Exploitation de l'histoire dans une analyse didactique du développement de la pensée fonctionnelle au début de l'enseignement secondaire tunisien

Sonia BEN NEJMA
Université de Carthage – Tunisie – Laboratoire de recherche LARINA
sonianejma@yahoo.com

Résumé : Cet article propose une réflexion didactique autour de la dialectique entre les modes de pensée algébrique et fonctionnelle dans le curriculum tunisien, au début du cycle secondaire (14-15 ans). Deux analyses sont réalisées. L'une, de nature historicoépistémologique, vise à retracer le développement de la pensée fonctionnelle à travers les notions de variable, de dépendance fonctionnelle et de covariation. Cette étude est conduite en lien avec les cadres mathématiques et les registres de représentation sémiotiques. L'autre, de nature institutionnelle, est consacrée à l'exploration du programme et du manuel officiel de première année du secondaire tunisien, pour en décrypter les visées et les choix institutionnels, au regard de la construction historique de ces notions. Cette recherche s'inscrit dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD). Elle invite à réfléchir sur le potentiel des praxéologies instaurées dans ce système éducatif pour permettre une entrée dans la pensée fonctionnelle.

Mots-clés : pensée fonctionnelle, sémiotique, histoire, algèbre

Exploring history in a didactic analysis of the development of functional thinking at the beginning of Tunisian secondary education

Abstract: This research offers a didactic reflection around the dialectic between algebraic and functional thinking in the Tunisian curriculum, at the beginning of secondary school (14–15 years). Two analyses are carried out. The historicoepistemological analysis aims to trace the development of functional thinking through the concepts of variable, functional dependence and covariation and is conducted in conjunction with mathematical frameworks and semiotic representation registers. The institutional analysis focuses on exploring the program and the official textbook to decipher their aims and institutional choices with regard to the historical construction of these concepts. This

https://doi.org/10.71403/4q29sj75

research comes under the Anthropological Theory of Didactics (ATD). It invites reflection on the potential of the praxeologies established in this education system as a doorway to functional thinking.

Keywords: functional thinking, semiotics, history, algebra

Introduction

La caractéristique principale de la pensée fonctionnelle, par opposition aux modes de pensée arithmétique et algébrique, est l'intégration d'une variation continue de la variable, par contraste avec les phénomènes « discrets » étudiés antérieurement dans le cursus scolaire des élèves. En effet, si le mode de pensée algébrique est relié au domaine des lettres, à l'usage du calcul littéral, et se caractérise par l'établissement d'équations, d'inéquations, de formules, etc., la pensée fonctionnelle renvoie plutôt aux notions de variable, de lois fonctionnelles et de variations. L'accès à ces aspects fonctionnels n'est pas si simple à concevoir au niveau des curriculums. Les travaux internationaux en didactique de l'algèbre prêtent parfois un peu à confusion, car les approches d'enseignement de l'algèbre paraissent différentes, plus ou moins fonctionnelles ou équationnelles, selon les pays, et pas toujours explicites. Dans un premier temps, les élèves découvrent un nouveau processus à travers des activités d'anticipation à la notion de variable par un travail sur les formules. Celles-ci, souvent considérées comme des abréviations de procédures à appliquer, permettent non seulement une première entrée dans le calcul littéral dès l'enseignement primaire, mais constitue souvent une assise pour développer certains aspects fonctionnels et le calcul associé. Cependant, la transition d'un mode de pensée à un autre, selon cette approche, peut entraver la conceptualisation de la notion de fonction. Les élèves, dès le collège, manipulent des expressions algébriques sans véritablement saisir les changements du statut des objets qu'ils manipulent, en particulier, dans les activités de modélisation. Une maitrise insuffisante des transformations algébriques, des confusions dans le statut des lettres et l'absence d'une représentation mentale du concept de variation et la difficulté à passer d'un registre sémiotique (écriture symbolique, courbe, figure, tableau de valeurs, etc.) à un autre constituent autant d'obstacles conceptuels à considérer, dans la conception des programmes et des manuels.

Dans la première partie de cet article, nous présentons le cadre épistémologique de référence qui se centre sur une analyse historicoépistémologique des aspects fonctionnels (Charbonneau, 1987; Passaro, 2015; Radford, 2006, 2014; Serfati, 1997; Youschkevitch, 1981). Cette étude permet de faire le lien avec les fondements épistémologiques de la théorie anthropologique du didactique (TAD). Celle-ci constitue le cadre théorique de notre recherche, à travers notamment, les praxéologies que les choix institutionnels laissent présager, au regard de la constitution du savoir savant. La seconde partie de ce travail porte sur une analyse institutionnelle conduite sur la base du programme et du manuel officiel tunisien de première année du secondaire (élèves de 14-15 ans). Nous illustrons cette analyse par quelques activités posées dans le manuel en nous interrogeant sur leur potentiel à faire émerger des concepts propres au cadre fonctionnel.

Le choix du contexte tunisien a été motivé par son aspect universel. Des travaux de recherches internationaux portant sur les pratiques institutionnelles en algèbre (Assude et al., 2012; Coulange et al., 2012; Robert, 2018; Ruiz-Munzón et al., 2012; Schliemann et al., 2012) présentent des proximités dans l'approche de l'enseignement du domaine et interrogent les choix curriculaires en général, au regard de la spécificité des savoirs algébriques. Ces études permettent, dans un premier temps, de s'interroger sur la persistance des difficultés en algèbre, au regard de certains profils d'élèves; dans un deuxième temps, de soulever des questions relatives aux pratiques enseignantes en algèbre; et dans un troisième temps, de se centrer sur la nature spécifique des savoirs algébriques. De ce fait, le cursus scolaire tunisien nous semble intéressant à explorer vu sa similarité avec plusieurs contextes institutionnels.

1. Problématique

L'analyse des programmes d'algèbre des réformes successives de l'enseignement secondaire tunisien, conduite dans le cadre de notre travail de thèse (Ben Nejma, 2009), a en partie motivé cette recherche. Les résultats obtenus (Ben Nejma, 2009, 2010, 2012) ont permis de mettre en avant une évolution récente des savoirs algébriques enseignés au niveau du secondaire en Tunisie. Ces savoirs prendraient une forme plus dynamique (liée à la notion de fonction) au travers de la dernière réforme du curriculum, forme qui semble se rattacher intuitivement à la notion de « variable », par opposition à la notion « d'inconnue » caractérisant une forme plus statique des savoirs enseignés auparavant en algèbre, dans les périodes d'enseignement précédentes. Ces points de vue « dynamique » et « statique » de l'enseignement de l'algèbre se donnent notamment à voir à travers une imbrication des thèmes d'études développées autour des « équations » et des « fonctions linéaires et affines ». Cette imbrication semble possible grâce à, d'une part, l'articulation de différents registres sémiotiques et, d'autre part, l'omniprésence du registre graphique et la prépondérance des situations issues du cadre des grandeurs. Ces constats nous ont conduits à approfondir l'étude et à affiner notre questionnement autour des formes plus ou moins « statique » ou « dynamique » du domaine algébrique en explorant la manière dont la notion de variable a émergé et s'est développée au fil de l'histoire, et le rapport qu'il pourrait y avoir avec l'enseignement tunisien.

> L'analyse historique de la notion de variable est en ce sens fondamentale non seulement pour estimer la complexité de ce « concept » et toutes les percées ayant eu lieu lors de son édification mais également pour cerner la question didactique de l'articulation entre ce concept et celui d'inconnue. (Bardini, 2003, p. 23)

Notre hypothèse est que les praxéologies développées dans le système éducatif tunisien autour de cette notion et celles qui s'y rattachent sont inspirées de l'histoire. Cette hypothèse conduit naturellement à se poser des questions de nature épistémologique.

> Les questions qu'on doit poser à l'histoire sont des questions essentiellement épistémologiques puisqu'elles surviennent, dans la salle de cours, lors de situations d'appréhension de concepts et de constructions de savoirs. D'autre part, la traduction épistémologique du développement historique est nécessaire et même indispensable pour que les résultats prennent une signification didactique et que l'on puisse retourner dans la salle de cours pour tester à nouveau les hypothèses. (Waldegg, 1997, p. 43)

Ainsi, notre problématique s'organise autour du développement de la pensée fonctionnelle posée dans ses rapports avec le mode de pensée algébrique dans un contexte de modélisation. Dans cette perspective, nous nous centrons sur les rapports dialectiques entre les notions d'inconnue et de variable, et le fonctionnement des cadres et des registres qui supportent ces rapports. (Douady, 1986; Duval, 1993). L'entrée par les cadres et les registres fournit des outils pour « positionner » les savoirs enseignés en algèbre : le positionnement dans un cadre ou dans un registre ou à la croisée de « plusieurs registres ou cadres » permet en quelque sorte de déterminer si l'on est plus dans une approche « statique » ou « dynamique » de l'algèbre et plus du côté de la variable ou de l'inconnue.

Ce travail se situe donc à l'intersection de deux approches : historicoépistémologique et didactique. La première entrée conduit inévitablement à identifier les conditions et les obstacles épistémologiques reliés à l'avancée des connaissances autour du développement de la pensée fonctionnelle. La seconde, s'appuie sur les fondements épistémologiques de la TAD, qui permettent d'étudier la manière dont le concept de fonction est amorcé dans le savoir à enseigner. La mise en regard de ces deux approches permet de remonter aux sources du processus de transposition didactique et de la constitution du savoir savant autour des aspects fonctionnels. C'est en particulier ce qu'exprime Dorier (2015) :

> Une part importante de l'analyse didactique consiste à prendre en compte l'évolution et la constitution historique du savoir mathématique dans la sphère savante et ses rapports avec la constitution du texte du savoir enseigné. (p. 7)

Les questions de recherche qui guideront la première partie de ce travail sont les suivantes : Quels sont les aspects liés au mode de pensée fonctionnelle repérés dans l'histoire du concept de fonction? Quels sont les obstacles épistémologiques rencontrés? Quels sont les rôles joués par les cadres et les registres dans le développement de ce mode de pensée?

2. Cadre épistémologique de référence

Le recours à l'histoire dans les recherches en didactique de l'algèbre a constitué un point d'entrée pour de nombreux travaux dans ce domaine (Kieran, 1992; Kieran et al., 2016; Radford, 2006; Sfard, 1997). Ces recherches se sont inscrites dans une problématique directement liée à la construction des notions mathématiques et de leur évolution, comme il est évoqué :

> Pour que l'histoire devienne épistémologiquement intéressante, il faut se poser les questions de la portée et de la signification des concepts, leur donner une épaisseur historique en posant la question, non de leur attribution, mais des conditions de leur naissance et donc du changement. (Barbin, 1987, p. 24)

Par ailleurs, le développement historique des notions mathématiques peut être mis en rapport avec les pratiques institutionnelles à travers la notion d'obstacle didactique, tel qu'il est suggéré :

> Il s'agit dans cette approche d'identifier les obstacles dans l'histoire, de les caractériser comme des obstacles didactiques et de produire des modèles didactiques de situations qui prennent en compte toutes les conditions pertinentes de la construction des savoirs – connues dans l'histoire – et de les organiser selon leur propre logique. (Waldegg, 1997, p. 44)

2.1 La notion d'obstacle épistémologique

La notion d'obstacle a été introduite par Bachelard (1938), qui l'utilise pour expliquer la genèse de la pensée scientifique, en particulier en physique. Le rôle de l'histoire dans l'étude des obstacles épistémologiques a été débattu par Artigue (1991, 1998) qui confirme que c'est par une analyse historique que sont identifiés les obstacles épistémologiques, susceptibles d'expliquer certaines difficultés rencontrées par les étudiantes et étudiants actuels. Brousseau (1998) considère les obstacles épistémologiques comme des formes de connaissances devenues inopérationnelles dans un contexte nouveau. Il distingue trois origines pour ces obstacles : ontogénique, didactique et épistémologique. Dans notre étude, nous nous centrons sur le troisième type. Toutefois, les obstacles d'origine didactique, qui semblent ne dépendre que d'un choix ou d'un projet du système éducatif, peuvent également renvoyer à une volonté institutionnelle de reproduire en partie l'évolution historique de certains concepts. On peut citer, par exemple, certains choix actuels d'approcher l'algèbre par la modélisation algébrique ou fonctionnelle, plutôt que par les structures. Les obstacles d'origine proprement épistémologique sont

> ceux auxquels on ne peut ni ne doit échapper, du fait même de leur rôle constitutif dans la connaissance visée. On peut les retrouver dans l'histoire des concepts eux-mêmes. Cela ne veut pas dire qu'on doit amplifier leur effet ni qu'on doit reproduire en milieu scolaire les conditions historiques où on les a vaincus. (Brousseau, 1998, p. 125).

Ces considérations nous semblent importantes à prendre en compte dans le sens où l'analyse historique peut aider la chercheure ou le chercheur dans sa recherche des nœuds de résistance de l'apprentissage, mais elle ne peut en aucun cas prouver l'existence de tel ou tel obstacle pour les élèves actuels. Artigue (1998) émet l'hypothèse de l'existence, pour l'enseignement actuel, de nœuds de résistance qui fonctionnent comme ont fonctionné les obstacles épistémologiques dans le développement des mathématiques. Toutefois, il est impossible, selon l'auteure, de leur attribuer historiquement le statut d'obstacle, étant données les disparités entre les conditions des genèses historique et scolaire.

2.2 Une analyse historique du concept de fonction

Certains auteurs (Charbonneau, 1987; Youschkevitch, 1981) se sont intéressés à l'évolution historique du concept de fonction. Celui-ci trouve son origine dans l'antiquité; des mathématiciens babyloniens ont largement utilisé pour leurs calculs des tables sexagésimales de nombres inverses, de carrés et de racines carrées. Au Moyen Âge, l'idée que les lois quantitatives de la nature étaient de type fonctionnel a commencé à se dessiner. Une fonction est définie soit par une description verbale de sa propriété, soit par un graphe. Les notions générales de quantités variables et les fonctions étaient exprimées à la fois à travers des formes géométriques et mécaniques. Cependant, comme dans l'Antiquité, chaque cas concret de dépendance entre deux quantités était défini par une description verbale, ou au moyen d'un graphe à la place d'une formule. À cette époque, des mouvements étaient décrits soit de façon qualitative, par le biais d'une formulation dans le langage naturel du sens de variation, soit en étudiant numériquement certaines variables du phénomène sans aboutir à une relation numérique précise. Cette approche ne permettait pas en réalité de rendre compte de l'aspect de variation continue.

Les premières formes de représentations graphiques se sont développées dans les études d'Oresme (1323-1382), qui marque un pas en avant dans le concept de variable dépendante, sans pour autant qu'il s'agisse de fonctions clairement définies, mais plutôt d'aspects caractéristiques d'un mode de pensée fonctionnelle. Par le biais de figures géométriques, il tentait de représenter les intensités d'une qualité d'un sujet. Les intensités des qualités (des vitesses) sont représentées par des segments érigés perpendiculairement à un autre segment représentant, lui, le temps. On obtient ainsi un graphique illustrant, pour la première fois, une relation fonctionnelle qui lie le temps et la vitesse. Ce moment historique est relativement important puisqu'on commence à envisager les lois de la nature comme des lois de type fonctionnel et où s'effectuent des échanges entre pensée mathématique et considérations cinématiques. Comme le dit Bourbaki, « toute cinématique repose sur l'idée intuitive de quantité variable avec le temps, c'est à dire fonction du temps » (Bourbaki, 1960, p. 209). Ainsi, à cette époque, ce n'est pas la variation de la qualité par rapport à un sujet qui était un objectif en soi, mais plutôt la configuration globale de la qualité du sujet qui permettait de concrétiser la nature des changements; ces représentations étaient plutôt descriptives, qualitatives sans vérification numérique (à l'aide des mesures). C'est Galilée qui introduira le quantitatif dans les représentations d'Oresme.

La grande avancée de Galilée (1564-1642) au regard de l'évolution du concept de fonction fut son acharnement à chercher des résultats et des relations qui proviennent de l'expérience plutôt que de la pensée seule, comme c'était le cas dans les études d'Oresme. Pour Galilée, l'expérimentation était facilitée par l'avènement d'instruments de mesure, et donc de l'aspect quantitatif; les graphiques de Galilée sont issus de l'expérience et de la mesure. Les liens de cause à effet sont exprimés de façon quantitative vérifiable et vérifiée. Le principal champ d'études de Galilée a été le mouvement, et donc la vitesse, l'accélération, la distance parcourue. Il cherche à relier ces différents concepts à l'aide de lois qui lui sont inspirées de l'expérience et de l'observation. Il s'intéresse à l'étude des trajectoires de projectiles en mouvement à la surface de la Terre, elle-même considérée au repos. Ainsi, une évolution est marquée dans un domaine des grandeurs qui regroupe à la fois les intervalles de temps et ceux de l'espace. Elle est très nettement pensée comme une règle fonctionnelle par la conception de la variable dépendante. Ainsi, avec les progrès de l'écriture symbolique en algèbre (Viète), se développe la notion de relation fonctionnelle exprimée de façon explicite par une formule. Les travaux de Galilée sur la mécanique (étude des trajectoires) mettent en relation des variables comme la vitesse et la distance parcourue par un solide.

Au XVII^{e} siècle, des expressions analytiques des fonctions deviennent prégnantes, particulièrement dans les travaux de Descartes (1596-1650). Il distingue les courbes géométriques et les courbes mécaniques et se restreint aux « courbes géométriques », où les deux coordonnées x et y sont reliées par une équation algébrique P (x, y) (courbes algébriques). C'est la première fois que cette idée émerge de façon explicite : une équation entre x et y est une façon d'introduire une relation de dépendance fonctionnelle entre quantités variables, au sens que la connaissance de la valeur d'une variable permet de déterminer la valeur de l'autre. Cette méthode est appliquée avec succès à des résolutions graphiques d'équations. Vuillemin (1960, 1962), historien et philosophe, critique en quelque sorte les limites des études de Descartes. Il approfondit la notion de fonction pour des courbes non géométriques qui ne peuvent pas être approchées par l'étude analytique proposée par Descartes. Il s'agit désormais d'une relation qui permet de faire correspondre à une longueur donnée une autre longueur déduite de la première par un nombre fini d'opérations algébriques. Seule une telle relation est, selon Descartes, susceptible d'une construction par laquelle on atteindra tous les points de la courbe sans en exclure aucun. Cette possibilité assurera l'enchainement et la continuité intuitive de la courbe, sans qu'aient besoin d'intervenir des considérations infinies. Ce moment important révèle pratiquement tous les aspects spécifiques de la pensée fonctionnelle : les lignes x et y sont variables, leurs grandeurs sont dépendantes et une correspondance entre ces variables est explicite. Par ailleurs, en collaboration avec Fermat (1601-1665), Descartes met au point la méthode des coordonnées qui permet de réaliser plus facilement des preuves géométriques par un choix d'une unité de longueur, et l'identification de la demi-droite avec l'ensemble des nombres réels positifs : il met ainsi en relation les grandeurs et les nombres.

Le concept de fonction évolue par la suite avec la loi de variation dans les travaux de Newton (1643-1727), qui exprime les deux principaux problèmes du calcul infinitésimal en termes mécaniques et interprète les variables x, y, v etc., comme des « quantités fluentes » s'écoulant avec des changements de vitesse. Il mettra ensuite en avant la distinction de ces quantités selon « une quantité corrélative » qui représente la variable indépendante (assimilable au temps) et des « quantités relatives ». Ainsi, si x est la variable corrélative et y la variable relative, la façon dont y est fonction de x traduit en fait un mouvement quelconque; c'est l'introduction des notions de cinématique qui permettra de développer la méthode de fluxions de façon analytique, soit sous une forme finie, soit en tant que séries finies de puissances.

Leibniz (1646-1716) se sert du mot « fonction » pour désigner des quantités qui dépendent d'une variable et introduit les termes de « constante », de « variable », de « coordonnées » et de « paramètre ». La théorisation de la notion de fonction évolue au fur et à mesure des avancées des travaux de l'époque moderne; dans les diverses définitions des fonctions que Youschkevitch (1981) a citées, nous constatons une formulation de définitions qui décrit les fonctions comme des expressions algébriques. Nous remarquons également une référence explicite à la dépendance entre variables qui s'appuie sur une description géométrique ou graphique et qui sous-entend une perception dynamique et covariationnelle. Contrairement à Descartes, Leibniz divise les fonctions et les courbes en deux catégories : algébriques et transcendantes.

Euler (1707-1783) définit la fonction d'une quantité variable comme une expression analytique constituée de cette quantité variable et de constantes. Dans son traité « Introduction à l'analyse infinitésimale », il évoque la nécessité de l'algèbre pour s'élever à la connaissance de l'analyse. De plus, il fait du concept de fonction l'objet essentiel de l'analyse et, à cette fin, il utilise l'algèbre comme un outil fondamental. Ainsi, le concept de fonction est libéré des considérations cinématiques et géométriques : 1) une quantité constante est une quantité déterminée, qui conserve toujours la même valeur; 2) une quantité variable est une quantité indéterminée, ou, si l'on veut, une quantité universelle, qui comprend toutes les valeurs déterminées; 3) une quantité variable devient déterminée, lorsqu'on lui attribue une valeur déterminée quelconque; 4) une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes; 5) une fonction d'une variable est donc aussi une quantité variable. Il étudie systématiquement toutes les fonctions élémentaires et distingue les fonctions explicites des fonctions implicites. Il introduit, pour la première fois, la notation f(x). Le point de vue qui prime alors est l'aspect purement formel du concept de fonction qui évoluera au fil du temps.

2.3 Déductions et constats épistémologiques

Cette analyse historique révèle que les concepts d'inconnue et d'équation ont émergé bien avant ceux de variable et de fonction, dans des situations concrètes puis de plus en plus mathématisées. Le développement de ces deux concepts a été fortement lié au cadre des grandeurs. En outre le concept d'inconnue a toujours référé au nombre cherché ou à la racine d'une équation (Serfati, 1997). Dans ce cadre particulier des grandeurs, les lettres désignent des mesures de grandeurs et c'est dans une problématique de variation (notamment dans le cadre géométrique) qu'elles font référence à un ensemble de nombres. De ce fait, elles sont considérées comme des nombres inconnus qui ne sont plus fixes, la conceptualisation de la notion de variable devient alors délicate et difficilement repérable, à l'époque, dans certaines démonstrations, par exemple dans les travaux de Diophante. Radford (1996) montre qu'il y a eu usage implicite du concept de variable non pas à travers le concept de fonction, mais à travers le concept de formule. Celui-ci n'est plus fondé sur le maniement de quantités continues, mais plutôt, sur les relations entre nombres perçus comme des unités ou encore des parties fractionnaires. Autrement dit, la formule devient un moyen de détermination d'un nombre, connaissant les propriétés d'un autre. L'auteur pointe des différences subtiles entre les deux concepts d'inconnue et de variable, parmi lesquelles les représentations attribuées. En effet dans le premier cas, il s'agit d'un ensemble abstrait de valeurs représentées géométriquement, alors que dans le cas de *l'Arithmetica*, en référence à Diophante, l'inconnue n'est pas représentée géométriquement. C'est sur cette idée qu'il envisage une approche algébrique de l'enseignement de la variable en se référant aux distinctions repérées dans l'histoire et au contexte déductif de l'ensemble abstrait de valeurs développées par Diophante.

Nous apportons certains constats qui guideront l'analyse institutionnelle :

- Le premier constat est de nature écologique en rapport avec l'émergence des aspects relatifs à la pensée fonctionnelle, lesquels dérivent premièrement du monde physique. L'idée était de modéliser des situations puisées dans le cadre des grandeurs et à travers des phénomènes de mouvements, vitesse, cinématique. Progressivement le caractère intuitif géométrique de cette notion laisse place au symbolisme analytique et algébrique. En effet, le dégagement des considérations physiques va permettre une introduction formelle du concept de fonction, basé sur la notion centrale de variable. Exprimée d'abord par une formule algébrique dans la première moitié du XVIII^e^ siècle, la définition de la notion de fonction se généralise à des expressions différentes dans la seconde moitié du XVIII^e^ siècle. L'analyse montre que c'est sur l'idée de dépendance qu'est basé le concept de fonction (variable), mais c'est également par l'idée de variation et la mathématisation du temps qu'il a pu se développer; c'est l'adjonction de ces deux aspects qui a permis cette genèse. L'approche ensembliste de ce concept par une mise en correspondance, terme à terme, des éléments de deux ensembles évacue cette idée de variation et se rattache à la théorie des ensembles (Bourbaki, 1960).
- Le second constat concerne la concrétisation de ces phénomènes dans un contexte géométrique, évoluant d'un aspect qualitatif, à travers des configurations géométriques qui permettent de saisir la nature des changements sans recours aux mesures, vers un aspect quantitatif pour lequel les grandeurs ont joué un rôle important dans la conception de la variable dépendante.
- Le troisième constat est que les relations de dépendances dynamiques entre deux quantités (grandeurs) variables et de covariation caractérisent un aspect important du mode de pensée fonctionnelle. Cette perspective entraine un point de vue dynamique sur les fonctions qui renforce l'expérience du changement et du mouvement.

- Le quatrième constat est que l'introduction de la fonctionnalité par l'intermédiaire des équations constitue une étape importante dans le développement des mathématiques. Le lieu d'articulation entre équation et fonction fut le cadre des grandeurs, particulièrement « les courbes géométriques » retenues par Descartes à l'époque. C'est la première fois qu'une équation entre x et y (donc à deux inconnues) permet de faire émerger une relation de dépendance fonctionnelle entre quantités variables. L'obtention d'une longueur par l'intermédiaire d'une autre par des opérations algébriques est liée à la théorie des proportions exactes.

2.4 La dialectique algébrique/fonctionnelle dans l'enseignement

Certaines recherches ont tenté d'apporter une caractérisation d'un mode de pensée fonctionnelle dans l'objectif d'analyser certains choix curriculaires. Robert (2018) apporte une caractérisation de la pensée fonctionnelle sur la base de quelques approches : la manière de voir la pensée et l'activité selon Radford (1996, 2006, 2014); la manière tridimensionnelle d'opérationnaliser la pensée selon certains membres de l'Observatoire international de la pensée algébrique (Robert et al., 2018) et les quelques définitions de la pensée fonctionnelle trouvées dans les recherches et le cadre conceptuel du concept de fonction. Elle spécifie la pensée fonctionnelle comme une manière de penser dans des activités faisant intervenir la notion de fonction (activités fonctionnelles) de manière explicite ou implicite à travers les différents sens de la fonction. Selon Robert et al. (2018), la pensée fonctionnelle s'opérationnalise à partir d'un rapport particulier aux concepts fonctionnels qu'elle englobe : la variable, la dépendance, les relations fonctionnelles, la relation d'équivalence, la covariation et la correspondance.

> Nous caractérisons la pensée fonctionnelle comme une manière de penser dans des activités fonctionnelles qui s'appuie sur diverses tendances de l'esprit. Elle s'observe à travers différentes composantes, dont un ensemble de raisonnements fonctionnels particuliers, un rapport particulier aux concepts fonctionnels et une manière de communiquer. (Robert et al., 2018, p. 53)

Ainsi, l'amorce d'une pensée fonctionnelle est considérée par Carraher et Schliemann (2007) comme étant une voie d'accès très intéressante à utiliser dans le courant des recherches *Early Algebra*. L'introduction des fonctions dans le cadre algébrique à un niveau d'enseignement élémentaire est importante, les situations fonctionnelles ne sauraient se passer de compétences algébriques. Par exemple, la définition du mode de pensée fonctionnelle inspirée des travaux de Smith (2008) apporte un éclairage sur ce point :

> la pensée représentationnelle se concentre sur la relation entre deux quantités variables (ou plus), en particulier sur les types de pensée qui conduisent des

> relations spécifiques (occurrences individuelles) aux généralisations de cette relation entre les occurrences. (p. 532, traduction libre[1])

Ce point de vue rejoint celui de Beatty et Bruce (2012) pour qui la pensée fonctionnelle consiste à analyser des régularités (numériques et géométriques) pour identifier un changement et reconnaître la relation entre deux ensembles de nombres. Cette méthode implique l'étude de la façon dont certaines quantités sont liées à d'autres quantités, ou encore modifiées ou transformées par celles-ci. La pensée fonctionnelle parait ainsi une autre forme de généralisation. Une fonction est une relation particulière entre deux ensembles de données, tel que chaque élément d'un ensemble est associé à un élément unique d'un autre ensemble. La représentation visuelle des régularités permet aux élèves de penser à des relations entre des quantités allant au-delà des calculs en arithmétique. Ainsi, il apparait que la dialectique algébrique/fonctionnelle dans le cursus scolaire des élèves doit être pensée de manière à développer simultanément ces deux modes de pensée. Toutefois, cela ne doit pas être naturalisé, lorsqu'il s'agit de repenser, par exemple, le statut des lettres ou de l'égalité, l'équivalence des relations fonctionnelles et la dialectique entre registres sémiotiques.

3. Cadre théorique

Les fondements épistémologiques de la TAD peuvent inspirer le travail historique en renforçant l'importance de l'étude des lieux de transmission et plus globalement, les dimensions sociale et culturelle de la production scientifique (Dorier, 2015). En effet, la recherche en didactique requiert de remonter aux origines du processus de transposition didactique, jusqu'à la production du savoir savant, pour « se déprendre de la familiarité de son objet d'étude, et exercer sa vigilance épistémologique » (Chevallard, 1991, p. 15). Ainsi, à travers le regard institutionnel de cette théorie, les obstacles épistémologiques trouvent des racines profondes dans la culture, au point que certaines analyses nécessitent de remonter très haut dans l'échelle de codétermination didactique (Radford, 1996).

3.1 La notion de praxéologie

La TAD permet de modéliser toute pratique humaine ou sociale en termes de praxéologie (Chevallard, 1998). Celle-ci permet de décrire et d'analyser toute activité mathématique en la décomposant en un quadruplet (tâche, technique, technologie et théorie). Selon ce modèle, les pratiques institutionnelles peuvent

---

[1] […] it is representational thinking that focuses on the relationship between two (or more) varying quantities, specifically the kinds of thinking that leads from specific relationships (individual incidences) to generalizations of that relationship across instances (Smith, 2008, p 143).

être analysées par un découpage en un système de tâches (t) appartenant à des types de tâches (T) (Bosch et Chevallard, 1999). Toute tâche t est accomplie au moyen d'une technique. Chaque technique est justifiée à son tour par une technologie. Celle-ci correspond à un discours rationnel qui permet d'expliquer la technique. Finalement, toute technologie repose elle-même sur les fondements d'une théorie (Chevallard, 1998). Cette décomposition en praxéologies modélise l'activité mathématique pour en favoriser l'analyse. Dans le cadre de cette étude, cette modélisation permet d'analyser les organisations mathématiques (OM) développées autour des aspects fonctionnels dans le domaine algébrique, à l'entrée au secondaire. Nous tentons de relever des aspects plus ou moins ignorés ou cachés dans la dynamique existante entre ces organisations mathématiques.

3.2 Les ostensifs et non-ostensifs

La TAD définit deux classes d'objets : les ostensifs et les non-ostensifs au niveau des praxéologies. La première classe est constituée d'objets matériels, ce sont les objets qui peuvent être manipulés (un mot, un symbole, etc.). Cependant, les non-ostensifs sont des objets abstraits comme les concepts ou les idées. Bosch et Chevallard (1999) évoquent la dialectique ostensifs / non-ostensifs dans l'activité mathématique; le remplacement d'un ostensif par un autre ou sa naturalisation peut avoir des effets sur le développement de l'activité. Nous nous intéresserons particulièrement aux conditions d'émergence et de manipulation de certains ostensifs, par exemple, les graphiques, expressions algébriques, variable, ou *f(x)* que l'on retrouve dans les textes officiels.

3.3 Les niveaux de codétermination didactiques

Une hiérarchie de niveaux de détermination mise en avant par Chevallard (2002), allant des sujets d'étude à la discipline, permet de préciser cette première échelle des organisations praxéologiques, tout en les repositionnant les unes par rapport aux autres. Ces niveaux supérieurs de détermination didactique sont définis de la façon suivante :

- La discipline (NV1) : ici, les mathématiques sont considérées comme un amalgame de domaines d'études.
- Le domaine d'étude (NV2) : ici, l'algèbre correspond à une organisation globale représentant à son tour une amalgamation de plusieurs organisations régionales (Tji/δji/θj/ θk).
- Le secteur (NV3) fait appel à l'organisation régionale, donc à l'amalgamation d'organisations locales se basant sur la même théorie. Nous considérons dans cette étude les secteurs relatifs aux équations et aux fonctions (linéaires et affines).

- Les thèmes d'études (NV4) correspondent à l'organisation locale (Ti / δi / θ / θ). Ces thèmes sont réunis dans des organisations régionales étiquetées comme secteur d'études.
- Les sujets d'étude (NV5) renvoient généralement à un type de tâche T; ce sont des questions et des organisations ponctuelles. Ils se regroupent plus ou moins clairement dans des organisations locales qui représentent les thèmes d'études.

Nous faisons implicitement référence aux travaux de Bosch et Gascón (2005), qui introduisent l'idée d'une organisation mathématique (OM) de référence comme modèle praxéologique du curriculum de mathématiques dont l'élaboration s'appuie sur les programmes et les manuels officiels. L'interprétation des effets possibles de cette OM sur les praxéologies instaurées nécessite, selon les personnes auteures, la prise en compte d'un point de vue épistémologique.

4. Analyse institutionnelle

Divers travaux menés sur l'enseignement de l'algèbre montrent une diversité d'entrées possibles au domaine de l'algèbre élémentaire que l'on retrouve par exemple dans les travaux de Kieran (1992). Trois approches semblent privilégiées dans l'enseignement, une première, par la généralisation à travers des situations numériques et géométriques, une seconde, par la modélisation de situations en termes fonctionnels, apparue historiquement et qui revêt de plus en plus d'importance au niveau des curriculums; et une troisième, par les équations, perçue selon certains chercheurs comme une approche réductrice de l'algèbre.

Dans le contexte tunisien, après la réforme des mathématiques modernes centrée sur l'aspect purement ensembliste et structuraliste du concept de fonction, les réformes successives de l'enseignement secondaire jusqu'en 2004 ont fondé leur approche d'enseignement de l'algèbre sur les équations (Ben Nejma, 2004). La réforme actuellement en vigueur est particulièrement centrée sur la modélisation et articule les points de vue équationnel et fonctionnel. L'accent est notamment mis sur les concepts de variable et fonction par la résolution de problèmes du cadre des grandeurs physiques et géométriques. Cette approche confère un aspect plus « dynamique » du savoir algébrique à enseigner par contraste avec l'aspect « statique » qui caractérise l'approche équationnelle.

4.1 Méthodologie

Nous identifions, au sein du domaine algébrique, les niveaux de codétermination didactique inférieurs et les liens qui subsistent. Nous caractérisons ensuite les OM développées autour des notions de variable, relation fonctionnelle, dépendance et variation à partir des activités du manuel. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que, dans le contexte tunisien, et par contraste avec d'autres systèmes éducatifs, nous disposons d'un manuel officiel unique pour chaque niveau d'enseignement qui est la principale référence à suivre par les enseignants, traduisant les directives du programme officiel. Notre étude est exemplifiée par des éléments d'analyse à priori qui mettent en avant les contextes dominants (extramathématique, géométrique, concret), les registres de représentation les plus sollicités, les éléments explicites ou implicites du bloc technologico-théorique développés et les ostensifs et non-ostensifs en jeu dans ces activités. Au regard de l'étude historique, nous menons une réflexion sur les praxéologies développées autour du concept de fonction, en examinant si elles sont éventuellement portées par des éléments historicoépistémologique favorisant le développement du mode de pensée fonctionnelle.

4.2 Description du contexte institutionnel et aperçu des programmes du collège

Dans le système éducatif tunisien, l'enseignement est organisé en trois niveaux : l'enseignement de base (6-14 ans), le secondaire (15-18 ans) et le supérieur (18-21 ans). L'enseignement de base, qui s'étend sur une période de 9 ans, comporte le cycle primaire d'une durée de 6 ans, sanctionné par un diplôme permettant de poursuivre l'enseignement au collège et par un concours facultatif pour entrer aux collèges pilotes. Le collège, d'une durée de trois ans, est sanctionné par un brevet de fin d'enseignement de base qui permet la transition au cycle secondaire et par un concours d'accès aux lycées pilotes. Le cycle secondaire, d'une durée de quatre ans, est sanctionné par le diplôme du baccalauréat. L'enseignement des mathématiques à partir du cycle secondaire est dispensé en langue française. Les programmes officiels indiquent comme premier objectif de « faire accéder l'apprenant progressivement à la pensée abstraite à travers la mathématisation de certaines situations de la vie pratique » (République tunisienne, 2008, p. 7). En septième année de base, le domaine des mathématiques auquel il est fait référence est l'arithmétique, les équations ne font pas encore leur apparition dans le paysage mathématique des élèves. En huitième année de base sont introduits les nombres relatifs ainsi que la notion d'équation du premier degré à une inconnue. Les objectifs visent la maitrise du calcul sur les nombres relatifs (entiers ou rationnels) et la résolution des équations du premier degré dans l'ensemble des nombres rationnels. L'enseignement de l'algèbre est pensé avec la manipulation de grandeurs négatives et l'emploi d'un langage spécifique à l'algèbre (inconnue, équation, solution). C'est à partir de la neuvième année de base que les nombres réels sont introduits ainsi que les propriétés relatives aux opérations usuelles, les notions d'ordre, d'encadrement et d'intervalles. La dernière partie est consacrée aux équations et inéquations du premier degré. Elles font toutes les deux l'objet d'un même chapitre dont les objectifs énoncés s'organisent autour de la résolution de problèmes par la mise en équation.

4.3 Analyse du programme et du manuel officiel de première année du secondaire

Ces programmes sont formulés en termes de compétences que nous considérons d'un point de vue anthropologique comme des éléments du bloc pratico-technique [T,τ], et de savoirs à enseigner. Ces éléments peuvent être perçus comme des constituants du bloc technologico-théorique [θ,Θ], qui peuvent aussi nous renseigner sur les types de tâches et les techniques attendues. En première année du secondaire, on amorce progressivement l'entrée dans la pensée fonctionnelle sur la base d'activités de modélisation qui précèdent l'étude des fonctions linéaires et affines. La définition explicite de la notion de fonction est donnée en deuxième année, suivie de l'étude de quelques fonctions usuelles et polynomiales.

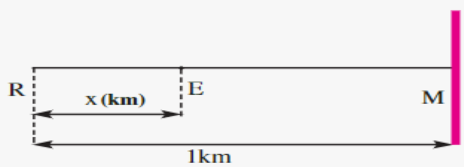
4.3.1 Analyse des niveaux de codétermination didactique

Le programme en vigueur est constitué de sous parties intitulées « Activités numériques », « Activités algébriques », « Activités géométriques », Activités statistiques », « Activités dans un repère » et « Activités sur les mesures des grandeurs ». Cette organisation de l'étude révèle une association des secteurs consacrés aux équations et inéquations et une intercalation des thèmes d'étude : fonctions linéaires / équations et inéquations du premier degré à une inconnue / fonctions affines / système de deux équations linéaires à deux inconnues. Les secteurs « Équations » et « Fonctions » sont entremêlés et imbriqués au travers de certains concepts comme la linéarité, la proportionnalité (dans les activités numériques et la recherche d'une quatrième proportionnelle dans le thème consacré aux équations à une inconnue) et le graphique. Le travail graphique constitue un sujet d'étude permanent au sein du domaine algébrique et joue un rôle important dans l'imbrication des différents thèmes et secteurs, particulièrement dans les interrelations entre équation et fonction. Il est suggéré que : « En particulier, les élèves modélisent des situations réelles en produisant des représentations graphiques; les élèves analysent et interprètent une représentation graphique modélisant une situation » (République tunisienne, 2008, p. 7).

Une modélisation fonctionnelle de situations extramathématiques. L'imbrication des sujets d'études s'appuie sur une dialectique entre le registre graphique et celui des écritures fonctionnelles, dans un contexte de modélisation de situations issues du cadre des grandeurs géométriques ou physiques. Dans ce contexte, le graphique apparait comme bien plus qu'un ostensif, il donne lieu à un travail spécifique. Il est perçu comme devant servir à l'illustration des phénomènes mathématiques, comme la vitesse du son illustrée par l'extrait suivant du manuel officiel de première année (figure 1).

Situation **La vitesse du son**

Un émetteur E est situé entre un récepteur R et un mur M.



Un son est émis par E. Le récepteur R reçoit directement le son émis par E, ainsi que l'écho qui résulte de la réflexion du son sur le mur.
On désigne par t(x) le temps (en secondes) mis par le son pour parcourir la distance ER.
On désigne par t' (x) le temps (en secondes) mis par le son pour parcourir la distance EM + RM.
1- a) Sachant que la vitesse du son est 340m/s, exprimer t(x) en fonction de x.
b) Représenter la fonction affine associée et colorer les points qui conviennent aux données.
2- Exprimer t'(x) en fonction de x.
3- Sachant que le récepteur a reçu l'écho quatre secondes après le son, calculer ER.

Figure 1 : modélisation fonctionnelle : la vitesse du son. (République tunisienne, 2019, p. 220)

Une analyse à priori de ce problème du cadre des grandeurs (physiques) permet de constater qu'il met en jeu une relation fonctionnelle entre deux variables : le temps t(x) (respectivement, t'(x)) mis par le son émis par un émetteur pour parcourir une certaine distance x (resp(2-x)). L'ostensif t(x) (resp t'(x)) renvoie déjà à l'expression algébrique d'une fonction t (resp t') de x qui fera correspondre pour tout 0 < x < 1 le temps t(x) (image de x). La première tâche consiste à exprimer la relation de correspondance entre x et t(x) dont la technique s'appuie sur la formule de vitesse v = $\frac{d}{\Delta t}$avec la donnée implicite que la vitesse du son est constante. La relation est modélisée sous forme de t(x) = $\frac{x}{V}$, puis le passage au numérique donne lieu à t(x) = $\frac{x.10^3}{340}$ = $\frac{50\,x}{17}$, en tenant compte des contraintes de l'énoncé liées aux unités de mesure (km et m). La seconde tâche s'organise autour d'une relation fonctionnelle entre x et t(x) représentée dans le registre graphique. L'ostensif « affine » est convoqué, pourtant la fonction t en est un cas particulier, celle d'une fonction linéaire. Le concept de proportionnalité semble au cœur de la définition de bien des grandeurs physiques; il est inséparable de notions comme vitesse, débit, taux d'accroissement, pente d'une droite décrivant un phénomène physique. Il s'agit d'une OM ponctuelle qui permet de faire le lien entre les fonctions linéaires et le travail sur les formules. Par la suite, les élèves sont amenés identifier, parmi les données du problème, l'intervalle de variation de x qui est [0,1] convoqué par la tâche « colorer des points qui conviennent aux données ». La courbe représentative de t dans ce cas n'est plus le cas classique des droites habituellement représentées sur l'ensemble des nombres réels IR, mais d'un segment de droite dont les extrémités sont les points de coordonnées (0,0) et $(1,\frac{50}{17})$. La tâche suivante laisse davantage d'autonomie à l'élève dans la recherche de la nature de la fonction t'reliant x et la distance EM + RM. Cette distance sera modélisée par l'expression algébrique :1 + (1 - x) = 2 - x. Toutefois, l'interprétation du phénomène comme le produit du temps mis pour parcourir cette distance par la vitesse du son physique (raison d'être) n'est pas convoquée. La relation fonctionnelle attendue est : $t'(x) = \frac{2-x}{V} = ax + b$ avec a = -1/v et b = 2/v. Cette fois, il s'agit d'une fonction affine, mais la représentation graphique n'est plus convoquée. Il aurait pourtant été intéressant d'une part, de percevoir la variation décroissante (a < 0) de la fonction représentée par le segment de droite dont les extrémités sont les points de coordonnées $((0,\frac{100}{17})$ et $(1,\frac{50}{17}))$ et d'autre part, de lier l'étude des graphes associés aux fonctions affines y = a x + b à la description de variations de grandeurs à accroissements proportionnels. Cela donnerait un point de vue plus opérationnel pour associer la pente d'une droite à une vitesse. L'accomplissement de la dernière tâche du problème conduit à une relation entre deux variables t(x) et t'(x) exprimées en fonction de la variable x : t'(x) = t(x) + 4. La perception de la relation fonctionnelle en tant qu'équation $\frac{2-x}{V} = \frac{x}{V} + 4$ est un véritable changement de point de vue. Il s'agit de repenser le nouveau statut de la lettre x comme inconnue (x = 1 - 2v = 0,320km.) Celle-ci correspond à la distance ER, lorsque le récepteur reçoit l'écho quatre secondes après le son.

Cet exemple illustre le type de problèmes souvent posés dans les manuels mettant en jeu des relations entre les variables temps et distance. Ces lois de la nature sont exploitées pour amorcer une entrée dans la pensée fonctionnelle. Ainsi, comme à l'époque d'Euler, une quantité variable devient déterminée, lorsqu'on lui attribue une valeur déterminée quelconque. La raison d'être de ces activités semble liée à l'Histoire, notamment à la genèse des concepts fonctionnels dans un contexte extramathématique : « Le besoin de chercher à quantifier certains phénomènes tels que la chaleur, la densité, la vitesse et la distance a amené les mathématiciens à établir une correspondance entre une quantité variable et la loi de variation de cette quantité » (République tunisienne, 2019, p. 226).

Les inéquations au cœur d'une interrelation entre équations et fonctions. Le thème consacré aux inéquations du premier degré à une inconnue joue un rôle important dans l'interrelation entre équation et fonction. La présence des inéquations dans le contexte des équations ne se limite pas en effet à la modélisation des problèmes concrets. Durand-Guerrier et al. (2000) précisent que ce rapprochement est susceptible d'alimenter un point de vue dynamique sur l'algèbre enseigné et permet d'amorcer le concept de variable. Les auteures affirment que

> la question du signe de a x + b selon x ne peut guère être séparée de celle de la résolution d'inéquations, mais la présenter en lien avec l'étude des fonctions affines correspondantes et de leur représentation graphique est un moyen de favoriser le point de vue variable. (Durand-Guerrier et al., 2000, p. 96)

Ce problème concret (figure 2), proposé dans le manuel permet d'illustrer cet aspect.

Situation 3

Comparaison de Tarifs

Une agence de location de voitures propose à ses clients deux options :

Option A : Forfait 60^{D} et $0^{D}{,}400$ par km.

Option B : Forfait 80^{D} et $0^{D}{,}300$ par km.

Quelle est l'option la plus avantageuse selon le nombre de kilomètres parcourus ?

Figure 2 : Comparatif de tarifs (République tunisienne, 2019, p. 206)

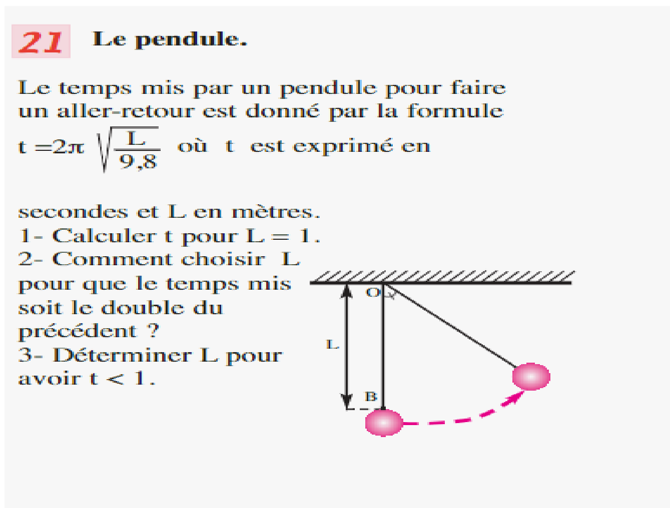
Une analyse à priori de ce problème de modélisation algébrique posé dans un contexte concret permet de constater qu'il conduit à la résolution d'une inéquation du premier degré à une inconnue. L'OM attendue s'organise autour de relations fonctionnelles entre deux variables : le nombre de kilomètres à parcourir et les tarifs respectifs de l'option A et de l'option B. Or, il semble que la conversion des données formulées dans le registre du langage naturel vers le registre symbolique en posant les bonnes variables est problématique. En effet, si l'ostensif x est choisi pour désigner le nombre de kilomètres à parcourir, les ostensifs A(x) et B(x) renvoient aux tarifs de chaque option en fonction de x. La modélisation en jeu moyennant ces ostensifs met en avant des relations de correspondance entre variables (dépendantes et indépendantes). Des expressions algébriques de fonctions affines : $A(x) = 60 + 0{,}4x$ et $B(x) = 80 + 0{,}3\,x$ modélisent les tarifs pour les deux options. Les élèves sont amenés à comparer deux expressions qui sont en fait des grandeurs, ce qui convoque une étude du signe de leur différence, ici $B(x) – A(x) = 20 - 0{,}1\ x$. Il s'agit par la suite de résoudre une inéquation à une inconnue : $20 - 0{,}1\,x > 0$, dont la solution est $x < 200$. Le retour au contexte permet de conclure que l'option A est la plus avantageuse ($B(x) > A(x)$) lorsque le nombre de kilomètres ne dépasse pas 200. Dans le registre fonctionnel, on peut considérer qu'il s'agit d'un problème d'optimisation : déterminer l'ensemble des valeurs de la variable x, pour lesquelles $B(x) – A(x)$ est maximale.

En allant plus avant dans l'identification des sujets d'étude repérés dans le manuel officiel, il apparait d'abord deux domaines intitulés « Travaux géométriques » et « Travaux numériques » au sein desquels se réalise l'étude conjointe du numérique, du calcul algébrique, du traitement des équations, des inéquations et des fonctions. La nouvelle disposition des sujets d'étude au sein du domaine algébrique montre la prégnance du cadre des grandeurs et des proportions. Le registre graphique est omniprésent. Une articulation des registres algébrique et graphique est mise en avant dans des problèmes de modélisation, dont certains qui seront exemplifiés dans cette étude.

4.3.2 Analyse des organisations mathématiques autour des notions de variables, dépendance, relations fonctionnelles, correspondance et covariation.

L'analyse de certaines activités dans la partie « cours » du manuel présente quelques problèmes du cadre numérique visant à renforcer les acquis des élèves autour du statut de la lettre. Cependant, la plupart des problèmes font appel à des situations de modélisation entre grandeurs géométriques (57 %) et physiques (34 %). Les OM globales développées autour des grandeurs s'appuient sur des formules qui mettent en rapport plusieurs OM régionales du domaine algébrique. Celles-ci sont développées simultanément grâce à l'articulation de différents registres sémiotiques (numérique-algébrique-graphique-figures géométriques-tableaux de valeurs), investis à leur tour dans des OM ponctuelles.

Génération des concepts de variable et correspondances fonctionnelles. La notion de variable émerge de situations qui réfèrent en général au continu géométrique, par le biais d'une figure et d'un point variant sur un segment ou une courbe (côté, arête ou arc de cercle). La distance d'un point variable à un point fixe est modélisée par un réel x, et c'est à partir d'une formule entre grandeurs qu'une relation fonctionnelle implicite entre variables est établie. Dans ce cas, les activités proposées prêtent souvent à confusion entre les statuts d'inconnue et de variable. Toutefois l'usage implicite du concept de variable est convoqué non pas à travers le concept de fonction, mais par le biais de celui de formule. À ce propos, Kieran et al. (2016) soulignent que le type d'erreurs que les élèves peuvent commettre dans les activités de transformations algébriques peut être en rapport avec une perception erronée du concept de variable. En effet, le développement des notions de variable et de relations fonctionnelles doit passer par une reconnaissance de la structure des expressions de la part de l'élève. Dans l'ancienne réforme du système tunisien, le modèle proposé pour mettre en avant ces aspects était celui d'une représentation simplifiée et implicite d'une relation fonctionnelle linéaire du monde réel ou entre grandeurs géométriques. Le registre du tableau paraissait alors comme un moyen de représenter les relations de dépendance entre variables. Dans la réforme actuelle, cette notion émerge dans un contexte de modélisation qui accorde plus d'importance aux relations fonctionnelles non linéaires via des formules. Les auteures et auteurs du manuel justifient le choix d'une telle approche en se référant à l'histoire : « L'étude des mouvements est l'un des plus importants sujets traités dans l'histoire. C'est ainsi que, la plupart des fonctions introduites au XVIIIe siècle ont été d'abord étudiées comme des courbes, celles-ci étant elles-mêmes considérées comme trajectoires de points en mouvement » (République tunisienne, 2019, p. 226). À titre d'exemple, on retrouve le problème du « pendule » de l'époque de Galilée (1564-1642) qui servait à décrire les mouvements, puis à les exprimer en tant que relations fonctionnelles (figure 3).


21 **Le pendule.**

Le temps mis par un pendule pour faire un aller-retour est donné par la formule $t = 2\pi\sqrt{\frac{L}{9{,}8}}$ où t est exprimé en secondes et L en mètres.

1- Calculer t pour L = 1.

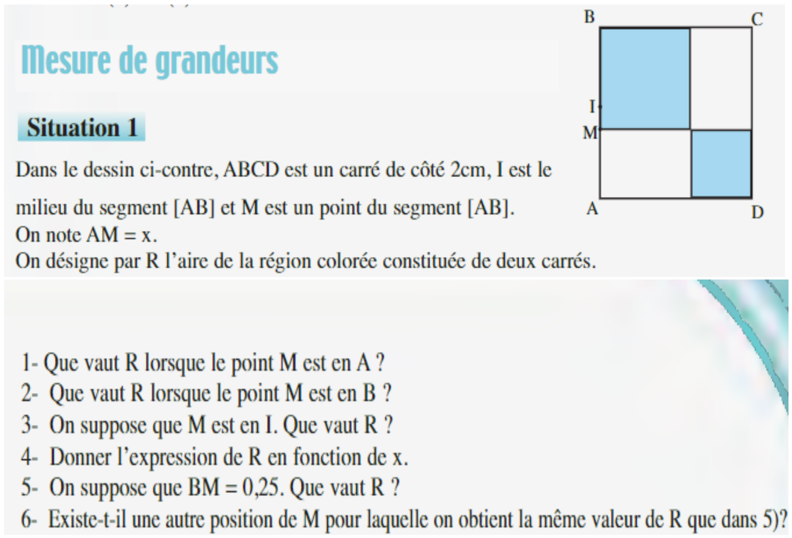
2- Comment choisir L pour que le temps mis soit le double du précédent ?

3- Déterminer L pour avoir t < 1.

Figure 3 : Le problème du pendule (République tunisienne, 2019, p. 182)

Une analyse à priori de l'activité proposée permet de constater que le mouvement du pendule n'est pas un objet d'étude, car la formule qui relie le temps t à la longueur L est d'emblée introduite. La perception de la variation semble naturalisée; il s'agit de travailler sur la formule donnée dans l'objectif d'amorcer une correspondance entre les variables t et L. À l'aide d'une technique de substitution numérique, il y a lieu de trouver la valeur d'une variable connaissant l'autre. Une résolution d'inéquation est convoquée par la troisième tâche, permettant de déterminer l'intervalle de variation de L tout en faisant varier t.

Génération de dépendances fonctionnelles entre variables. Dans la plupart des activités algébriques proposées, le type de tâche : « Pour une valeur donnée de l'une des variables, calculer la valeur de l'autre » est omniprésent. La technique requise convoque une substitution numérique dans une formule géométrique ou physique conduisant à la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue. Généralement, le statut sémiotique du symbole x (choisi pour l'inconnue) renvoyant à un objet qui à priori n'a pas d'existence va progressivement acquérir au fil des tâches proposées le statut de variable. Or, l'acquisition de ce statut n'a rien d'évident et renvoie à des obstacles épistémologiques déjà rencontrés dans l'histoire : remplacer une « quantité inconnue » dans une expression et la manipuler par des transformations analogues à celles qui règlent les « quantités connues », comme l'illustre l'exemple suivant (figure 4).



Mesure de grandeurs

Situation 1

Dans le dessin ci-contre, ABCD est un carré de côté 2cm, I est le milieu du segment [AB] et M est un point du segment [AB].
On note AM = x.
On désigne par R l'aire de la région colorée constituée de deux carrés.

1- Que vaut R lorsque le point M est en A ?
2- Que vaut R lorsque le point M est en B ?
3- On suppose que M est en I. Que vaut R ?
4- Donner l'expression de R en fonction de x.
5- On suppose que BM = 0,25. Que vaut R ?
6- Existe-t-il une autre position de M pour laquelle on obtient la même valeur de R que dans 5)?

Figure 4 : La dépendance fonctionnelle entre grandeurs variables (République tunisienne, 2019, p. 176)

Une analyse à priori de la tâche montre que le point M est variable sur le segment [AB] et la distance AM désigne d'emblée la variable x. Il s'agit de considérer l'aire R comme une variable dépendante de x. À chaque position du point M, on fait correspondre la figure associée et la surface correspondante en fonction de x. Pour les deux premières tâches, la région colorée est formée d'un seul carré qui est ABCD dont l'aire est 4. Ce sont les points extrêmes de la variation de x dans l'intervalle [0,2]. Lorsque M est en I, la région colorée est formée de deux carrés superposables d'aire 1 chacun. La quatrième tâche consiste à établir la relation de dépendance fonctionnelle en x et R qui donne $R(x) = (2 - x)^2 + x^2$ donc $R = 2x^2\ 4x + 4$. La relation fonctionnelle convoquée n'est pas linéaire ou affine. Les tâches proposées dans les questions 4 et 5 consistent implicitement à trouver l'image de x (ici 7/4) par R(x) qui donnera 25/8 par une technique de substitution dans l'expression de R(x). L'antécédent de 25/8 permettra, par des techniques de manipulations formelles, de retrouver une seconde valeur de x qui est 1/4 (la nouvelle position du point M sur le segment [AB]). Ce qui émerge ici, ce sont les aspects de correspondance et de dépendance entre variables. La reproduction des figures, correspondantes à chaque position de M dans le registre géométrique, peut aider les élèves à saisir l'aspect de variation. En effet, les notions de variable dépendante et indépendante sont souvent mises en rapport avec l'interprétation du déplacement d'un mobile selon une trajectoire (ici dans une figure de l'espace). L'emploi des ostensifs du type « exprimer en fonction de… », ou à l'ostensif graphique (figure géométrique ou graphique) semble orienter les pratiques algébriques des élèves vers une conceptualisation des aspects fonctionnels. Toutefois, une grande part de responsabilité est laissée aux enseignantes et enseignants pour atteindre les objectifs institutionnels attendus.

Génération du concept de variation entre grandeurs. Les activités génératives du concept de variation font appel à des OM autour du graphique dans le cadre des grandeurs physiques. Deux OM ponctuelles sont développées autour des types de tâches : représentation graphique et lecture graphique. Les élèves analysent et interprètent une représentation graphique modélisant une situation. (République tunisienne, 2008). La principale compétence à développer repose sur une technique d'appréhension globale de la forme visuelle du graphique par rapport au champ quadrillé ou plan repéré, permettant une appréhension de la variation d'une grandeur en fonction d'une autre. La plupart des exercices allant dans ce sens font appel à des grandeurs physiques, notamment à la variable temps, et proposent un modèle non linéaire qui convoque une variation quelconque entre grandeurs, comme il est illustré dans l'exemple suivant (figure 5).

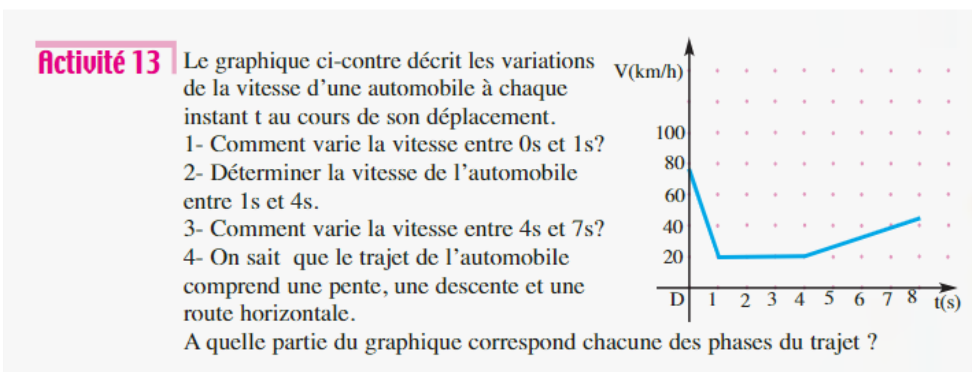


Figure 5 : Une visualisation du trajet d'une automobile (République tunisienne, 2019, p. 87)

Une analyse à priori des tâches proposées montre qu'elles reposent sur une lecture du graphique. Il s'agit implicitement d'une fonction affine par morceaux, avec des variations différentes de la vitesse en fonction du temps, décroissante puis constante selon l'intervalle du temps [0,8]. L'élève est amené à identifier les parties de la courbe qui correspondent à chacune des variations et à repérer la variable indépendante t et la variable dépendante v. Il n'est certes pas demandé de proposer une expression algébrique possible de v (t) dans chaque cas, ce qui aurait favorisé, à notre avis, une interaction entre les modes de pensée algébrique et fonctionnel au sein du registre graphique, par exemple, amorcer la notion de pente de la droite en la reliant, dans chaque cas, au coefficient de la fonction affine implicitement convoquée. Souvent, la perception de la variation repose sur une maitrise des techniques de pointage par le repérage d'un point et la lecture de coordonnées. L'appréhension globale du sens de variation d'une fonction est généralement amorcée par des situations de vitesse selon laquelle une trajectoire donnée est représentée dans un repère donné ou dans un champ quadrillé. Cela se rapproche de ce que l'on a pu observer à l'époque d'Oresme, motivant l'introduction des graphiques et des fonctions, chez Leibniz et Newton, associées systématiquement à des courbes parcourues en fonction du temps. Cependant, ce choix classique des situations proposées dans le manuel peut, selon certaines études, constituer un obstacle à la perception du concept de variation. En effet, Sierpinska (1992) évoque l'omniprésence du temps qui porte à penser que toute fonction est une fonction du temps, c'est-à-dire que la variable indépendante est forcément le temps. Ces considérations portent à croire que, d'un côté, les fonctions qui dépendent du temps sont essentielles au développement de la notion de variable (Biehler, 2006), l'idée de variation étant alors beaucoup plus facilement disponible (Krysinska et Schneider, 2010). La référence au temps peut même constituer, selon ces auteures et auteurs, une contrainte à la perception de la variation de grandeurs autres que le temps dans la mesure où « une imagerie cinématique des situations qu'elle soit ou non suggérée par les pratiques est un facteur didactique pouvant jouer favorablement sur l'émergence du regard fonctionnel » (Krysinska et Schneider, 2010, p. 34). L'omniprésence du temps et la vision statique sur le mouvement agissent alors comme obstacles. C'est du dépassement de ces obstacles, plusieurs siècles plus tard, au Moyen Âge, qu'émergera une analyse plus fine du mouvement par l'intermédiaire de l'étude de la relation entre la position et le temps. Cette analyse de la variation est alors rendue possible grâce au regard dynamique adopté sur la fonction. La relation entre une distance parcourue par un mobile en mouvement au fur et à mesure que le temps s'écoule est liée au concept de covariation.

5. Une mise en regard des deux analyses

De cette analyse, conduite sur la base des problèmes du cadre algébrique proposés dans le manuel, se dégagent des éléments de rapprochement avec les praxéologies de référence donnée à voir dans l'analyse historicoépistémologique.

- Les OM développées semblent vouloir retracer en quelque sorte l'histoire de l'introduction de la fonctionnalité par l'intermédiaire des équations, ce qui a constitué une étape importante dans le développement du concept de fonction. Le lieu d'articulation entre équation et fonction est le cadre des grandeurs, tout comme dans l'histoire, avec particulièrement « les courbes géométriques » retenues par Descartes à l'époque.
- Les OM développées dans le cadre algébrique autour des notions de variable et de relations fonctionnelles font souvent appel au contexte

géométrique ou physique dans une dialectique interregistres (algébrique, graphique, numérique) rendant nécessaire une nouvelle reconsidération du statut des lettres et des transformations algébriques. Par ailleurs, la notion de variable indépendante a toujours été liée à un domaine discret, un continu géométrique (ou un continu physique). « Toute chose mesurable, excepté les nombres, est imaginée dans une manière de quantité continue » (Youschkevitch, 1981, p. 94). Telle a été l'intuition d'Oresme à l'époque où il a explicité graphiquement la notion de fonction par une idée de variation continue. Les nombres entiers étant insuffisants pour « mesurer » les grandeurs, Oresme les représente par des longueurs. Bien que le numérique ne soit pas lié à ces représentations graphiques, cette correspondance entre grandeurs continues et graphiques, particulièrement entre temps et vitesse, lui permet de représenter les fonctions linéaires, affines et quadratiques. Toutefois, dans les travaux d'Euler, la présence du temps va jouer un rôle important ; on y observe l'idée du « temps physique », qui est implicite et que l'on retrouve d'ailleurs dans les situations proposées aux élèves. En effet, derrière cette notion, on trouve la notion de continuité. En fait, pour Euler, le continu restera dans un domaine physique, puisque la droite réelle n'existe pas sous forme numérique dans ces travaux (la droite numérique achevée est du XIX^e^ siècle). Dans cette définition, il n'y a pas de notion de domaine de définition, ni de valeurs interdites, ni d'usage de la notation f(x).

- L'omniprésence des formules entre grandeurs géométriques ou physiques dans les situations proposées peut engendrer des confusions entre inconnues, variables, relations fonctionnelles et expressions algébriques, même si la volonté des concepteurs du programme est d'amener les élèves à se représenter le concept de dépendances à travers des problèmes contextualisés. De plus, lorsque la modélisation fonctionnelle n'est pas guidée ou convoquée, il est possible que des stratégies de résolutions non attendues soient mises en œuvre. Des démarches aussi bien arithmétiques qu'algébriques peuvent très bien être éloignées des attentes institutionnelles. Cela suppose également que sur le plan des pratiques d'enseignement (Coulange et al., 2012), le point de vue « dynamique » du domaine algébrique amorcé soit perçu comme un véritable enjeu d'enseignement. Par exemple, au-delà de la notion de formule, on doit penser le passage du mode de pensée algébrique à un mode de pensée fonctionnelle en termes de variation. Or, dans la plupart des problèmes proposés à l'entrée au lycée, l'élève est amené à accomplir des transformations algébriques dépourvues de sens, sans un contrôle des résultats.

- La plupart des formules en jeu dans les situations géométriques du manuel présentent des liens de proportionnalité entre grandeurs. Or, bien que cette approche permette de dépasser le réductionnisme du registre algébrique par des situations où interviennent simultanément plusieurs variables et plusieurs formes de dépendance, elle est susceptible de freiner l'appréhension d'un modèle non linéaire et présente le risque de généraliser certaines propriétés de linéarité à des fonctions usuelles quelconques. Dans le contexte de grandeurs physiques, cela est possible au moyen de formules de types affine ou polynomiale.
- Les activités fondées sur l'étude des relations de dépendances entre grandeurs ou mesures mettent en avant une modélisation fonctionnelle qui permet de relier implicitement un domaine initial d'existence des grandeurs (le système physique) et le modèle mathématique (les fonctions mathématiques). Les activités suggérées par l'expression de la valeur d'une grandeur et par l'exploration de la variation entre grandeurs permettent de conceptualiser certains aspects de la pensée, mais laissent peu de choix à l'élève pour quantifier des dépendances fonctionnelles, ce qui pourrait compromettre cet objectif.
- La naturalisation de l'ostensif f(x) comme une généralisation de « ...en fonction de… » peut être justifiée par des considérations historiques. Le terme « fonction » a longtemps référé à une relation entre deux variables (grandeurs ou quantités numériques). Il est d'ailleurs assez fréquent de voir dans les écrits que « y dépend de x ou que y est une fonction de x ». Depuis le temps d'Euler, on observe, dans certains livres ou manuels, la notation « soit y = f(x) » qui se lit « soit y une fonction de x ». Avec le développement des travaux en analyse, une distinction claire et nécessaire doit être établie entre la variable y et le rôle que joue y par rapport à x (correspondance à partir de laquelle y dépend de la variable x). Le formalisme relié à f (notation attribuée à une fonction) et à f(x) (notation de la correspondance ou encore de la variabilité de x) n'est apparu qu'assez tard.
- Les OM développées autour de la représentation graphique (appelée aussi graphe[2]) par la perception de variations entre grandeurs physiques constituent une approche insuffisante pour développer le concept de covariation. C'est aussi la conversion inverse qui permettrait de percevoir cet aspect dynamique en guidant le travail de l'élève vers une

---

[2] Graphe d'une fonction. Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble Df, on appelle graphe de f (ou courbe représentative de f) l'ensemble des points (x, f(x)) du plan dont l'abscisse x est un élément de Df et l'ordonnée est l'image f(x) de x par f. Cet ensemble est en général noté graph(f) ou Cf.

> représentation d'un phénomène. Cela se rapproche des travaux de Rogalski (2013), qui précise le rôle de l'histoire dans le développement du concept de covariation de grandeurs (physiques, géométriques, etc.) et montre que l'introduction de la notion de fonction par la notion de graphe ne doit pas être naturalisée dans l'enseignement. Rogalski se demande pourquoi une courbe tracée dans le plan, uniquement numérique, ferait penser à la notion de fonction.

Conclusion

Penser les réformes de l'algèbre élémentaire dans une perspective fonctionnelle est un terrain d'étude encore peu exploré au niveau des recherches en didactique des mathématiques. Ce travail aborde cette thématique dans le système éducatif tunisien qui s'inspire du développement historique de ces concepts et qui est représentatif d'une grande majorité de systèmes institutionnels actuels. Ces travaux questionnent également la visibilité épistémologique et didactique des organisations contemporaines de l'étude de l'algèbre élémentaire. Dans notre étude, l'éclairage historique a servi de modèle épistémologique de référence pour appréhender certains choix curriculaires. La mise en regard des deux analyses historicoépistémologique et institutionnelle a permis de pointer, au niveau des praxéologies développées autour du concept de fonction, certains aspects ignorés ou cachés que l'on pourrait qualifier de vides institutionnels dans les OM développées autour des notions de variable, de dépendance fonctionnelle et de covariation, et cela, même si une articulation entre les objets de savoir équation et fonction est amorcée au sein du cadre algébrique.

Ainsi, du point de vue du développement du curriculum, se posent, à notre avis, deux questions importantes. La première concerne le « comment » débuter un enseignement favorisant une entrée dans la pensée fonctionnelle. En effet, l'algèbre est un levier pour développer une approche fonctionnelle. Toutefois, si l'on s'appuie uniquement sur le langage algébrique, les notions souvent abordées (proportionnalité, formule, linéarité) et les calculs associés, on pourrait venir bloquer le développement de certains aspects du cadre de l'analyse. Il nous semble qu'une approche interdisciplinaire entre mathématique et sciences physiques peut, par exemple, favoriser l'émergence des aspects fonctionnels dans un contexte de modélisation plus active. La deuxième question qui se pose renvoie à la prise en compte du développement historicoépistémologique de la pensée fonctionnelle dans la construction des curriculums. Finalement, comme le dit Brousseau (1998) :

> en aucun cas, il ne saurait suffire de plaquer, d'appliquer sans modifications, l'étude historique à l'étude didactique. Et c'est aussi à cette source qu'il faut puiser

> les arguments pour choisir une genèse scolaire d'un concept et construire ou "inventer" les situations d'enseignement qui produiront cette genèse. (p. 138)

Références

Artigue, M. (1991). Épistémologie et didactique, *Recherches en didactique des mathématiques, 10*(2.3), 241-286.

Artigue, M. (1998). L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. *Recherches en didactique des mathématiques*, *18*(2), 231-262.

Assude, T., Coppé, S. et Pressiat, A. (2012). Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège. Atomisation et réduction. *Recherches en didactique des mathématiques, Hors-série,* 41–62.

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Librairie philosophique J. Vrin.

Barbin, E. (1987). Dix ans d'histoire des mathématiques dans les IREM. *Bulletin de l'APMEP* (Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public), *358*, 175-184.

Bardini, C. (2003). *Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique* [thèse de doctorat, Université Paris-Diderot - Paris VII]. TEL. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00011697

Beatty, R. et Bruce, C. (2012). *Linear relationships : from patterns to algebra*. Nelson Publications.

Ben Nejma, S. (2004). *La mise en équations en première année de l'enseignement secondaire tunisien : transition collège/lycée* [mémoire de DEA inédit]. Université de Tunis.

Ben Nejma, S. (2009). *D'une réforme à ses effets sur les pratiques enseignantes. Une étude de cas : l'enseignement de l'algèbre dans le système scolaire tunisien* [thèse de doctorat, Université Paris VII et Université de Tunis]. TEL. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01267461

Ben Nejma, S. (2010). Quel impact d'une évolution du curriculum officiel sur les pratiques enseignantes? Étude de cas dans le contexte tunisien. *Petit x, 82*, 5-30.

Ben Nejma, S. (2012). Pratiques enseignantes et changements curriculaires : une étude de cas en algèbre élémentaire. Dans J.-L. Dorier et S. Coutat (dir.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle. Actes du colloque EMF2012* (p. 1133-1142). Université de Genève.

Biehler, R. (2006). Reconstruction of meaning as a didactical task: The concept of functions as an example. Dans J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose et P. Valero (dir.), *Meaning in mathematics education* (p. 61-81). Springer.

Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999). Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(1), 77-124.

Bosch, M. et Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. Dans A. Mercier et C. Margolinas (dir.), *Balises pour la didactique des mathématiques. Actes de la XIIe école d'été de didactique de mathématiques* (p. 107-122). Éditions la Pensée sauvage.

Bourbaki, N. (1960). *Éléments d'histoire des mathématiques*. Éditions Hermann.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Éditions la Pensée sauvage.

Carraher, D. et Schliemann, A. (2007). Early Algebra and Algebraic Reasoning. Dans F. Lester (dir.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 669-705). Information Age Publishing.

Charbonneau, L. (1987). Fonction : du statisme grec au dynamisme du début du XVIIIe siècle. *Bulletin AMQ* (Association mathématique du Québec), *XXVII*(2), 5-10.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné* (2e éd.). Éditions la Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : L'approche anthropologique. Dans R. Noirfalise (dir.), *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques. Actes de l'université d'été de La Rochelle* (p.91-119). IREM de Clermont-Ferrand.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude 3. Écologie & régulation. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot et R. Floris (dir), *Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques* (p. 41-46). Éditions la Pensée sauvage.

Coulange L., Ben Nejma S., Constantin C. et Lenfant-Corbin A. (2012). Des pratiques enseignantes aux apprentissages des élèves en algèbre. *Recherches en didactique des mathématiques, Hors-série*, 57-79.

Dorier, J.-L. (2015). Dimension épistémologique de la didactique des mathématiques. Dans Theis L. (dir.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes du colloque EMF2015* (p. 108-118). Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques,* 7(2), 5-31.

Durand-Guerrier, V., Le Berre, M., Pontille, M.-C. et Reynaud-Feurly, J. (2000). *Le statut logique des énoncés dans la classe de mathématiques : éléments d'analyse pour les enseignants*. Institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, *(5)*, 37-65.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. Dans D. A. Grouws (dir.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 390-419). National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. et Fong Ng, S. (2016). *Early Algebra. Research into its nature, its learning, its teaching*. SpringerOpen.

Krysinska, M. et Schneider, M. (2010). *Emergence de modèles fonctionnels.* Presses universitaires de Liège.

Passaro, V. (2015). *Analyse du raisonnement covariationnel favorisant le passage de la fonction à la dérivée et des situations qui en sollicitent le déploiement chez des élèves de 15 à 18 ans* [thèse de doctorat, Université de Montréal]. Papyrus. https://papyrus.bib.umontreal.ca/xmlui/handle/1866/13509.

Radford, L. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalization. Dans N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir), *Approaches to Algebra: perspectives for research and teaching* (p. 107-111). Kluwer Academic Publishers.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. Dans S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz et A. Méndez (dir.) *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 2-21). Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 257-277. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

République tunisienne. (2008). *Programmes de mathématiques. Enseignement secondaire.* Ministère de l'Éducation et de la Formation. http://www.edunet.tn/ressources/pedagogie/programmes/nouveaux_programme2011/secondaire/math.pdf

République tunisienne. (2019a). *Mathématiques. Première année de l'enseignement secondaire. Partie 1.* Ministère de l'Éducation. http://www.cnp.com.tn/cnp.tn/arabic/PDF/222104P02.pdf

Robert, V. (2018). *Le développement de la pensée fonctionnelle dans les manuels scolaires du 3e cycle du primaire québécois : une analyse praxéologique* [mémoire de maitrise, Université de Sherbrooke]. Savoirs UdeS. https://savoirs.usherbrooke.ca/handle/11143/12608

Robert V., Squalli H. et Bronner, A. (2018). La pensée fonctionnelle : une analyse praxéologique du potentiel de son développement précoce. Dans M. Abboud (dir.), *Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines. Actes du colloque EMF2018* (p. 51-63). Université de Paris.

Rogalski, M. (2013). Modéliser dans la classe de mathématiques, pourquoi et comment? Quelles relations entre mathématiques et physiques? Dans M. Gandit (dir.), *Commission de recherche sur la formation des enseignants de mathématiques (CORFEM). Actes du 20ème colloque* (p. 27-44). Université Joseph Fourier.

Ruiz-Munzón, N., Matheron, Y., Bosch, M. et Gascón, J. (2012). Autour de l'algèbre : les entiers relatifs et la modélisation algébrico-fonctionnelle. *Recherches en didactique des mathématiques, Hors-série*, 81-101.

Schliemann, D., Carraher, W. et Brizuela, B. (2012). Algebra in elementary school. *Recherches en didactique des mathématiques, Hors-série*, 2-15.

Serfati, M. (1997). *L'écriture des mathématiques. La recherche de la vérité.* Éditions du Kangourou.

Sfard, A. (1997). On metaphorical roots of conceptual growth. Dans L. D. English (dir.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images* (p. 339-371). Lawrence Erlbaum Associates.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. Dans E. Dubinsky et G. Harel (dir.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (p. 25-58). Mathematical Association of America.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. Dans J. L. Kaput, D. W. Carraher et M. L. Blanton (dir.), *Algebra in the early grades* (p. 133-160). Routledge.

Vuillemin, J. (1960). *Mathématiques et métaphysique chez Descartes.* Presses universitaires de France.

Vuillemin, J. (1962). *La philosophie de l'algèbre.* Presses universitaires de France.

Waldegg, G. (1997). Histoire, épistémologie et méthodologie dans la recherche en didactique. *For the Learning of Mathematics, 17*(1), 43-46.

Youschkevitch, A. (1981). Le concept de fonction jusqu’au milieu de XIXe siècle. Fragment d’histoire des mathématiques. Dans J.-L. Ovaert et D. Reisz (dir.), *Fragments d'histoire des mathématiques* (p. 7-68). Association des professeurs de mathématiques de l’enseignement public (APMEP).