème.

Deux enseignantes ont partagé des situations d'application. Aurélie, enseignante de 5e année, a apporté une situation d'application[7] inspirée d'une banque élaborée par le ministère de l'Éducation, des Loisirs et du Sport (MELS) (figure 5). Dans cette situation, l'élève doit déterminer si grand-maman a suffisamment d'argent pour acheter tout ce qu'il y a sur sa liste d'épicerie. En termes de RM, l'élève doit calculer le cout total des achats, en faisant appel à ses connaissances (sens et opérations sur les fractions et les nombres décimaux), puis le comparer avec le montant du budget de grand-maman. Il, elle justifie ainsi si grand-maman peut ou non acheter le morceau de chocolat.

[7] Les situations d'application sont des situations d'évaluation apprentissage liées à la compétence raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques.



Gâteaux d'anniversaire

Grand-maman a 60$ et achète 48 petits gâteaux pour l'anniversaire de grand-papa. Elle pense qu'il lui restera assez d'argent pour acheter un morceau de chocolat sur lequel il est écrit « Bonne fête ». A-t-elle raison?

Voici la commande de grand-maman et la liste des prix des petits gâteaux:

Commande de grand-maman	
$\frac{1}{3}$	petits gâteaux au chocolat
$\frac{1}{4}$	petits gâteaux à la vanille
$\frac{3}{24}$	petits gâteaux aux fraises
$\frac{1}{6}$	petits gâteaux au caramel
?	petits gâteaux aux carottes

Liste des prix	
1 petit gâteau au chocolat	0,75$
1 petit gâteau à la vanille	0,75$
1 petit gâteau aux fraises	1,85$
1 petit gâteau au caramel	1,25$
1 petit gâteau aux carottes	2,10$
1 morceau de chocolat sur lequel il est écrit « Bonne fête »	5,50$

☐ Grand-maman **a raison** parce que…

☒ Grand-maman **n'a pas raison** parce que…

Grand-maman n'a pas raison car tout ses 48 petits gâtea

le morceau de chocolat = 60,20$ alors que son budget est d

60$. Donc, il y a 0,20$ de trop.

Situation d'application inspirée de la banque Instrumentation MELS 2012

Figure 5 : Tâche apportée par Aurélie

Aurélie entame la discussion en parlant d'une formation reçue autour de l'évaluation de la compétence 2, « raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques ». Elle fait référence à une grille d'évaluation reçue durant cette formation pour présenter et parler de la tâche. Elle parle des trois critères : analyser, appliquer et justifier. Elle utilise donc un vocabulaire lié aux programmes et surtout aux documents ministériels destinés aux personnes enseignantes, tels que situation de validation, situation d'action, connaissances, concepts. La tâche Gâteaux d'anniversaire est une situation de validation où l'élève doit justifier sa réponse. Selon les critères d'évaluation, Aurélie précise qu'il est important de développer l'explicitation de la démarche chez les élèves afin que leur réponse soit complète. En effet, le critère 3, justifier, serait lié à la réponse et aux traces. Les traces sont la démarche, sur laquelle elle insiste beaucoup:

> Aurélie : Oui, puis on voit … qu'est-ce qui s'est passé dans sa tête, ce n'est pas juste … un quart égale quoi.

Gisèle, aussi enseignante de 5e année, propose une situation d'application qu'elle a récemment faite avec ses élèves et dont elle a fait l'évaluation (figure 6). Dans la tâche « Randonnée en vélo », l'élève doit tracer deux trajets sur un plan cartésien à partir de coordonnées, calculer la distance parcourue et la durée de chacun des trajets, puis déterminer le trajet le plus long. En termes de RM, cette situation amène l'élève à comparer les temps pour justifier sa réponse. Elle fait également référence à la grille d'évaluation proposée par le ministère pour l'évaluation de la compétence 2. En parlant d'une solution d'élève, elle aborde l'idée d'analyser adéquatement la situation, de valider la cohérence de la réponse et des choix d'opérations en contexte.

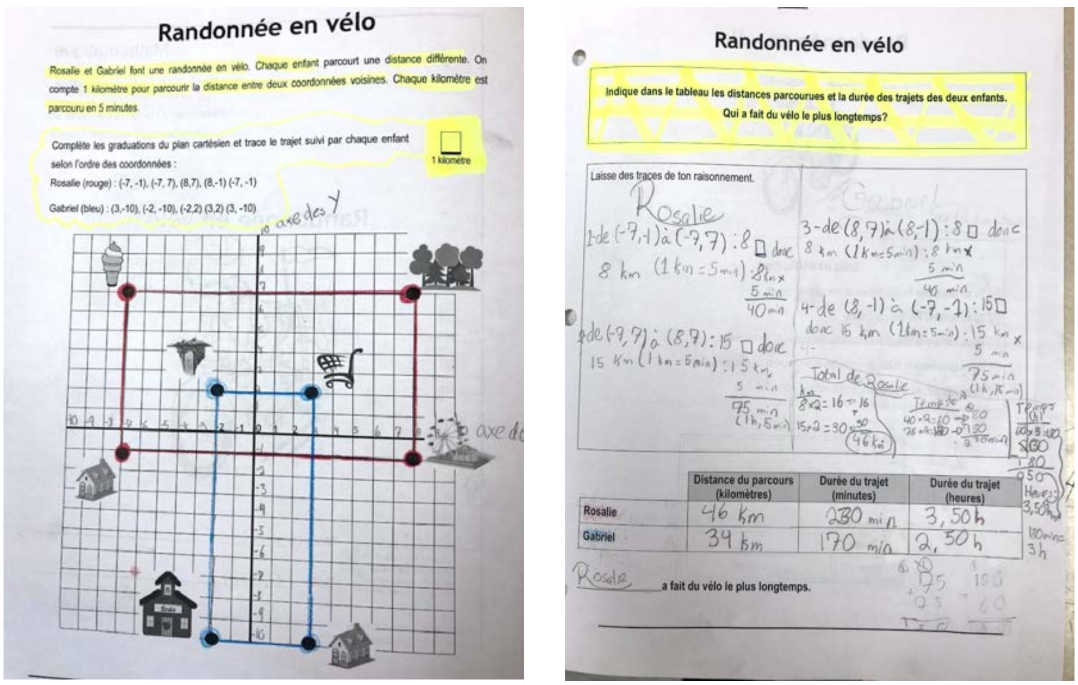


Figure 6: Tâche apportée par Gisèle

Jeanne, enseignante en 6e année, a apporté une énigme tirée du site de la Semaine des maths (Université Laval, 2014) (figure 7). Il s'agit d'une tâche qui nécessite très peu de calculs et où l'élève doit se construire des combinaisons de personnes qui traversent le pont (exemplifier), en calculer la durée de traversée puis les comparer afin d'optimiser ce temps de traversée.

Jeanne insiste sur la démarche que les élèves doivent mettre en place et, pour elle, c'est cette démarche qui est au cœur du raisonnement de cette tâche. Pour être en mesure de résoudre ce problème, l'élève doit s'organiser et, souvent, modifier sa première façon d'approcher le problème. Pour elle, raisonner mathématiquement se fait dès qu'on résout un problème, qu'on explique sa démarche; ceci permet de comprendre les mathématiques que l'on fait.

Quatre personnes doivent traverser un pont le plus rapidement possible. Le pont ne peut supporter que le poids de deux personnes à la fois.

C'est la nuit et il est impossible de traverser le pont sans torche. Or les quatre personnes ne disposent que d'une seule torche. Chaque personne a une vitesse maximale. Albert peut traverser le pont en une minute. Berthe peut le faire en deux minutes. Carole a besoin de cinq minutes. Diane traverse le pont en dix minutes. Cela signifie, par exemple, que si Diane et Albert traversent le pont ensemble, cela leur prendra dix minutes. Combien de temps est nécessaire, au minimum, pour faire traverser tout le monde?

Figure 7 : La traversée du pont

Martine, enseignante de 1re année, partage des traces d'élèves de 1re année qui additionnent 58 + 27 (figure 8). Dans la solution de gauche, l'élève avait écrit 80 sans aucune autre trace. L'écriture de la somme des « chiffres » est venue à la suite d'une demande de Martine. La seconde solution utilise des représentations de boite à dix, matériel utilisé dans sa classe pour travailler les opérations.

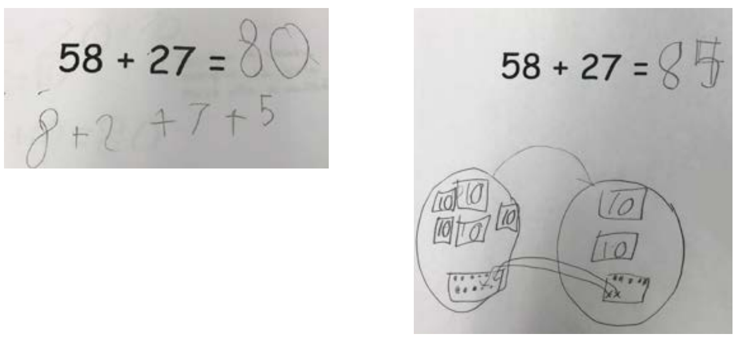


Figure 8 : Deux solutions de la tâche apportée par Martine

Martine nous parle alors de l'importance des traces laissées par les élèves pour montrer leur raisonnement. Son rôle est d'amener les élèves à communiquer leur raisonnement de façon claire. Ainsi, ce raisonnement pourra se faire avec du matériel de manipulation, des schémas, des symboles, à l'oral, à l'écrit, etc.

À l'exception de Jeanne, toutes les activités apportées ou discutées visent directement un concept bien précis. De même, les processus de RM potentiellement mis en place par les élèves sont essentiellement liés à comparer ou justifier. Ainsi, les activités sont très différentes de celles apportées par l'intervieweuse.

5.2 Discours autour des tâches apportées par l'intervieweuse

Pour ces trois tâches (figures 2 et 4), on remarque que les enseignantes ont de la difficulté à trouver des mots pour décrire les RM potentiels ou actuels des élèves autrement qu'en termes des concepts mathématiques en jeu.

Tout comme pour les tâches apportées par les enseignantes, les discussions autour des deux tâches apportées par l'intervieweuse en entretien individuel (figure 2) mettent de l’avant la place des concepts dans le discours des enseignantes à propos du RM. Selon elles, les concepts de fractions et d’infini ainsi que le sens des opérations sur les fractions sont essentiels pour mener à bien le RM nécessaire pour répondre à la tâche de la somme infinie. De même, elles relèvent comment l’analyse des algorithmes, en faisant appel aux valeurs de position et aux propriétés des opérations, peut favoriser la compréhension de ces algorithmes.

Pour la tâche de la somme infinie, elles font la différence entre « être en mesure de dire que la somme vaut 1 », ce qu’on peut lier à conjecturer, et « expliquer que la somme vaut 1 en faisant appel aux raisons mathématiques », ce qu’on peut lier aux processus de validation. En particulier, la représentation visuelle joue un rôle essentiel, selon elles, pour que l’élève soit en mesure de justifier sa conjecture. De même, elles y voient un potentiel pour l’élève de continuer la schématisation (exemplifier), d’identifier une régularité et d’extrapoler (au sens de généraliser).

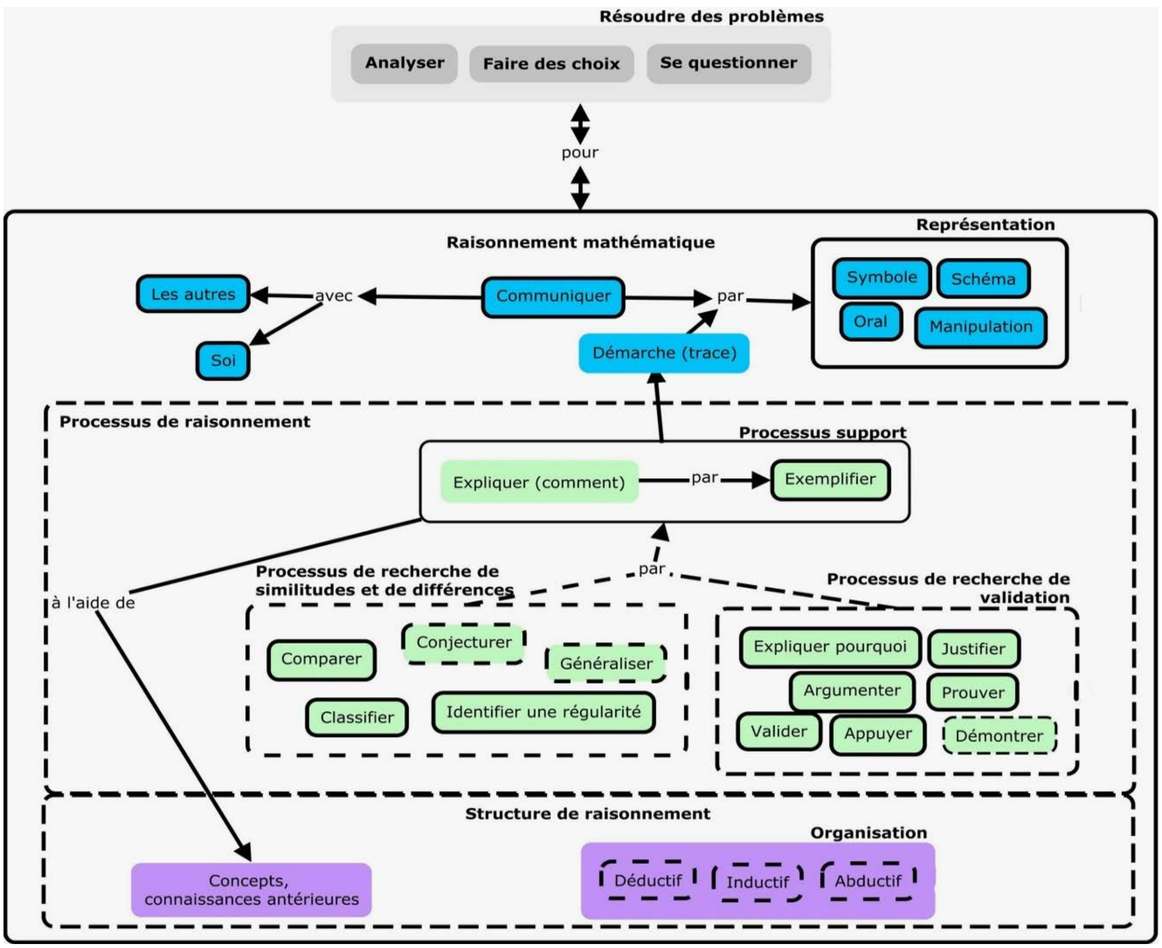
Pour ce qui est des algorithmes, certaines enseignantes soulignent que la formulation de la tâche peut mener à l’application d’une technique dépourvue de raisonnement. Toutefois, en modifiant la tâche, elles y voient un potentiel pour mieux comprendre l’algorithme en expliquant comment et pourquoi il fonctionne à partir d’arguments mathématiques.

L’analyse de la discussion autour de la tâche Charrière (figure 4) met en lumière deux éléments importants par rapport au discours des enseignantes sur le RM. Premièrement, cette tâche semble très différente de celles utilisées par les enseignantes dans leur classe. En effet, les enseignantes sont surprises qu’une élève de 4e année puisse résoudre cette tâche et ont de la difficulté à trouver les mots pour décrire la démarche de l’élève. Deuxièmement, la discussion autour de la copie d’élève leur a permis de réinvestir certains termes qui leur étaient moins familiers, tels que généraliser, conjecturer et exemplifier.

5.3 Le raisonnement mathématique : un complexe de sens

En somme, chez les six enseignantes, quoique l’aspect structurel est abordé, c’est l’aspect processuel qui est davantage mis de l’avant par le vocabulaire qu’elles emploient, et ce, autant en entretien individuel que collectif. L’entretien collectif a permis de confirmer l’association du RM à plusieurs verbes tels que justifier, identifier, extrapoler, appliquer, expliquer, prouver. De même, communiquer avec soi-même ou avec les autres est central au RM. Cette communication se fait par le biais de différentes représentations dont, entre autres, la manipulation. Enfin, comme le souligne Jeanne, raisonner en mathématiques est fortement lié à donner du sens et va au-delà de la procédure. Ainsi, cette analyse du discours des enseignantes a permis de modifier le modèle de RM présenté à la figure 1.

En particulier, quatre groupes de termes ont été mis en évidence (figure 9). Le premier, en gris, lié à la résolution de problème, est considéré comme périphérique au RM : se questionner, faire des choix et analyser. Le second, en bleu, définit le RM en tant qu'activité de communication et inclut les troisième (en vert) et quatrième (en violet) groupes, à savoir, les aspects processuel et structurel du RM. Les termes dans les bulles au contour continu, peu importe leur couleur, font partie du discours des enseignantes et du modèle de Jeannotte. Les termes dans les bulles au contour pointillé proviennent du modèle théorique et ont été peu ou pas repris par les enseignantes et parfois avec des usages différents. Enfin, les termes dans les bulles sans contour proviennent du discours des enseignantes et enrichissent le modèle.



Légende : bulles sans contour: apports des enseignantes ; bulles pointillées : apports du modèle ; bulles au contour continu : modèle et enseignantes.

Figure 9 : Modèle de RM modifié à la suite de l'analyse du discours des enseignantes

5.4 Les termes périphériques

Les termes en gris à l'extérieur du schéma n'ont pas été intégrés au modèle de RM. Quoique ces termes soient utilisés par les enseignantes, deux raisons nous amènent à les laisser en périphérie. Premièrement, on cherche à opérationnaliser les définitions des termes qui sont inclus directement dans le modèle, ce qui n'a pas été possible de faire jusqu'à maintenant pour ces termes. Deuxièmement, cette difficulté peut venir du lien entre ces termes et la résolution de problèmes. Selon delMas (2004), résolution de problème et RM sont souvent utilisés comme synonyme, ce qui rend la conceptualisation du RM difficile. Dans le discours des enseignantes comme dans le PFEQ (Gouvernement du Québec, 2001), le verbe résoudre se trouve lié à la modalité pédagogique et à la compétence « Résoudre des situations problèmes ». Les situations d'apprentissage et d'évaluation (SAE) de cette compétence se nomment des « situations problèmes ». Ces situations problèmes se caractérisent entre autres par leur complexité. « La complexité se traduit (dans l'exemple précédent) par différents choix sous-tendant la construction de la situation : plusieurs concepts en jeu, plusieurs données, plusieurs contraintes, divers modes de représentation, un énoncé très long » (Lajoie et Bednarz, 2016, p. 15). Les enseignantes se servent ainsi de ce critère pour différencier les situations associées à la compétence 1 (résoudre des situations problèmes) de celles associées à la compétence 2 (raisonner à l'aide de concepts et de processus). Or, la résolution de problème comme la résolution de situation problème se fait à l'aide d'un RM :

> Martine : … le lien que je fais avec résoudre et raisonner, c'est que... En fait, une SAE, ça devrait être complexe. Donc, c'est sûr que chaque enfant peut avoir une réponse différente… Dans le fond, le raisonner pour moi, c'est les connaissances, c'est les notions. C'est les savoir-faire. Puis, au niveau du résoudre, il va chercher ses connaissances pour les mettre en application dans une situation qui est plus complexe.

Selon Lajoie et Bednarz (2016), le concept de situation problème est aussi lié à l'idée de faire des choix, ce qui est souligné par Agathe : « Parce que dans un résoudre, on peut... Je te présente une situation, c'est à toi de juger, d'après ce qu'on a vu, quels outils tu dois utiliser ».

Or, faire des choix est un des critères d'évaluation de la compétence 2 : « Choix de concepts et de processus mathématiques appropriés à la situation d'application » (Gouvernement du Québec, 2001, p. 130). Ces critères se retrouvent liés à l'activité de raisonner en mathématique, comme on le constate chez Gisèle : « Une fois que j'ai compris, j'ai analysé le problème, là je dois faire des choix dans ce que je connais et ce que je pense qui va m'être utile pour le raisonner »[8].

Durant les entretiens individuels, le terme « analyser » a été introduit par trois enseignantes en lien avec une grille d'évaluation de la compétence 2. « Dans le fond, l'analyse c'est : Est-ce qu'on a choisi les bons concepts et processus? » (Gisèle). C'est à travers les traces de l'élève que l'enseignant évalue s'il, si elle a bien analysé. L'entretien collectif a permis de revenir sur ce terme. Pour Gisèle, lorsque des élèves résolvent des problèmes, ils, elles éprouvent de la difficulté à les analyser :

> Gisèle : je trouve qu'en raisonnement mathématique, les élèves se lancent trop rapidement avant de, au lieu d'analyser la situation, de prendre le temps de réfléchir, de faire des liens avec qu'est-ce qu'ils connaissent déjà.... Donc, se questionner sur qu'est-ce qu'on cherche réellement à savoir.

Analyser (ou réfléchir) permet ici de mettre l'accent sur l'idée de faire des liens, de se questionner, donc de contraster l'application d'une procédure apprise par cœur sans qu'il y ait de sens ou de compréhension associée et la mise en œuvre d'un RM, d'une activité raisonnée.

Il est possible de faire un parallèle entre la grille d'évaluation de la compétence 2 et le modèle de résolution de problème de Pólya (1965). Ce modèle propose de : 1) comprendre le problème (qui s'apparente à analyser) ; 2) élaborer un plan (ou faire des choix) ; 3) mettre le plan en œuvre (ou appliquer) ; et enfin 4) faire une vérification (ou justifier). C'est ce qu'Agathe ressent en lien avec la compétence raisonner :

> Agathe : Écoute. Je vais le dire, on parle beaucoup, beaucoup de résoudre à l'aide de situations complexes. C'est vraiment ça la grande préoccupation des enseignants présentement. J'ai l'impression que le raisonner, bien c'est l'ancien… c'est l'ancien résoudre de, mettons, d'il y a 15 ou 20 ans là.

Les critères d'évaluation de la compétence « raisonner à l'aide de concepts et de processus » prennent donc une place importante dans le discours sur le RM, contribuant à faire paraitre « résoudre des problèmes » et « raisonner en mathématiques » comme synonymes.

Quoique faire des choix, analyser et se questionner sont liés au RM dans le discours des enseignantes, nous jugeons qu'il s'agit de termes génériques et trop

---

[8] Notons que ce critère a été fusionné au critère « analyse adéquate de la situation » dans le cadre d'évaluation (Gouvernement du Québec, 2011).

liés à résoudre des problèmes pour être inclus dans le modèle de RM. Ainsi, ils sont considérés comme périphériques.

5.5 Le RM en tant qu'activité de communication

Deuxièmement (en bleu), le RM est vu comme une activité de communication avec soi. Les enseignantes utilisent des expressions comme « dans sa tête », « mentalement », « se convaincre ». Par ailleurs, la communication avec l'autre (surtout avec l'enseignant) est tout autant, sinon davantage, soulignée. Jeanne dit que le RM « c'est la manière que l'enfant va arriver à nous communiquer ce qu'il comprend de ce qui est demandé ». Martine dit aussi : « Donc, en gros, pour moi, c'est vraiment d'être capable d'expliquer le chemin pour arriver à une réponse ».

Ainsi, du point de vue du modèle de Jeannotte, le RM est défini comme une activité de communication à partir des fondements commognitifs. Du point de vue des personnes enseignantes, c'est la pratique enseignante qui mène à parler du RM en tant qu'activité de communication. En effet, l'évaluation formative ou sommative des apprentissages des élèves s'effectue à travers la communication de l'élève, qu'elle soit écrite ou orale.

De même, tout comme la commognition reconnait plusieurs types de représentation et met l'accent sur les liens entre ces différentes représentations pour le développement d'objets mathématiques (Sfard, 2008), les enseignantes mettent de l'avant différents types et liens entre ces dernières. En effet, les tâches apportées lors des entretiens individuels font état d'une variété de représentations: symbole (Jeanne, Aurélie et Gisèle), schéma (Martine et Alice), manipulation (Agathe), plan cartésien (Gisèle). De même, la discussion sur la tâche de la somme infinie et sa solution orale (figure 2) a principalement tourné autour de l'importance de faire le lien entre le partitionnement du carré (schéma) et la somme de fractions (symbole).

Les enseignantes utilisent beaucoup le terme démarche pour référer à la communication de l'élève. Elles contrastent les démarches qui sont des techniques et procédures de celles qui sont des RM, les premières étant davantage liées à une application sans compréhension nécessaire ou à du par cœur. Ainsi, du point de vue du modèle, la démarche de l'élève sera un RM lorsqu'elle infère des énoncés mathématiques à partir d'autres énoncés mathématiques.

5.6 Le RM en tant que processus

Troisièmement (en vert), l'aspect le plus présent dans le discours des enseignantes, autant dans les entretiens individuels que dans l'entretien collectif, est le RM en tant que processus, en tant qu'ensemble d'actions. Par ailleurs, il y a un contraste entre les processus de recherche de similitudes et les processus de recherche de validation. En effet, les premiers sont très peu présents, tandis que les seconds sont variés et prennent énormément d'importance dans le discours enseignant, ce qui fait écho à la littérature.

5.6.1 Des processus de recherche de validation

Tous les processus de recherche de validation ont été repris par les enseignantes de façon souvent cohérente avec le modèle, à l'exception de « démontrer ».

En fait, les enseignantes utilisent le terme « démontrer » dans le sens de montrer : « c'est une démonstration soit orale, soit écrite, une démonstration [dans le sens de montrer] du chemin qui est fait par l'enfant pour accomplir ou pour faire le problème qui est demandé » (Agathe). On peut ici lier cette définition à expliquer comment, qui sera élaborée plus loin. Par ailleurs, si l'on reprend la définition du modèle, il serait surprenant de retrouver un processus « démontrer » au primaire. En effet, par définition, ce processus demande une systématisation des énoncés en une théorie mathématique reconnue par les personnes mathématiciennes.

Quoiqu'il soit impossible de dire comment se vit le processus prouver dans la classe à partir des entretiens, les enseignantes relient « prouver » à l'idée de valider, de justifier, d'argumenter : « quand tu justifies ou que tu prouves, c'est que tu dois argumenter sur, mettons, la raison mathématique qui est derrière » (Jeanne). De même, l'idée de raisons mathématiques est sous-jacente au processus « prouver », comme illustré par la discussion avec Agathe sur l'activité des nombres pairs et impairs. Pour sa part, Martine relie « prouver » et « expliquer pourquoi » :

> …souvent je leur demande tout le temps de me prouver qu'ils ont raison, même quand ils ont raison… Quand ils doivent prouver, nécessairement ils doivent verbaliser, expliquer le pourquoi de la chose.

Chez Jeannotte (2015), « argumenter » et « expliquer pourquoi » sont des synonymes de processus de recherche de validation, mais plutôt orientés vers la communication avec l'autre : « un RM est un processus de recherche de validation s'il vise à changer la valeur épistémique (c'est-à-dire la vraisemblance ou la vérité) d'un énoncé mathématique » (Jeannotte, 2015, p. 222). Or, comme le soutient Pedemonte (2002), argumenter a pour but de convaincre qu'un énoncé est vrai. Il en est de même pour expliquer pourquoi.

5.6.2 Des processus de recherche de similitudes et de différences

Pour les processus de recherche de similitudes et de différences, le processus « identifier une régularité » semble faire partie du quotidien des enseignantes. En fait, on peut noter que le travail sur les régularités est présent dès le premier cycle du primaire dans le PFEQ (Gouvernement du Québec, 2001) et il est spécifié dans la Progression des apprentissages en mathématiques au primaire (Gouvernement du Québec, 2009), document complémentaire au PFEQ.

Quoique les termes « comparer » et « classifier » ne soient pas utilisés explicitement par les enseignantes, les tâches discutées laissent penser que ces deux processus sont souvent mis en œuvre au primaire. Que ce soit classifier les nombres pairs et impairs ou les représentations de fractions, comparer des couts, des trajets, du temps, toutes ces tâches impliquent l'un, l'autre ou les deux processus.

Conjecturer et généraliser ont été introduits dans la discussion à l'aide de la seconde liste de mots, puisqu'il s'agit de processus importants du modèle et qu'ils sont présents dans le PFEQ du secondaire (Gouvernement du Québec, 2006).

Or, contrairement au PFEQ du secondaire et au programme de l'Australie que les participants du projet de Herbert et al. (2015) utilisaient, ni « conjecturer » ni « généraliser » ne fait partie du PFEQ du primaire de façon explicite. Par ailleurs, les enseignantes réussissent à donner du sens à ces termes à l'aide d'exemples de leur propre pratique ou encore à l'aide de la copie d'élève explorée à la fin de l'entretien collectif. Par exemple, Aurélie relie une activité où elle amène ses élèves à découvrir une règle pour multiplier des nombres décimaux au processus conjecturer. Jeanne associe des traces d'une élève à généraliser : « Elle est venue dégager ce qui est, dans le fond, la généralité, c'est-à-dire que pour n'importe quel nombre, peu importe la centaine, ce qui importe, c'est l'unité ».

Une utilisation particulière du terme « généraliser » est faite par les enseignantes lorsqu'il est introduit dans la conversation, à savoir que généraliser c'est être capable d'appliquer une même procédure dans un nouveau problème. On peut interpréter les deux utilisations dans les propos de Jeanne qui parle d'un élève et d'une tâche générique :

> Jeanne : C'est qu'ils sont en train de généraliser quelque chose, un procédé ou un raisonnement, une manière de faire qui est identique à celle, à une autre qu'ils ont déjà faite. Ben là, ils sont en train de faire des liens en termes de connaissances mathématiques, mais ils sont en train de généraliser, de voir qu'il y a une généralité qui est tout le temps là.

Lajoie et Bednarz (2016) soulignent cet aspect de transfert des connaissances lié à l'approche par compétences à la base du PFEQ et qui prend de l'importance dans les situations problèmes. Selon elles, l'idée de transfert est empruntée à un autre discours que celui de la didactique des mathématiques et n'est pas directement liée aux mathématiques, mais plutôt au concept d'apprentissage au sens large.

5.6.3 Les processus de support

Exemplifier est défini comme un processus qui supporte autant les processus de recherche de similitudes et de différences que de recherche de validation (Jeannotte, 2015). Chez les enseignantes, il est aussi associé à l'idée de support au RM, puisque lié à des stratégies essai-erreur : « ...des fois, quand tu es bloqué quand tu fais un problème. OK. Bien on va essayer de voir un exemple autre qui va nous permettre de [le] résoudre » (Jeanne). Les propos d'Agathe vont dans le même sens lorsqu'elle parle de la résolution de la tâche Charrière (figure 4) : « Elle part avec une page blanche, puis elle se dit : "Bon. Je fais un choix. Je prends ce chemin-là, puis on essaie puis on reviendra au pire "… dans le fond il faut comme commencer quelque part ». Exemplifier est alors une façon de rentrer dans le problème, de se donner un point de départ, d'explorer le problème. Les propos de Jeanne et d'Agathe sont similaires à ceux de Mason (1994), qui mentionne qu'étudier un problème à l'aide d'un certain nombre d'exemples donne accès à la nature du problème.

On considère également « expliquer » comme processus de support dans le modèle modifié. Jeannotte (2015) a développé autour de ce terme en divisant expliquer quoi, expliquer pourquoi et expliquer comment, le troisième n'étant à priori pas associé au RM. Dans la littérature sur le RM, Yackel (2001) associe expliquer à un construit social. Pour Arsac et al. (1992), l'explication est « tout discours tenu par une personne ou un groupe dont l'objectif est de communiquer à d'autres le caractère de vérité d'un énoncé mathématique » (p. 5). Ils soulignent ainsi la valeur épistémique liée aux processus de validation. Toutefois, pour Duval (1992-1993), l'explication n'est pas un raisonnement : « [l]'explication donne une ou plusieurs raisons pour rendre compréhensible une donnée [...] Or ces raisons avancées ont en réalité une fonction quasi descriptive » (p. 40). Il s'agit donc davantage de décrire une procédure, une technique. Par exemple, pour décrire la multiplication de deux fractions, on dira : multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux. Il s'agit de l'explication d'un algorithme de multiplication de fractions, mais ça ne dit rien à propos du pourquoi cet algorithme serait valide ou ce qui aurait pu m'amener à conjecturer cette règle. Il s'agit d'une description d'étapes.

Or, dans le discours des enseignantes, le terme « expliquer », en particulier « expliquer comment », apparait central au RM et il va au-delà de la description. Pour Jeanne, en entretien collectif, raisonner : « c'est ma façon d'expliquer pourquoi ça fonctionne, c'est ma façon d'expliquer que je peux le prouver, c'est ma façon d'expliquer, ça permet d'expliquer comment on l'a analysé, comment on peut le prouver. »

On comprend que pour elles, lorsqu'on explique à un, une autre, on lui montre qu'on a compris ce qu'on fait. L'explication de l'élève doit être porteuse de compréhension, de sens. Par exemple, lorsqu'on demande à Aurélie d'analyser le problème où l'élève explore différents algorithmes (figure 2), elle nous dit que ce problème permettra à l'élève de raisonner, car ce dernier pourra mieux comprendre l'algorithme traditionnel :

> Aurélie : Parce que ça je pense. Faire un problème comme ça, ça explique bien l'algorithme.
>
> Int : Mmm... L'algorithme qu'ils utilisent [l'algorithme traditionnellement enseigné en classe].
>
> Aurélie : Parce que l'algorithme, ils ne [le] comprennent pas nécessairement. Ils font la multiplication, mais ils ne comprennent pas pourquoi à la fin ça arrive à la réponse.

De même, on ne parle pas de n'importe quelle explication. Comme le précise Gisèle après que d'autres membres du groupe aient questionné sa définition de RM en tant qu'« enchainement … de logique, d'étapes qui conduit à énoncer une règle quelconque ou à trouver une solution », celle-ci doit être organisée :

> Gisèle : Ou il va plus être en mode exploration, mais à la fin, il va être capable de regarder ce qu'il a fait, puis peut-être de l'expliquer de façon plus logique, d'articuler un peu plus son raisonnement.

Au même titre qu'exemplifier, on peut donc considérer expliquer et plus spécifiquement expliquer comment comme processus de support qui sera défini comme suit:

> Expliquer est un processus de RM qui supporte la mise en œuvre d'autres processus de RM par la description d'actions posées menant à des inférences qui favorisent
>
> 1) la recherche de similitudes et de différences
>
> 2) la recherche de validation.

En effet, lorsqu'on explique comment, on peut faire référence à une panoplie d'autres processus et favoriser leur développement. On peut voir un tel cas de processus dans la solution orale de Frédérick à la tâche somme infinie (figure 2) proposée aux enseignantes.

> Frédérick [en réponse à quelle serait la fraction suivante]: Tu coupes en deux, ça donne un soixante-quatrième… [lit à voix haute le c)] Si tu poursuivais, finiras-tu par sortir du carré?... mmm… J'en sais rien… Un cent-vingt-huitième… un… deux-cent-cinquante-six… [en ajoutant des subdivisions au schéma].

> Int: D’après toi, est-ce que tu vas sortir?
>
> Frédérick: Non
>
> Int: Pourquoi?
>
> Frédérick: Parce qui reste un carré et à chaque fois, tu ajoutes une ligne et tu vas juste faire, genre… tu prends toujours la moitié de la fraction que tu avais avant.

Ici, Frédérick explique ce qu’il fait à plusieurs reprises pour obtenir la prochaine fraction de la suite: tu coupes en deux, tu ajoutes une ligne, tu prends la moitié. Or, ces explications supportent son processus conjecturer (je ne vais pas sortir du carré) et son processus justifier.

5.7 Le RM, une activité organisée, logique : l’aspect structurel

Quatrièmement (en violet), cette communication avec l’autre ne se fait pas n’importe comment, elle doit suivre une certaine logique, un certain enchainement, elle doit être cohérente, compréhensible pour l’enseignante. De plus, cette organisation du RM tient compte de l’élève qui raisonne. Alice nous dit « ... logique ou raisonnement, mais dans l’fond on va parler de sa logique à lui. Dans le sens que c’est ce qu’il peut faire avec les outils ou ce qu’il sait déjà. » Cette logique fait partie intégrante du RM : « logique, dans l’fond utiliser notre logique quand tu analyses au début. Après ça, utiliser notre logique pour voir quand on fait nos calculs pour voir si ça a du bon sens » (Aurélie).

On peut lier ce discours sur l’importance que le RM ait une certaine organisation à l’aspect structurel du RM (bas de la figure 9). Quoiqu’elles n’utilisent pas les termes « déductif » et « inductif » spontanément et qu’elles se questionnent sur ce que ces mots signifient, les enseignantes semblent décrire en d’autres termes les pas de raisonnements de l’aspect structurel : des enchainements d’étapes soutenus par une certaine logique. De plus, pour les enseignantes, les concepts, les connaissances antérieures des élèves viennent donner une cohérence à cette organisation.

Enfin, la grille d’évaluation de la compétence 2 fournie par le MELS semble mener à un discours qui, à priori, caractériserait le RM de façon linéaire (j’analyse, je fais des choix, j’applique, je justifie). Lors de l’entretien collectif, les enseignantes reprenaient souvent les termes proposés par les grilles d’évaluation et donc, la linéarité qui s’en dégage. Afin de valider si les enseignantes endossent réellement cette idée de linéarité ou si elle n’est qu’une conséquence des termes utilisés, l’intervieweuse a présenté un croquis linéaire du RM aux enseignantes après une discussion autour des mots de vocabulaire introduit en entretien collectif (figure 3). C'est alors que les enseignantes cherchent à restructurer autrement le schéma :

> Jeanne : En tout cas, moi, là, ce que je vois là, c'est comme s'il y a analyser/comprendre [d'un côté], y'aurait procédures/concepts/j'explique comment je m'y prends [au milieu]. Après ça, y'aurait euh communiquer/traces pi expliquer pourquoi/justifier/prouver.
>
> [... Un modèle linéaire leur est présenté...]
>
> Jeanne : Ça me dérange beaucoup parce que ce n'est jamais linéaire. Au contraire, plus on force la ligne, plus les élèves se plantent parce que ce n'est pas un chemin un raisonnement.

Par l'utilisation d'imbrication, le schéma présenté à la figure 9 tente de se dégager de cette idée de linéarité en présentant le RM en tant qu'activité de communication avec soi ou avec l'autre, activité qui peut être regardée autant selon son aspect structurel (organisation) que processuel (action dans le temps). En fait, le modèle propose un vocabulaire pour parler du RM. Or, un même RM peut être regardé du point de vue structurel ou processuel. Des processus de recherche de similitude peuvent se produire avant, pendant ou après des processus de recherche de validation. C'est en fait ce qui rend le RM si complexe à analyser.

Discussion et conclusion

Le discours des enseignantes autour du RM semble prendre sa source dans deux éléments relativement distincts. Le premier est le RM en tant que compétence qui doit être évaluée à l'aide d'une grille particulière et de situations d'application. Comme on le constate, les critères d'évaluation associés à cette grille teintent énormément le discours des enseignantes. Or, ces critères pourraient favoriser une vision linéaire (remise en question par les enseignantes) du RM, mais aussi l'assimiler à la résolution de problèmes. En effet, les enseignantes utilisent un vocabulaire qui laisse de côté plusieurs processus de RM au profit d'un vocabulaire plus général associé à la résolution de problème. Ce lien fort avec le programme permet aussi de comprendre en partie pourquoi les processus de recherche de validation sont plus présents que les processus de recherche de similitudes et de différences. Évidemment, cette importance des processus de recherche de validation n'est pas l'apanage du programme. En fait, les mathématiques publiques (celles publiées) mettent souvent davantage l'accent sur les preuves, les démonstrations, laissant les processus au domaine privé. Or, le modèle de Jeannotte (2015) cherche à valoriser l'ensemble des processus de RM nécessaire pour le développement des mathématiques en explicitant ceux qui sont davantage de l'ordre du privé. On constate ici un apport du modèle pour l'enseignement primaire. En effet, le modèle pointe vers des processus de RM qui apparaissent peu ou pas développés en classe du primaire. C'est le cas des processus conjecturer et généraliser. En effet, on peut penser que si les enseignantes n'utilisent pas d'emblée ces termes et qu'elles trouvent peu ou pas d'exemples d'activités qui les favorisent, c'est que ces deux processus vivent peu en classe du primaire au Québec. Il en est de même pour exemplifier, qui est peu mentionné comme un processus à favoriser.

Par ailleurs, lorsqu'elles illustrent des RM, elles recourent énormément à des exemples génériques, à des exemples qui illustrent, qui justifient leurs propos. Agathe, par exemple, utilise le nombre 19 pour discuter de la façon dont les enfants sont en mesure de justifier qu'un nombre est impair. Il est clair ici que le nombre 19 est un exemple générique. Exemplifier devient alors un outil d'enseignement et non un processus de raisonnement supportant les processus de validation pour les élèves eux-mêmes. Quoique cette stratégie pédagogique favorise le développement du RM (Watson et Mason, 2006), la question se pose à savoir si le processus exemplifier en tant que support des processus de validation vit en classe de mathématiques au primaire chez les élèves. En tant que support des processus de validation, exemplifier n'a pas toujours eu bonne presse, surtout lorsque réduite à ce que Balacheff (1988) appelle l'empirisme naïf. Or, lorsque l'exemplification est un exemple générique, il s'agit d'un outil puissant pour prouver lorsque le symbolisme mathématique en est encore à ses balbutiements (Balacheff, 1988).

Avec le programme vient aussi l'importance des concepts, des connaissances antérieures de l'élève. En effet, l'évaluation des concepts mathématiques a été intégrée à la compétence « raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques ». Ces concepts jouent un rôle important dans la structure des raisonnements, puisque ce sont les éléments constitutifs des différents pas de raisonnements.

Le second élément qui structure le discours des enseignantes est que le RM est associé à la compréhension et à un apprentissage qui a du sens pour l'élève. Cet élément favorise une vision plus globale du RM, en tant que phénomène multifacette, prenant en compte l'élève, ses connaissances, ses difficultés, le problème à résoudre et son contexte, les visées d'apprentissage de la leçon, etc. Le terme « expliquer » semble prendre en compte cette idée de compréhension dans le discours des enseignantes et ne réfère donc pas à ce que Duval (1992-1993) entend par expliquer. Ainsi, ce second plan du discours a permis d'enrichir le modèle du processus expliquer en tant que processus support.

Enfin, on note aussi la nécessité de communiquer liée au RM chez les six enseignantes du primaire. De ce fait, on peut penser, étant donné l'importance de cet aspect dans la pratique quotidienne des personnes enseignantes, qu'une formation continue basée sur notre conceptualisation du RM pourrait favoriser l'adoption de pratiques favorables au développement du RM en classe du primaire. En effet, il s'agit d'une conceptualisation qui est appropriée pour prendre en compte la nature individuelle et collective du RM, nature soulignée par les enseignantes.

Tout comme le discours en didactique des mathématiques, le discours des enseignantes est formé à partir d'un ensemble de discours lié au domaine de l'éducation : discours de diverses institutions d'enseignement, discours psychologique, pédagogique, didactique des mathématiques et d'autres disciplines. Or, ces discours proviennent de communautés différentes qui ont chacune leurs propres pratiques. Ainsi, comme les enseignantes ayant participé à ce projet le soulignent, enrichir et clarifier le vocabulaire lié au RM que ce soit dans le PFEQ ou en formation pourrait entre autres ouvrir de nouvelles possibilités pour le développer en classe :

> Agathe : Mais ça prouve qu'il faut qu'on ait un langage commun. Je pense qu'il y a une compréhension à avoir là… On enseigne les mathématiques différemment selon notre compréhension.

Remerciements

Nous tenons à remercier les six participantes ainsi que le FRQSC, subvention (#197178) sans qui ce projet n'aurait pu voir le jour.

Références

Arsac, G., Chapiron, G., Colonna, A., Germain, G., Guichard, Y. et Mante, M. (1992). *Initiation au raisonnement déductif au collège : une suite de situations permettant l'appropriation des règles du débat mathématique*. Presses universitaires de Lyon.

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves du Collège* [thèse de doctorat, Université de Grenoble 1]. TEL. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00326426

Cabassut, R. (2005). *Démonstration, raisonnement et validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et en Allemagne* [thèse de doctorat, Université Paris Diderot]. TEL. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00009716

Clarke, D. M., Clarke, D. J. et Sullivan, P. (2012). Reasoning in the Australian Curriculum: Understanding its meaning and using the relevant language. *Australian Primary Mathematics Classroom, 17*(3), 28-32.

Coupal, M. et Marotte, L. (2005). *À vos Maths! Mathématiques, premier cycle du secondaire. Manuel de l'élève.* Chenelière Éducation.

delMas, R. C. (2004). A comparison of mathematical and statistical reasoning. Dans D. Ben-Zvi et J. Garfield (dir.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (p. 79-96). Kluwer Academic Publishers.

Del Notaro, C. (2013). Transposition didactique de quelques critères de divisibilité dans le manuel de 6P. *Math-École,* (219), 4-9.

Duval, R. (1992-1993). Argumenter, démontrer, expliquer : Continuité ou rupture cognitive ? *Petit x*, (31), 37-61.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Giddens, A. (1987). *La constitution de la société* (traduit par M. Audet). Presses universitaires de France.

Gouvernement du Québec. (1984). *Programme d'études : mathématique 116, enseignement secondaire*. Ministère de l'Éducation.

Gouvernement du Québec. (1995). *Programmes d'études : mathématique 314, enseignement secondaire*. Ministère de l'Éducation.

Gouvernement du Québec. (2001). *Programme de formation de l'école québécoise éducation préscolaire, enseignement primaire*. Ministère de l'Éducation.

Gouvernement du Québec. (2006). *Programme de formation de l'école québécoise éducation préscolaire, enseignement secondaire*. Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport.

Gouvernement du Québec. (2009). *Progression des apprentissages au primaire. Mathématique*. Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport.

Gouvernement du Québec. (2011). *Cadre d'évaluation des apprentissages*. Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport.

Guignon, S. et Morrissette, J. (2006). Quand les acteurs se mettent en mots. *Recherches qualitatives, 26*(2), 19-36

Herbert, S., Vale, C., Bragg, L. A., Loong, E. et Widjaja, W. (2015). A framework for primary teachers' perceptions of mathematical reasoning. *International Journal of Educational Research, 74*, 26-37. doi.org/10.1016/j.ijer.2015.09.005

Hill, H. C., Rowan, B. et Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal, 42*, 371–406. doi.org/10.3102/00028312042002371

Jeannotte, D. (2015). *Raisonnement mathématique: proposition d'un modèle conceptuel pour l'apprentissage et l'enseignement au primaire et au secondaire* [Thèse de doctorat, Université du Québec à Montréal]. Archipel. https://archipel.uqam.ca/8129/

Jeannotte, D. et Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*(1), 1-16. doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Lacasse, C. (2005). *Presto Mathématique, 3e cycle. Manuel B, volume 1*. Éditions CEC.

Lajoie, C. et Bednarz, N. (2016). La notion de situation-problème en mathématiques au début du XXIe siècle au Québec : rupture ou continuité? *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies, 16*(1), 1-27. doi.org/10.1080/14926156.2014.993443

Lindquist, M., Philpot, R., Mullis, I. V. S. et Cotter, K. E. (2019). TIMSS 2019 mathematics framework. Dans I. V. S. Mullis et M. O. Martin (dir.), *TIMSS 2019 assessment frameworks* (p. 11-25). TIMSS & PIRLS International Study Center.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255-276. doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2

Mason, J. (1994). *L'esprit mathématique.* Éditions Modulo.

Morrissette, J. (2009). *Manières de faire l'évaluation formative des apprentissages selon un groupe d'enseignantes du primaire : une perspective interactionniste* [Thèse de doctorat, Université Laval]. Corpus. https://corpus.ulaval.ca/jspui/handle/20.500.11794/20506

Morrissette, J. (2011). Vers un cadre d'analyse interactionniste des pratiques professionnelles. *Recherches qualitatives, 30*(1), 10-32.

National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers (2010). *Common Core State Standards (Mathematics)*. http://www.corestandards.org.

Organisation de coopération et de développement économiques. (2006). *Compétences en sciences, lecture et mathématiques : Le cadre d'évaluation de PISA 2006*.

Pedemonte, B. (2002). *Étude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques* [thèse de doctorat, Université Joseph Fourier]. TEL. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00004579/

Pólya, G. (1965). *Comment poser et résoudre un problème* (2e éd.). Éditions Jacques Gabay.

Powell, A. B., Francisco, J. M. et Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *The Journal of Mathematical Behavior, 22*(4), 405-435. doi.org/10.1016/j.jmathb.2003.09.002

Reid, D. A. (2002). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(1), 5–29. doi.org/10.2307/749867

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Stylianides, A. J. et Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(4), 307-332. doi.org/10.1007/s10857-008-9077-9

Stylianides, G. J. (2005). *Investigating students' opportunities to develop proficiency in reasoning and proving: a curricular perspective* [thèse de doctorat, University of Michigan]. Deep Blue. https://deepblue.lib.umich.edu/handle/2027.42/125230

Université Laval (2014, 7 novembre). *Semaine des maths : Énigmes*. https://www.semainedesmaths.ulaval.ca/fileadmin/semainemsg/documents/2014_doc/Enigme_-_Pont_Prim_FE.pdf

Watson, A. et Mason, J. (2006). *Mathematics as a constructive activity : Learners generating examples.* Routledge.

Yackel, E. (2001). Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. Dans M. van den Heuvel-Panhuizen (dir.), *Proceedings of the 25th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 9-24). Utrecht.