



Institutionnalisation et enseignement en contexte de résolution de problèmes

Jérôme PROULX

Laboratoire Épistémologie et Activité Mathématique

Université du Québec à Montréal

proulx.jerome@uqam.ca

Résumé : Cet article aborde la question de l'institutionnalisation des savoirs lors de l'enseignement des mathématiques en contexte de résolution de problèmes. Dans un premier temps, le concept d'institutionnalisation de Brousseau est examiné à partir de son origine et des définitions usuelles données en didactique des mathématiques. Par la suite, à partir d'un exemple tiré de travaux conduits en classe de mathématiques, ce cadrage est mis à contribution pour faire ressortir trois types de pratiques (nommées de validation, de reformulation et de ramassage) reliées à l'institutionnalisation. Finalement, une mise en relation supplémentaire des écrits permet d'investiguer comment ces trois pratiques s'arriment à, mais aussi se distinguent à certains égards, de la proposition initiale de Brousseau sur l'institutionnalisation.

Mots clés : institutionnalisation, résolution de problèmes, pratiques de validation, pratiques de reformulation, pratiques de ramassage

Institutionalization and teaching in a problem-solving context

Abstract: This article addresses the institutionalization of knowledge in a problem-solving context. First, Brousseau's concept of institutionalization is examined from its inception and according to its usual definitions in "didactique des mathématiques". Then, using an example taken from a study conducted in mathematics classrooms, this framing is used to draw out three types of teaching practices related to institutionalization (namely validating, reformulation and summarizing). Finally, an additional analysis illustrates how these three practices are aligned with, as well as differ from, Brousseau's initial conceptualization on institutionalization.

Key words: institutionalization, problem-solving, validating practices, reformulating practices, summarizing practices

1. Introduction au contexte et aux questions

Plusieurs des travaux menés au sein du Laboratoire Épistémologie et Activité Mathématique sont centrés sur l'étude de différentes façons de travailler en

contexte de résolution de problèmes en classe de mathématiques. Ces travaux nous¹ font intervenir dans plusieurs classes, du primaire à l'université, où divers types de problèmes sont proposés aux élèves : des problèmes simples à des plus complexes, en passant par du calcul mental, des énigmes, des mises en situation variées, etc. (voir Borasi, 1986, pour une classification de divers types de problèmes mathématiques).

Ces travaux s'ancrent dans la théorie cognitive de l'enaction et du « faire | mathématique » (Maheux et Proulx, 2014, 2015; Proulx et Maheux, 2017), concevant l'activité de résolution de problèmes comme un processus non-linéaire et évolutif. Ils s'inspirent aussi des travaux de Borasi (1992, 1996), Brown et Walter (2005) et Lampert (1990a, b) sur l'investigation et la résolution de problèmes en classe, où les élèves sont plongés en situations authentiques de résolutions et d'explorations mathématiques. Dans ces travaux, et de façon analogue au développement des mathématiques comme discipline (voir Davis et Hersh, 1981; Wilder, 1984), la résolution de problèmes est vue comme un processus émergent, ne suivant pas un plan pré-décidé, et à travers lequel de nombreuses questions et productions jaillissent en cours de résolution; ces nouvelles questions et productions devenant même parfois l'objet central de l'investigation en redirigeant l'exploration par leur prise en compte (voir aussi Cobb et al., 1994). Ce contexte mène à travailler avec les solutions et stratégies des élèves, produites en cours de résolution, en les questionnant, en établissant des liens entre elles, en relançant les élèves sur des interrogations diverses, etc. (voir Schoen, 2004a, b).

Dans ce contexte, les problèmes donnés aux élèves ne sont pas conçus, tel que décrit par Stanic et Kilpatrick (1988), en tant que véhicules ou transmetteur de savoirs mathématiques pré-décidés à acquérir par la résolution dudit problème. Les problèmes ont plutôt le rôle de déclencheurs de l'activité mathématique des élèves. L'intention de ces problèmes est de provoquer l'émergence de stratégies et de concepts à travers leur résolution, que l'enseignant devra prendre en compte et réinvestir pour faire avancer les mathématiques de la classe. Ainsi, mis à part les thèmes mathématiques globaux (par exemple, algèbre, estimation, géométrie, fractions, mesure), le contenu mathématique qui est abordé durant les séances en classe n'est pas totalement anticipé. Ce contenu mathématique prend forme à travers la résolution des problèmes, les stratégies suggérées et justifiées, les questions posées, les interactions entre les élèves, etc., qui forment le matériau avec lequel l'enseignant travaille pour faire avancer les mathématiques de la classe.

¹ Le « nous » est utilisé pour désigner toutes les personnes (enseignants, conseillers pédagogiques, étudiants, collègues chercheurs) qui se sont investies de près ou de loin dans les travaux menés au Laboratoire et qui ont interagit avec ceux-ci de différentes façons.

C'est en ce sens qu'il est souvent difficile de prévoir où les résolutions et explorations mathématiques des élèves vont précisément mener, car le tout se développe dans l'action même de la classe, à partir des échanges, des partages, des explorations et des questionnements mathématiques divers. Dans ce contexte, des mathématiques sont pensées, proposées, expliquées, produites sur-le-champ, etc., et fréquemment des « surprises mathématiques » émergent de leur exploration en classe.

Bien que fort dynamique, ce travail en classe nous a rapidement confrontés, comme chercheurs, aux questions d'institutionnalisation des savoirs. Nous avons voulu comprendre comment l'enseignement en contexte de résolution de problèmes que nous étudions peut participer au processus d'institutionnalisation, tel que développé par Brousseau en didactique des mathématiques. Cette situation nous a fait réfléchir sur le sens à donner à ce concept et aux actions qui peuvent être posées dans ces contextes de résolution de problèmes; des contextes bien différents, il va sans dire, de celui de la TSD dans lequel Brousseau a initialement développé son concept d'institutionnalisation. En particulier, deux questions spécifiques ont guidé notre travail : Quelles sont les pratiques mises en place lors des séances de résolution de problèmes qui se relient à l'institutionnalisation ? Quelles filiations peuvent être tracées entre ces pratiques et le concept d'institutionnalisation tel que proposé par Brousseau ?

Dans cet article, dans le but d'aborder ces questions, le concept d'institutionnalisation de Brousseau est premièrement examiné, à partir de son origine et des définitions usuelles données en didactique des mathématiques. Ceci offre un ancrage théorique pour mieux comprendre le concept d'institutionnalisation lui-même et faire ressortir des compréhensions pouvant s'arrimer avec nos travaux sur l'enseignement en contexte de résolution de problèmes. Par la suite, des dimensions d'ordre méthodologique sont proposées pour clarifier le contexte dans lequel nos travaux se réalisent, ainsi que leur nature, en faisant référence à un extrait illustratif d'une séance de classe conduite avec des élèves de 4^e secondaire (15-16 ans). En fonction de cet extrait, trois types de pratiques sont présentées et reliées à l'institutionnalisation. Ces trois pratiques, nommées de validation, de reformulation et de ramassage, sont reprises et étudiées à travers une analyse des divers écrits de Brousseau sur le concept d'institutionnalisation. Ceci permet d'investiguer comment ces trois pratiques s'arriment à la proposition de Brousseau, mais aussi s'en distinguent à certains égards. De toutes ces analyses ressort une conceptualisation de l'institutionnalisation pour l'enseignement en contexte de résolution de problèmes, mais aussi une contribution, aussi modeste soit-elle, à

l'approfondissement du concept d'institutionnalisation en didactique des mathématiques.

2. Ancrage théorique : origine et sens du concept d'institutionnalisation en didactique des mathématiques²

Dans le sens commun et les discussions informelles entre didacticiens et/ou (futurs) enseignants, l'institutionnalisation est souvent perçue comme une des dernières étapes du processus d'enseignement, soit comme synthèse ou fermeture d'une activité. L'enseignant y rend explicite les concepts mathématiques officiels qui ont été travaillés en classe ou encore comment ce qui a été fait par les élèves se situe à l'intérieur de mathématiques déjà reconnues par la communauté mathématique (les savoirs mathématiques culturels) pour légitimer et établir les avancées mathématiques réalisées durant le cours. Toutefois, mis à part ces compréhensions informelles du concept d'institutionnalisation, qu'en est-il de Brousseau lui-même ? Quels sens donne-t-il au concept à l'intérieur de sa théorie ? Un rappel du contexte social et d'expérimentation à l'intérieur duquel, comme chercheur, Brousseau a été amené à développer ce concept dans sa théorie offre une première entrée.

Nous avons cru un instant avoir envisagé toutes les classes possibles de situations. Mais au cours de nos expériences à Jules Michelet, nous avons vu que les maîtres, au bout d'un moment, avaient besoin de ménager un espace; ils ne voulaient pas passer d'une leçon à la leçon suivante et souhaitaient s'arrêter, pour « revoir ce qu'ils avaient fait », avant de continuer : « quelques élèves sont perdus, ça ne va plus, il faut faire quelque chose ». Il a fallu un certain temps pour nous apercevoir qu'ils étaient vraiment obligés de faire quelque chose pour des raisons qu'il fallait s'expliquer.

Les situations « adidactiques » sont les situations d'apprentissage dans lesquelles le maître a réussi à faire disparaître sa volonté, ses interventions, en tant que renseignements déterminants de ce que l'élève va faire : ce sont celles qui fonctionnent sans l'intervention du maître au niveau des connaissances. Nous avons fabriqué des situations adidactiques de toutes sortes. Le maître était là pour faire fonctionner la machine, mais, sur la connaissance elle-même, ses interventions étaient pratiquement annulées. Nous avions là des situations d'apprentissage – au sens des psychologues – et on pouvait penser que nous avions réduit l'enseignement à des successions d'apprentissage. Or, nous avons été obligés de nous demander ce qui justifiait cette résistance des maîtres à la

² Il est important de souligner que le concept d'institutionnalisation est traité ici en didactique des mathématiques. La sociologie, par exemple, a développé une conceptualisation différente du concept, tout comme le monde médical avec ses institutions diverses. Ces acceptions du concept dans différents domaines ne sont évidemment pas considérées ici.

réduction complète de l'apprentissage aux processus que nous avons conçus. Il ne s'agissait pas de faire leur procès ou celui des méthodes mais de comprendre ce qu'ils avaient légitimement besoin de faire et pourquoi ils avaient besoin d'une certaine opacité pour le faire, face aux chercheurs.

C'est ainsi que nous avons découvert (!) ce que font tous les enseignants à longueur de cours mais que notre effort de systématisation avait rendu inavouable : ils doivent prendre acte de ce que les élèves ont fait, décrire ce qui s'est passé et ce qui a un rapport avec la connaissance visée, donner un statut aux événements de la classe, comme résultat des élèves et comme résultat de l'enseignant, assumer un objet d'enseignement, l'identifier, rapprocher ces productions des connaissances des autres (culturelles, ou du programme), indiquer qu'elles peuvent resservir. (Brousseau, 1998, p. 310-311)³

Déjà, à cette lecture, Brousseau semble confesser que la situation d'institutionnalisation, bien qu'il la considère importante, a été provoquée par la nature des situations qu'ils mettaient en route comme chercheurs, où celles-ci « fonctionnent sans l'intervention du maître au niveau des connaissances ». En ce sens, il est possible de penser que d'autres types de situations, dans notre cas en enseignement en contexte de résolution de problèmes, peuvent mener à des façons différentes ou adaptées de travailler l'institutionnalisation en classe de mathématiques. C'est à travers cette perspective que l'analyse du concept d'institutionnalisation est ici réalisée, pour tenter de développer une vision de l'institutionnalisation qui s'arrime avec nos travaux autour de l'enseignement en contexte de résolution de problèmes.

La définition qu'en donnent Briand et Chamorro (1991), à l'intérieur d'un glossaire de didactique, se décline en ces termes :

L'institutionnalisation consiste à donner un statut culturel ou social aux productions des élèves : activités, langage, connaissances (Brousseau, Angers 87). L'institutionnalisation porte aussi bien sur une situation d'action, que sur une situation de formulation ou de preuve. Les maîtres doivent prendre acte de ce que les élèves ont fait, décrire ce qui s'est passé et qui a un rapport avec la connaissance visée, donner un statut aux événements de la classe comme résultat des élèves et comme résultat de l'enseignant, assumer un objet d'enseignement, l'identifier, rapprocher ces productions des connaissances des autres (culturelles ou du programme), indiquer qu'elles peuvent resservir (Brousseau, Angers 87). Dans l'information traitée, l'enseignant choisit et expose, avec les conventions en usage, ce qui est nouveau à retenir. Il fait le « cours ». Ainsi, l'enseignant a la charge de

³ Le livre de Brousseau de 1998 est celui qui est référé constamment au cours de cet article. Ce dernier rassemble plusieurs textes disparates publiés à différents endroits en un seul recueil. De plus, tous les textes ont été relus et mis à jour par Brousseau lui-même au cours de son édition.

donner un statut aux concepts qui, jusque-là, sont intervenus comme outils. Il constitue alors un savoir de classe auquel chacun pourra se référer (R. Douady, MJ Perrin, ESM 20 1989). (Briand et Chamorro, 1991, p. 143)

Au moins quatre dimensions importantes ressortent de cette définition. La première est que l'institutionnalisation a pour but de conférer un statut culturel, voire officiel, aux productions mathématiques des élèves réalisées durant le travail en classe. L'idée est alors de valider ces productions, de les partager socialement, de montrer qu'elles sont utiles et importantes et qu'elles serviront dans le futur. La deuxième dimension est que ce rôle revient à l'enseignant. C'est à lui que revient le rôle d'exposer ce qui est à retenir, ce qui constituera un savoir mathématique sur lequel la classe pourra se référer (et aussi ce qui est possible d'oublier diront certains). La troisième dimension est relative au rapprochement par l'enseignant des productions des élèves avec celles de la communauté mathématique ou du programme d'étude. La quatrième, fortement reliée à la troisième, est que les productions développées au sein de la classe, individuellement et collectivement, sont reliées par l'enseignant aux savoirs visés par l'enseignement, c'est-à-dire que les productions des élèves sont mises en relation avec le savoir visé initialement par la situation proposée.

Alors que les trois premières dimensions semblent s'arrimer avec nos travaux, tel que détaillés plus bas, la quatrième semble quelque peu lui faire défaut. En effet, tel que mentionné, lors de l'enseignement en contexte de résolution de problèmes, les problèmes ne sont pas conçus comme des véhicules servant à atteindre un savoir spécifique et préalablement visé. Ceux-ci sont des déclencheurs de l'activité mathématique des élèves; ce qui rend la reproductibilité des situations en contexte de résolution de problèmes un enjeu difficilement conceptualisable. À ce propos, la définition qu'en donne Brousseau ne s'aligne pas tout à fait avec la question des savoirs culturels, ou plutôt ne les envisage pas comme étant la seule et unique avenue. La conceptualisation de Brousseau semble plus « ouverte » à l'activité mathématique de l'élève en elle-même et non pas uniquement au regard d'un savoir externe qui la justifie. En ce sens, elle permet une meilleure adaptation à nos travaux.

Situation d'institutionnalisation d'une connaissance. C'est une situation qui se dénoue par le passage d'une connaissance de son rôle de moyen de résolution d'une situation d'action, de formulation ou de preuve, à un nouveau rôle, celui de référence pour des utilisations futures, personnelles ou collectives. [...] Avant l'institutionnalisation, l'élève ne peut pas se référer à ce problème qu'il sait résoudre : devant un problème semblable, il doit produire à nouveau la démonstration. Au contraire après l'institutionnalisation, il peut utiliser le théorème sans en redonner la démonstration ou la méthode sans la justifier. L'institutionnalisation comporte donc un changement de convention entre les

actants, une reconnaissance (justifiée ou non) de la validité et de l'utilité d'une connaissance, et une modification de cette connaissance – qui est « encapsulée » et désignée – et une modification de son fonctionnement. Il correspond donc à une institutionnalisation une certaine transformation du répertoire commun accepté et utilisé par ses protagonistes. L'institutionnalisation peut consister en une adjonction au répertoire mais aussi en un retrait d'une croyance commune reconnue soudain comme fausse. [...] L'institutionnalisation peut déjà se produire dans des situations non didactiques d'auto-apprentissage spontané et aussi dans des processus auto-didactiques, c'est alors une convention interne au groupe d'actants (institutionnalisation non didactique). Mais elle est évidemment fondamentalement liée au processus didactique et résulte d'une intervention spécifique. C'est elle qui permet au professeur et à l'élève de reconnaître et de légitimer « l'objet de l'enseignement », même s'ils le voient de façons différentes. Elle peut consister en la reconnaissance par l'enseignant de la valeur d'une production des élèves. Elle affirme alors : (1) que la proposition de l'élève est valide et reconnue comme telle hors du contexte particulier de la situation présente, (2) qu'elle servira dans d'autres occasions, encore non connues, (3) qu'il sera alors plus avantageux de la reconnaître et de l'utiliser sous sa forme réduite que de l'établir à nouveau (4) qu'elle sera acceptée directement par tous ou au moins par les initiés. (Brousseau, 2003, p. 4-5)

Les mêmes thématiques se retrouvent ici chez Brousseau. La phrase « L'institutionnalisation comporte donc un changement de convention entre les actants, une reconnaissance (justifiée ou non) de la validité et de l'utilité d'une connaissance, et une modification de cette connaissance – qui est "encapsulée" et désignée – et une modification de son fonctionnement » est notable. Elle souligne la possibilité de reconnaître valides certaines connaissances ou productions sans que celles-ci soient justifiées, donc adéquates ou réellement utiles. Il est question ici de donner une légitimité à ces productions, bien qu'elles puissent être erronées : soit que cette erreur aura droit de vie un certain temps en classe ou encore que l'enseignant fasse lui-même une erreur en validant positivement celle-ci⁴. Cette production mathématique erronée pourra aussi, tel que Brousseau l'indique, être retirée par une institutionnalisation ultérieure qui la montrera limitée ou fausse. L'institutionnalisation est alors ici vécue comme un processus dynamique. Ceci illustre un caractère interne à l'institutionnalisation; interne à la classe et non nécessairement relié à la communauté externe mathématique.

De plus, la dimension « modification » insiste sur le caractère actif du processus d'institutionnalisation, qui modifie, clarifie ou reformule les idées émises pour les montrer mathématiquement fortes ou importantes. Ceci souligne un côté créatif

⁴ Ce qui est tout à fait possible, comme certains travaux sur les connaissances des enseignants l'ont déjà montré (voir Heaton, 1992; Post et al., 1991).

de l'enseignant, qui établit des liens entre les productions des élèves et les savoirs culturels. Ces liens ne sont pas nécessairement explicites ou évidents dans les productions des élèves et l'enseignant fait alors un travail considérable pour relier, faire des analogies, modifier, rendre fonctionnelles, etc., ces productions mathématiques. Il est alors question d'une modification autant des productions mathématiques que de leur fonctionnement.

Brousseau ouvre ainsi sur la considération d'institutionnalisations internes à la (communauté de) classe, permettant de légitimer ce que celle-ci a produit, compris et proposé. Ceci se distingue de l'idée de ramener les productions des élèves à des savoirs culturels préétablis et visés d'avance, soit de l'idée de tout relier aux savoirs mathématiques externes. Les compréhensions mathématiques de la classe sont ici prises dans leur envol, en cours de travail et pour elles-mêmes. Ces compréhensions locales peuvent avoir une valeur même si elles ne sont pas en lien avec ou en fonction des mathématiques externes et culturelles. Il y a une acceptation que les élèves sont capables de créer, de faire des propositions authentiques, etc. De plus, ce qui est fait en classe n'est pas toujours connecté à un savoir visé préalablement. Des mathématiques intéressantes peuvent être proposées en cours de route de l'activité et celles-ci peuvent être valorisées et justifiées, même si elles ne sont pas celles qui avaient été visées au départ⁵.

En ce sens, Brousseau ne fait pas uniquement référence à la communauté mathématique ou aux savoirs externes culturels pour parler d'institutionnalisation. La validation interne résulte des ententes de la communauté de validation qu'est la classe (voir aussi Boaler, 1999; Borasi, 1992; Lampert, 1990a), qui s'auto-suffit et construit son répertoire mathématique au fil des activités. C'est un répertoire dynamique, en constante possibilité d'être bonifié tout comme d'être élagué, en fonction de ce qui se produit en classe.

Cette perspective adoptée par Brousseau sur l'institutionnalisation a beaucoup de potentiel pour la concevoir au niveau de l'enseignement en contexte de résolution de problèmes, et pour conceptualiser les enjeux que cet enseignement soulève au niveau de l'institutionnalisation des productions réalisées. Ces ancrages théoriques sont directement réinvestis dans les sections suivantes pour donner un sens aux pratiques déployées en contexte de résolution de problèmes.

3. Éléments de méthodologie

Tel que souligné, nous collaborons dans nos travaux avec des enseignants qui nous invitent sur une base régulière dans leurs classes afin d'expérimenter différentes

⁵ Une idée similaire se retrouve chez Coulange (ex., 2012) avec son double mouvement à la fois descendant et ascendant dans les pratiques enseignantes reliées à l'institutionnalisation.

approches de résolution de problèmes et pour interagir, analyser et réfléchir avec eux sur l'enseignement qui a cours durant ces expérimentations. Comme ils prennent place dans diverses classes, nos travaux s'insèrent dans les planifications prévues des enseignants au niveau des thèmes à travailler avec les élèves. Les problèmes donnés aux élèves lors des séances sont sélectionnés à partir des écrits scientifiques, des manuels scolaires, des évaluations et documents ministériels, des revues professionnelles, ou simplement parce que ces problèmes sont typiques ou bien connus du monde de l'enseignement des mathématiques (par exemple, le problème des anniversaires, celui de Monty Hall, celui des poignées de mains⁶). Ces problèmes sont proposés, discutés et choisis de concert avec les enseignants (et comparés/contrastés avec le matériel de ces enseignants, qui peut tout autant leur être préféré). Ce processus nous permet de bénéficier des expertises des enseignants lors des stades de planification (Bednarz, 2000, 2009) et de développer des problèmes plus alignés à leur contexte de classe.

Les séances menées en classe suivent normalement le même format, démarrant avec un problème présenté aux élèves, écrit au tableau ou sur papier, ou encore donné oralement selon la nature de ce dernier. Les élèves ont par la suite un temps variable pour résoudre (seuls ou en équipe). Après ce temps, en plénière, les élèves sont invités à expliquer leurs stratégies et solutions à la classe, en s'assurant de bien justifier leurs raisonnements. Les élèves sont aussi invités à interagir entre eux au niveau des stratégies et solutions mathématiques offertes, à se questionner, à compléter les idées, à faire des liens entre les solutions, etc. À l'occasion, tel que mentionné, ces nombreuses interactions provoquent en retour de nouvelles investigations, où les élèves sont invités à creuser des idées et questions supplémentaires (Cobb et al., 1994), ici encore seuls ou en équipe.

Les données recueillies sont centrées sur ces discussions et interactions en classe, autant verbales, écrites au tableau que gestuelles, de la part des élèves et de l'enseignant, prises chronologiquement sous forme de notes de terrain par des assistants de recherche ou enregistrées sous format audiovidéo. Ces notes de terrain sont par la suite combinées et complétées par celles écrites à chaud par le chercheur.

L'analyse des données se produit en deux phases. La première phase consiste en des rencontres d'équipe (enseignants, chercheur et assistants) suivant les séances pour discuter de divers événements s'étant produits durant les séances et qui méritent attention (dans ce cas-ci, sur les pratiques reliées à l'institutionnalisation,

6 Par exemple, pour leur utilisation dans des travaux québécois, voir Doddridge et Voyer (1999) pour le problème des anniversaires, voir Theis (2012) pour le problème de Monty Hall et voir Barry (2008) pour le problème des poignées de main.

mais d'autres thématiques sont aussi abordées). Ces rencontres offrent un premier niveau d'analyse, et permettent aussi une interprétation des événements à travers la lunette des enseignants. Ces rencontres représentent aussi des occasions pour bonifier les notes de terrain initiales sur les événements des séances. Dans le cas ici présent, ce premier niveau a contribué à souligner des dimensions concernant des pratiques reliées à l'institutionnalisation qui permettent de faire avancer les mathématiques de la classe, soit celles nommées de validation, de reformulation et de ramassage. Cette triple entrée sur les pratiques a par la suite été réinvestie dans les analyses subséquentes. Réalisée en fonction de la première phase, la deuxième phase d'analyse est alors plus ciblée. Elle consiste à réinvestir les concepts théoriques disponibles (Desgagné, 1998) dans les écrits scientifiques pour donner un sens, guider et enrichir, dans ce cas-ci, l'analyse relative aux trois pratiques reliées à l'institutionnalisation soulevées lors de la première phase : par exemple, le concept de *revoicing* de Forman et Ansell (2001) ou encore celui de communauté de validation de Lampert (1990a).

Tel que le partage Nemirovsky (2005), un des défis de l'analyse de données dans ce contexte est de considérer les événements de classe sans adopter une attitude de diagnostic du type : « cette solution est bonne/mauvaise », « cet élève a telle et telle conception erronée », « l'enseignant aurait dû poser une autre question », « cet élève a tel type de compréhension », « les élèves mêlent cette idée avec une autre », etc. Éviter une attitude de diagnostic permet d'apprécier pour elles-mêmes les mathématiques produites durant les séances et tous les événements qui les entourent (ici, les pratiques reliées à l'institutionnalisation). Comme chercheurs, ceci exige de mettre de côté nos propres tendances à comparer en imposant un référent externe; une attitude exigeante qui demande beaucoup d'auto-conscientisation lors des analyses. Comme chercheurs, nous trouvons important d'éviter d'adopter une attitude de diagnostic, parce que cette attitude nous empêche de voir du nouveau au cœur des événements mathématiques produits en classe. Cette attitude de diagnostic nous amène à nous répéter nous-mêmes, à tomber dans une vision déficitaire du travail mathématique réalisé et des pratiques déployées (voir Proulx, 2015a). Cette attitude de diagnostic semblait inappropriée pour arriver à aborder nos questions autour des pratiques reliées à l'institutionnalisation (par exemple, insister sur une erreur mathématique de l'enseignant empêcherait de porter attention à la nature sous-jacente de ses actions). Ainsi, plutôt que de juger ou de comparer avec « ce qui devrait être fait », les analyses tentent à reconnaître et donner un sens aux actions réalisées en se reposant sur leur propre rationnel au moment de leur production.

Dans ce qui suit, à la Section 4, une analyse des pratiques reliées à l'institutionnalisation en contexte de résolution de problèmes est offerte. Cette

analyse prend appui sur un extrait d'une séance réalisée avec des élèves de 4^e secondaire (15-16 ans), déjà publié ailleurs (voir Proulx, 2018a, b, 2019a, b) et qui se retrouve en Annexe. À travers l'analyse de cet extrait, l'intention n'est pas de retrouver les mêmes pratiques d'institutionnalisation soulevées par Brousseau (ou encore de les « écraser » sous celles-ci), car chacune de ces pratiques, tel qu'expliqué, prend forme en contexte. La signification de chacune de ces trois pratiques (de validation, de reformulation, de ramassage) est explorée et reconstruite en considérant l'unicité et l'originalité de celles-ci. Par la suite, la Section 5 offre une mise en relation (liens, différences, contradictions) de ces pratiques avec les propos de Brousseau sur l'institutionnalisation.

4. La nature des pratiques reliées à l'institutionnalisation en contexte de résolution de problèmes

L'enseignement en contexte de résolution de problèmes, tel que l'illustre l'extrait en Annexe, est axé sur l'exploration mathématique des élèves face aux problèmes donnés. Un des enjeux importants pour l'enseignant est de faire le point, de souligner les éléments importants, de laisser des traces du travail mathématique réalisé, dans le but constant de faire avancer les mathématiques de la classe. C'est en ce sens que l'enseignant a un rôle à jouer dans une certaine forme d'officialisation des productions de la classe, forme qui peut participer au processus d'institutionnalisation des productions mathématiques réalisées, tel que Brousseau les définit.

Pour arriver à investiguer ces filiations potentielles entre ces pratiques en contexte de résolution de problèmes et le concept d'institutionnalisation de Brousseau, l'extrait en Annexe est réinvesti et analysé. À partir de ce dernier, trois pratiques qui s'arriment à celles d'institutionnalisation, nommées ici de validation, de reformulation et de ramassage, sont présentées. Des extraits d'interactions entre élèves et enseignant, reconstruits à partir des notes de terrain, sont utilisés pour permettre d'entrer dans les détails de chacune de ces pratiques et de concevoir les façons avec lesquelles celles-ci participent au processus d'institutionnalisation.

4.1 Pratiques de validation

Les pratiques de validation sont reliées à la considération de la classe comme communauté mathématique. Suivant les travaux de Boaler (1998), Borasi (1992) et Lampert (1990a), les membres de la classe sont encouragés à expliquer leurs stratégies, à générer des idées, des questions et des problèmes, à rendre explicites leurs compréhensions, à développer des explications et des arguments à l'appui des solutions avancées, à explorer différentes avenues pour résoudre et aborder

les problèmes, à donner un sens aux concepts et notations/représentations utilisées, à valider les solutions mises en avant, etc.

Tout au long des explications des solutions et stratégies, l'enseignant s'assure que les justifications des élèves sont adéquates, que les arguments sont clairs et que les réponses sont exprimées de façon accessible pour être bien comprises par tous. L'enseignant, sans imposer une façon unique de faire, tel que l'explique Kieren (1995), s'assure de l'aspect intelligible du travail proposé. Ce dernier a ici un rôle de *gate keeper*, dira Lampert (1990b), ce qui pour elle représente une des conditions essentielles pour aider la communauté mathématique à fleurir et fonctionner adéquatement (tel que de s'assurer d'offrir un environnement sécuritaire de travail, à l'écoute et respectueux des idées de chacun). Par exemple, lors de la Stratégie D, où l'élève utilisant la loi des sinus affirme que l'angle est de 45° , l'interaction suivante a mené à une demande de clarification et de validation par la communauté de classe.

Enseignant : Et, comment sais-tu que l'angle est de 45° ?

[plusieurs élèves ruminent à voix basse un certain désaccord]

Élève : Parce que c'est 45° , pour les deux autres angles du triangle!

[certains élèves acquiescent, d'autres s'opposent]

Enseignant : Ok, alors oui peut-être 45° ou peut-être pas. [une élève dit « c'est pas 45° pantoute », un autre répond « ben oui voyons! »] Donc, on n'est pas certain, mais il faut arriver à quelque chose, il faut s'entendre, à savoir si c'est ou pas 45° . Alors, je vais vous demander de prendre quelques minutes, soit seul ou en équipe de 2 ou 3, pour voir si c'est 45° ou pas et d'être capable de pouvoir expliquer et même convaincre les autres camarades de classe. Et, vous avez droit à tout, vos cahiers, manuels, etc., tout votre matériel pour fouiller. Par après, on va partager vos trouvailles! Allez, go!

[la classe se met au travail]

Pour Cobb et al. (1994) et Lampert (1990a), la vérité mathématique se construit alors dans, par et avec la classe, où une communauté de validation se forme. Celle-ci analyse, questionne, juge et argumente sur ce qui est acceptable ou non mathématiquement. Cette communauté, qui prend forme au sein de la classe, développe ses propres processus argumentatifs et justificatifs : c'est en ce sens que des habitudes de travail mathématiques prennent place, que des exigences s'installent et que des pratiques se développent.

À l'intérieur d'une communauté d'apprenants centrée sur la création de connaissances, la communication mathématique devient un moyen essentiel d'offrir des idées, de faire des propositions, de donner des rétroactions constructives et de les utiliser, et ultimement de développer un consensus

permettant de sanctionner les nouvelles connaissances. (Borasi, 1992, p. 170, traduction libre⁷)

Les mathématiques produites à l'intérieur de la communauté de classe sont alors validées par la communauté même (de laquelle l'enseignant fait partie). Déjà, ce travail de justification et de clarification par tous permet une certaine forme d'officialisation des productions mathématiques (et des pratiques de justification et d'argumentation en mathématiques), car elles sont exposées et proposées à l'ensemble du groupe.

Lampert (1990b) explique en ce sens que le rôle de l'enseignant est de créer cette communauté mathématique, dans laquelle il est vu comme le membre le plus expérimenté mathématiquement (voir aussi Hiebert, 2004). Cette idée de création d'une communauté mathématique de validation, de surcroît en plaçant les élèves en contexte de résolution de problèmes, souligne le rôle des élèves dans le processus de validation et leur place au sein d'une autorité mathématique de classe. D'une certaine façon, parce que la parole (mathématique) est donnée aux élèves, ces derniers ont justement aussi leur mot à dire! La communauté de classe participe alors à l'établissement de ce qui est accepté ou non mathématiquement, de ce qui est adéquat, etc. Il y a en ce sens une certaine « distribution » du rôle de validation, où la communauté elle-même s'auto-gère et développe ses façons de faire et d'accepter les mathématiques. Tel que l'exprime Borasi (1992) : « Lorsque nous apprécions que les connaissances [mathématiques] représentent un processus dynamique plutôt qu'un produit fini, l'enseignant ne peut plus être vu comme la source ultime de connaissances et vérités » (Borasi, 1992, p. 181, traduction libre⁸).

L'expression *ultimate* utilisée par Borasi réfère ici à l'idée que l'enseignant, malgré son importance, n'est plus le seul à décider de la vérité mathématique et à confirmer le caractère adéquat d'une production, d'un résultat ou d'une stratégie mathématique. Tel que l'explique Schoenfeld (1994), « Mathematical authority resides in the mathematics » (p. 69). L'autorité mathématique n'est plus externe, décidée à l'avance, et n'est pas non plus dans les personnes qui l'affirment : elle

⁷ Within a community of learners engaged in the creation of knowledge, mathematical communication becomes an essential way of sharing guesses and ideas, providing and using feedback constructively, and ultimately building the consensus that sanctions new knowledge (Borasi, 1992, p. 170).

⁸ Once we appreciate that [mathematical] knowledge is a dynamic process rather than a finished product, the teacher can no longer be seen as the ultimate source of knowledge and truth (Borasi, 1992, p. 181).

réside dans les mathématiques qui sont faites; ce qui est une dimension au cœur du travail en résolution de problèmes en mathématiques.

Ce processus de validation n'est toutefois aucunement garant de l'absence d'erreurs ou de compréhensions incomplètes dans ce qui est justifié « en cours de route » : l'accent est placé sur la clarification et la justification des productions mathématiques par des voies acceptables et intelligibles. Des productions bien expliquées, mais qui ne sont pas tout à fait adéquates ou complètes mathématiquement peuvent (sur-)vivre un certain temps en classe. En effet, certaines productions locales, validées par la communauté de classe, sans toutefois être complètement fausses, peuvent avoir des portées moindres ou être incomplètes. Il est possible de penser, par exemple, à l'argument de la feuille d'examen pour l'angle de 45° ou à la stratégie de comptage des points de coordonnées croisés par la diagonale du carré (où une infinité de points de coordonnées sont franchis et étaient possibles, mais de valeur non-entières). Ou, encore, à la théorie du plus grand côté du triangle rectangle opposé à l'angle le plus grand, où l'enseignant a fait varier l'angle droit vers un angle obtus et aigu en demandant aux élèves si leur théorie tenait toujours la route. La réponse des élèves que cela est vrai pour des triangles isocèle et équilatéral, sans être fausse, décrit une réponse limitée et de moindre portée que si l'argument avait considéré l'ensemble des triangles; par contre, il y a présence d'exemples pour trois « types » de triangle (rectangles, isocèles et équilatéraux), offrant alors une portée intéressante pour valider l'affirmation.

Tel que l'explique Brousseau, certaines productions validées peuvent même être fausses, mais aussi avoir droit de vie pendant un certain temps (par exemple l'affirmation fausse que la diagonale coupe à la fois en deux parties égales le rectangle et l'angle de 90°). C'est ici, dans le maintien de la communauté de classe en contexte de résolution de problèmes, qu'un équilibre d'intervention est fait par l'enseignant. Intervenir trop rapidement sur une erreur peut avoir des conséquences néfastes sur l'engagement des élèves dans la communauté. Tel que l'explique Borasi (1996), le rôle et le traitement réservé à l'erreur en classe de mathématiques peut avoir des incidences sur l'espace sécuritaire de travail nécessaire pour que la communauté fleurisse et que les élèves s'y engagent. Cette communauté peut se démanteler rapidement, alors que des élèves peuvent se rétracter de son fonctionnement si les réponses sont constamment corrigées, rabrouées ou traitées de façon défavorable dès leur émergence. Cet équilibre à maintenir entre intervenir sur l'erreur et la laisser suivre son cours n'est pas simple, tout comme celui d'attendre et de laisser émerger, au besoin, des contre-exemples chez les élèves (comme ce fut le cas à quelques occasions dans l'extrait, par exemple, avec la proposition des angles de 32° et 58°). Un peu à la manière des

preuves et réfutations de Lakatos (1976), ce sont des séries de validations qui se font en cours de route, qui vont au-delà de simples explications et affirmations et qui ont pour but la validation des productions avancées par et dans la communauté de classe. Parfois, cette communauté est divisée face à ce qui est avancé, ou admet pendant un certain temps des productions partielles, valides uniquement au niveau local ou encore erronées. Ceci peut être vu comme le signe que l'exploration mathématique suit son cours.

Ces pratiques de validation permettent de souligner les productions mathématiques déployées en classe (et leur sens), de les rendre accessibles et réutilisables car justifiées, mais aussi de les ouvrir au questionnement. Elles contribuent à l'avancement des mathématiques en classe et à l'établissement des productions mathématiques réalisées, s'alignant avec les situations d'institutionnalisation de Brousseau.

4.2 Pratiques de reformulation

Tout au long des explications des solutions et stratégies des élèves, l'enseignant n'est pas en retrait. Tel que Mopondi (1995) et Cobb et Yackel (1998) le soulignent, ce dernier peut re-décrire et reformuler les points de vue et les raisonnements des élèves, dans des termes que ces derniers n'auraient peut-être pas utilisés, mais qui auraient quand même fait du sens pour eux.

Par exemple, lors de l'explication de la Stratégie C par l'élève Sandra⁹, l'enseignant a non seulement demandé une clarification de la stratégie, mais l'a aussi ré-expliquée et a reformulé l'idée sous-jacente.

Enseignant : Oui, tu as une autre stratégie ?

Élève : Moi j'ai juste compté les points.

Enseignant : Que veux-tu dire exactement par ça ?

Élève : [se dirigeant vers le tableau] Bien si tu traces une ligne de lui à lui, ça donne 1, 2, 3...

Enseignant : Ah, donc tu traces un segment d'un point à l'autre, donc de (0,0) à (4,3).

Élève : Oui. Mais, finalement, ça ne marche pas comme je pensais mon affaire.

Enseignant : Ok, c'est difficile à compter sur le dessin.

Élève : Oui.

⁹ Tous les prénoms utilisés sont des pseudonymes.

Enseignant : Donc, Sandra, tu voulais compter le nombre de points de coordonnées que ton segment de $(0,0)$ à $(4,3)$ croise. Et, là, c'est difficile à compter sur le dessin, ça ne croise pas directement. Ok. Par contre, ça pourrait fonctionner. Par exemple, si tu prends ce segment-là ici, qui relie, tiens, ces deux autres points (voir la figure 3). Là on passe par les diagonales des carrés et on peut compter directement sur le graphique le nombre de points croisés. C'est un peu ça que tu voulais faire?

Élève : Ouin, genre, mais moi c'était difficile.

Enseignant : Et, dans ce cas-ci, ça se compte plus facilement et on aurait 4.

L'enseignant reprend ici les explications de l'élève et les reformule d'une autre façon, non pas dans le but de corriger celles-ci (bien qu'il puisse ajuster certains propos), mais pour clarifier, aller plus en profondeur, rendre explicite et faire ressortir des éléments clés. Il reformule aussi ce qui a été dit pour rendre les idées accessibles aux autres élèves. Ce principe est ce que Forman et Ansell (2001) appellent le *revoicing* :

C'est-à-dire, il y a dans ces classes une forte inclinaison pour les élèves de fournir des explications et pour l'enseignant de répéter, élargir, remanier ou traduire ces explications pour celui qui les énonce et pour l'ensemble de la classe. L'enseignant revoice les contributions des élèves pour réussir à articuler l'information, insistant sur certains aspects de leurs explications. (Forman et Ansell, 2001, p. 119, traduction libre¹⁰)

Ce type de travail réalisé en cours de route par l'enseignant permet de mettre en avant les productions des élèves. Celles-ci ne sont pas toujours adéquates ou ne seront pas toujours retenues, mais la pratique de reformulation permet de rendre claire ces productions et de les rendre « sujets de discussion » dans la classe. Un exemple de ceci s'est produit lorsque l'enseignant a reformulé l'affirmation que la diagonale coupe le rectangle en deux parties égales et donc aussi l'angle en deux parties égales (alors qu'il sait que cette idée est fausse). Le plus important devient ici le caractère reformulé de l'explication, dans le but de rendre accessibles à tous les productions mathématiques offertes. L'enseignant les rend alors sujettes à une argumentation ou à un questionnement, qui mènera autant sur d'autres pratiques de justification par les élèves que sur d'autres reformulations par l'enseignant. C'est ainsi autant une question de mieux dire, soit d'exprimer plus adéquatement les productions mathématiques soulevées, qu'une façon de mettre en avant, de

¹⁰ That [revoicing] is, there is a greater tendency for students to provide the explanations in these classrooms and for the teacher to repeat, expand, recast, or translate students' explanations for the speaker and the rest of the class. The teacher revoices students' contributions to the conversation so as to articulate presupposed information, emphasize particular aspects of the explanation (Forman et Ansell, 2001, p. 119).

rendre accessible au questionnement et à la justification certaines des productions réalisées. D'une certaine façon, en reformulant et en faisant des liens entre certaines idées, l'enseignant s'insère dans les explications de l'élève.

Par exemple, lors du partage des arguments pour savoir si oui ou non l'angle mesure 45° , une élève a ajouté que puisque les côtés du triangle ne sont pas de même mesure, alors la diagonale du rectangle ne coupe pas l'angle en deux parties égales. L'enseignant reprend alors les propos de l'élève et établit de plus des liens supplémentaires avec certaines idées affirmées précédemment.

Enseignant : Ce que Béatrice affirme est que nous savons que les côtés du triangle ne sont pas de même mesure : on en a un de 3, un de 4, et même un de 5, l'hypoténuse. Et, donc, les angles ne seront pas nécessairement égaux non plus, si les côtés ne le sont pas. En fait, elle réutilise implicitement l'idée précédente acceptée de tous, votre théorie, à savoir qu'un côté plus grand fait face à un angle plus grand. Ici, comme les côtés ne sont pas égaux, alors les angles qui leur font face ne seront pas égaux non plus. Un côté plus grand fera face à un angle plus grand.

Ces liens peuvent aussi avoir pour effet de participer à rendre officielles certaines idées préalablement affirmées (par exemple, la théorie du plus grand côté). Ces idées, tout en évoluant, deviendront possiblement, à force d'y faire référence, de plus en plus établies dans le fonctionnement de la classe. Il est possible de parler ici d'une institutionnalisation graduelle, cristallisant au fur et à mesure les idées émises, offrant en ce sens une conceptualisation de l'institutionnalisation comme étant un processus dynamique et évolutif.

Ces reformulations de l'enseignant permettent de faire sortir de leur carcan certaines idées parfois plus obscures ou difficilement exprimées par les élèves, ou encore devant être clarifiées pour tous malgré les efforts investis par l'élève initialement pour les exprimer. En rendant les productions des élèves accessibles à tous, il contribue de façon dynamique et continue à faire avancer les mathématiques de la classe et souligne les productions mathématiques réalisées, ce qui participe à une certaine institutionnalisation.

4.3 Pratiques de ramassage

À différents moments, l'enseignant rend explicite les productions mathématiques de la classe à travers des pratiques de ramassage. L'enseignant souligne les productions réalisées durant la séance qui ont un potentiel important au niveau mathématique, qui vont être utiles et réutilisées plus tard ou encore qui sont liées à d'autres mathématiques déjà travaillées en séance. Il rend alors officielles certaines des idées et productions mathématiques réalisées, en les soulignant, en insistant sur leur importance, etc. Contrairement aux pratiques de validation et de

reformulation précédentes, ici ne sont retenues que les productions mathématiques adéquates, alors que dans les deux autres cas ce critère ne prévalait pas nécessairement et, en ce sens, les productions erronées, limitées ou valides pouvaient se côtoyer. En plus d'être clarifiées, elles sont ici pensées sans erreurs pour instaurer des traces mathématiques pour la classe sur lesquelles se fier. Il se peut toutefois que certaines de ces productions nécessitent encore un certain raffinement, que justement leur ramassage permettra d'accomplir (ou qui se produira lors des activités subséquentes).

Ces ramassages peuvent être faits autant durant la résolution qu'à sa fin. Par exemple, au cours du questionnement concernant la diagonale du carré comparée à son côté, une fois plusieurs arguments avancés, l'enseignant fait le point sur ce qui a été expliqué et revient sur la stratégie proposée, tout en offrant une certaine implication de cette dernière sur le calcul de la distance :

Enseignant : Ok, revenons à la question de la diagonale. Donc, la diagonale est plus grande que le côté du carré. Dans la stratégie de Sandra, au final, on veut compter le nombre de diagonales, le nombre de diagonales de carrés unités d'un point à l'autre, de (0,0) à (4,3). On parlait de croisements tantôt sur le graphique. On aurait donc ici 4. 4 c'est aussi une mesure possible de la distance entre (0,0) et (4,3). On aurait deux réponses : une de 5 en termes de côtés d'unités de carré et une de 5 en termes de diagonales de carré. On parle dans les deux cas de la même distance, mais mesurée de deux façons différentes, donc donnant deux « mesures » différentes.

Lorsque réalisé à la toute fin du processus, en synthèse, ce ramassage agit comme conclusion pour souligner les points mathématiques importants qui ont été travaillés durant cette résolution. Cette conclusion est ce que Shimizu (2004) nomme le *yamada* de l'activité. Par exemple, pour conclure l'exploration concernant la présence ou non d'un angle de 45° , l'enseignant offre une dernière stratégie, venant d'un élève, qui permet de récupérer la majorité des productions partagées et de conclure l'exploration réalisée :

Enseignant : Ok, alors on semble tous convaincus que l'angle n'est pas de 45° , et on a fait ressortir différentes façons de le comprendre. Un de vous a fait quelque chose dans son cahier qui me semble faire le tour de tout ce qu'on a fait. Je crois que c'est intéressant à partager.

Élève : [timide] Vous pouvez l'expliquer Monsieur.

Enseignant : Tu veux que j'explique ce que tu as fait?

Élève : Oui.

Enseignant : Ok, je vais l'expliquer. Vous vous rappelez plus tôt de la question sur la diagonale et le côté? On a dit que la diagonale était plus longue. Ok, alors ce que

Marco a fait est de faire un carré de 4 par 4 et de le couper d'une diagonale comme pour la question de tantôt sur la diagonale du carré. [Il dessine un carré de 4x4 et y insère le triangle de côtés 3 et 4, voir la figure 8] Ça ici, c'est notre triangle rectangle de tantôt avec les côtés de 4 et 3. On prolonge alors le côté de 3 vers un de 4 pour arriver au carré. Dans notre carré de 4x4, la diagonale forme deux triangles isocèles et on a dit tantôt, en parlant de la feuille d'examen par exemple, que dans un triangle rectangle isocèle les angles étaient de 45° . Donc, si les angles sont de 45° pour le carré 4x4, ils ne peuvent pas l'être pour notre triangle du départ. Car, regardez, l'angle formé est plus petit. Chacune des hypoténuses, celle du 4x4 et celle du triangle de 4 et 3, ne décrivent pas le même angle. Je trouve que c'est une très belle façon de le voir, et qui ramène plusieurs de nos idées depuis le début. Alors voilà!

Les pratiques de ramassage en contexte de résolution de problèmes s'avèrent essentielles pour permettre une centration du travail mathématique en classe, pour laisser certaines traces et permettre à tous d'interagir avec les productions mathématiques que l'enseignant juge importantes. Et celles-ci, ces productions ramassées, ne sont pas prédéfinies, tel que le soulève Borasi (1992), car en contexte de résolution de problèmes plusieurs productions mathématiques émergent en cours de route et permettent ou plutôt ont le potentiel de faire avancer mathématiquement la classe. À travers l'ouverture à l'exploration des élèves et la prise en compte des productions mathématiques qui sont réalisées en classe, l'enseignant joue un rôle pour souligner ces productions et s'assurer que celles-ci soient claires et accessibles, du moins le plus possible, pour tous. C'est en ce sens que Stein, Boaler et Silver (2004) soulignent que ce type de ramassage est une pratique essentielle en contexte de résolution de problèmes :

Les leçons qui encouragent une variété d'idées, de solutions, de stratégies et de types de représentations ont l'avantage d'inciter les élèves à réfléchir et à apprendre à justifier et raisonner. Toutefois, elles ont aussi le désavantage de ne pas converger de façon ordonnée vers un ensemble de connaissances communes que les élèves possèdent and doivent savoir – et particulièrement pas à l'intérieur d'un temps prédéterminé, que ce soit une leçon, une étape, une année, ou simplement de façon opportune pour un examen. S'assurer que tous les élèves atteignent éventuellement une certaine forme de clarté et de synthèse concernant les idées et algorithmes mathématiques importants n'est pas trivial à l'intérieur de ce type d'enseignement. (Stein et al., 2004, p. 254, traduction libre¹¹)

¹¹ Lessons that encourage a variety of ideas, solution strategies, and forms of representation have the advantage of engaging students in thinking and learning to justify and reason. However, they also have the disadvantage of not converging neatly into a common core of knowledge that all students share and should know – especially not in any predetermined time frame, be it a lesson, a grading period, a year, or simply in time for a high-stakes test. Making sure that

Aux idées de Stein et al. (2004) s'ajoute, tel que souligné, que ces ramassages peuvent se produire à différents moments durant une séance et non uniquement à la toute fin comme conclusion finale de l'activité. L'enseignant peut en tout temps soulever, valider et mettre en avant, donc ramasser, les productions mathématiques réalisées en classe. C'est aussi de cette façon qu'il contribue à faire avancer les mathématiques de la classe en s'alignant sur une certaine institutionnalisation.

La prochaine section donne un sens supplémentaire à ces trois pratiques à travers les écrits de Brousseau sur l'institutionnalisation, pour permettre de les arrimer et de les conceptualiser.

5. Différents sens possibles de l'institutionnalisation et liens avec l'enseignement en contexte de résolution de problèmes

À l'intérieur des divers écrits de Brousseau, le concept d'institutionnalisation peut sembler varier au niveau des insurances portées sur différentes dimensions. Il est alors pertinent de reprendre, à travers ses écrits, les différents sens donnés à l'institutionnalisation et de voir où ceux-ci sont porteurs de distinctions intéressantes pour les trois pratiques soulevées en contexte de résolution de problèmes. Ce qui suit propose quelques extraits tirés des écrits de Brousseau autour du concept d'institutionnalisation. Ces extraits mettent en avant diverses dimensions discutées ici en fonction des définitions soulevées à la Section 2 et des trois pratiques en contexte de résolution de problèmes. Un retour sur ces diverses dimensions est par la suite réalisé, complété de commentaires sur le contexte dans lequel l'institutionnalisation s'est initialement développée.

Une des dimensions au cœur de l'institutionnalisation pour Brousseau est sa fonction pour donner un statut aux productions mathématiques réalisées en classe et pour créer des appuis mathématiques pour les élèves qui pourront les réutiliser dans leurs travaux ultérieurs. Par exemple, alors qu'il précise les détails de la situation de la course à 20 et du travail des élèves et leurs découvertes, Brousseau aborde les situations de validation en mentionnant que : « La situation de validation permet l'organisation des preuves en une démonstration qui, elle, suit le sens de la progression du jeu. L'institutionnalisation est de toute façon nécessaire pour étayer les pratiques et l'utilisation ultérieure » (Brousseau, 1998, p. 43). Brousseau parle ici d'une institutionnalisation qui veut permettre de laisser des traces sur ce qui a été produit en classe par et avec les élèves. L'institutionnalisation sert en ce sens à souligner ces productions mathématiques,

all students eventually reach some clarity and closure on important mathematical ideas and algorithms is not trivial in this form of instruction (Stein, Boaler et Silver, 2004, p. 254).

à les rendre disponibles pour le travail mathématique qui suivra et à les officialiser en les expliquant valables, car utilisables par après.

Une autre dimension, au risque d'être évidente, est que cette institutionnalisation est à la charge de l'enseignant, qui joue un rôle fondamental dans la coordination et la création des pratiques attenantes à l'institutionnalisation. Lorsqu'il aborde la question de l'accessibilité des savoirs, Brousseau souligne le caractère essentiel de l'institutionnalisation en ajoutant par rapport à l'enseignant que « s'il renonce à fixer, à institutionnaliser les acquisitions, même partielles, l'élève ne trouvera aucun appui lors des étapes suivantes » (Brousseau, 1998, p. 76).

Brousseau aborde une sorte d'institutionnalisation qui confirme, établit, fixe et souligne ce qui est important, ce qui a été atteint et réalisé et qui insiste sur ce qui doit être saisi. L'enseignant est ici central, car en plus d'être celui qui réalise cette institutionnalisation, les productions mathématiques qu'il institutionnalise ont une valeur reconnue aux yeux de ce dernier. Des liens forts existent avec la pratique de ramassage en contexte de résolution de problèmes, par le soulignement des accomplissements faits et sur lesquels des appuis seront pris pour le travail ultérieur. La question des productions partielles est aussi abordée, relativement aux compréhensions en développement ou en cheminement. L'institutionnalisation est alors une façon de faire le point, à un moment précis, sur les accomplissements de la classe.

Un lien est aussi à faire avec les pratiques de reformulation, où l'enseignant veut rendre plus clair ce qui a été fait, en soulignant des éléments d'importance qui sont proposés par les explications de l'élève. La stratégie du comptage des diagonales de Sandra est un bon exemple, alors que l'enseignant ré-explique sa stratégie et la replace dans un contexte qui fonctionne mieux avec les carrés unités, tout en expliquant et clarifiant le vocabulaire et les idées de celles-ci (par ex. : segment, diagonale). C'est ici que l'enseignant joue un rôle primordial, car il est celui qui offre un statut aux productions réalisées par les élèves, ces derniers ne connaissant ou ne réalisant pas nécessairement la valeur ou la force mathématique de leurs productions.

Le sujet banalise la question dont il connaît les réponses dans la mesure où il n'a pas les moyens de savoir si d'autres se la sont posée avant lui, ou si personne n'a su y répondre, ou encore si d'autres questions lui ressemblent ou lui sont liées par le fait qu'elles pourront recevoir une réponse grâce à celle-ci..., etc. Il faut donc que quelqu'un d'extérieur vienne pointer ses activités et identifie celles qui ont un intérêt, un statut culturel. Cette institutionnalisation est en fait une transformation complète de la situation. Choisir certaines questions parmi celles que l'on sait résoudre, les placer au cœur d'une problématique qui confère aux réponses que ces questions appellent à un statut de savoir plus ou moins important, les relier à

d'autres questions et à d'autres savoirs, constitue finalement l'essentiel de l'activité scientifique. Ce travail culturel et historique diffère totalement de ce qui semblait devoir être laissé à la charge de l'élève et il revient à l'enseignant. (Brousseau, 1998, p. 77)

L'institutionnalisation est vue ici comme un liant, une action pour montrer et relier les productions réalisées aux notions mathématiques culturelles reconnues. L'enseignant, tel que l'explique Lampert (1990b), est celui qui sert de pont entre la communauté mathématique et celle de la classe. Il est celui qui rend légitime ce qui a été fait en établissant des liens entre ce qui a été produit mathématiquement en classe et les savoirs dits officiels ou culturels¹².

Ce type d'institutionnalisation, axé sur la création de liens, est vu comme un processus de création de savoirs nouveaux, qui est au cœur de l'activité scientifique. Il y a pour Brousseau une dimension créative dans l'acte d'institutionnalisation, déployée par l'établissement de ces liens. En faisant des liens entre les productions mathématiques des élèves et d'autres officielles, du « nouveau » est créé et l'enseignant est vu, dans ce processus, comme un créateur de nouveautés mathématiques : l'institutionnalisation devient une activité (mathématique) créatrice de sens.

Brousseau reprend cette idée de création de liens en insistant sur le fait que l'institutionnalisation est une des actions importantes de l'enseignant. Abordant la question des jeux, il affirme :

Il découle de cette définition [de jeux] que les deux types de jeux principaux du maître sont la dévolution que nous avons déjà présentée, et l'institutionnalisation. [...] Dans l'institutionnalisation, [l'enseignant] définit les rapports que peuvent avoir les comportements ou les productions « libres » de l'élève avec le savoir culturel ou scientifique et avec le projet didactique : il donne une lecture de ces activités et leur donne un statut. (Brousseau, 1998, p. 92)

¹² Il est possible de se placer ici dans une perspective de l'observateur à la Maturana (1987; voir aussi en didactique des mathématiques les travaux de René de Cotret, 1999, ou encore les nôtres dans Maheux et Proulx, 2014, 2015). C'est en effet l'enseignant qui voit et fait les liens entre ce qui est fait par les élèves et les connaissances mathématiques reconnues. Ce n'est pas une affirmation que les élèves refont exactement les mêmes mathématiques que celles établies par la communauté des mathématiciens. Par contre, l'enseignant voit des filiations, des aspects compatibles et propose ces liens, voire les produits. Ceci représente alors une compatibilité, un *fit* et non une correspondance dirait von Glasersfeld (1995), car en effet il n'est pas possible d'affirmer épistémologiquement que ces productions mathématiques sont « les mêmes ». C'est en ce sens que tout ceci se place sous l'œil de l'enseignant, comme observateur, qui crée ces filiations de façon contingente à ses propres compréhensions mathématiques, autant des mathématiques officielles que de celles des élèves.

Le rôle actif et créateur de l'enseignant dans l'établissement de ces liens entre les réalisations des élèves et les savoirs culturels est ici encore souligné : « il donne une lecture de ces activités et leur donne un statut ». De là, le processus créatif de l'enseignant. La question de l'établissement de liens, par les dimensions culturelles et les enjeux de validation, ouvre de façon plus précise sur ce que peut être une situation d'institutionnalisation :

Les situations d'institutionnalisation sont celles par lesquelles on fixe conventionnellement et explicitement le statut cognitif d'une connaissance ou d'un savoir. L'institutionnalisation est interne si un groupe fixe librement ses conventions, selon un processus quelconque qui en fait un système quasi isolé. Elle est externe si elle emprunte ses conventions à une culture : c'est la situation la plus fréquente dans la didactique classique. (Brousseau, 1998, p. 282)

Brousseau propose ici deux types d'institutionnalisations, une interne et une externe, chacune ayant des fonctions similaires. Dans le cas de l'institutionnalisation interne, il y a une reconnaissance que des productions mathématiques réalisées en classe ont une validité interne à la classe – et non une validité qui provient de l'extérieur à celle-ci. Celles de l'extérieur, les productions mathématiques officielles, sont des productions et savoirs mathématiques qui sont déjà, d'une certaine façon, fixés et canonisés. Les productions de la classe, quant à elles, doivent être rendues officielles pour la classe, pour les traces de la classe et leur réutilisation dans celle-ci. De nombreux exemples cités plus haut dans l'extrait de la distance entre deux points s'arriment bien à ceci. Il n'est pas clair, par exemple, que la théorie du grand côté du triangle face à l'angle le plus grand est une idée qui a une portée externe à cette classe : elle est une production à portée locale, mais qui jouera un rôle et sera un appui réutilisé dans les arguments suivants (par exemple, pour dire que si les côtés ne sont pas égaux, alors les angles ne le seront pas non plus et ne peuvent pas être chacun de 45° dans le partage du 90°). Évidemment, ce n'est pas parce qu'une production mathématique possède une validité interne au niveau de la classe qu'elle est nécessairement fausse ou incomplète, loin de là. Il est toutefois possible que sa portée sur la communauté plus large soit moindre. Ce sont des mathématiques qui émergent au niveau local, officialisées dans ce contexte local pour souligner leur caractère important, pour laisser une trace et permettre leur utilisation ultérieure par la communauté de classe.

Brousseau montre, avec ce jeu interne/externe, qu'il est donc possible de travailler en institutionnalisation sur deux dimensions. Au niveau interne, il est question d'accepter, souligner et laisser des traces des productions mathématiques réalisées en classe qui ont un sens interne à la classe, à un niveau local. Il y a une reconnaissance que la classe peut agir comme communauté et faire ses propres

productions et validations, qui ont droit de vie dans la classe et sont légitimées par elle et non grâce à l'extérieur. Au niveau externe, il est question, tel que mentionné, de relier les productions produites en classe, de créer des liens, avec des savoirs reconnus à l'externe.

Tout comme certaines productions au niveau local de la classe ont peu d'intérêt à l'externe, il est tout aussi possible que les savoirs externes mathématiques aient peu d'intérêt dans le contexte local de la classe. Ceux-ci ne seront peut-être pertinents qu'ultérieurement, lorsque le contexte local leur permettra de prendre racine. Par exemple, l'inégalité triangulaire aurait pu servir à expliquer certaines des questions et réponses données concernant la théorie des élèves du plus grand côté faisant face au plus grand angle du triangle. Pour aborder ces productions et leur donner un sens, les élèves sont passés par un autre chemin, tout aussi pertinent et robuste mathématiquement, concernant l'angle opposé. Cette idée ne réfère pas par contre à l'inégalité triangulaire, souvent utilisée en mathématiques. L'enseignant aurait pu être tenté d'initier cette idée d'inégalité triangulaire pour aider à résoudre la question posée ou encore pour placer les autres idées proposées sous sa bannière. Il y aurait eu à ce moment un certain danger d'écraser les productions des élèves, de leur nier leur intérêt, alors qu'elles sont tout autant valides mathématiquement, surtout au niveau local. Brousseau aborde directement cet enjeu de l'importance de laisser vivre les productions mathématiques, de leur laisser prendre leur envol, lorsqu'il soulève la question du temps opportun pour tenter une institutionnalisation.

Une pratique comparable, courante, dans l'enseignement élémentaire, consiste pour le maître à « exploiter » le genre de situations didactiques présenté plus haut, en institutionnalisant immédiatement la découverte de l'élève : « Vous avez découvert tel objet (affirmation implicite du fait qu'il a un caractère général); il s'appelle « composé de deux applications » (sous-entendu il a un statut cognitif et culturel, reconnaissez-le, utilisez-le, dans les exercices suivants...) ». Cette pratique court-circuite tout le travail mathématique et même le nie, elle revient à affirmer qu'il suffisait d'y penser pour transformer un concept proto-mathématique en notion mathématique. Certes, ce procédé didactique fonctionne et on peut légitimement l'employer localement. Mais nous sommes fondés à penser que le rejet de son emploi systématique est nécessaire pour changer fondamentalement les rapports du « sujet-s'apprenant » avec la connaissance. (Brousseau, 1998, p. 234)

Faire l'institutionnalisation pour Brousseau court le risque d'écraser l'activité de l'élève et son sens, voire de la nier. Il y a un équilibre important à maintenir, qui se relie bien avec ce qui a été avancé plus haut pour les pratiques de validation et de reformulation en contexte de résolution de problèmes : certaines productions peuvent avoir droit de vie un certain temps, il faut faire attention de ne pas

critiquer ou encore de toujours mettre de côté ces productions erronées ou partielles des élèves, etc. C'est d'une certaine façon un avertissement servi par Brousseau sur les pratiques d'institutionnalisation, où un équilibre est à tenir pour que ces liens et le statut des productions mathématiques de la classe prennent leur envol. Établir des liens avec des savoirs mathématiques culturels est fait au risque d'écraser les productions initiales des élèves en les rendant futiles (et de risquer de bloquer l'engagement de l'élève qui pourra craindre de voir ses productions sitôt écrasées, dès leur énonciation ou presque). Brousseau sert ici une critique sévère à ceux qui en viennent à écraser l'activité de l'élève sous des savoirs culturels acceptés par la communauté mathématique. Il soulève l'importance de laisser fonctionner ces productions, voire de les laisser se faire contrecarrer plus tard par un contre-exemple (comme pour les deux contre-arguments formulés en désaccord avec l'idée que la diagonale qui coupe le rectangle en deux parties égales coupe aussi l'angle en deux parties égales). L'enseignant peut attendre le moment où tout ceci se fera, ou encore le provoquer et questionner les élèves – l'enseignant est fort actif en contexte d'institutionnalisation, car l'intention est de rendre possible l'exploration mathématique de la production elle-même.

En lien avec l'idée de faire vivre les productions, de les aider à prendre leur envol, Brousseau souligne des conditions importantes à réaliser pour que l'institutionnalisation ait lieu.

Si l'on veut obtenir que les élèves aient la possibilité, non seulement d'appliquer des méthodes et de produire des solutions, mais aussi d'en comprendre et d'en discuter le bien-fondé, il faut rendre possible cette attitude réflexive, en leur donnant l'usage d'un vocabulaire, même simplifié, et d'une théorie, même non satisfaisante [il parle ici de l'exemple des applications linéaires et de leurs propriétés pour le travail des décimaux]. Notre étude épistémologique permet de comprendre que, pour qu'une théorie puisse être institutionnalisée, il est nécessaire qu'au préalable, elle ait fonctionné comme telle dans des débats scientifiques et dans des discussions entre élèves, comme moyen d'établir des preuves ou d'en rejeter. Ce processus correspond à la 3^e étape de notre analyse, celle où la notion est maniée comme notion mathématique. Nous appelons situations de « validation » et d'« institutionnalisation » les situations didactiques qui permettent de simuler ce processus. (Brousseau, 1998, p. 218)

La question du partiel, du travail en cours ou local, se retrouve encore ici, tel que souligné pour les pratiques de validation et de reformulation. Les productions mathématiques sont soulevées, clarifiées, rendues accessibles, voire développées, et deviennent matière à discussions, même si certaines sont partielles ou locales. L'argument du grand côté faisant face au plus grand angle pour les cas des triangles rectangles, isocèles et équilatéraux est un bon exemple de ce caractère partiel d'une théorie avancée par les élèves. Loin de les écraser, il est ici question

de rendre disponibles ces productions mathématiques à la discussion, au débat et à la validation par tous, pour souligner et mettre l'accent sur des aspects envers lesquels porter attention pour les rendre légitimes et ajouter à leur force (et non les remplacer). L'enseignant peut aussi pour Brousseau lier ensuite ces productions avec des savoirs mathématiques culturels. Toutefois, ceci est fait pour leur donner une force, pour les établir et laisser des traces pour les réutiliser dans d'autres situations. Ces productions peuvent aussi être *short-lived*, car d'autres productions seront partagées, institutionnalisées, et remplaceront peut-être ces dernières (parce qu'elles couvrent plus largement, parce qu'elles sont plus approfondies ou développées). Toute production mathématique peut être subordonnée à une autre, dans un autre domaine plus large ou différent. Les mathématiques que la classe fait fonctionner, si elles ont un potentiel selon l'enseignant, peuvent être rendues légitimes par ce dernier. La validation en résolution de problèmes fait donc partie de ceci : valider c'est aussi institutionnaliser un peu.

C'est en ce sens, à travers les nombreuses nuances que développe Brousseau dans ses écrits, que les pratiques de validation, de reformulation et de ramassage peuvent se concevoir à différents degrés comme participant au processus d'institutionnalisation.

6. Remarques finales

6.1 Retour sur les dimensions de l'institutionnalisation et son contexte d'origine

Il est possible de soulever plusieurs dimensions qui apparaissent au cœur de l'institutionnalisation et qui s'arriment directement avec celles mentionnées pour l'enseignement en contexte de résolution de problèmes. Dans un premier temps, l'enseignant est central au processus d'institutionnalisation. Il est le metteur en scène de celle-ci et agit comme agent créateur. Ensuite, il y a la question de conférer un statut et de rendre légitime les productions mathématiques réalisées en classe en soulignant leur importance mathématique. Ceci est fait pour créer des appuis pour les élèves, pour laisser des traces et permettre une utilisation ultérieure de ces productions mathématiques. Ces appuis passent par la création de liens externes entre ce qui a été produit par les élèves et les savoirs culturels mathématiques. Ces appuis passent aussi par la validation interne des productions mathématiques partagées dans la classe. Ces liens créés et ces statuts conférés aux productions mathématiques de la classe, soulevés par l'enseignant, montrent tout le côté créatif à déployer par l'enseignant : il est celui qui produit ces liens, il est celui qui souligne l'importance de certaines productions, etc. En ce sens, l'institutionnalisation est un processus créatif, qui arrive en temps opportun, tant en cours de route sur des productions complètes ou en développement, qu'à la fin

du processus, en synthèse. Dans son institutionnalisation, l'enseignant permet aux productions de vivre et de prendre leur envol, en s'assurant de ne pas les écraser, les banaliser ou les nier en les réduisant trop rapidement à du connu. C'est à travers leur force acquise durant le travail en classe que leur institutionnalisation prend ancrage. À travers ces dimensions, l'enseignement en contexte de résolution de problèmes s'arrime avec les pratiques d'institutionnalisation proposées par Brousseau.

Cité plus tôt dans l'article, le contexte lui-même dans lequel le besoin d'institutionnaliser a émergé mérite discussion. Le but des enseignants, dans ce qui est décrit par Brousseau, était de faire le point avec ce qui avait été fait en classe pour ne pas laisser les enfants en plan, sans savoir ce qui avait été compris, atteint, réalisé ou encore ce qui était important dans ce qui avait été vu. Ceci décrit bien une intention usuelle d'un enseignant de mathématiques qui veut s'assurer que ses élèves cheminent et aient compris. C'est ici l'idée pour l'enseignant de ramasser ce qui a été fait, pour rendre légitime ce qui a fonctionné, pour le souligner et l'expliquer aux yeux de tous. Ces actions permettent aussi de montrer qu'effectivement le groupe a bien avancé et travaillé, voire a réalisé quelque chose qui en vaut la peine mathématiquement. Les pratiques de reformulations et de ramassage en contexte de résolution de problèmes apparaissent ici remplir ce rôle recherché par les enseignants. Ceci s'éloigne, tel que souligné, de l'idée d'écraser les productions des élèves sous un savoir culturel externe.

C'est ainsi que les pratiques de ramassage et les reformulations de l'enseignant apparaissent fondamentales pour participer à l'institutionnalisation, et en résolution de problèmes de surcroît. L'analyse conduite montre que l'institutionnalisation n'est pas un processus linéaire et ne représente pas uniquement l'étape synthèse en fin de processus. L'analyse souligne, en contexte de résolution de problèmes, les aller-retours constants entre la résolution de problèmes et l'institutionnalisation, les deux influençant le développement de l'autre. En ce sens, autant la résolution de problèmes participe au processus d'institutionnalisation, autant l'institutionnalisation en retour participe au processus de résolution de problèmes. Ce besoin de « souligner » les avancées mathématiques ne s'arrête jamais en résolution de problèmes, et il se fait sentir constamment, alors qu'il faut pour l'enseignant faire beaucoup de « ménage » et clarifier plusieurs des productions lancées sur-le-champ par les élèves pour favoriser l'avancée des mathématiques en classe. De plus, tel que l'explique Borasi (1992), laisser la liberté aux élèves de faire des mathématiques, d'en explorer, de se questionner, etc., vient aussi avec le « fardeau » que leurs productions sont librement pensées et exprimées. Ces productions librement exprimées sont parfois peu organisées ou adéquatement formulées. Les

reformulations de l'enseignant sont alors bénéfiques dans ces situations pour permettre aux productions de prendre leur envol à travers une certaine forme d'institutionnalisation.

6.2 Conclusion

L'intention de cet article est de mieux comprendre le concept d'institutionnalisation, tel qu'utilisé en didactique des mathématiques, et de le mettre en relation avec les pratiques d'enseignement en contexte de résolution de problèmes que nous étudions au sein de notre laboratoire. Le « retour aux sources » de ce qu'est l'institutionnalisation (son émergence dans les travaux de Brousseau, ses définitions, ses variétés d'utilisation dans ses écrits) permet d'établir des filiations entre l'institutionnalisation et certaines pratiques en contexte de résolution de problèmes qui suivent des objectifs similaires, soit de faire avancer les mathématiques de la classe. Les pratiques dites de validation, de reformulation et de ramassage ont toutes en elles des intentions arrimées avec l'institutionnalisation, surtout à travers la richesse des déclinaisons que Brousseau offre dans ses écrits. Évidemment, l'intention de cet article n'est pas de dire que ces pratiques en contexte de résolution de problèmes et celles développées par Brousseau sont les mêmes ou se réduisent les unes aux autres. L'intention est plutôt de tracer des filiations porteuses pour permettre de mieux comprendre le contexte de résolution de problèmes et ses potentialités pour l'avancement des mathématiques en salle de classe.

Finalement, ce travail d'arrimage soulève des questions au sujet des élèves et de leur place à l'intérieur des pratiques d'institutionnalisation. Tel que discuté, l'institutionnalisation est l'affaire de l'enseignant. Toutefois, les pratiques de validation en contexte de résolution de problèmes offrent une place importante aux élèves en tant que membres de la communauté mathématique de classe. Cette dimension se retrouve aussi en filigrane dans les travaux de Brousseau. Ainsi, l'opposition du travail élève et du travail enseignant est peut-être à repenser en contexte de résolution de problèmes, où les deux participent au processus d'institutionnalisation. Évidemment chacun n'a pas le même rôle, tel que le souligne Lampert (1990b), mais chacun joue tout de même un rôle dans l'avancement des mathématiques de la classe...

Références

Barry S. (2008). *Analyse des ressources mises à contribution par enseignant et chercheur dans l'élaboration de scénarios d'enseignement en dénombrement visant le développement de la modélisation en secondaire 1* [thèse de doctorat, Université du Québec à Montréal]. Archipel. <https://archipel.uqam.ca/2218/>

- Bednarz, N. (2000). Formation continue des enseignants en mathématiques: Une nécessaire prise en compte du contexte. Dans P. Blouin et L. Gattuso (dir.), *Didactique des mathématiques et formation des enseignants* (p. 63-78). Éditions Modulo.
- Bednarz, N. (2009). Analysis of a collaborative research project: a researcher and a teacher confronted to teaching mathematics to students presenting difficulties. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 8(1), 1-24.
- Boaler, J. (1998). Open and closed mathematics: student experiences and understandings. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(1), 41-62. <https://doi.org/10.2307/749717>
- Boaler, J. (1999). Participation, knowledge and beliefs: a community perspective on mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics*, 40, 259-281. <https://doi.org/10.1023/A:1003880012282>
- Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics*, 17(2), 125-141. <https://doi.org/10.1007/BF00311517>
- Borasi, R. (1992). *Teaching mathematics through inquiry*. Heinemann.
- Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction: A focus on errors*. Ablex.
- Briand, J. et Chamorro, C. (1991). Glossaire de didactique. static.canalblog.com/storagev1/rodformation.canalblog.com/docs/glossaire_Brousseau.pdf
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Éditions la Pensée Sauvage.
- Brousseau, G. (2003). Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques. guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf
- Brown, S. I. et Walter, M. I. (2005). *The art of problem posing* (3^e éd.). Routledge.
- Cobb, P., Perlwitz, M. et Underwood, D. (1994). Construction individuelle, acculturation mathématique et communauté scolaire. *Revue des sciences de l'éducation*, 20(1), 41-61. <https://doi.org/10.7202/031700ar>
- Cobb, P. et Yackel, E. (1998). A constructivist perspective on the culture of the mathematics classroom. Dans F. Seeger, J. Voigt et U. Waschescio (dir.), *The Culture of the mathematics classroom* (p. 158-190). Cambridge University Press.
- Coulange, L. (2012). *L'ordinaire de l'enseignement des mathématiques, Pratiques enseignantes et leurs effets sur les apprentissages des élèves* [note de synthèse pour une habilitation à diriger des recherches, Université Paris 7]. TEL. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00801863>
- Davis, P. J. et Hersh, D. (1981). *The mathematical experience*. Birkhauser.

Desgagné, S. (1998). La position du chercheur en recherche collaborative: illustration d'une démarche de médiation entre culture universitaire et culture scolaire. *Recherches qualitatives*, 18, 77-105. <https://doi.org/10.7202/000305ar>

Doddridge, É. et Voyer, D. (1999). Un problème de dates de fêtes. *Envol*, 109, 45-47.

Forman, E. et Ansell, E. (2001). The multiple voices of a mathematics classroom community. *Educational Studies in Mathematics*, 46, 115-142. <https://doi.org/10.1023/A:1014097600732>

Heaton, R. M. (1992). Who is minding the mathematics content? A case study of a fifth-grade teacher. *Elementary School Journal*, 93(2), 153-162. <https://doi.org/10.1086/461719>

Hiebert, J. (2004). Signposts for teaching mathematics through problem solving. Dans L. Schoen (dir.), *Teaching mathematics through problem solving* (p. 53-61). National Council of Teachers of Mathematics.

Kieren, T. E. (1995, juin). *Teaching mathematics (in-the-middle): Enactivist view on learning and teaching mathematics* [conférence]. Queens/Gage Canadian National Mathematics Leadership Conference, Queens University, Kingston, Canada.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery*. Cambridge University Press.

Lampert, M. (1990a). When the problem is not the question and the solution is not the answer. *American Educational Research Journal*, 27(1), 29-63. <https://doi.org/10.3102/00028312027001029>

Lampert, M. (1990b). Connecting inventions with conventions. Dans L. Steffe (dir.), *Transforming early childhood education* (p. 253-265). Lawrence Erlbaum Associates.

Maheux, J.-F. et Proulx, J. (2014). Vers le *faire mathématique* : essai pour un nouveau positionnement en didactique des mathématiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 19, 17-52.

Maheux, J.-F. et Proulx, J. (2015). Doing | mathematics: Analysing data with/in an enactivist-inspired approach. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 47(2), 211-221. <https://doi.org/10.1007/s11858-014-0642-7>

Maturana, H.R (1987). Everything is said by an observer. Dans W. I. Thompson (dir.), *GAIA: A way of knowing* (p. 65-82). Lindisfarne Press.

Mopondi, B. (1995). Les explications en classe de mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 15(3), 7-52.

Nemirovsky, R. (2005). Mathematical spaces. Dans R. Nemirovsky, A. S. Rosebery, J. Solomon et B. Warren (dir.), *Everyday matters in science and mathematics* (p. 45-94). LEA.

Post, T. R., Harel, G., Behr, M. J. et Lesh, R. (1991). Intermediate teachers' knowledge of rational number concepts. Dans E. Fennema, T. P. Carpenter et S. J. Lamon (dir.), *Integrating research on teaching and learning mathematics* (p. 177-198). SUNY Press.

Proulx, J. (2013). Le calcul mental au-delà des nombres : conceptualisations et illustrations avec la résolution d'équations algébriques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 18, 61-90.

Proulx, J. (2015a). Looking at students' mathematics: from a deficit view on mathematical knowledge toward possibilities of mathematical actions. *Proceedings of Interdisciplinary Scientific Conference on Mathematical Transgressions*, 89-102.

Proulx, J. (2015b). Mental mathematics with mathematical objects other than numbers: The case of operation on functions. *Journal of Mathematical Behavior*, 39, 156-176. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.07.001>

Proulx, J. (2017). Le calcul mental en mathématiques : Quels potentiels pour l'activité mathématique ? *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 17(4), 288-307. <https://doi.org/10.1080/14926156.2017.1378833>

Proulx, J. (2018a). Démarche d'investigation à travers un enseignement par résolution de problèmes : pistes initiales. Dans M. Abboud (dir.), *Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines. Actes de Espace mathématique francophone 2018* (p. 51-58). IREM de Paris.

Proulx, J. (2018b). On teaching actions in mathematical problem-solving contexts. Dans T. E. Hodges, G. J. Roy et A. M. Tyminski (dir.), *Proceedings of the 40th Annual Meeting of North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-NA)* (p. 1060-1067). University of South Carolina et Clemson University.

Proulx, J. (2019a). Recherches et résolution de problèmes en enseignement des mathématiques : éducation, mathematics education et didactique des mathématiques. *Chroniques – fondements et épistémologie de l'activité mathématique*. <http://www.chroniques.uqam.ca>

Proulx, J. (dir.). (2019b). *Enseignement des mathématiques par résolution de problèmes : approche, fondements et illustrations*. Notes de cours MAT3227. <http://profmath.uqam.ca/jproulx/MAT3227.html>

Proulx, J., Lavallée-Lamarche, M.-L. et Tremblay, K.-P. (2017). Équations algébriques et activité mathématique en calcul mental : regard sur les défis d'enseignement. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 22, 43-65.

Proulx, J. et Maheux, J.-F. (2017). From problem-solving to problem-posing, and from strategies to laying down a path in solving – Taking Varela's ideas to mathematics education research. *Constructivist Foundations*, 13(1), 701-708.

René de Cotret, S. (1999). Perspective bio-cognitive pour l'étude des relations didactiques. Dans G. Lemoyne et F. Conne (dir.), *Le cognitif en didactique des mathématiques* (p. 103-120). Presses de l'Université de Montréal .

Schoen, L. (2004a). *Teaching mathematics through problem solving – Grade K-6*. National Council of Teachers of Mathematics.

Schoen, L. (2004b). *Teaching mathematics through problem solving – Grade 6-12*. National Council of Teachers of Mathematics.

Schoenfeld, A. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. Dans A. Schoenfeld (dir.), *Mathematical thinking and problem solving* (p. 53-70). Lawrence Erlbaum Associates.

Shimizu, Y. (2004). Problem solving as a vehicle for teaching mathematics: a Japanese perspective. Dans L. Schoen (dir.), *Teaching mathematics through problem solving* (p. 205-214). National Council of Teachers of Mathematics.

Stanic, G. et Kilpatrick, J. (1988). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. Dans R. I. Charles et E. A. Silver (dir.), *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving* (p. 1-22). National Council of Teachers of Mathematics.

Stein, M. K., Boaler, J., et Silver, E. (2004). Teaching mathematics through problem solving: Research perspectives. Dans L. Schoen (dir.), *Teaching mathematics through problem solving* (p. 245-56). National Council of Teachers of Mathematics.

Theis, L. (2012). Quelle formation mathématique pour les enseignants du primaire et du préscolaire? Dans J. Proulx, C. Corriveau et H. Squalli (dir.), *Formation mathématique pour l'enseignement des mathématiques : pratiques, orientations et recherches* (p. 181-204). Presses de l'Université du Québec.

von Glasersfeld, Ernst. (1995). *Radical constructivism: a way of knowing and learning*. Falmer Press.

Wilder, R. L. (1981). *Mathematics as a cultural system*. Pergamon Press.

Annexe

Extrait d'une séance de résolution de problèmes en classe

Le matériau utilisé dans cet article pour illustrer la nature des analyses conduites et ce qui en ressort est un extrait d'une séance menée dans une classe de mathématiques de secondaire 4 comptant une trentaine d'élèves (élèves de 15-16 ans, période de 75 minutes). Cet extrait a été choisi pour sa capacité à bien illustrer les interactions entre élèves et enseignants, communs dans la majorité des séances conduites dans nos travaux.

L'enseignant de la classe avec qui nous avons collaboré s'intéressait précisément aux travaux menés au sein de notre Laboratoire en contexte de résolution de problèmes par le calcul mental (voir, par exemple, Proulx, 2013, 2015b, 2017; Proulx et al., 2017). L'enseignant voulait ainsi donner ce type de problèmes (courts, à l'oral, en temps limité, sans papier-crayon) pour voir la façon avec laquelle ses élèves s'engageraient et le type de stratégies qu'ils déploieraient. Le thème retenu pour la séance d'où l'extrait est tiré est la géométrie analytique des distances dans le plan (points de croisement, de partage, distance entre deux points, etc.). Le problème proposé aux élèves dans l'extrait concerne la distance entre deux points dans le plan cartésien, soit : « Trouvez la distance entre les points (0,0) et (4,3) » (avec un plan cartésien affiché au tableau avec les deux points tracés, voir la figure 1).

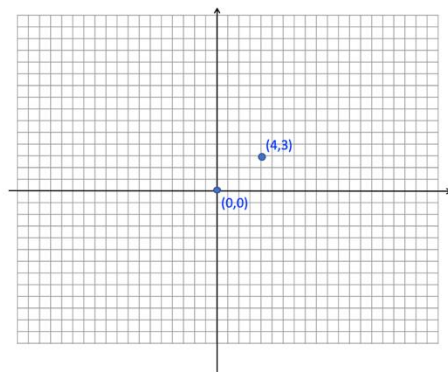


Figure 1 : Le plan cartésien utilisé pour le problème de distance entre deux points

Parce qu'ils avaient déjà abordé les formules de distance entre deux points au niveau algébrique ($D = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$), l'intention derrière ce problème n'était pas de faire découvrir/trouver ladite formule. L'intention était plutôt de plonger les élèves en résolution orale avec un court laps de temps pour faire émerger leurs compréhensions spontanées et voir ce qu'ils comprennent à ce stade sur l'idée de distance entre deux points. En d'autres mots, l'idée était de voir comment les élèves s'en sortiraient, dans quelles stratégies mathématiques ils

s'engageraient, quels types d'interactions, de questions et d'explorations seraient provoquées par ce type de problème, soit quelles productions mathématiques émergeraient et se développeraient en classe.

Les élèves disposaient d'une quinzaine de secondes pour résoudre sans avoir recours au support papier-crayon ni à d'autres aides matérielles. Après le temps écoulé, ils ont été invités à partager leurs solutions (complètes ou non) et comment ils y sont parvenus. Ce problème était le premier donné aux élèves durant la séance, et le travail qui en a suivi s'est étalé sur 40 minutes, menant les élèves sur des explorations et interactions subséquentes et contingentes au problème et aux productions partagées. Voici dans ce qui suit un déroulement synthétique et chronologique des explorations menées une fois le temps écoulé, où l'enseignant¹³ a invité les élèves à expliquer leurs solutions.

Stratégie A : Un élève explique avoir trouvé la réponse en appliquant la formule usuelle pour la distance ($D = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$), soit en faisant $4-0=4$ et $3-0=3$, mettant ensuite chaque résultat au carré avant de les additionner. Prendre la racine carrée de cette somme lui permet d'obtenir une distance de 5 unités.

Stratégie B : Un autre élève explique qu'il est possible de tracer un triangle, puis d'utiliser la relation de Pythagore. Pour trouver la valeur des cathètes du triangle, il compte le nombre de « carrés » d'un point à l'autre (soit 3 et 4, que l'enseignant indique sur le dessin). Il dit ensuite chercher l'hypoténuse en élevant 3 et 4 au carré, en additionnant les carrés, puis en trouvant la racine carrée de la somme ainsi obtenue (figure 2).

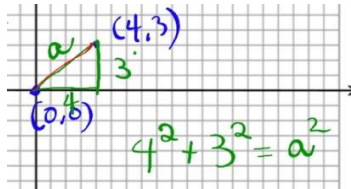


Figure 2 : Le triangle tracé pour rejoindre les deux points

Stratégie C : Une élève explique qu'il est possible de compter les points entre (0,0) et (4,3). Au tableau, elle trace en rouge un segment entre (0,0) et (4,3) sur le triangle précédent (figure 3). Partant de (0,0), elle compte alors le nombre de « points » de croisement parcourus sur ce segment rouge jusqu'à (4,3), soit en quelques sortes le nombre de diagonales de carrés-unités. Elle s'arrête toutefois et affirme que le segment en rouge ne passe pas exactement sur toutes les diagonales des carrés-unités et que, par conséquent, le comptage est difficile à réaliser.

¹³ L'enseignant dans ce cas-ci était un membre de l'équipe de recherche.

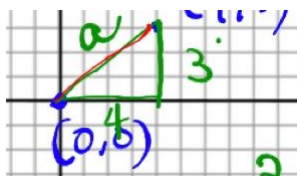


Figure 3 : Ligne rouge tracée sur le triangle

Pour l'aider à expliquer sa stratégie, même si elle a été infructueuse, l'enseignant trace plus bas sur le tableau un segment qui passe par deux autres points fictifs, mais exactement par toutes les diagonales des carrés-unités. De cette façon, le nombre de diagonales franchies par le segment, ici 4, peut être compté directement (figure 4).

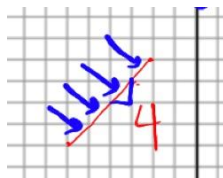


Figure 4 : Segment de droite croisant toutes les diagonales des carrés-unités

L'enseignant demande alors si la longueur de la diagonale du carré-unité est la même que celle du côté de ce même carré, auparavant utilisé pour déterminer la longueur de la cathète du triangle (en traçant au tableau un carré-unité traversé d'une diagonale $\square$).

Une élève affirme que les deux longueurs ne sont pas les mêmes, car la diagonale d'un carré n'est pas de la même longueur que son côté.

Un élève dit qu'il est certain que ces deux longueurs sont différentes, car l'hypoténuse est toujours le plus grand côté d'un triangle.

Une autre élève explique que la diagonale est plus grande, car elle est en face de l'angle le plus grand du triangle.

Relativement à cette dernière affirmation, l'enseignant demande aux élèves si c'est toujours le cas, soit que le côté le plus grand dans un triangle se situe en face de l'angle le plus grand (en dessinant un triangle rectangle quelconque au tableau $\triangle$).

L'élève précédente, pointant ce dessin, affirme que l'angle faisant face au grand côté est justement plus grand.

Une autre élève explique que, dans un triangle, plus l'angle est grand plus la longueur opposée est grande. Pointant le dessin, elle affirme que si le côté (hypoténuse) avait été plus long, il aurait donné un plus grand angle. Elle ajoute que, puisque la somme des angles d'un triangle donne 180° , alors l'angle droit est toujours l'angle le plus grand du triangle (parce qu'il ne reste que 90° à partager entre les deux autres angles).

L'enseignant reprend ces derniers propos en soulignant que cela suppose que, dans un triangle, le côté qui fait face au plus grand angle est le plus grand du triangle. Reprenant le dessin du triangle rectangle, il fait varier l'angle droit vers un angle obtus et prolonge le côté associé, montrant que ce côté devient plus long (). Il transforme ensuite le même angle en un angle aigu pour voir si le côté associé à cet angle devient plus court (figure 5).

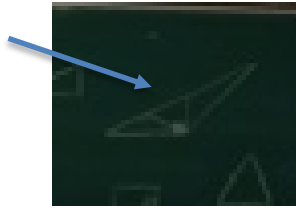


Figure 5 : Variation de l'angle et son effet sur le côté « hypoténuse » du triangle

L'enseignant demande alors aux élèves si, avec cet angle aigu, leur « théorie » du côté opposé à l'angle est toujours valide. Plusieurs élèves font alors référence aux triangles isocèles et équilatéraux.

Un élève dit que tout fonctionne pour le triangle isocèle, avec deux côtés égaux face à deux angles égaux.

Un autre élève souligne que c'est aussi le cas pour le triangle équilatéral, car « c'est partout pareil » : mêmes angles et mêmes longueurs de côtés.

L'enseignant revient par la suite sur la question des diagonales des carrés-unités et la stratégie voulant qu'on puisse trouver la distance en les comptant. Pour faire suite aux explications des élèves voulant que la diagonale du carré est plus grande que le côté du même carré, il souligne que dans cette stratégie il suffit de compter les diagonales, c'est-à-dire le nombre de diagonales franchies par le segment d'un point à l'autre. Il ajoute que ceci représente une mesure possible, qui donnerait 4 diagonales dans l'exemple de la figure 4. Il écrit alors au tableau qu'il est possible d'exprimer la distance entre les deux points par la valeur de 4 diagonales ou celle de 5 côtés de carrés-unités, ce qui donne deux mesures différentes pour la même distance¹⁴.

Un élève ajoute que si on connaît la valeur en unités de la diagonale du carré, on peut trouver le nombre de carrés-unités pour ce segment en le multipliant par ce « facteur ».

¹⁴ À noter la confusion chez l'enseignant à propos de l'exemple donnant 4 diagonales, qui n'est pas celui de la distance entre (0,0) et (4,3).

L'enseignant écrit donc 1,2 comme valeur fictive de cette diagonale, en insistant sur le fait que chacune des deux mesures obtenues est acceptable, mais qu'elles n'auraient tout simplement pas les mêmes unités (carré-unité ou diagonale-unité).

Stratégie D : Un élève propose alors une autre solution en faisant appel à la loi des sinus, affirmant que l'angle du triangle est de 45° . L'enseignant demande alors à cet élève comment ce dernier sait que l'angle est de 45° . Comme celui-ci ne peut pas répondre, certains élèves acceptent l'affirmation alors que d'autres expriment une réticence. Face aux divergences d'opinion entre les élèves, l'enseignant leur demande de prendre quelques minutes, seuls ou en équipe et avec leur matériel scolaire au besoin, pour explorer la question à savoir si l'angle du triangle est de 45° ou non, et d'élaborer un argument permettant de convaincre les autres élèves. Après cinq à six minutes de travail, l'enseignant demande aux élèves de reprendre leurs places et de faire part de leurs trouvailles à la classe.

Une élève explique que sur sa feuille aide-mémoire, donnée pour les aider aux examens, il y a un triangle rectangle isocèle qui possède des angles de 45° . Toutefois, avec le triangle de 4 et 3 unités de côté, il n'est pas possible d'affirmer directement que l'angle est de 45° , car ce n'est pas un triangle isocèle étant donné que les côtés ne sont pas égaux.

L'enseignant mentionne qu'il s'agit d'une sorte de raisonnement inversé : puisque le triangle rectangle isocèle de la feuille aide-mémoire a des angles de 45° et que le triangle en question n'est pas un triangle isocèle rectangle, alors il n'est pas possible d'affirmer directement que son angle est de 45° .

Une autre élève s'avance au tableau et à partir du triangle formé des points (0,0) et (4,3) complète un rectangle ( , figure 6). Elle explique que l'hypoténuse est la diagonale de ce rectangle, qui le coupe en deux et donc coupe aussi l'angle de 90° en deux, donnant un angle de 45° .

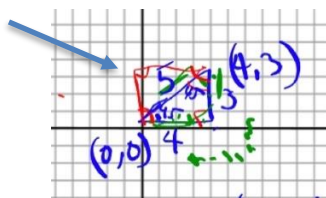


Figure 6 : Rectangle, en rouge, complété à partir du triangle

L'enseignant reprend ici l'argument de l'élève pour la classe, à savoir que puisque la diagonale coupe le rectangle en deux parties égales, elle coupe aussi l'angle de 90° en deux parties égales.

Une autre élève affirme son désaccord et dessine au tableau un rectangle avec une diagonale en disant que bien qu'elle divise le rectangle en deux rien n'assure que l'angle soit lui aussi divisé en deux parties égales (figure 7).

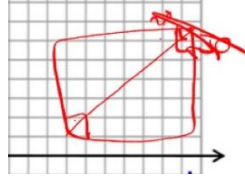


Figure 7 : Rectangle dessiné en réponse à l'affirmation selon laquelle l'angle de 90° est coupé en deux parties égales

L'enseignant reformule le désaccord de l'élève, expliquant qu'avec son exemple, qui fait ici office de contre-exemple, elle avance que même si la diagonale coupe le rectangle en deux parties égales, les angles eux ne sont pas nécessairement divisés en deux parties égales.

Une autre élève complète cette idée en ajoutant que puisque les côtés du triangle ne sont pas égaux (soit de 3 et de 4), la diagonale ne coupe pas l'angle de 90° en deux angles de 45° .

L'enseignant reformule l'affirmation de l'élève en disant qu'étant donné que les côtés du triangle ne sont pas égaux, les angles ne seront pas nécessairement égaux non plus, compte tenu de la théorie précédente, acceptée par tous, selon laquelle le plus grand côté du triangle fait face au plus grand angle du même triangle. Ici, un côté plus grand ferait face à un angle plus grand.

L'élève ayant fait référence à sa feuille aide-mémoire affirme qu'il leur arrive tous dans un examen de voir des triangles rectangles qui n'ont pas d'angles de 45° , par exemple des angles de 32° et 58° . Elle trace alors au tableau un exemple de ce triangle, qu'elle complète pour former un rectangle (figure 8), expliquant que la diagonale coupe le rectangle en deux, mais sans que les angles obtenus soient de 45° .

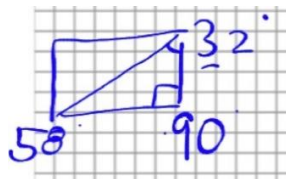


Figure 8 : Triangle contre-exemple avec angles de 32 et 58 degrés

L'enseignant affirme alors que l'élève offre ici un contre-exemple, avec un type de triangle rectangle qu'ils rencontrent fréquemment et qui n'a pas deux angles de 45° , faisant en sorte que les angles du triangle précédent ne sont pas nécessairement de 45° .

Un élève propose ensuite d'appliquer la loi des sinus avec les données actuelles du triangle, soit $\sin 90^\circ/5 = \sin ?/4$ obtenant ainsi un angle de $58,1^\circ$ [résultat qui sera corrigé à $53,1^\circ$ et $36,9^\circ$ par la suite].

Après la formulation de toutes ces idées, l'enseignant demande aux élèves comment ils se positionnent concernant l'angle de 45° .

Un des élèves ayant proposé la stratégie de la loi des sinus se rend alors au tableau et explique que, du fond de la classe, visuellement et sans mesures d'angles, l'hypoténuse du triangle semble passer directement par les points des diagonales (et couper les carrés-unités en deux), donnant l'impression de former des angles de 45° . Il ajoute que, toutefois, lorsque rendu au tableau, il devient clair que ce n'est pas le cas.

Maintenant convaincus que l'angle n'est pas de 45° , les élèves expriment leur désaccord avec cette dernière affirmation. L'enseignant ré-explique la position de l'élève en affirmant que ce dernier fait un certain *mea culpa* pour avoir insisté sur l'angle de 45° et que c'était uniquement une erreur visuelle. Les élèves demeurent toutefois en désaccord.

Un élève reprend et complète ensuite un argument précédent sur les mesures des côtés du triangle, à savoir que puisque les trois côtés du triangle sont différents, leurs angles associés seront aussi différents, reprenant ainsi la théorie du plus grand côté faisant face au plus grand angle, et donc que des côtés différents entraînent des angles différents.

En vue de conclure, l'enseignant souligne qu'un élève a préalablement proposé dans son cahier de former un carré pour évaluer la question de l'angle de 45° . Cet élève, trop timide pour s'exprimer devant toute la classe, demande au chercheur-enseignant d'expliquer son raisonnement aux autres. Ce dernier dessine alors un triangle de 3, 4 et 5 unités de côté et prolonge la cathète de 3 unités vers une de 4 unités pour former un carré de 4 unités de côté. Reprenant les propos de l'élève et reliant ce dessin au carré-unité utilisé auparavant pour comparer la mesure de la diagonale à celle du côté du carré, l'enseignant fait valoir que ce même dessin est présent dans le carré de 4 unités de côté nouvellement dessiné. Par conséquent, si les deux angles sont de 45° dans le carré-unité initial, alors ils le sont aussi dans le carré de 4 unités de côté, donnant un triangle rectangle avec deux cathètes de 4 unités et deux angles de 45° : montrant par le fait même qu'avec le triangle de 4 et 3 unités de côté il n'est pas possible d'obtenir la même chose et que les angles sont nécessairement différents. L'enseignant trace ensuite des arcs de cercles pour marquer les angles (un en rouge pour le triangle de mesures 4 et 3 unités et un en vert pour le triangle de 4 et 4 unités; figure 9).

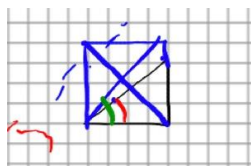


Figure 9 : Comparaison des triangles à partir du carré

Après avoir entendu ces divers arguments, les élèves se disent d'accord avec le fait que l'angle n'est pas de 45° . Les stratégies pour résoudre le problème initial ayant toutes été explorées, la séance se continue avec la résolution d'un autre problème.