Analyse en théorie des situations didactiques d’une ingénierie visant une première approche de la notion de limite finie d’une suite

Patrick GIBEL
Université de Bordeaux
Lab-E3D – Laboratoire épistémologies et didactiques des disciplines

Résumé : Cet article a pour finalité d’étudier, en théorie des situations didactiques (TSD), la pertinence d’une ingénierie didactique visant à faire découvrir aux élèves de première scientifique la notion de limite finie d’une suite réelle. Les effets de cette ingénierie – comportant une dimension recherche – sur les apprentissages des élèves seront étudiés grâce à une analyse spécifique des raisonnements produits par les élèves et par l’enseignant. Le modèle d’analyse des raisonnements, élaboré à partir de la théorie des situations didactiques de Brousseau et de la sémiotique de Peirce, offre la possibilité d’analyser les raisonnements élaborés en situations d'action, de formulation et de validation.

Mots clés : Raisonnement, formulation, preuve, analyse, suite, limite, TICE

A Theory of Didactic Situations analysis of didactic engineering aimed at introducing the finite limit of a sequence

Abstract: This paper adopts a Theory of Didactic Situations (TSD) standpoint to examine the relevance of didactic engineering aimed at helping science students in high school to discover the concept of the finite limit of a real sequence. The outcomes of this engineering – including a research dimension – on student learning will be studied through a specific analysis of reasoning produced by the students and by the teacher. The reasoning analysis model, developed from Brousseau's Theory of Didactical Situations and Peirce’s Semiotics, offers the possibility of analyzing the reasoning processes developed in situations of action, formulation and validation.

Keywords: Reasoning processes, situation of formulation, proof, calculus, sequence, limit, ICTs

Revue québécoise de didactique des mathématiques, 2020, *vol 1*, p. 153-189.
https://doi.org/10.71403/kft8yh29

Introduction

La construction du concept de limite est un élément important dans l'enseignement de l'analyse dans l'enseignement supérieur à l'université et en classes préparatoires aux grandes écoles. De nombreux chercheurs se sont intéressés à l'enseignement du concept de limite d'une suite ou d'une fonction réelle; citons parmi eux Bloch et Gibel (2011), Chorlay (2019), Ghedamsi (2008), Grenier-Boley et al. (2015), Job (2011) et Lecorre (2015). De plus, l'étude d'ingénieries didactiques en mathématiques et en physique, au lycée et à l'entrée à l'université, concernant le concept de limites de suites et de fonctions numériques, a fait l'objet en France d'une publication (Bloch et al., 2017), par la commission inter-IREM Université (Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques).

Dans cet article, nous souhaitons analyser l'intérêt et la pertinence d'une situation d'enseignement-apprentissage élaborée et mise en œuvre en France afin de permettre aux élèves de première scientifique (élèves âgés de 16 à 17 ans) d'effectuer une première approche de la notion de limite finie d'une suite réelle. Il s'agit d'une approche dont l'originalité repose principalement sur le fait qu'elle permet l'articulation de différents cadres : géométrique, algébrique et numérique.

Nous étudierons l'appropriation de la notion de limite finie en nous attachant à analyser les connaissances et les savoirs mobilisés par les élèves, mais également leurs capacités à élaborer des raisonnements en vue d'établir la croissance et la majoration de la suite, ainsi que leur capacité à s'approprier et à utiliser la notion de « seuil ».

La première partie de cet article présente la séquence étudiée et notre questionnement de recherche. La deuxième partie expose la théorie qui supporte notre recherche et vise à définir les caractéristiques des « raisonnements » en classe de mathématiques (Gibel, 2004, 2018). Dans la troisième partie, nous expliciterons la méthodologie utilisée en présentant d'une part l'ingénierie produite et d'autre part le modèle d'analyse des raisonnements (Bloch et Gibel, 2011; Gibel, 2018). Ce dernier constitue l'élément central de notre méthodologie. Cet outil d'analyse nous permettra d'effectuer une analyse a priori des raisonnements susceptibles d'être élaborés dans une situation à dimension adidactique. Dans la quatrième partie, nous réaliserons, par la mise en œuvre du modèle, une analyse a posteriori détaillée de plusieurs épisodes extraits des situations de formulation et de validation en vue d'étudier précisément les différents raisonnements produits par les élèves et par l'enseignant. Cette analyse, qui précise les formes et les fonctions des raisonnements, valides et erronés, nous permettra de déterminer l'adéquation de cette séquence avec l'objectif visé : faire vivre aux élèves une séquence permettant d'étudier expérimentalement le comportement asymptotique d'une suite ayant une limite finie. Nous terminerons cette partie par une présentation synthétique des principaux résultats de l'étude et nous ouvrirons sur une discussion relative à l'apprentissage de la notion de limite en classe de première scientifique.

1. Présentation de la séquence étudiée

Le programme de la classe de première scientifique (Bulletin officiel de l'éducation nationale, 2010) mentionne que l'étude de phénomènes discrets fournit un moyen d'introduire les suites et leur génération en s'appuyant sur des registres différents et en faisant appel à des logiciels. Le texte précise que le tableur, les logiciels de géométrie dynamique et de calcul sont des outils adaptés à l'étude des suites, en particulier pour l'approche expérimentale de la notion de limite. D'un point de vue didactique, la production et l'analyse par les élèves d'un ensemble « fini » de valeurs approchées des termes d'une suite, obtenues pas l'usage du calcul instrumenté, ne permet pas de comprendre la notion de limite finie d'une suite.

Nous tenons à souligner que le principal intérêt de la séquence présentée ici réside dans le fait que les élèves abordent la notion de suite numérique, puis étudient son comportement asymptotique en travaillant dans trois cadres distincts et complémentaires : les cadres géométrique, algébrique et numérique.

La suite, objet de la séquence, a pour terme général la somme partielle des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme 1. Les élèves vont commencer la séquence par construire, sur papier millimétré, une succession de 4 carrés. Le premier carré a pour côté 1 et est déjà construit sur le graphique, le deuxième carré est tel que la mesure de ses côtés est égal à $\frac{3}{4}$ de la mesure du carré précédent et qu'il est juxtaposé au précédent conformément à la figure 1 ci-dessous. Pour tracer les trois carrés suivants, les élèves vont devoir itérer ce processus de construction.

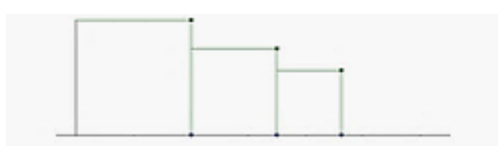


Figure 1 : Processus de construction

Grâce à la construction réalisée, les élèves pourront mettre en relation l'écriture algébrique du n-ième terme ($1 \leq n \leq 5$) de la suite étudiée avec la représentation graphique en faisant référence au n-ième carré construit. Ainsi les élèves vont pouvoir effectuer des liens entre les cadres algébrique et géométrique afin de calculer les premiers termes de la suite et ainsi d'en contrôler la validité.

Les élèves vont ensuite être conduits à établir la majoration de la suite en produisant une preuve mathématique, dont l'élaboration repose sur la production d'énoncés relevant principalement des cadres algébrique et géométrique. La construction géométrique des premiers carrés permet également aux élèves de prendre conscience de la croissance de la suite.

Les élèves ayant établi la croissance et la majoration de la suite ne sont cependant pas en mesure d'en déduire – à ce niveau d'enseignement – sa convergence vers une limite finie. Aussi, c'est le recours à des ressources numériques, qui permettra aux élèves d'effectuer une étude expérimentale du comportement asymptotique de la suite numérique.

Cette étude permet aussi aux élèves de découvrir la notion de seuil en référence à une suite convergente ayant pour limite l : pour un seuil s fixé, il existe un rang à partir duquel l'ensemble des termes de la suite appartiennent à l'intervalle $[s\,;l]$ où l désigne la limite de la suite. Le cadre géométrique joue un rôle déterminant : il permet de mettre en évidence le fait que l'ensemble des valeurs appartiennent à cet intervalle et approchent d'aussi près que l'on veut la valeur de la limite l.

À ce niveau d'enseignement, aucune preuve mathématique formelle de la convergence de la suite ne sera produite par les élèves conformément aux programmes. Pour cette même raison, la formalisation de la définition ne sera pas enseignée aux élèves. Cette expérimentation constitue ainsi une première approche de la notion de limite finie d'une suite.

L'ingénierie expérimentée a été construite en vue de confronter les élèves à des situations à dimension adidactique (Bloch, 1999) assimilables à des situations d'action, de formulation, de validation et de décision au sens de Balacheff (1987). Ainsi, les élèves vont devoir, en situation : décider de connaissances à mobiliser, contrôler leurs actions sur les objets, conjecturer, valider ou infirmer leur(s) conjecture(s) par l'élaboration de preuves, mettre en débat leur(s) formulation(s), déduire des informations à partir des résultats obtenus par le calcul instrumenté. Par conséquent, cette ingénierie vise à offrir aux élèves la possibilité d'élaborer de nombreux raisonnements par confrontation aux différents milieux et recouvrant les fonctions citées précédemment.

Afin de déterminer les effets de cette ingénierie sur le développement des connaissances des élèves de première scientifique et leur représentation de la limite finie d'une suite, nous effectuerons une analyse détaillée des raisonnements produits lors des phases d'action, de formulation, de validation et de décision.

Nous chercherons à répondre à la question : en quoi l'étude détaillée des raisonnements des élèves, confrontés tout au long de la séquence à des situations à dimension adidactique, nous fournit-elle des indications précises sur les effets de cette ingénierie sur la construction par les élèves de la notion de limite finie d'une suite?

2. La théorie des situations didactiques : un cadre théorique pour l'analyse des situations d'enseignement-apprentissage et l'étude des raisonnements produits

2.1 La détermination d'un raisonnement produit par un sujet : la notion de « situation »

Comme indiqué dans Gibel (2004), en classe de mathématiques, le terme « raisonnement » tend à couvrir un champ beaucoup plus vaste que celui des raisonnements formels, logiques ou mathématiques. C'est pour cette raison que nous avons choisi comme définition initiale celle proposée par Oléron (1977) : « Un raisonnement est un enchaînement, une combinaison ou une confrontation d'énoncés ou de représentations respectant des contraintes susceptibles d'être explicitées, et conduit en fonction d'un but » (p. 10).

Pour affirmer que tel observable est l'indice d'un raisonnement dont les éléments sont parfois en partie implicites, il est nécessaire de dépasser la définition formelle, pour examiner les conditions dans lesquelles le « raisonnement supposé » peut être considéré, par le chercheur, comme un « raisonnement effectif ». Dans le cadre d'une recherche sur l'usage et le traitement des raisonnements des élèves par les enseignants (Brousseau et Gibel, 2005), nous avons mis en évidence que, souvent, dans le contexte d'une situation didactique, le professeur relève, dans les formulations des élèves, des indices et les interprète davantage en fonction de leur utilité pour le déroulement de la leçon que du point de vue du projet initial de l'élève qui en est l'auteur. Par conséquent pour pouvoir déterminer et analyser objectivement les raisonnements produits par les élèves, le chercheur doit donc suivre une autre voie. Il convient qu'il montre que tel raisonnement complet, dont il ne perçoit parfois qu'une partie ou que des indices, est bien celui qu'il convient d'attribuer à son auteur.

Le chercheur doit donc montrer que la production du raisonnement prêté au sujet est motivée par une intention de la part de ce dernier, qu'elle répond à un but, qu'elle lui apporte un avantage dans les conditions qu'il perçoit, et avec les connaissances dont il dispose.

Ainsi, comme nous l'avons explicité (Brousseau et Gibel, 2005),

> Parmi toutes les conditions qui accompagnent la production d'un supposé raisonnement, quelques-unes seulement – le moins possible – peuvent servir à le déterminer et à le justifier. Ces conditions ne sont pas quelconques. Elles forment un ensemble cohérent qui est appelé « situation » dans la TSD. La situation est une partie seulement du contexte, ou de l'environnement de l'action de l'élève ou du

> professeur et elle comprend, mais pas seulement, une sorte de question à laquelle le raisonnement de l'élève est une réponse. Elle n'est réduite ni à l'action du sujet ni à la connaissance qui la motive, mais elle les met en relation rationnelle. Une situation peut expliquer pourquoi un raisonnement faux a été produit par d'autres causes qu'une erreur ou une insuffisance du sujet. (p. 16)

Ce point de vue est un peu différent de celui qui prévaut légitimement chez les professeurs où les seuls raisonnements vraiment utilisables sont les raisonnements entièrement corrects d'un point de vue syntaxique. Un raisonnement faux ou incomplet n'est qu'assez exceptionnellement un objet d'étude. La théorie des situations didactiques (TSD) a pour objet l'étude et la modélisation des situations ainsi définies. Elle est un instrument pour rechercher les explications minimales des faits observés, qui sont compatibles avec les faits connus.

2.2 Les raisonnements effectifs

Les raisonnements que nous étudierons dans le cadre de l'apprentissage des mathématiques sont essentiellement modélisables par des inférences. Mais cette caractérisation doit être complétée, car nous voulons pouvoir distinguer les raisonnements effectifs des citations et intégrer des raisonnements qui se manifestent par des activités non verbales aussi bien que par des assertions, ce qui nous amène à formuler la définition suivante (Brousseau et Gibel, 2005) :

Un « raisonnement » est donc une relation R entre deux éléments A et B tels que :

- A désigne une condition ou un fait observé, contingent;
- B est une conséquence, une décision ou un fait prévu;
- R est une relation, une règle, plus généralement une connaissance empruntée à un répertoire considéré comme connu, accepté. La relation R conduit l'actant, dans la circonstance A, à prendre la décision B ou à prévoir le fait B ou à énoncer que le fait B est vrai.

Un « raisonnement effectif » comprend, de plus, un agent E, élève ou professeur, qui utilise la relation R ainsi qu'un projet déterminé par une situation dont la réalisation exige l'usage de cette relation.

On peut dire que pour réaliser le projet déterminé par la situation, le sujet utilise la relation R qui permet d'inférer B de la condition A. Ce projet peut être convenu et explicité par l'agent ou il peut lui être prêté par le chercheur à partir d'indices.

En conclusion du paragraphe précédent, un raisonnement est identifié par sa fonction dans une situation, par le rôle qu'il y joue. Cependant, un raisonnement peut avoir des fonctions différentes, par exemple décider d'une action à effectuer, informer, convaincre, expliquer. Elles sont différenciées par des modèles de situations mathématiques (situation d'action, situation de formulation, situation de validation) généraux, mais différents. Pour une présentation plus détaillée, nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Brousseau (1998).

2.3 L'identification des raisonnements

Afin de pouvoir étudier les moyens utilisés par l'enseignant pour gérer les raisonnements apparaissant dans les productions des élèves, il convient de définir ce qui, pour le chercheur, est assimilable à un « raisonnement », pour cela il faut (Brousseau et Gibel, 2005) :

- identifier des observables (textes, gestes, paroles, dessins, etc.) produits par un élève, par plusieurs élèves en interaction ou par l'enseignant;
- relier ces observables par une relation « rationnelle » telle que cette relation s'exprime dans le langage du chercheur, différent *a priori* de celui des protagonistes;
- identifier un actant : professeur, élève ou groupe d'élèves à qui est attribué l'établissement de la relation dans le cadre d'un projet qui lui est prêté;
- s'il s'agit d'une hypothèse, établir qu'elle est valide, en montrant, éventuellement à l'aide d'autres indices, qu'elle est la moins improbable des explications.

Il est à noter que parmi les raisonnements détectés par le chercheur, certains d'entre eux peuvent être attribués à un ou à plusieurs des protagonistes, bien que ces derniers ne les aient pas nécessairement identifiés comme tels.

2.4 La théorie des situations didactiques comme fondement de notre modèle

L'analyse fine des raisonnements produits en situation de validation ne peut se restreindre à une analyse en termes de calcul propositionnel basée sur la logique dialogique de Lorenzen, comme l'indique Durand-Guerrier (2007). Cette didacticienne met en évidence que le modèle de Lorenzen ne suffit pas pour comprendre et analyser l'activité mathématique en situation de validation et elle fait l'hypothèse que ce modèle :

> contribue à donner de l'activité mathématique une image déformée, en exacerbant le travail sur les énoncés au détriment du travail sur les objets, leurs propriétés et les relations mutuelles qu'ils entretiennent. (Durand-Guerrier, 2007, p. 23)

Barrier (2008), s'appuyant sur cette précédente recherche, met à son tour en évidence la limite du modèle de Lorenzen pour l'analyse de situation de validation explicite et justifie ainsi la nécessité de proposer un modèle qui tienne compte de la dimension sémantique des raisonnements produits par les élèves.

Cette nécessité de tenir compte, lors de l'analyse des raisonnements, de la dimension sémantique a contribué à conforter et justifier notre décision de prendre la TSD comme fondement de notre modèle. En effet cette dernière permet d’analyser les actions du sujet sur les différents milieux, permettant ainsi de rendre compte de la dimension sémantique et de la dimension syntaxique des raisonnements.

Un postulat de notre travail est que la TSD fournit un cadre privilégié pour cette étude, et notamment que l'analyse des fonctions du raisonnement dans les niveaux de milieux permet une catégorisation des raisonnements. Ce cadre doit cependant être nécessairement complété par des outils d’analyse locale, et par une analyse des fonctions des raisonnements (Bloch et Gibel, 2011) et des signes, formels et langagiers, qui le soutiennent. Pour cette dernière fonction, nous utilisons les outils d’analyse issus de la sémiotique peircienne que nous allons nous attacher à justifier et à caractériser dans le paragraphe suivant.

2.5 Dimension sémiotique de l’analyse des raisonnements

Les raisonnements apparaissant en situation de classe peuvent se traduire sous des formes très diverses : éléments langagiers, calculatoires, scripturaux, graphiques que nous nous devons d’interpréter en référence à différents registres de représentation (Duval, 2006). Par conséquent l’analyse sémiotique constitue l’une des dimensions de notre modèle, complétant naturellement celles précédemment exposées : d’une part la fonction des raisonnements, d’autre part, le niveau de milieu correspondant, autrement dit les conditions dans lesquelles le raisonnement a été élaboré. Les représentations sémiotiques ne sont mobilisées et développées que dans la mesure où elles peuvent être transformées en d’autres représentations sémiotiques comme le souligne Duval (2006) : « Ce sont ces transformations sémiotiques qui sont importantes et non les relations fondamentales explicitées dans les différentes théories sémiotiques » (p. 49).

La sémiotique de Peirce est particulièrement appropriée à notre projet. En effet, elle nous permettra d’étudier plus précisément l’évolution et les transformations des signes utilisés par les différents acteurs, en lien avec les différentes situations d'action, de formulation et de validation.

Everaert-Desmedt (2011) formule, de façon claire et concise, trois caractéristiques de la sémiotique de Pierce en montrant que cette dernière est à la fois générale, triadique et pragmatique.

Selon Peirce (1995), trois catégories sont nécessaires pour rendre compte de l’expérience humaine. Elles sont désignées comme « priméité », « secondéité » et « tiercéité ». La priméité est de l’ordre du possible : les signes peuvent être vus comme des « icônes ». La secondéité peut être assimilée à la catégorie de l’expérience, du fait de l’action-réaction, les signes en sont des « indices ». La tiercéité est le régime de la règle et de la loi, de la médiation et les signes apparaissent avec un statut de « symbole-argument ».

Dans notre usage de la sémiotique peircienne, nous utiliserons les trois désignations : icône, indice et symbole-argument. Par exemple dans notre étude, lorsque les élèves doivent déterminer une expression explicite du terme général de la suite, une icône ou interprétation iconique est de l'ordre d'une intuition formulée par un élève à partir du cadre géométrique: « l'expression algébrique de a_n peut être obtenue en effectuant la somme des mesures des côtés des n premiers carrés ». Cette déclaration peut être assimilée à une « icône », sa formulation traduit et manifeste une intuition du sujet confronté à la formulation explicite du terme général de la suite.

Un « indice » est de l'ordre d'une proposition; c'est par exemple l'écriture algébrique du terme général de la suite, objet de notre étude, formulée par un élève comme la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme 1 :

$$a_n = 1 + \frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2 + \cdots + (\frac{3}{4})^{n-1}$$

Un « symbole-argument » est de l'ordre d'une preuve mathématique permettant par exemple de valider ou d'invalider l'écriture algébrique explicite du terme général a_n, en fonction de *n*, qu'il s'agisse d'une preuve de nature sémantique ou syntaxique comme c'est le cas ici :

$$a_n = \frac{1 - (\frac{3}{4})^n}{1 - \frac{3}{4}} = 4\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$$

Sa validité repose sur l'usage adéquat de la formule générale correspondant à la somme des *N* premiers termes d'une suite géométrique et enseignée précédemment aux élèves :

$$\sum_{k=0}^{N} q^k = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

On note ici, au passage, la pertinence de cette ingénierie qui, en favorisant les changements de cadres, permet aux élèves de construire des raisonnements algébriques et d'en contrôler la validité dans le cadre géométrique. Cette forme de raisonnement permet ainsi d'articuler les dimensions sémantique et syntaxique.

Comme le souligne Everaert-Desmedt (1990), l'interprétation d'un signe par un interprétant est étroitement liée à l'expérience, formée par d'autres signes toujours antécédents. Par conséquent, l'analyse sémiotique nécessite de prendre en compte les signes en lien avec les connaissances et les savoirs antérieurs, c'est la raison pour laquelle nous allons définir, dans le paragraphe suivant, les notions de « répertoire didactique » et de « répertoire de représentation ».

2.6 Répertoire didactique et répertoire de représentation

L'ensemble des moyens, connaissances et savoirs, que le professeur met en œuvre, et ceux qu'il pense pouvoir attendre des élèves, par suite de son enseignement lors des phases de validation et d'institutionnalisation, constitue le « répertoire didactique » de la classe défini dans Gibel (2004).

Les situations choisies par l'enseignant, en vue de permettre l'apprentissage d'une connaissance, déterminent la capacité de l'élève à organiser et élaborer, en confrontation au(x) milieu(x) de la situation, ses propres procédures de résolution et, par conséquent, jouent un rôle essentiel dans l'élaboration du répertoire didactique de la classe. La fonction principale du répertoire didactique de la classe est de faciliter la communication dans la classe, en donnant à l'élève les moyens de produire ou de retrouver, et donc de mettre en œuvre, au moment voulu, une suite d'actions, une formulation ou une justification (Gibel, 2004). Le répertoire didactique de la classe est donc identifiable à la part du répertoire mathématique que l'enseignant a choisi d'expliciter, notamment pour la validation et lors de l'institutionnalisation.

Notre méthodologie vise à identifier et à interpréter les observables, assimilables à des signes, qu'il s'agisse d'icônes, d'indice ou de symbole-argument, afin de déterminer les connaissances du répertoire didactique de l'élève utilisées pour produire le raisonnement, valide ou erroné, comme une réponse à la situation.

Le répertoire de représentation de la classe et de chaque élève est une composante du répertoire didactique. Il est constitué de signes, schémas, symboles, figures; nous y incluons également les outils et leur(s) usage(s). Il convient également d'y adjoindre les éléments langagiers (énoncés oraux ou écrits), permettant de nommer les objets rencontrés, de formuler les propriétés et les résultats.

Le répertoire de représentation comporte deux composantes liées à la chronogenèse pour la première, et au milieu de la situation pour la seconde :

- la composante liée au répertoire antérieur, c'est-à-dire les différentes formules énoncées et les différents usages liés aux connaissances antérieures;
- une composante qui apparaît lorsque l'enseignant dévolue aux élèves une situation d'apprentissage : l'élève mobilise, par confrontation aux différents milieux, des connaissances de son répertoire didactique. Cette utilisation des connaissances lui permet de manifester et de construire de nouvelles représentations, liées à la situation, à partir des éléments de représentation dont il dispose.

3. Méthodologie de l’étude

3.1 Sujets

L’étude a été menée dans une classe de première scientifique (élèves âgés de 16 à 17 ans) d’un lycée. Cet établissement est situé dans une ville de province dans le sud-ouest de la France.

Les élèves ont accepté d’être observés et filmés durant la séquence qui s’est déroulée en avril 2016 sur deux séances consécutives de 50 minutes chacune.

L’enseignant décrit ses élèves comme étant d’un bon niveau en mathématiques et habitués à être confrontés à des situations comportant une dimension recherche nécessitant l’utilisation de TICE, qu’il s’agisse de calculatrices, de logiciels, de tableurs, etc. L’enseignant s’est porté volontaire pour participer à l’expérimentation. L’enseignant a des connaissances en didactique des mathématiques sans pour autant disposer d’une formation spécifique dans ce domaine; on peut par conséquent considérer que l’expérimentation se déroule dans une classe ordinaire.

3.2 Instrumentation

3.2.1 La séquence objet d’étude

La situation « La suite de carrés » a été proposée à des élèves d’une classe de première scientifique. On construit une « suite » de carrés juxtaposés de la manière suivante : le côté du premier carré est de longueur 1 (en référence à une unité donnée), puis chaque carré a pour mesure de côté $\frac{3}{4}$ de la mesure du côté du carré précédent (voir figure 2, page suivante).

Dans cette situation, les élèves doivent tout d’abord déterminer s’il est ou non possible de construire un « n-ième » carré, dont a_n, l’abscisse du point A_n — correspondant à la mesure OA_n, où O désigne l’origine du repère — est strictement supérieure à 4.

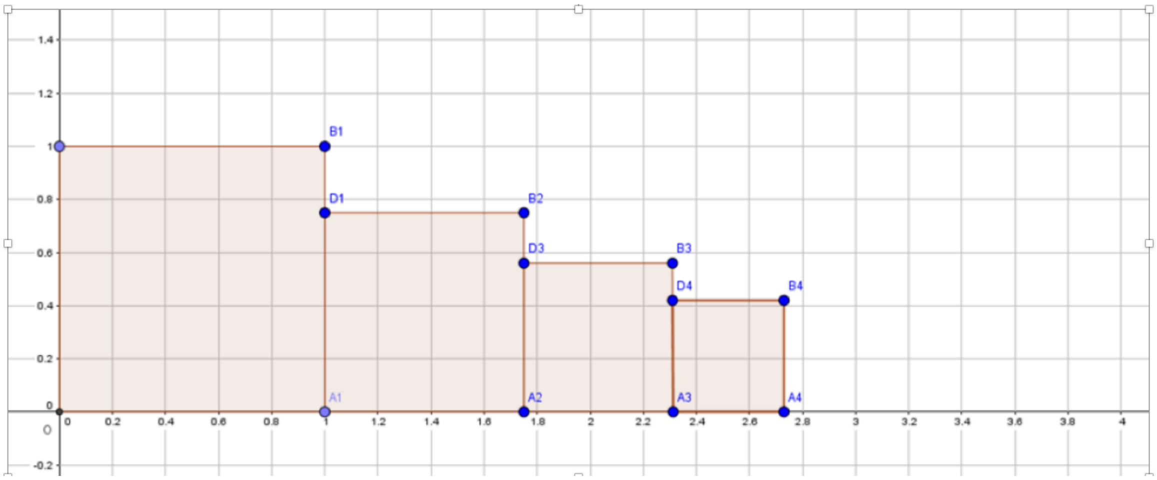


Figure 2 : Les quatre premiers carrés obtenus par le procédé de construction

L'objectif de la séquence est de permettre aux élèves de se confronter à une situation leur permettant une première approche de la notion de limite finie d'une suite réelle. Nous souhaitons préciser que quelques semaines auparavant, les élèves ont été confrontés à l'étude expérimentale d'une suite croissante non majorée, autrement dit une suite dont la limite est infinie. Cette suite numérique résultait de la modélisation d'un phénomène de propagation d'une bactérie, dont le nombre doublait chaque heure. Les élèves ont ainsi modélisé ce phénomène de propagation par la formulation d'une suite géométrique de raison 2 dont le premier terme correspondait au nombre initial de bactéries. Ils ont constaté expérimentalement, par le recours au calcul instrumenté et à la programmation, que pour tout entier M fixé, il existe un rang n – correspondant à un nombre d'heures à partir duquel toutes les valeurs approchées des termes de la suite sont strictement supérieures à M.

Cette situation d'apprentissage est une situation à dimension adidactique, visant à confronter les élèves à la notion de limite finie. Cette dernière est obtenue ici comme le résultat du processus de construction des carrés itéré à l'infini.

D'un point de vue mathématique, nous cherchons à déterminer dans un premier temps si la suite (a_n) est croissante et majorée, ensuite – par l'usage des TICE – si elle admet une limite finie.

En classe de première scientifique, la valeur de la limite de cette suite, associée à l'abscisse du point A_n, assimilable à une suite de sommes partielles d'une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$, ne peut s'obtenir qu'à l'issue de l'étude expérimentale de son comportement asymptotique.

L'enjeu de la situation est que les élèves puissent avoir l'idée « intuitive » du résultat de ce processus de construction de carrés itéré à l'infini. Cependant, ils ne pourront accéder seuls aux arguments mathématiques justifiant la valeur de cette limite. D'un point de vue numérique, le professeur devra permettre l'utilisation d'outils TICE, afin que les élèves élaborent des éléments de justification, acceptables à ce moment-là de la scolarité compte-tenu des programmes de la classe de première scientifique.

La situation prévoit l'introduction de la notion de limite finie, à partir de conjectures sur des grandeurs relatives à des objets géométriques : ainsi les élèves disposent d'une entrée dans le milieu matériel qui leur permet de s'appuyer sur des représentations initiales d'ordre figural. Cette « entrée » permet de faciliter la dévolution et l'appropriation du problème. Les éléments de preuve devront cependant être fournis, en partie, par le professeur dans un épisode didactique, au cours duquel l'enseignant définira la notion de seuil, car les élèves n'ont, à ce stade, pas d'outils de définition et de preuve de ce qu'est une limite finie dans le cadre de l'étude d'une suite. En ce sens, il s'agit d'une situation à dimension adidactique (Bloch, 1999; Mercier, 1995).

Cette ingénierie a été élaborée conjointement avec l'enseignant de la classe de première scientifique dans laquelle il a mis en œuvre la séquence.

L'ingénierie a été produite afin de satisfaire les conditions suivantes :

- elle permet aux élèves de se confronter à une situation permettant une première approche de la notion de limite finie d'une suite, en articulant trois cadres distincts et très complémentaires : algébrique, géométrique et numérique;
- elle favorise le développement de la pratique du raisonnement, au travers de ses différentes fonctions en situation d'action, de formulation et de validation.

3.2.2 Les données recueillies pendant la séquence observée

Lors de la mise en œuvre de la séquence, une caméra mobile nous a permis de recueillir des enregistrements vidéo Ainsi, nous avons pu filmer l'intégralité du déroulement de la séquence et prendre des photographies du tableau blanc. De plus nous avons pu effectuer des photocopies des travaux d'élèves produits durant et à l'issue de la séquence.

3.3 Déroulement et analyse a priori de la séquence

3.3.1 Principaux éléments d'analyse a priori en TSD

L'objectif de la séquence est ici relativement ambitieux. En effet, les divers moyens d'investigation doivent permettre de conjecturer que : quel que soit le nombre n de carrés construits, la mesure de la longueur OA_n (notée a_n) ne peut excéder une certaine valeur numérique (4). Il s'agira ensuite de mettre les élèves en situation de prouver, grâce notamment aux outils de géométrie analytique nouvellement acquis (vecteurs et équations de droites) que la suite est croissante et nécessairement majorée par la valeur (4).

La problématique initiale dévolue aux élèves est formulée ainsi : En répétant le processus de construction des carrés un nombre n de fois suffisant, peut-on obtenir un carré dont l'abscisse du sommet A_n dépasse 4?

L'enseignant questionnera ensuite les élèves dans l'optique d'un prolongement de l'étude comme indiqué dans l'annexe 1, rubrique « Problématique pour aller plus loin » sur la possibilité pour s appartenant à l'intervalle [1 ; 4] de construire un n-ième carré dont l'abscisse soit dans l'intervalle [s ; 4], ainsi l'ensemble des valeurs de la suite – à partir du rang n – seront comprises dans cet intervalle.

- Élément de différenciation : l'enseignant envisage d'aider, si nécessaire, certains élèves en difficulté pour expliciter a_n directement en fonction de n; il leur proposera la démarche suivante en vue d'exprimer (a_n) sous la forme d'une suite récurrente :

On note a_n l'abscisse du point A_n.

Ainsi, on a la suite numérique $a_1 = 1$, $a_2 = 1{,}75$, $a_3 = \ldots\ldots\ldots$, $a_4 = \ldots\ldots\ldots$, etc.

- Procédures de résolution attendues

1) Calculs des abscisses $a_2, \ldots, a_5$ (tableau 1)

Tableau 1 : Les valeurs des premiers termes de la suite (a_n)

Étape n =	1	2	3	4	5
Côté $n^{\text{ième}}$ carré	1	0,75			
Abscisse a_n	1	1,75			

2) Conjecture à l'aide de logiciels

On établit en s'appuyant sur la logique de construction des carrés que

$$a_{n+1} = a_n + \frac{3}{4}(a_n - a_{n-1})$$

- Conjecture à l'aide d'un tableur

En entrant la formule notée ci-dessus dans un tableur, on peut calculer les 100 premiers termes de la suite (a_n) avec une précision de 14 décimales et on observe que les termes a_n se rapprochent de la valeur 4. On constate que, à partir de $n = 82$, le tableur affiche la valeur 4 compte tenu des approximations de calcul réalisées par le tableur.

- Conjecture à l'aide d'un algorithme

Les élèves peuvent rédiger un programme en utilisant Algobox ou élaborer un code en utilisant le langage de programmation Python ou en ayant recours à la calculatrice. En procédant ainsi, ils observent de même une « stagnation » à la valeur 4, qui ne peut s'expliquer que par les limites de la puissance de calcul des outils numériques.

Les outils numériques permettent donc de conjecturer l'existence d'une valeur « limite » des valeurs des abscisses des points A_n, notées a_n, qui semble être 4.

- Démonstration de la majoration de la suite

Pour tous sommets B_n et B_{n+1} de deux carrés consécutifs, l'abscisse de B_{n+1} est celle de B_n augmentée de $\frac{3}{4}$ de la longueur A_nB_n correspondant au côté du $n^{\text{ième}}$ carré, et l'ordonnée de B_{n+1} est celle de B_n diminuée $\frac{1}{4}$ de la même longueur A_nB_n.

Pour tout entier n, le coefficient directeur de la droite (B_nB_{n+1}) est donc :

$$\frac{-\frac{1}{4}A_nB_n}{\frac{3}{4}A_nB_n} = -\frac{1}{3}$$

Toutes les droites passant par des couples de points consécutifs ont même coefficient directeur $-\frac{1}{3}$, elles sont donc parallèles entre elles. Une autre façon de le voir est que tout vecteur $\overrightarrow{B_nB_{n+1}}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}\left(\frac{3}{4}\,;\ -\frac{1}{4}\right)$.

Comme ces droites ont toujours un point en commun (deux à deux), elles sont confondues. Les points B_n sont donc alignés. La droite qui les joint a pour équation

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

Il est alors possible de démontrer que cette droite coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 4.

Or, tout point B_n a une ordonnée positive (fraction de la longueur de départ). Comme ses coordonnées vérifient l'équation de la droite, alors son abscisse a_n (qui, bien sûr, est aussi celle de A_n) vérifie

$$-\frac{1}{3}a_n + \frac{4}{3} \geq 0$$

Ce qui conduit à l'inégalité $a_n \leq 4$.

Par conséquent, quel que soit l'entier n, a_n ne peut donc pas dépasser la valeur 4.

Le caractère borné de la suite est « accessible » aux élèves de première scientifique par la mise en œuvre d'un raisonnement adéquat, de même que le fait que la suite soit croissante (par définition même de la suite). Cependant, à ce niveau de la scolarité, ils ne disposent pas du théorème leur permettant d'en déduire que la suite est convergente. Ils seront donc conduits à étudier expérimentalement la convergence de la suite en utilisant les TICE (calculatrices, tableur, programmation, etc.).

3.3.2 Déroulement envisagé

Le lecteur trouvera en annexe 3 les différentes phases du déroulement de chacune des séances.

Séance 1. Après l'exposé de la situation initiale, l'appropriation de la situation se fera par le tracé des cinq premiers carrés sur le papier quadrillé fourni par l'enseignant. Ensuite, en binôme, les élèves devront rédiger une première conjecture à propos des points B_1, B_2 et B_3. Les élèves devront valider ou invalider leur conjecture. L'enseignant effectuera une mise en commun dans le but d'établir l'alignement des points B_1, B_2 et B_3 en répertoriant les différentes méthodes utilisées (de nature scalaire ou de nature vectorielle). La séance se poursuivra par la recherche d'une conjecture générale, à propos des points $B_1, B_2, \ldots, B_N$ (où N désigne un entier quelconque fixé) que les élèves devront ensuite prouver. La mise en commun permettra d'établir une preuve mathématique de l'alignement des points.

Lors de la dernière phase, les élèves s'efforceront de produire des éléments de réponse à la problématique relative à l'existence d'une valeur « limite » de la suite (a_n). Les élèves pourront choisir de s'appuyer sur l'alignement des sommets B_n afin de montrer que la suite (a_n) est majorée. Ils pourront exprimer a_n soit directement en fonction de n (en étudiant la suite de sommes partielles associée à une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$, soit en fonction de a_{n-1} et a_{n-2} (en étudiant la suite définie par récurrence); ils pourront étudier le comportement asymptotique de l'une ou l'autre de ces suites en mettant en œuvre les outils numériques de leur choix.

Séance 2. En début de séance 2, les élèves poursuivront en binôme leur recherche en mettant en œuvre les outils numériques : calculatrice ou tableur ou programmation d'algorithme afin d'étudier le comportement de la suite : variation, majoration de la suite et notion de seuil.

La valeur limite apparaîtra et sera aussi l'occasion de souligner les « approximations » liées à l'usage des outils numériques. En effet, la convergence étant rapide, Excel comme Algobox ou Python, ou bien les calculatrices arrondissent rapidement le résultat à 4, d'où l'incohérence : on ajoute un nouveau carré, si petit soit-il, et la longueur reste identique.

La phase suivante vise à mettre en débat les éléments de réponse à la problématique. Il faudra alors revenir au tracé initial des carrés, et à l'alignement des sommets B_n, afin d'en déduire, à partir des valeurs numériques obtenues par les outils numériques l'existence et la valeur de la limite. L'enseignant introduira, à la fin de la séance 2, la notion de seuil (cf. annexe 3) durant la phase 12 et demandera aux élèves de déterminer expérimentalement pour différents seuils s donnés le rang de la suite à partir duquel les valeurs expérimentales appartiennent à l'intervalle [s ; 4].

3.4 Méthode d'analyse des données

3.4.1 Le modèle d'analyse des raisonnements

Nous avons justifié dans la partie 2 le choix de notre cadre théorique – la théorie des situations didactiques – par le fait qu'elle permet d'analyser, d'une part, les conditions dans lesquelles le raisonnement a été produit par le sujet (en identifiant le niveau de milieu correspondant à chacune des situations emboîtées), d'autre part, en prenant en compte la fonction du raisonnement. Nous avons également complété cette analyse en TSD par une analyse sémiotique, car celle-ci nous offre la possibilité d'étudier des raisonnements susceptibles d'apparaitre sous des formes très variées (textes, énoncés écrits ou oraux, dessins, gestes, etc.).

Une fréquente justification de la construction de situations d'enseignement issues de situations fondamentales d'un savoir dans la TSD a été donnée par le bénéfice de ce type de situations sur les possibilités d'amener les élèves à entrer dans une démarche de preuve (Legrand, 1997). L'élaboration et l'analyse *a priori* de ces situations se basent sur l'étude des niveaux de milieux organisés; l'analyse *a posteriori* permet au chercheur de déterminer s'il y a ou non une concordance du déroulement effectif avec la situation anticipée.

Le modèle de structuration du milieu utilisé lors de l'élaboration du modèle est celui de Bloch (2006), issu précédemment du modèle de Margolinas (1994) modifié afin de tenir compte du rôle du professeur dans les niveaux adidactiques de milieux. Dans ce travail nous nous intéressons à l'analyse des fonctionnalités des différents niveaux de milieux et aux résultats de la mise en œuvre dans la contingence (Bloch, 2006).

Le tableau 2 résume les niveaux de milieux – de M1 à M-3 – correspondants à la situation expérimentale. Les niveaux associés aux indices strictement négatifs sont ceux qui nous intéressent tout particulièrement dans la configuration que nous étudions, c'est-à-dire l'apparition d'un processus de preuve dans la mise en œuvre d'une situation à dimension adidactique (Bloch, 1999). En effet c'est au niveau de l'articulation entre le milieu objectif (qu'il vaudrait peut-être mieux appeler « milieu heuristique ») et le milieu de référence que nous nous attendons à voir apparaitre et se développer les raisonnements attendus.

Tableau 2 : La structuration du milieu (Bloch, 2006)

M1 Milieu didactique	E1 : E réflexif	P1 : P projeteur	S1 : situation de projet	
M0 Milieu d'apprentissage : institutionnalisation	E0 : élève	P0 : professeur enseignant	S0 : situation didactique	Didactique
M-1 Milieu de référence : situation de formulation et situation de validation	E-1 : E apprenant	P-1 : P régulateur	S-1 : situation d'apprentissage	
M-2 Milieu objectif : situation d'action Milieu heuristique	E-2 : E agissant	P-2 : P dévolueur et observateur	S-2 : situation de référence	Adidactique
M-3 Milieu matériel	E-3 : E objectif		S-3 : situation objective	

Dans la structure précédente, nous savons que des étapes de la situation peuvent être à l'origine de raisonnements mathématiques (Bloch et Gibel, 2011) : la confrontation à un milieu heuristique (milieu objectif) pour leur élaboration, le passage à un milieu de référence pour établir la généricité des méthodes ou le caractère de nécessité des propriétés trouvées. Les interventions de l'enseignant (P-régulateur), dans la situation d'apprentissage, sont destinées le plus souvent à maintenir le caractère adidactique de la situation en relançant l'activité par un éventuel retour à une situation de jeu (situation d'action) ou par la « formulation » d'une explication nécessaire à la compréhension d'une proposition formulée par un élève. Bloch (1999) dans son article sur l'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève précise le rôle de l'enseignant :

> Dans la mesure où le milieu de la situation n'assure pas de façon suffisamment adidactique la production de connaissances, nous nous tournons vers l'activité du professeur et les connaissances qu'il met en œuvre, pour comprendre le fonctionnement de la situation pour l'élève. (p. 4)

Dans Bloch et Gibel (2011) et Gibel (2015, 2018), nous avons décidé de privilégier trois axes qui orientent et structurent notre analyse des raisonnements dans chacune des situations décrites précédemment. Ces axes réfèrent à des niveaux de modélisation différents des raisonnements en jeu dans le déroulement de la situation : modélisation globale relative aux niveaux de milieux, ou modélisation locale au niveau des arguments produits dans le travail et les échanges en classe, ainsi qu'au niveau des signes émergents de ce travail.

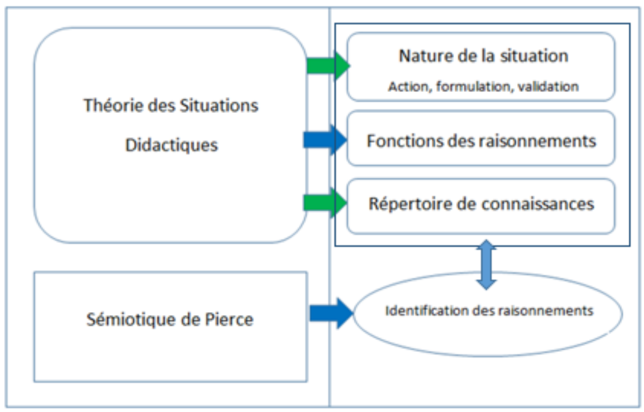


Figure 3 : Schéma du modèle d'analyse des raisonnements (Gibel, 2018, p. 49)

Dans une situation comportant une dimension adidactique, les élèves donnent à voir des raisonnements qui dépendent fortement du niveau de milieu où ils se situent, ce que nous illustrerons dans la dernière partie, lors de l'analyse a posteriori de différents épisodes de la séquence.

- Le premier axe de l'analyse est lié au milieu de la situation.
- Le deuxième axe est l'analyse des fonctions du raisonnement, pointée ci-dessus comme nécessaire. Nous nous attacherons à montrer comment les fonctions du raisonnement sont liées à des niveaux de milieux et comment ces fonctions « manifestent » aussi ces niveaux de milieux, de sorte qu'ils peuvent servir au repérage de la position des élèves dans chacun de ces niveaux.
- Le troisième axe est celui des signes et des représentations observables. Ces observables se donnent à voir dans des formes différentes qui affectent le déroulement de la situation. La nature des signes et le statut logique du raisonnement sont à prendre en compte pour l'efficacité, l'idonéité aux attendus et le rôle dans la situation. L'analyse des signes est réalisée au regard du répertoire de représentation mobilisé par l'auteur du raisonnement. Il s'agit de prendre pour objet d'étude l'usage du répertoire didactique et de son niveau d'actualisation.

Ces trois axes apparaissent nécessaires et complémentaires pour effectuer une analyse très précise des différentes formes de raisonnements qui sont susceptibles d'être produits en regard de leur(s) fonction(s) et des conditions de leur production par les élèves (ou par l'enseignant au niveau M0). Ils constituent les dimensions de notre modèle d'analyse des raisonnements (figure 3).

3.4.2 Analyse ascendante des différents niveaux de milieu

Nous allons à présent expliciter dans l'ingénierie étudiée les différents niveaux de milieu correspondant au tableau 2.

- La situation objective : l'acteur objectif et le milieu matériel

Le milieu matériel est constitué des cinq premiers carrés qui ont été construits par les élèves en début de séance. L'enseignant a initialement construit sur le papier millimétré (distribué aux élèves) le premier carré et leur a communiqué le processus de construction.

- La situation de référence : sujet agissant et milieu objectif

Le milieu objectif est constitué des *n* premiers carrés (*n* quelconque) résultant du processus de construction. Ces figures fonctionnent ici véritablement comme un indice de la figure « finale ».

Les actions du sujet agissant ont pour objet de :

- Conjecturer et prouver l'alignement des sommets (B_i, $1 \leq i \leq N$) pour tout N entier.

D'un point de vue géométrique, les élèves doivent conjecturer et ensuite prouver que tous les sommets B_n, $n \in$ IN – obtenus pas le processus de construction des carrés – appartiennent à une même droite (B_1B_2). Le coefficient de cette droite étant strictement négatif, elle coupe l'axe des abscisses en un point I. Les élèves peuvent ainsi démontrer que tous les points B_n ($n \in$ IN) appartiennent à l'intervalle $[B_1 ; I]$. En conséquence, quel que soit $n \in$ IN les abscisses des points B_n – correspondant aux termes a_n de la suite étudiée – appartiennent à l'intervalle [1 ; l] où l désigne l'abscisse du point I.

- Calculer l'abscisse du point A_n, notée a_n, pour n quelconque.

D'un point de vue géométrique, quel que soit n, les élèves peuvent déterminer a_n, correspondant à la mesure de $[OA_n]$, en effectuant la somme des mesures des côtés des n premiers carrés.

- La situation d'apprentissage : élève apprenant et milieu de référence

Le milieu de référence est constitué des preuves inhérentes à la majoration de (a_n) et des conjectures sur le comportement asymptotique de la suite (a_n). Les élèves vont produire des calculs et des raisonnements assimilables à des éléments de preuve. Les élèves vont ensuite être amenés à débattre de la validité des raisonnements produits pour répondre à la problématique. Il s'agit ici d'une situation de validation.

3.4.3 Mise en œuvre du modèle d'analyse des raisonnements

Les raisonnements susceptibles d'apparaitre au cours de la séquence « La suite des carrés » sont explicités dans le tableau 3. Nous indiquons ainsi pour chaque niveau de milieu : les fonctions des raisonnements attendus, les niveaux d'utilisation des symboles, les niveaux d'actualisation du répertoire.

Tableau 3. Tableau des raisonnements susceptibles d'être produits selon les niveaux de milieux

	Milieu M-2	**Milieu M-1**	**Milieu M0**
Fonctions des raisonnements	R1.1 SEM - Décision de calcul - Conjectures - Intuition sur un dessin ou calcul	R1.2 SYNT/SEM - Calculs génériques Conjectures - Décision sur un objet mathématique - Décision sur un outil numérique	R1.3 SYNT/SEM - Preuves sémantique et syntaxique - Généralisation
Niveau d'utilisation des symboles	R2.1 SEM - Icônes ou indices dépendant du contexte	R2.2 SYNT/SEM - Arguments « locaux » ou plus génériques : indices, calculs	R2.3 SYNT - Arguments formels spécifiques
Niveau d'actualisation du répertoire	R3.1 SYNT/SEM - Utilisation ponctuelle de connaissances anciennes - Enrichissement au niveau heuristique	R3.2 SYNT/SEM - Enrichissement au niveau arguments des énoncés	R3.3 SYNT - Formalisation des preuves - Ostensifs organisés - Intégration des éléments théoriques notion de seuil
Type de raisonnement	R.4.1 Abductif, déductif, inductif	R.4.2 Déductif, inductif	R.4.3 Déductif

4. Principaux résultats : analyse des raisonnements produits en situation de formulation et de validation

La finalité de cette partie est de montrer que le modèle permet d'effectuer une analyse des raisonnements produits au cours des différentes phases de la séquence.

4.1 Résultats obtenus au cours de la première séance

Lors de la première séance, les élèves après avoir effectué la construction des cinq premiers carrés sur la fiche distribuée (cf. annexe 1) sont conduits à formuler une conjecture à propos des points B_1, B_2 et B_3 obtenus par construction des trois premiers carrés. Les énoncés produits par les élèves sont :

(c1) Les points B_1, B_2 et B_3 sont alignés.

(c2) $\overrightarrow{B_2B_3} = \frac{3}{4}\ \overrightarrow{B_1B_2}$

L'enseignant a rédigé les énoncés au tableau et a interrogé les élèves sur le lien logique existant entre ces deux énoncés en vue de leur faire prendre conscience que (c2) implique (c1). Certains élèves ont démontré la validité de (c1) en produisant des raisonnements visant à établir que les droites (B_1B_2) et (B_2B_3) ont même coefficient directeur et ont un point commun donc elles sont confondues, d'autres ont établi (c1) en montrant que B_3 appartient à la droite (B_1B_2). Certains élèves ont choisi de démontrer que la conjecture (c2) était vérifiée en établissant la relation de proportionnalité liant les coordonnées des vecteurs. À la suite de la mise en commun des preuves permettant de démontrer la validité des conjectures (c1) et (c2), les élèves ont produit des conjectures relatives à l'alignement des points B_n ($n \in$ IN) et ont proposé des raisonnements dont la validité a été mise en débat. L'enseignant, en s'appuyant sur les raisonnements des élèves, a établi une démonstration de l'alignement des points.

Les élèves ont ensuite cherché à élaborer des éléments de réponse à la problématique de recherche formulée en annexe 1 : « en répétant le processus un nombre n de fois suffisant, on peut obtenir un carré dont l'abscisse du sommet A_n est strictement supérieure à 4 ? ».

4.2 Analyse des raisonnements produits au cours de la deuxième séance

Nous nous attacherons à présent à étudier les raisonnements produits en situation de formulation et en situation de validation au début de la séance 2, en référence au déroulement de la séquence (annexe 3).

4.2.1 Épisode 1 : Détermination du point d'intersection de la droite (d) passant par les sommets (B_n) et l'axe des abscisses

Analyse d'un épisode extrait de la séance. Au cours de la séance 2, l'élève 1 au tableau (Hugues) note le calcul qu'il a effectué afin de déterminer quel est le point d'intersection de la droite (d) passant par les sommets B_n (dont l'alignement a été démontré à la séance 1).

Il a effectué un calcul basé sur la connaissance du coefficient directeur de la droite (d) calculé précédemment, il a noté initialement $\mathrm{X}(x\,;0)$ le point d'intersection de la droite (d) avec l'axe des abscisses. Il effectue une dénotation des calculs rédigés au tableau (présenté en annexe 2) en vue de déterminer l'abscisse du point X.

Nous allons présenter le script de ces épisodes.

> Professeur : Bien ! Alors c'est très bien ce que tu fais. Je pense que ça nécessite quelques explications sur une partie de la classe au moins sur l'idée, en fait que tu utilises. L'idée est vraiment intéressante, très originale et je pense que ça nécessite quelques explications.
>
> Élève 1 (Hugues) : En fait, on a une partie des coordonnées vu que X est sur l'axe de x, son ordonnée c'est forcément 0; et on recherche son autre coordonnée, enfin son abscisse. On a déjà les coordonnées de B_1 et donc en gros, ici [en montrant sur le graphique] on connaît tout sauf x, donc ça donne juste une équation à résoudre.

Élément d'analyse. Du point de vue du niveau de milieu, nous nous situons ici au niveau (M-2), en effet l'élève 1 fournit une explication, assimilable à un raisonnement, quant à la procédure de calculs utilisée, basée sur la mise en œuvre de connaissances antérieures (R3.1, voir tableau 3).

Il indique les raisons qui l'ont guidé dans la mise en œuvre de sa manière de calculer de deux façons différentes le coefficient directeur de la droite. Sa procédure de calcul est originale, elle est associée à une fonction du raisonnement dénommée « décision de calcul » (R1.1).

Sa présentation, au tableau, lui offre la possibilité de donner un « éclairage » de la conduite de son calcul, en délivrant les explications adéquates. L'élève a produit un calcul algébrique, la représentation géométrique lui permet de contrôler la validité de son calcul et ainsi de mettre en relation les dimensions sémantique et syntaxique.

> Professeur : Oui. Est-ce que c'est clair pour tout le monde, ça? Ce qui est assez malin là, c'est qu'ici on détourne la formule du calcul du coefficient directeur; d'habitude on l'utilise nous pour avoir le coefficient directeur. Sauf qu'ici le coefficient directeur on le connaît et on utilise cette formule entre guillemets à l'envers pour obtenir une des coordonnées que l'on cherche; sur les 4 on en connaît déjà 3, donc il y en a qu'une seule qu'on ne connaît pas et du coup on peut utiliser

> cette formule entre guillemets à l'envers pour obtenir la coordonnée cherchée. Au final tu trouves du coup que cette droite (d) coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées (4 ; 0). Quelle est ta conclusion?
>
> Élève 1 : (en regardant sa feuille) Bah, le … la … du coup l'abscisse des points B_n et A_n ça ne dépassera jamais 4; ça sera au plus grand 4.

Élément d'analyse. Nous nous situons ici toujours au niveau (M-2) : l'élève a produit un raisonnement « original » en mobilisant ses connaissances anciennes relatives aux équations de droites et il est parvenu à un enrichissement heuristique (R3.1). L'élève rend compte du résultat de son calcul et de la lecture-interprétation du schéma. Cependant, la conclusion qu'il tire de son calcul et de son schéma « ça ne dépassera jamais 4; ça sera au plus grand 4 » ne repose pas sur une justification « consistante », autrement dit, suffisamment argumentée. En effet il n'avance pas les raisons pour lesquelles 4 est un majorant de la suite (a_n). Du point de vue de l'analyse sémiotique, sa proposition s'apparente à un indice (R2.1), basé sur une lecture de certains éléments du graphique. En effet, la droite coupe l'axe des abscisses en X(0 ; x), cependant elle se « prolonge » dans le demi-plan inférieur (délimité par l'axe des abscisses), les ordonnées de ses points sont alors strictement négatives.

4.2.2 Épisode 2 : Débat relatif à la majoration de la suite (a_n)

> Professeur : Oui… au mieux 4, oui? [le professeur s'adressant à un autre élève qui lève la main])
>
> Élève 2 (Gatien) : Il manque que …du fait que … en fait ça peut dépasser 4, mais si ça dépassait 4 on aurait une abscisse négative étant donné que l'abscisse on dit que c'était 0,75 fois celui d'avant, c'est une multiplication de nombres positifs, donc l'abscisse ne pourra pas être négatif, donc ça s'arrêtera à 4.

Analyse des raisonnements produits. Le niveau de milieu correspondant est le niveau (M-1). Les échanges s'inscrivent dans le cadre de la situation de validation.

On note du point de vue langagier une confusion entre abscisse et ordonnée.

L'argument avancé par Gatien est valide et consistant (R2.2), c'est un argument « générique » (R2.2) qui permet d'effectuer le lien entre les dimensions « syntaxique » et « sémantique ». En effet, Gatien articule le résultat du calcul précédent et son interprétation au regard du schéma de construction de la suite des carrés.

Le raisonnement résulte de l'articulation du cadre algébrique et du cadre graphique inhérents à l'étude de la suite. On perçoit ainsi la richesse de cette situation qui conduit tour à tour à une situation de formulation et à une situation de validation.

Le raisonnement produit permet d'établir que la suite (a_n) est majorée par 4, puisque les ordonnées des sommets B_n sont nécessairement positives. On identifie ici, du point de vue de l'analyse sémiotique, la production d'un symbole-argument (R2.2) que l'on peut identifier à une preuve.

Le raisonnement produit par cet élève met en lumière l'articulation des dimensions sémantique et syntaxique.

On note ici qu'il s'agit d'un raisonnement par l'absurde.

> Professeur : Oui, c'est vrai qu'il faut... [S'adressant à l'élève E1 toujours au tableau] Tu pourrais nous faire un petit schéma avec les droites, qu'on ait une image sous les yeux. Alors dessine-nous la droite d, c'est pas évident sur le dessin.

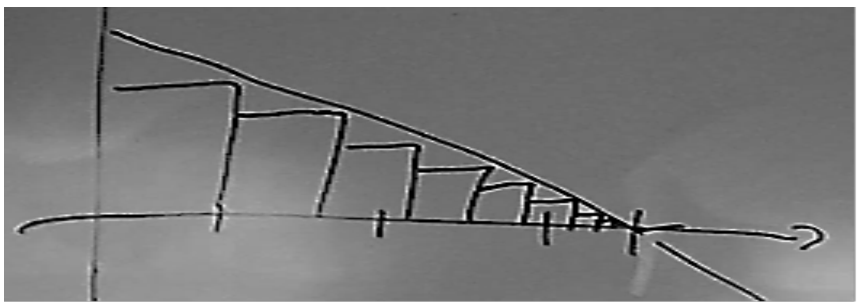


Figure 4 : Dessin réalisé au tableau par l'élève 1

> Professeur : Donc, on sent bien que finalement ce nombre « 4 » va jouer un rôle dans le graphe [éternuement]. On sent bien que le nombre « 4 » joue une sorte de rôle de barrière, qu'on n'a pas le droit de dépasser. En faisant ça, finalement, tu viens de répondre à la problématique : est-ce qu'on peut dépasser 4, et la réponse est non. Alors et si on allait un peu plus loin : quelle est la question qui suit ? On sait qu'on ne peut pas dépasser 4; quelle autre question je me suis posée?

Élément d'analyse. La construction du graphique, produite à la demande de l'enseignant, est destinée à faciliter la compréhension de l'argument établi par l'élève 2 (Gatien), elle a une fonction explicative. En effet le schéma réalisé par l'élève 1 (figure 4) illustre le comportement de la suite de points constitués par les sommets (B_n).

L'enseignant, en reconnaissant la pertinence de la réponse, institutionnalise le fait que « 4 » soit un majorant de la suite (a_n).

On est ici au niveau (M0) correspondant à la situation didactique.

4.2.3 Épisode 3 : Étude du comportement de la suite croissante et majorée

> Élève 3 : Est-ce qu'on va atteindre 4?

> Professeur : Voilà, est-ce qu'on va atteindre 4? Alors est-ce que vous avez un avis? [S'adressant à l'élève E1 toujours au tableau]) Merci beaucoup Hugues, très bien.

> Alors je laisse à chacun le temps de se faire sa propre opinion. D'après vous, est-ce que la limite 4, cette barrière qu'on ne peut pas dépasser, est-ce qu'on peut l'atteindre? …Est-ce qu'on va s'arrêter avant ou finalement on va aller jusqu'à 4. Alors maintenant tout le monde a eu le temps de réfléchir à ça … Oui?
>
> Élève 4 : On va l'atteindre, mais pas à une étape donnée, à la fin de …, quand on aura fini de faire tous les carrés. […]
>
> Professeur : Donc... À une étape donnée, on ne sera pas à 4, mais...
>
> Élève 2 : À la fin on sera à 4.

Analyse des raisonnements produits. L'idée émise par l'élève 4 est particulièrement intéressante, il conjecture sur le fait qu'il n'est pas envisageable d'identifier un rang pour lequel la valeur de la suite sera égale à 4, mais que le processus itératif débouchera sur la valeur 4, et donc que potentiellement il sera possible d'approcher la valeur 4 d'aussi près qu'on le souhaite. On se situe ici au niveau (M-1). Le raisonnement avancé est générique, d'un point de vue sémiotique il s'apparente à un « indice » (R2.2).

> Professeur : À la fin on sera à 4? Est-ce que tu as des ... une preuve?
>
> Élève 2 : Ben … y aura toujours … On pourra toujours continuer à faire des doubles de carrés donc à la fin on va finir pour y arriver jusqu'à à arriver jusqu'à 4.
>
> Professeur : Je suis d'accord, mais est-ce que tu as quelque chose de quantifiable?
>
> Élève 2 : Ben non justement … C'est l'infini … Quand on aura fini l'infini.
>
> Professeur : Est-ce que, à une étape donnée, on ne peut pas quantifier quelle est l'abscisse du point A_n?

Analyse des raisonnements. L'enseignant fait dévolution aux élèves d'une nouvelle tâche, déterminer si la valeur « 4 » va être ou non « atteinte ». L'élève 2 au tableau a effectué un raisonnement inductif, qui s'apparente à une conjecture.

Afin de déterminer la validité de cette dernière, l'enseignant invite les élèves à exprimer (a_n) pour une valeur n quelconque.

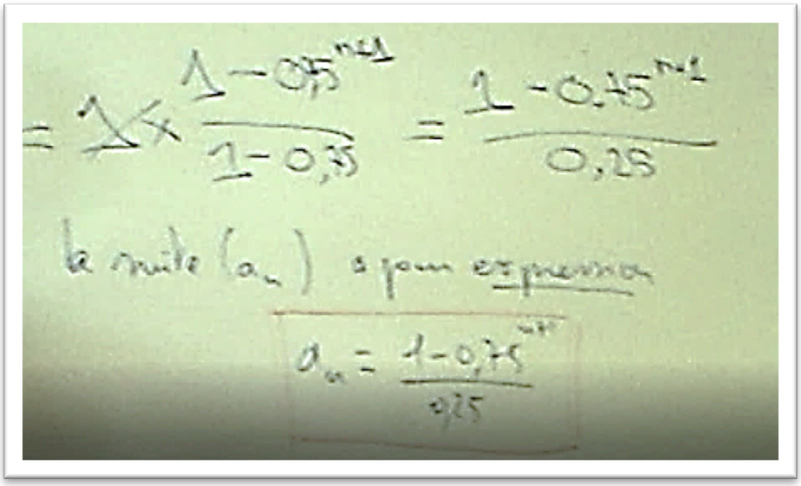


Figure 5 : Expression algébrique du terme général de (a_n)

Une dizaine de minutes plus tard, un élève est envoyé au tableau afin de présenter le calcul effectué lui ayant permis de déterminer la formulation explicite du terme général de la suite. L'expression obtenue est présentée à la figure 5. Cette expression fait désormais partie du répertoire didactique de la classe.

L'enseignant a fait ensuite dévolution à ses élèves de l'étude du comportement asymptotique de (a_n) par l'usage de ressources numériques. Certains élèves ont utilisé la formulation explicite de a_n précédemment obtenue, et ont recours à l'usage de la calculatrice pour calculer les valeurs de a_n, d'autres encore font usage du tableur en utilisant l'expression de a_n, en fonction de a_{n-1} et a_{n-2}.

4.2.4 Épisode 4 : les approximations des termes de la suite (a_n) obtenues par la mise en œuvre des outils numériques

Professeur : Et alors, à partir de 80, il y a vraiment écrit 4?

Élève : oui

Professeur : Alors, d'où vient ce … Est-ce vraiment un 4 qu'on a ...Noémie?

Noémie : …?

Professeur : Toi tu as 4 à partir de 40. Ça veut dire que tu n'as pas le même modèle... La question est, est-ce que ce 4 que vous voyez, c'est un 4 théorique, on a atteint la limite, ou pas? Déjà, le fait que Noémie l'atteigne à 40 et le fait que Maxime l'atteigne à 80, ça nous donne une information. Mathilde?

Mathilde : Ça nous donne un arrondi ...[inaudible] décimales?

Professeur : Ouais, c'est un arrondi que fait la calculatrice. On sait déjà au moins que la machine compte. Alors question : l'ordinateur qui est un peu plus puissant en calcul que la machine, est-ce que elle, il lui arrive la même chose?

> Ben déjà le 40, on voit qu'on est pas loin, on est à 3,999959. Et là, la TI elle a fait son arrondi, elle a déjà basculé à 4. La Casio, c'est à 80, alors [il regarde sur son ordi] c'est cette ligne-là, on voit qu'on est en effet à 3,9999999920 (à confirmer).
>
> Élève : [en aparté] La Casio est plus puissante.
>
> Professeur : Ça veut dire qu'elle est plus puissante. L'ordinateur lui, pour moi, il tient plus. Il finit par … lui aussi; il est à 120 où il affiche 4. Bon, mais ça, on sait que c'est lié à la machine, c'est pas lié à la théorie; c'est lié à la machine. D'abord la machine a une mémoire finie avec un certain nombre de décimales et après, elle arrondit. Bon, en tout cas, ce nombre 4, on l'atteint ou on ne l'atteint pas?

Analyse du propos de l'enseignant. L'enseignant avance une explication quant aux résultats obtenus en s'appuyant sur la proposition d'un élève qui indique que les résultats obtenus sont des approximations. Il indique que la variation de l'indice à partir duquel chacun des moyens de calculs affiche la valeur 4 suffit à mettre en défaut l'exactitude de la valeur affichée (R2.2) par les instruments utilisés.

> Gatien : On ne sait pas trop … c'est ce que vous nous aviez dit sur les limites.
>
> Professeur : Eh oui. La seule chose que, nous, on peut dire, c'est que on peut donner...
>
> Gatien : [doucement] On ne l'atteindra pas.
>
> Professeur : le comportement de cette suite… Quel est ce comportement? On dit que [il écrit au tableau] la suite (a_n) converge vers 4. On se rapproche de plus en plus du nombre 4 et les machines ajoutent derrière, elles sont tellement près qu'à un moment, elles finissent par arrondir à 4. Ce qui nous donne (il écrit au tableau sans le dire : $\lim a_n = 4$). Donc ce qui est aussi intéressant à voir, c'est qu'on répète un processus à l'infini et en fait, on sait qu'on s'arrête; on ne peut pas dépasser 4, on s'arrête à 4.

Analyse du raisonnement. L'enseignant distingue ici l'itération infinie du processus lié à la construction des carrés successifs, et les valeurs de la suite (a_n) qui sont majorées par 4 et « stagnent » — du point de vue de leur représentation « instrumentée » – compte-tenu des arrondis utilisés pour produire le calcul. Toutes les valeurs de la suite sont incluses dans un intervalle dont la borne supérieure est la limite de la suite (a_n).

L'enseignant va ensuite terminer la séquence en définissant la notion de seuil et proposer à ses élèves de déterminer expérimentalement – pour plusieurs valeurs numériques de seuils $s_i (1 \leq i \leq 4)$ – les rangs à partir desquels les valeurs de la suite sont toutes contenues dans l'intervalle $[s_i ; 4]$.

4.3 Résultats et discussion

L'analyse a priori réalisée par le chercheur a permis de définir chacun des niveaux de milieu et de préciser pour chacun d'eux, les cadres dans lesquels les élèves travaillent, les questions auxquelles ils tentent d'apporter des réponses et les formes et les fonctions des raisonnements qu'ils sont susceptibles de produire.

L'analyse a priori vise également à établir que pour répondre aux questions, les élèves vont pouvoir décider librement des connaissances et des savoirs à mobiliser afin d'élaborer des raisonnements (valides ou erronés) en réponse à la situation; c'est en ce sens que les situations proposées sont à dimension adidactique. Lorsque les rétroactions du milieu sont insuffisantes, l'enseignant organise une présentation des propositions et met en débat la pertinence et la validité des raisonnements. L'ingénierie a été élaborée de sorte qu'elle favorise chez les élèves, l'élaboration, la formulation et la mise en débat de raisonnements qui permettent d'articuler les dimensions sémantique et syntaxique.

L'analyse des raisonnements effectuée en mettant en œuvre le modèle d'analyse des raisonnements (Bloch et Gibel, 2011; Gibel, 2018) a permis de mettre en évidence les conditions de production des raisonnements en référence au niveau de milieu correspondant et aussi de préciser la fonction des raisonnements. Outre cela, le modèle vise à identifier par une analyse des signes : d'une part, les connaissances mobilisées en référence au registre correspondant, d'autre part, l'évolution du répertoire de représentation en justifiant les éléments qui ont contribué à son enrichissement. Cette analyse sémiotique est difficile à réaliser parce qu'elle nécessite une connaissance des situations précédentes ayant contribué à la construction du répertoire de représentation, et aussi parce qu'elle nécessite d'analyser les signes produits et de repérer précisément les registres mobilisés. Dans cette étude, nous nous sommes efforcés de mettre en évidence, dans l'analyse des raisonnements produits par les élèves, la manière dont les élèves convoquent les différents registres sémiotiques. C'est en ce sens que l'étude – par l'usage du modèle d'analyse des raisonnements – contribue à nous renseigner sur les difficultés et les habiletés des élèves à établir des liens :

- entre les registres graphique et algébrique pour définir de façon explicite la suite objet d'étude, établir sa croissance, construire la preuve que cette suite est majorée par 4,
- entre les registres algébrique, numérique et graphique pour analyser, le comportement des valeurs de la suite obtenues par le calcul instrumenté et ensuite mettre en évidence leur capacité à déterminer, pour un seuil s quelconque fixé, le rang de la suite à partir duquel l'ensemble des termes de la suite est contenu dans [s ; 4].

L'établissement de ces liens afin de justifier la validité et la pertinence d'un raisonnement constitue pour nous un indicateur de l'appropriation de la notion de limite d'une suite et contribue ainsi à apporter des éléments de réponse à la problématique.

L'analyse de la dernière partie de l'étude – inhérente à la notion de seuil – n'a pas pu être intégrée dans l'article, mais elle constitue un élément important dans l'analyse de cette séquence en vue de permettre une première approche de la notion de limite finie d'une suite.

À la suite de cette séquence, à la demande du chercheur, les élèves ont rédigé individuellement les étapes de l'étude du comportement asymptotique de la suite. Ce recueil des productions constitue une donnée très pertinente, il permet de rendre compte du fait que pour une très grande majorité des élèves, les raisonnements produits – lors de chacune des étapes du déroulement – mettent en lumière leur capacité à élaborer des raisonnements qui mettent en correspondance les différents registres. On constate également que pour un tiers des élèves, le réinvestissement de la notion de seuil demeure complexe à réaliser.

La notion de limite d'une suite est particulièrement difficile à appréhender et nécessite de confronter les élèves à un ensemble de situations. Par ailleurs, cette analyse didactique des productions devrait constituer le point de départ d'une nouvelle étude.

Conclusion

L'analyse a priori de la séquence nous a permis non seulement de formuler les raisons pour lesquelles nous avons élaboré cette situation d'apprentissage, mais encore d'expliciter les formes de raisonnements susceptibles d'apparaître lors des différentes phases de la séquence.

Certains éléments de cette analyse a priori ont été communiqués à l'enseignant en vue de faciliter la mise en œuvre de la séquence, notamment en le préparant à envisager un traitement adéquat des raisonnements des élèves, produits au cours de chacune des situations (situation d'action, de formulation, de validation et de décision). Par ailleurs, l'analyse a priori a mis en évidence la nécessité d'articuler les différents cadres (numériques, algébriques et géométriques) durant chacune des phases de la séquence afin de permettre aux élèves une première approche expérimentale de la notion de limite finie d'une suite. Cette même analyse prépare également l'enseignant à gérer les résultats numériques – en tant qu'approximations des termes de la suite – obtenus par l'usage des TICE en vue de faire acquérir à ses élèves une attitude critique vis-à-vis des résultats numériques produits par les instruments de calculs.

Une analyse a posteriori détaillée de la séquence mise en œuvre, basée sur l'analyse de différents épisodes, réalisée à l'aide de notre modèle d'analyse des raisonnements nous a conduit à mettre en lumière les différentes formes de raisonnements mis en œuvre par les élèves. Nous avons mis ainsi en évidence les différentes fonctions des raisonnements : décision de calcul, conjecture, décision sur un objet mathématique, décision sur un outil numérique, interprétation, établissement d'une preuve sémantique, élaboration d'une preuve syntaxique. Ceci nous a permis de mettre en lumière la richesse de cette séquence du point de vue de la pratique du raisonnement en classe de première scientifique.

Notre modèle d'analyse des raisonnements semble donc être un outil pertinent pour élaborer une analyse des formes de raisonnements susceptibles d'être produits au cours de chacune des phases et ensuite pour produire une analyse a posteriori détaillée du déroulement de la séquence, mettant en lumière les connaissances et les savoirs mobilisés par les élèves ainsi que leur capacité à mettre en relation les différents registres de représentation.

Cette étude nous a permis de rendre compte de la pertinence et de l'adéquation de cette situation d'apprentissage pour permettre une première approche de la notion de limite finie d'une suite, qui sera étudiée de façon détaillée l'année suivante en classe de Terminale.

Références

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situation de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(2) 147-176. https://doi.org/10.1007/BF00314724

Barrier, T. (2008). Sémantique selon la théorie des jeux et situations de validation en mathématiques. *Éducation et didactique*, *2*(3), 35-58. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.350

Bloch, I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en Première scientifique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(2), 135-193.

Bloch, I. (2006). *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur* [note de synthèse pour une habilitation à diriger des recherches, Université Paris 7]. TEL. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00012153

Bloch, I. et Gibel, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en didactique des mathématiques, 31*(2), 191-228.

Bloch, I., Bridoux, S., Durand-Guerrier, V., Grenier, D., Frétigné, P., Mac Aleese, J., Madec, G., Menini, C., Rogalski, M., Sénéchaud, P. et Vandebrouck, F. (2017). *Limites de suites réelles et de fonctions numériques d'une variable réelle : constats, pistes pour les enseigner*. Commission inter-IREM Université, Université Paris-Diderot.

Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques.* Éditions la Pensée sauvage.

Brousseau, G. et Gibel, P. (2005). Didactical handling of students' reasoning processes in problem solving situations. *Educational Studies in Mathematics*, *59*, 13-58. https://doi.org/10.1007/0-387-30451-7_2

Chorlay, R. (2019). A pathway to a student-worded definition of limits at the secondary-tertiary transition. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *5*(3), 267-314. https://doi.org/10.1007/s40753-019-00094-5

Durand-Guerrier, V. (2007). Retour sur le schéma de la validation explicite dans la théorie des situations didactiques. Dans A. Rouchier (dir.), *Actes du colloque Didactiques : quelles références épistémologiques?* [Cédérom]. IUFM d'Aquitaine.

Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME, 9*(Numéro spécial), 45-81.

Everaert-Desmedt, N. (1990). *Le processus interprétatif : introduction à la sémiotique de Ch. S. Peirce.* Mardaga Éditeur.

Everaert-Desmedt, N. (2011), La sémiotique de Peirce. Dans L. Hébert (dir.), *Signo. Site Internet de théorie sémiotiques.* http://www.signosemio.com/peirce/semiotique.asp

Ghedamsi, I. (2008). *Enseignement du début de l'analyse réelle à l'entrée à l'université : articuler contrôles pragmatiques et formels* [thèse de doctorat, Université virtuelle de Tunis et Université Victor-Segalen Bordeaux 2,]. TEL. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00361848

Gibel, P. (2004). *Fonctions et statuts des différentes formes de raisonnement dans la relation didactique en classe de mathématiques* [thèse de doctorat inédite]. Université de Bordeaux 2.

Gibel, P. (2015). Mise en œuvre d'un modèle d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques à l'école primaire. *Éducation et didactique 9*(2), 51-72. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.2278

Gibel, P. (2018). *Élaboration et usages d'un modèle multidimensionnel d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques* [note de synthèse pour une habilitation à diriger des recherches, Université de Pau et des Pays de l'Adour]. TEL. https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01919188

Grenier-Boley, N., Bridoux, S., De Vleeschouwer, M., Durand-Guerrier, V., Grenier, D., Menini, C., Rogalski, M., Sénéchaud, M., Vandebrouck, F. (2015). Introduction aux concepts de limite de fonction et de suite : adaptation de deux ingénieries. Dans L. Theis (dir.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015 – GT7* (p. 666-676). Université d'Alger.

Job, P. (2011). *Étude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations fondamentales adidactiques* [thèse de doctorat, Université de Liège]. Orbi. https://orbi.uliege.be/handle/2268/98996

Lecorre, T. (2015). Définir : une nécessité à construire. Le cas de la définition de la limite d'une fonction. *Repères IREM, 100*, 51-80.

Legrand, M. (1997). La problématique des situations fondamentales. *Recherches en didactique des mathématiques*, *16*(2), 221-279.

Margolinas, C. (1994). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. Dans C. Margolinas (dir.), *Les débats de didactique des mathématiques* (p. 89-102). Éditions la Pensée sauvage.

Mercier, A. (1995), Les effets de l''intervention enseignante dans le milieu des situations adidactiques. Dans C. Margolinas (dir.), *Les débats de didactique de mathématiques* (p. 157-168). Éditions la Pensée sauvage.

Oléron, P. (1977). *Le raisonnement.* Presses Universitaires de France.

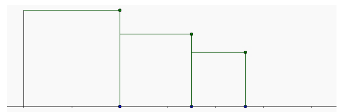
Peirce, C. S. (1995). *Le raisonnement et la logique des choses* (traduit par C. Chauviré, P. Thibaud et C. Tiercelin). Éditions du Cerf.

République française *(2010). Bulletin officiel spécial n° 9 du 30 septembre 2010. Programmes d'enseignement du lycée*. Ministère de l'Éducation Nationale.

Annexe 1

Suite de carrés – énoncé distribué aux élèves

On construit une suite de carrés juxtaposés comme sur le schéma ci-dessous.



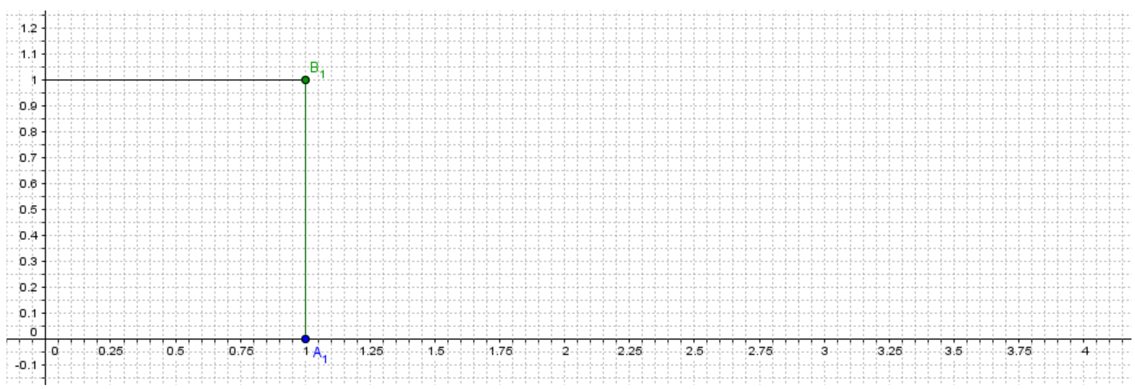
Le côté du premier carré a pour mesure 1. Le côté du deuxième carré mesure $\frac{3}{4}$ du premier. Et ainsi de suite, le côté du carré suivant mesure $\frac{3}{4}$ du côté du carré précédent.

1. Construire les cinq premiers carrés sur le repère ci-dessous. Qu'observe-t-on?

2. On note B_1, B_2, B_3, … les **sommets** « en haut à droite » de chaque carré (la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ est une suite de points).

- **a)** Quelle **conjecture** peut-on émettre concernant les points B_1, B_2 et B_3? Valider ou invalider votre conjecture par un raisonnement mathématique.
- **b)** En répétant le processus un **grand nombre *n*** de fois, quelle conjecture peut-on émettre concernant les points B_1, B_2, B_3, …, B_n? Valider ou invalider votre conjecture par un raisonnement mathématique.

3. On note A_1, A_2, A_3, … les **sommets** « en bas à droite » de chaque carré (la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite de points).



<u>**Problématique**</u> : on se demande si, en répétant le processus un nombre n de fois suffisant, on peut obtenir un carré dont l'abscisse du sommet A_n est strictement supérieure à 4.

En mobilisant les outils que vous jugerez appropriés, élaborez des éléments de réponse à la problématique

<u>Problématique pour aller plus loin</u> : soit un nombre $s \in [1;4[$. En itérant le processus de construction défini ci-dessus, peut-on construire un carré tel que $a_n \geq s$? Si oui, quel pourrait être son numéro?

Annexe 2

Calcul effectué par l'élève 1

Au tableau, l'élève 1 a noté :

On note X(x;0) le point d'intersection entre (0_x) l'axe des abscisses et d (droite passant par les sommets B_n).

$$r=\frac{-1}{3};\quad B_1(1;1)\in d;$$

$$r=\frac{y_X-y_{B1}}{x_X-x_{B1}}=\frac{0-1}{x-1}$$

$$\frac{-1}{x-1}=\frac{-1}{3}$$

$$-1=\frac{-1}{3}(x-1)$$

$$-1=\frac{-1}{3}x+\frac{1}{3}$$

$$\frac{-4}{3}=\frac{-1}{3}x$$

$$x=\frac{\frac{-4}{3}\times 3}{-1}$$

$$x=4$$

Annexe 3

Déroulement de la séquence constituée de 2 séances de 50 minutes

Séance 1 (en demi-groupe)

Phase 1 : Présentation de la situation – Consigne relative à la construction des 5 premiers carrés.

Phase 2 : Construction sur papier millimétré des 5 premiers carrés

Phase 3 : Consigne relative à l'émission de conjecture(s) relatives à B_1, B_2, B_3.

Phase 4 : Mise en commun des conjectures – Communication des preuves

Phase 5 : Consigne relative à l'émission de conjecture(s) B_1, B_2, …B_N

Phase 6 : Mise en commun des conjectures – Communication des preuves

Phase 7 : Formulation de la problématique

Phase 8 : Recherche Utilisation des TICE (Tableur, Algobox, calculatrices, etc.

Séance 2 (en groupe-classe)

Phase 9 : Recherche Utilisation des TICE (Tableur, Algobox, calculatrices, etc.

Phase 10 : Recueil des résultats

Phase 11 : Majoration de la suite Situation de formulation des expressions de (a_n)

Phase 11 : Situation de validation

Phase 12 : Phase visant à étudier expérimentalement la notion de seuil

Phase 13 : Situation d'institutionnalisation