Développement de l'activité algébrique à l'entrée au lycée tunisien

Slimane HASSAYOUNE
Université virtuelle de Tunis
slimhass@gmail.com

Résumé : Malgré l'adoption par le système éducatif tunisien d'une démarche didactique de résolution de problèmes, plusieurs professeurs du début de l'enseignement secondaire continuent à introduire l'algèbre en tant qu'une arithmétique généralisée, focalisent sur le calcul algébrique formel hors contexte et ne se préoccupent pas davantage du développement du raisonnement algébrique. Ceci pourrait avoir pour effet de masquer le sens et la raison d'être des objets mathématiques manipulés et d'engendrer pour les élèves des difficultés à réinvestir leurs acquis en contexte. L'objet de cet article est de caractériser l'activité algébrique à la fois sur les plans épistémologique et conceptuel, et de concevoir et mettre en œuvre des situations didactiques susceptibles de favoriser son développement à l'entrée au lycée tunisien.

Mots-clés : activité algébrique, processus d'algébrisation, praxéologie, situation didactique.

The development of algebraic activity at the beginning of Tunisian secondary school

Abstract: Despite the Tunisian education system's adoption of a didactic approach to problem-solving, many teachers at the beginning of secondary school continue to introduce algebra as a generalized arithmetic, to focus on formal algebraic calculus out of context, and to put little emphasis on developing algebraic reasoning. This may obscure the meaning and purpose of the mathematical objects that students manipulate, and make it harder for them to reinvest their learning in context. The aim of this article is to describe algebraic activity on the epistemological and conceptual levels and to design and implement didactic situations that could promote the development of this activity at the beginning of secondary school in Tunisia.

Keywords: algebraic activity, algebraic process, praxeology, didactic situation.

Introduction

Des travaux de recherche portant sur l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre à l'entrée au cycle secondaire tunisien (Ben Nejma, 2009;

Revue québécoise de didactique des mathématiques, 2021, *vol 2*, p. 3-48.
https://doi.org/10.71403/48760645

Hassayoune, 2014; Kouki, 2008) ont relevé, dans les programmes et les manuels scolaires actuellement en vigueur, plusieurs préconisations floues et insuffisamment suivies d'effets, concernant le projet épistémologique et didactique que l'institution compte mettre en place. Ceci transparaît au niveau des écarts remarqués entre les injonctions mathématiques et didactiques de l'institution et la réalité des pratiques enseignantes. En effet, malgré l'adoption officielle d'une démarche de résolution de problèmes, il est apparu, dans les faits, que l'enseignement de l'algèbre, à ce niveau scolaire, est essentiellement centré sur l'acquisition des techniques du calcul formel sans préoccupation du développement du raisonnement algébrique. Ceci pourrait engendrer, pour les élèves, des difficultés d'apprentissage récurrentes et, pour les enseignants, des hésitations didactiques entravant l'élaboration et la mise en œuvre de situations mathématiques pertinentes et conformes au projet éducatif exigé par l'institution.

Par ailleurs, les difficultés inhérentes au changement de la langue d'enseignement des mathématiques en première année du secondaire et les modestes performances de nos élèves en algèbre dans l'enquête PISA (OCDE, 2014) nous ont interpelés et nous ont incités à investiguer les caractéristiques épistémologiques et conceptuelles de l'activité algébrique en explicitant ses processus, ses contextes et ses outils. Nous faisons l'hypothèse qu'une explicitation claire de ce que l'on entend par activité algébrique auprès des enseignants et par son développement fonctionnel in situ chez les élèves pourrait améliorer sensiblement l'enseignement de l'algèbre à ce niveau scolaire.

Ainsi, pour étudier la problématique soulevée et retenue pour cet article, nous nous sommes posé successivement les questions suivantes :

- Quelles sont les caractéristiques épistémologiques et conceptuelles de l'activité algébrique?
- Quelles propositions didactiques pourrait-on suggérer, à la lumière de ces caractéristiques, en vue d'améliorer l'enseignement de l'algèbre en première année du secondaire en Tunisie?

Nous nous proposons donc de cerner quelques caractéristiques épistémologiques et conceptuelles de l'activité algébrique et de proposer des situations didactiques susceptibles de favoriser son développement chez les élèves à l'entrée au lycée tunisien.

La première partie de l'article est consacrée à l'examen de ce que les didacticiens de l'algèbre entendent par « activité algébrique » en vue d'en préciser les conditions, les contextes et les supports de développement chez les élèves du début de l'enseignement secondaire tunisien (15-16 ans).

Pour étayer et mettre en pratique nos résultats théoriques, nous présenterons dans la deuxième partie de l'article, une alternative didactique à ce qui est ordinairement proposé dans le manuel scolaire et dans les cours des enseignants, permettant de favoriser un apprentissage de l'algèbre porteur de sens et de raison d'être pour les objets mathématiques manipulés. Nous proposerons, à travers une présentation d'un corpus de situations didactiques et l'analyse de l'une d'entre elles, un exemple de mise en fonctionnement des connaissances génératrices de résolution de problèmes et de construction de savoirs algébriques.

1. Ancrages théoriques

Dans cette section, nous présenterons les caractéristiques épistémologiques et conceptuelles de l'algèbre en tant qu'objet de savoir enseigné à l'entrée au lycée tunisien. Après une revue de littérature portant sur le sens, les outils et les processus de l'activité algébrique, nous en présenterons un cadre de référence susceptible de circonscrire nos suggestions didactiques.

Définir ce que l'on entend par activité algébrique, délimiter ses principales composantes et appréhender ses manifestations en précisant les types de tâches, les techniques et les éléments technologiques et théoriques qui leur sont liés nous permet de mettre en place un cadre épistémologique d'analyse des différentes praxéologies algébriques et de proposer un modèle et des dispositifs de leur développement en situation d'apprentissage.

L'activité algébrique se déploie par la mobilisation finalisée des savoirs algébriques conformément à leurs deux dimensions « outil » et « objet » (Douady, 1987). Dans la dimension outil des savoirs, l'activité algébrique se déploie comme un processus de résolution de problèmes par la voie de leur modélisation sous forme d'équations ou de relations fonctionnelles. Dans sa dimension objet, elle se déploie essentiellement et structuralement par la reconnaissance et le traitement des objets algébriques pour en préciser le sens et la dénotation (Frege, 1882).

Notons également que ce traitement des objets de l'algèbre permet de mettre en jeu leurs différents aspects : l'aspect sémantique, relatif aux sens susceptibles d'être conférés aux expressions rhétoriques, numériques et littérales traduisant les relations et les variations; l'aspect sémiotique, se rapportant aux registres de représentation et au symbolisme utilisé; et l'aspect syntaxique, propre aux modes de formation des expressions du langage algébrique ainsi qu'aux règles qui les régissent. Nous nous proposons de caractériser l'activité algébrique en nous appuyant sur les résultats des recherches en didactique de l'algèbre liées à la rupture épistémologique entre les deux activités arithmétique et algébrique, à la pensée algébrique et à la représentation sémiotique des objets de l'algèbre.

1.1 La rupture épistémologique entre l'activité arithmétique et l'activité algébrique

Malgré la ressemblance des signes opératoires et des domaines de fonctionnement des deux processus arithmétique et algébrique, ceux-ci sont en réalité totalement différents en termes d'outils et de raisonnements mathématiques. Une rupture épistémologique devrait alors être assumée si l'on veut surmonter les fausses continuités (Kieran, 2004) et faciliter la transition de l'arithmétique à l'algèbre à l'entrée au lycée tunisien.

Pour une meilleure transition de l'arithmétique à l'algèbre, les élèves ont besoin d'un apprentissage spécifique qui les amène progressivement à acquérir les nouvelles aptitudes méthodologiques et techniques propres à l'activité algébrique, car même dans le cas où ils sont aptes à résoudre des problèmes arithmétiques, ils ont tendance à rencontrer des difficultés inhérentes au mode de traitement algébrique : analyse, choix des inconnues, symbolisation, modélisation algébrique des situations, etc. (Marchand et Bednarz, 2000). Ben Nejma (2010) a montré que cet ancrage dans le processus arithmétique tend à subsister même au terme de la première année du lycée tunisien, ce qui demanderait alors des interventions didactiques lourdes si l'on veut remédier à cette situation. Nous faisons l'hypothèse que cet état de fait est dû principalement à l'introduction tardive du raisonnement algébrique dans le cursus scolaire tunisien : la modélisation algébrique des situations et la résolution de problèmes par la voie de leur mise en équations ne sont abordées qu'à la fin de la 9e année de l'enseignement de base (14-15 ans).

Pour aider les élèves à surmonter l'obstacle épistémologique engendré par la rupture entre l'arithmétique et l'algèbre, plusieurs auteurs (Gascon, 1993; Kieran, 1996, 2004; Vergnaud, 1988) proposent de les amener à :

- Focaliser sur la nature et les propriétés des relations et pas simplement sur les calculs numériques;
- Saisir le sens des nombres et des opérations;
- Donner de l'importance à la modélisation algébrique des problèmes en plus de leurs solutions;
- Distinguer les différents statuts des lettres, selon les contextes et les usages : inconnues, variables, indéterminées ou paramètres;
- Accepter des expressions littérales comme réponses à certains problèmes;
- Considérer le signe « = » en tant que signe annonçant une équivalence entre deux expressions.

Par ailleurs, pour remédier aux difficultés de l'apprentissage de l'algèbre engendrées par les différences cognitives inhérentes aux deux processus arithmétique et algébrique, plusieurs chercheurs s’inscrivent, de nos jours, dans une nouvelle optique didactique induite par le récent avènement *early algebra* (Hitt et al., 2016; Kaput, 1995; Kieran, 2004) et appellent à familiariser les élèves, dès leur jeune âge, au raisonnement algébrique. Ces auteurs contestent également les approches de l’enseignement de l’algèbre se basant sur la rupture épistémologique entre l’arithmétique et l’algèbre. Ils suggèrent une approche de continuité articulant la modélisation des problèmes et les calculs algébriques avec des contrôles et des instanciations numériques contextualisés, permettant de donner sens aux expressions symboliques manipulées.

Dans le cas tunisien, l’institution a fait le choix de séparer les activités arithmétiques des activités algébriques en provoquant une transition « brutale » du numérique à l’algébrique (République tunisienne, 2005). Ceci pose effectivement la question de possibles difficultés d’apprentissage inhérentes à la rupture épistémologique entre les deux approches arithmétique et algébrique dans la résolution de problèmes. L’institution devrait alors assumer ce choix sur le plan didactique en atténuant ces difficultés par l’édition de documents d’accompagnement des programmes, de ressources didactiques et des dispositifs de formation des enseignants visant la gestion de cette rupture épistémologique. Compte tenu des récentes recherches en la matière, on pourrait très bien mener, de pair et assez tôt, le développement des activités numériques et algébriques. Il serait alors question d’instaurer une initiation précoce, dès la fin de l’école primaire, au raisonnement algébrique en développant les processus de modélisation et de généralisation et en focalisant sur les structures des relations quantitatives tout en réinvestissant les acquis numériques dans le contrôle sémantique de ces relations (Carraher, Martinez et Schliemann, 2008; Carraher, Schliemann et Schwarz, 2008).

1.2 La pensée algébrique

S’engager dans une activité algébrique, c’est réaliser des tâches (relevant de certains types de tâches) à l’aide de techniques susceptibles d’être justifiées par des technologies et des théories propres au domaine de l’algèbre (Chevallard, 1999). Mais pour que cet engagement soit cognitivement significatif et finalisé, il faut qu’il soit sous-tendu par des habiletés intellectuelles qui orientent les actions entreprises. En outre, l’apprentissage de l’algèbre étant avant tout une activité humaine consciente et raisonnée, il est alors beaucoup plus qu’une simple accumulation de connaissances déclaratives et procédurales éparses et parcellaires. Il est plutôt un processus complexe de développement d’aptitudes cognitives et comportementales qui suppose la mobilisation d’habiletés à la fois pratiques (des savoir-faire ou « praxis » composés de types de tâches et des techniques servant à les accomplir) et intellectuelles (des savoirs ou « logos » composés d’éléments technologiques et théoriques du domaine algébrique). Ces dernières habiletés ainsi sollicitées nous amènent à nous intéresser à ce que plusieurs auteurs épistémologues ou didacticiens appellent « pensée algébrique ».

Pour Kieran (1996), la pensée algébrique se construit, se développe et se manifeste essentiellement à travers :

- Les activités de généralisation;
- Les activités de transformation d'expressions symboliques;
- Les activités globales de métaniveau.

Le premier type d'activités algébriques, selon l'auteure, a trait aux activités de généralisation, lesquelles sont à la base de la formation d'expressions algébriques et d'équations qui sont les principaux objets de l'algèbre. Les équations dérivent du processus de modélisation des situations intramathématiques et extramathématiques, tandis que les expressions algébriques proviennent souvent de généralisations de termes de suites numériques ou de motifs géométriques « patterns » ou de règles traduisant des relations entre grandeurs. D'autres objets de l'algèbre sont aussi introduits tels que les concepts d'inconnue, de variable, de solution, ou de signes « +, -, x, =, ( ), etc. ».

Le second type d'activités algébriques préconisé par Kieran (1996) concerne le processus transformationnel d'expressions symboliques incluant les opérations de réduction, de factorisation, de développement, de substitution ou de résolution d'équations.

Le troisième type d'activités algébriques est nommé *global meta-level activity of algebra*. Il concerne les processus mathématiques transversaux où l'algèbre est utilisée comme outil et où les habiletés cognitives mobilisées ne sont pas exclusives au domaine algébrique comme la résolution de problèmes, la modélisation, la reconnaissance ou l'établissement de structures, la généralisation, la preuve, ou la prédiction.

Le symbolisme alphanumérique, mobilisé de nos jours au cours de l'activité algébrique, est une invention relativement récente dans l'histoire de la genèse et du développement de l'algèbre. Pourtant, la pensée algébrique n'a cessé d'évoluer depuis la nuit des temps, preuve que la naissance de l'algèbre en tant que démarche de l'esprit ne coïncide visiblement pas avec celle du symbolisme algébrique.

Même après avoir été initiés au formalisme algébrique, certains élèves procèdent encore numériquement et par essais-erreurs pour résoudre des problèmes algébriques (Oliveira et al., 2017) ou des équations dont l'inconnue figure dans les deux membres, telles que l'équation : $2x + 1 = 7x - 3$ dont la résolution repose sur la conservation de l'égalité ce qui rend inopérantes les méthodes arithmétiques

(Grugeon, 1997). Ils recourent ainsi à des techniques de nature arithmétique malgré la disponibilité du symbolisme et du calcul littéral. Ceci prouve que cette disponibilité apparente du symbolisme algébrique ne suffit pas, à elle seule, à accéder à une pensée algébrique susceptible de lever l'obstacle induit par les problèmes algébriques déconnectés (Marchand et Bednarz, 2000) ou par la présence de l'inconnue dans les deux membres d'une équation.

Notons, enfin, que l'usage des lettres par les élèves n'est pas nécessairement un indicateur de la mobilisation d'une pensée algébrique. L'utilisation d'exemples génériques ou d'une démarche mentale évoquée dans la langue naturelle peut également indiquer l'entrée dans une pensée algébrique.

Se référant à des travaux antérieurs, Radford (2013) suggère trois aspects caractérisant les problèmes dont la résolution nécessite une mobilisation de la pensée algébrique :

- Indétermination : le problème à résoudre fait intervenir des quantités non connues (inconnues, variables, indéterminées, paramètres, etc.);
- Représentativité : les indéterminées du problème sont susceptibles d'être représentées symboliquement (par des signes alphanumériques, langage naturel, signes non conventionnels, etc.);
- Raisonnement analytique : les indéterminées du problème sont traitées comme des quantités connues. Elles sont nommées, mises en relations et manipulées. L'analyse est ce cheminement de ce que l'on cherche vers ce qui est donné.

En conclusion, il apparaît que la pensée algébrique est une activité intellectuelle appuyée par une mobilisation finalisée des éléments technologico-théoriques des praxéologies algébriques (notamment, les règles du calcul algébrique et les structures des ensembles des nombres mis en jeu). Elle se manifeste et se développe dans la résolution de problèmes complexes à caractère quantitatif à travers la mobilisation et le déploiement de savoirs algébriques et des processus intellectuels spécifiques.

Les principaux processus de fonctionnement de la pensée algébrique sont :

- Le processus de la modélisation et la résolution de problèmes faisant intervenir des données, des relations ou des variations quantitatives;
- Le processus de la généralisation argumentée (de relations, de propriétés, de structures, etc.);
- Le processus de preuve algébrique.

De notre point de vue, mettre l'accent sur le rôle clé du développement de la pensée algébrique dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre nous permet de repenser les situations proposées aux élèves en adoptant une nouvelle logistique didactique centrée sur la résolution algébrique des problèmes. Le but est de mettre en avant le caractère intellectuel de l'activité algébrique et de lui procurer encore plus de sens et de raison d'être.

1.3 La représentation sémiotique des objets de l'algèbre

Le philosophe et mathématicien allemand Frege (1848 - 1925) s'est particulièrement intéressé au formalisme mathématique. En 1879, il écrit « L'Idéographie », ouvrage dans lequel il expose son idée d'un nouveau langage précis et rigoureux ne tolérant aucune éventualité d'imperfection ou d'erreurs d'interprétation comme c'est souvent le cas dans le langage ordinaire. Dans un article intitulé « Que la science justifie le recours à l'Idéographie », Frege (1882) explique pour quelles raisons les écritures idéographiques (symboliques) sont nécessaires au développement des sciences abstraites et empiriques (mathématiques, sciences physiques, biologie, etc.).

Il avance, entre autres, les arguments suivants :

- Le langage ordinaire est source d'erreurs d'interprétation car il est régi non pas par des lois logiques, mais plutôt par des considérations grammaticales;
- Le langage ordinaire ne permet pas de raisonner précisément, rapidement et de façon concise. Il est aussi très lourd à manier;
- Les signes et les mots sont des éléments clés dans le développement de la pensée, dans la mesure où ils permettent le détachement du monde sensible par le biais de diverses représentations des objets manipulés.

Dans cet ordre d'idées, Frege (1882) écrit : « Les signes donnent présence à ce qui est absent, invisible et le cas échéant inaccessible aux sens » (p. 63).

Afin de délimiter de façon précise la signification des énoncés, Frege porte son attention à la signification des expressions et des pensées portées par ces expressions. Pour cela il commence par distinguer ce qu'il appelle sens et dénotation d'une expression « *Sinn und Bedeutung* ».

Il définit la dénotation (signification, référence) d'un nom ou d'une expression par l'objet même désigné par ce nom ou cette expression, et son sens par le mode de donation de la dénotation de cette expression, c'est-à-dire la fonction mentale qui nous permet de relier l'expression à sa dénotation.

Conformément à ce point de vue, les trois expressions littérales suivantes :

$$4\,n,\ (2\,n + 1) + (2\,n - 1) \text{ et } (n + 1)^2 - (n - 1)^2,$$

où n désigne un nombre entier naturel, ont même dénotation (le quadruple du nombre n), mais ont des sens successifs différents : multiple de 4, somme de deux entiers impairs successifs et différence de deux carrés.

Le sens d'une expression n'est donc pas subjectif comme la représentation personnelle – appelée par Frege « connotation » – que chacun peut avoir de cette expression. Le sens pourrait être partagé par une communauté de locuteurs, c'est lui qui nous renseigne sur le référent de l'expression du point de vue sémantique. Remarquons pour terminer ce succinct aperçu sur le sens et la dénotation d'une expression que la considération des dénotations seules nous ramène à des tautologies ($a = a$), alors que l'établissement de l'équivalence des sens d'une expression a une valeur informative et accroît nos connaissances, ce qui est extrêmement avantageux et important et donne une raison d'être aux transformations des expressions algébriques.

La mise en évidence précédente des faits et phénomènes didactiques et épistémologiques nous a révélé des caractéristiques cognitives de l'activité algébrique dont nous allons préciser les composantes et les manifestations dans les lignes qui suivent.

1.4 L'activité algébrique : composantes et manifestations

Compte tenu des résultats des recherches précédemment évoqués, il apparaît que l'activité algébrique se mobilise et se développe de façon optimale en contexte de résolution de problèmes faisant intervenir des relations et des variations quantitatives et nécessitant des capacités de modélisation de situations et d'aptitudes cognitives analytiques.

Pour favoriser le développement de l'activité algébrique chez les élèves, nous gagnons particulièrement à leur proposer des situations d'apprentissage les amenant à :

- Généraliser des situations en pressentant des régularités et des formules générales et en les justifiant;
- Reconnaitre et identifier des variables, des inconnues ou des indéterminées et formuler d'éventuelles relations entre elles;
- Introduire le langage algébrique comme une nécessité fonctionnelle à la modélisation de situations mathématiques ou extramathématiques et à l'expression de relations, de variations ou de généralisations.

L'activité algébrique est sous-tendue par un raisonnement spécifique, le raisonnement analytique, et des aptitudes de preuve, de modélisation, de généralisation et de traitement d'expressions algébriques.

Compte tenu des caractéristiques de l'algèbre relevées dans la précédente revue de littérature, nous repérons ainsi cinq principales composantes génératrices de l'activité algébrique apparemment non indépendantes et susceptibles de s'activer mutuellement pour l'engendrer. Il s'agit d'aptitudes cognitives et techniques complémentaires, pointées et mises en avant par les auteurs cités et couramment mobilisées lors de la résolution algébrique de problèmes. Nous nous proposons, dans ce qui suit, de définir ces composantes de l'activité algébrique et d'en préciser les manifestations, les contextes ainsi que les types de tâches et les techniques qui leur sont associés.

Les composantes[1] algébriques retenues de l'activité sont :

- Raisonner analytiquement;
- Modéliser algébriquement des situations mathématiques ou extramathématiques;
- Traiter des expressions algébriques;
- Généraliser et valider algébriquement des conjectures;
- Prouver algébriquement un résultat.

Par ailleurs, il faut dire tout de suite que notre choix de présenter ces composantes séparément résulte d'un souci méthodologique et n'implique pas qu'elles interviennent de façon isolée et indépendamment les unes des autres lors de la mobilisation et du développement de l'activité algébrique. En réalité, ces cinq composantes sont mutuellement interreliées et solidaires car, par exemple, on ne peut pas modéliser et gérer algébriquement une situation intramathématique ou extramathématique sans déployer un raisonnement analytique, comme on ne peut pas généraliser et valider une propriété ou une structure algébrique sans s'aider d'un traitement fonctionnel et ajusté à ses fins des expressions rhétoriques, numériques, graphiques ou symboliques traduisant ces propriétés ou ces structures.

1.4.1 Raisonner analytiquement

Ce raisonnement a apparemment immigré de la géométrie à l'algèbre à l'époque de Viète (1540-1603) et de Descartes (1596-1650). Il est souvent appelé « méthode du problème résolu ». Au IV^e^ siècle de notre ère, Pappus d'Alexandrie l'avait utilisé dans son œuvre « Collections mathématiques » pour résoudre des problèmes de construction géométrique à la règle et au compas.

Cela consiste à supposer le problème résolu, à analyser la situation et à dégager des propriétés qui serviront, par la suite et selon un processus de synthèse, à construire la solution. En algèbre, le raisonnement analytique nous permet, contrairement à la démarche arithmétique, de partir de l'inconnue et de ses relations avec les données du problème pour aboutir à la solution.

---

[1] Certaines de ces composantes (raisonner analytiquement, généraliser, prouver) ne sont pas propres au domaine algébrique. Elles sont transversales et interviennent dans les différents domaines mathématiques, à un métaniveau global au sens de Kieran (1996).

Pour déployer ce raisonnement analytique, on part de ce que l’on veut obtenir en se demandant d’où il peut provenir, et on procède ainsi de proche en proche, jusqu’à arriver à un résultat connu ou admis qui constitue à son tour un point d’ancrage pour amorcer une synthèse permettant de résoudre le problème. La synthèse en question part des résultats de l’analyse et remonte pas à pas et en sens inverse de ceux-ci jusqu'à la rencontre des données du problème posé. (Hintikka et Rems, 1974, cité dans Squalli, 2000).

La figure 1 ci-dessous schématise les deux démarches algébrique (analyse) et arithmétique (synthèse).

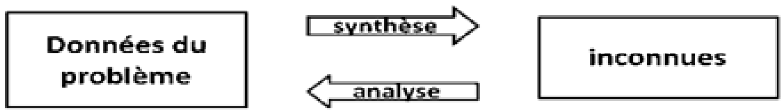

Figure 1 : Schématisation des deux démarches algébrique (analyse) et arithmétique (synthèse)

La résolution algébrique des problèmes par un raisonnement analytique se déroule généralement en trois étapes successives avec, éventuellement, des possibilités d’allers-retours :

- Supposer le problème résolu et analyser la situation obtenue : exploration des inconnues, des données, des relations, etc.;
- Dégager les propriétés caractéristiques de la situation : symboliser les inconnues et éventuellement les données (paramètres) et traduire algébriquement les relations;
- Synthétiser des résultats et élaborer une solution : résoudre algébriquement puis contrôler la validité des solutions trouvées au regard de la situation du problème posé.

1.4.2 Modéliser algébriquement des situations

Chevallard (1989) définit le processus de modélisation comme une schématisation représentant un système mathématique ou extramathématique et un modèle de ce système. Pour lui, un modèle est « un schéma simplifié qui suppose essentiellement deux registres d’entités : un système mathématique ou non mathématique et un modèle (mathématique) de ce système » (Chevallard, 1989, p. 53). Burgermeister et Dorier (2013) vont plus loin et exigent pour le processus de modélisation, outre la construction du modèle, la discussion et l’étude de la correspondance entre le système et son modèle en mettant l’accent sur la dynamique et les rétroactions du processus. Ils précisent que « modéliser signifie : construire, discuter et étudier une correspondance entre deux systèmes incluant des objets, des relations et des questions » (Burgermeister et Dorier, 2013, p. 7).

Descartes (1596-1650) explicite davantage la modélisation algébrique, par sa règle XIX pour la direction de l’esprit (Cousin, 1826), en insistant sur la possibilité d'exprimer certaines grandeurs de deux manières différentes en nombre égal au nombre des termes inconnus.

Grâce à cet apport méthodologique de Descartes, le schéma du processus de modélisation s'explicite davantage comme le montre la figure 2 ci-dessous.

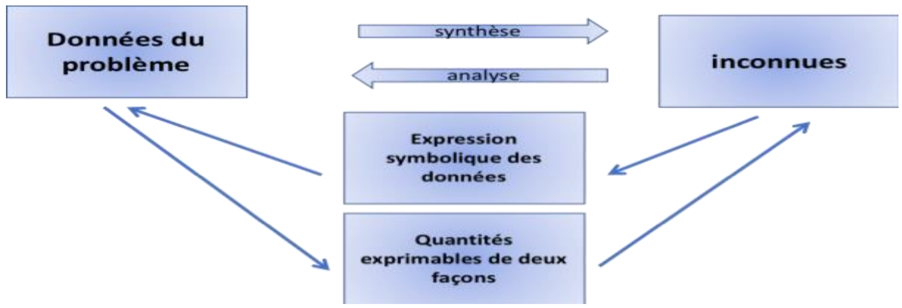

Figure 2 : Schéma du processus de modélisation tenant compte de la règle XIX pour la direction de l'esprit, inspiré de Gascon (1993)

Conformément au programme scolaire actuellement en vigueur, la modélisation algébrique des problèmes posés aux élèves entrant au lycée tunisien se réduit, la plupart du temps, à une simple mise en équation. Ce choix est dicté vraisemblablement par l'importance que l'institution attribue à l'apprentissage par problèmes.

En outre, la modélisation par une mise en équation est particulièrement sollicitée et elle est algébriquement efficace dans la résolution de problèmes du premier degré conformément à ce niveau scolaire. Parmi les éléments de la technique associée au type de tâches « Mettre un problème en équation », nous pouvons citer les suivants :

- Élaborer un modèle pseudo-concret en ne considérant que les données, les relations et les contraintes pertinentes vis-à-vis du contexte et des questions posées par la situation;
- Formuler des relations en langage mathématique;
- Traiter le modèle mathématique;
- Contrôler la validité de la solution du modèle mathématique vis-à-vis des conditions et des contraintes de la situation.

Notons enfin que la modélisation algébrique des situations permet au raisonnement analytique de se déployer pleinement compte tenu de l'obtention des expressions symboliques traduisant les données par la voie du premier processus, et de l'opérationnalisation sur les symboles par le biais du deuxième, ce qui rend ces deux processus solidaires et complémentaires. C'est la mise en œuvre associée de la modélisation et du raisonnement analytique qui permet la résolution de problèmes par une méthode algébrique.

1.4.3 Traiter des expressions algébriques

Les expressions algébriques sont les principaux objets de l’algèbre, car elles sont à la base de la construction de tous les autres objets de l’algèbre (équations, inéquations, formules, etc.). Elles sont généralement construites à partir des différents symboles (signes opératoires, nombres, lettres, etc.) lors des processus de modélisations de problèmes faisant intervenir des relations et des variations. Le traitement formel de ces objets s’effectue par l’application rigoureuse de procédures algébriques et conformément à des règles syntaxiques bien établies. Ce traitement permet au langage algébrique d’être précis, fonctionnel et productif en faisant apparaître les différents sens d’une expression symbolique modélisante.

Par ailleurs, considérer une expression algébrique comme une symbolisation d’un programme de calcul permet également de l’enrichir sémantiquement tout en lui conférant un renouveau syntaxique. Une expression algébrique apparaît ainsi comme une chaîne d’opérations à effectuer, ce qui la rend étroitement liée aux problèmes arithmétiques familiers aux élèves et pouvant être résolus par une chaîne d’opérations à partir des données du problème (Chevallard, 2007).

Notons enfin que par des modélisations successives, Ruiz-Munzón et al. (2012) élargissent cette conception de l’algèbre comme processus d’algébrisation de programmes de calcul en en spécifiant trois étapes imbriquées et susceptibles de modéliser algébriquement différents niveaux de problèmes, ce qui explique la force de l’algèbre « en tant qu’outil de modélisation et de preuve » (p. 90).

La première étape porte sur l’explicitation de la structure du programme de calcul en prenant en compte les opérations, les règles de priorité et les parenthèses mises en jeu. Cette étape conduit à la formulation du programme de calcul par une expression algébrique et à l’émergence d’un environnement technologico-théorique permettant de traiter et d’établir l’équivalence des programmes de calcul.

La deuxième étape se rapporte à la résolution de problèmes où il est demandé de déterminer les valeurs pour lesquelles deux programmes de calcul envoient le même résultat ou des résultats dans un ordre donné, ce qui requiert de nouvelles règles de calcul équationnel éventuellement paramétré.

La troisième étape est entamée lorsqu’on décide de ne plus distinguer les inconnues des paramètres et que l’on travaille avec plusieurs variables, ce qui induit la production, le traitement et l’utilisation des formules et des fonctions à plusieurs variables.

1.4.4 Généraliser et valider algébriquement des conjectures

Généraliser et valider algébriquement des conjectures est une composante de l’activité algébrique fructueuse en matière de production de savoirs, car c’est en généralisant des formules, des propriétés et des méthodes qu'on aboutit à des connaissances mathématiques générales, transférables à d'autres contextes et applicables dans d'autres situations.

Partant de l'étude de quelques cas particuliers, la généralisation permet d'exprimer des propriétés générales par le biais d'une conjugaison harmonieuse d'un raisonnement inductif et d'un symbolisme approprié. Radford (2004) postule que l'entrée des élèves dans une activité de généralisation exige d'eux un engagement dans un processus d'objectivation rendant leur intention perceptible, ce qui suppose la disponibilité et la maîtrise de moyens sémiotiques adaptés (discours, signes, artefacts, etc.). En effet, pour qu'il puisse voir le général dans le particulier, le mathématicien (novice ou confirmé) a recours au signe en tant que représentation adéquate du signifié. Se situant dans le cadre d'une approche anthropologique, l'auteur explique les difficultés des élèves par la rupture, existant entre les généralisations présymboliques, qu'il qualifie de généralisations « factuelles ou contextuelles », et la généralisation algébrique « symbolique », qu'ils doivent surmonter.

La généralisation factuelle est une généralisation d'actions débouchant sur un schème opérationnel objectivé par des ostensifs sémiotiques déictiques tels que le langage, les gestes et le rythme. Cette généralisation est, par exemple, illustrée par les premières productions numériques des élèves travaillant en groupe (en interagissant avec leurs pairs, pointant des figures particulières et faisant usage d'imagination et de prédiction) en vue de découvrir le terme général d'un pattern.

La généralisation contextuelle est un schème opérationnel dont les arguments sont des objets généraux caractérisés par le contexte spatio-temporel de la situation dont ils dérivent. Son objectivation sémiotique est composée de termes génériques. Cette généralisation présymbolique se manifeste, par exemple, lorsque les élèves progressent dans leur raisonnement en utilisant les termes : figure quelconque, figure suivante, etc. En procédant ainsi, ils accèdent à un deuxième niveau de généralisation plus abstrait mais qui reste en deçà du niveau de la généralisation algébrique car il est contextualisé par les propriétés spatiales et temporelles de la situation (Radford, 2004).

Le processus de généralisation algébrique peut être efficacement favorisé par un engagement des élèves dans des activités de recherche de régularité ou de prédiction telles que l'activité suivante (figure 3), où les élèves sont invités à analyser les relations entre les termes consécutifs du pattern et conjecturer des formules permettant de déterminer le nombre d'allumettes nécessaires à la construction d'un motif quelconque de rang n tout en contrôlant algébriquement la validité des formules équivalentes ainsi obtenues par différents raisonnements.

$(1 + 2n; 3 + 2(n - 1); 3n - (n - 1))$

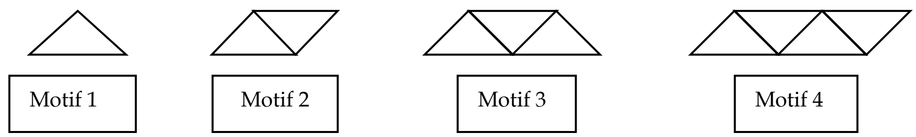

Figure 3 : Exemple de pattern, les triangles accolés

Le processus de généralisation sollicité par l'activité algébrique se déroule généralement en trois étapes :

- Expérimenter en étudiant des cas particuliers, en procédant par essais et erreurs, en exhibant des exemples génériques, etc.;
- Conjecturer une formule ou une propriété générale;
- Valider algébriquement[2] la conjecture obtenue.

1.4.5 Prouver algébriquement un résultat

La composante « Prouver algébriquement un résultat » est une composante essentielle de l'activité algébrique. Bien que la preuve mathématique ne soit pas une composante propre à l'algèbre, elle confère à l'activité algébrique une raison d'être liée à l'argumentation, au jugement et à l'exercice de l'esprit critique. Elle intervient également dans le processus de la construction de la rationalité mathématique chez les élèves.

Cette composante se manifeste et se développe progressivement, tout au long de la scolarité et dès la première année du collège à travers la sensibilisation des élèves à :

- Contrôler un résultat (dans le cas du numérique, par exemple);
- Construire une preuve pragmatique (par induction, par exemples génériques, par référence au contexte sémantique, etc.);
- Élaborer une preuve intellectuelle par application de règles algébriques formelles (Balacheff, 1987).

Concernant les outils mobilisés dans les situations de preuve intellectuelle, Barallobres (2004) note que certains critères de validité ainsi que les règles du débat interélèves ne doivent pas se construire préalablement, hors contexte et de façon détachée de l'activité mathématique, mais on gagne à les considérer comme objets de construction dans la dynamique du processus de preuve. De ce fait, ils ne peuvent pas être institutionnalisés préalablement dans le cadre d'un système

[2] Après modélisation algébrique, étant entendu que les composantes de l'activité algébrique ne sont pas indépendantes. Elles sont susceptibles de s'activer parfois simultanément. Les étudier séparément nous est dicté uniquement par souci méthodologique.

axiomatique mais ils se développent en cours de travail en classe où ils sont sujets à des accords sociaux et culturels.

Les élèves construisent tout au long de leur scolarité un système de normes de travail mathématique conforme à l'institution à laquelle ils sont assujettis. Ce qui fait que, pour plusieurs élèves entrant au lycée tunisien, les activités de preuve et de démonstration sont souvent perçues comme des tâches techniques à exécuter mécaniquement, voire des méthodes institutionnalisées à suivre « c'est comme ça qu'on procède en mathématiques » et, de ce fait, ces activités sont généralement déconnectées des nécessités de la preuve mathématique.

Construire la preuve algébrique et la faire accepter par les élèves en tant qu'outil d'argumentation et de levée de contradiction contribue à son développement et ne manque pas de procurer du sens et de donner une raison d'être à l'activité algébrique.

Notons enfin que le développement du processus de preuve algébrique nécessite également de redonner une place de choix aux éléments technologico-théoriques dont la mobilisation semble être en constante réduction dans les manuels scolaires tunisiens de la première année du secondaire (Kouki et Hassayoune, 2015), car ceux-ci constituent les principaux moyens de contrôle et de justification des calculs algébriques conduits dans les processus de preuve. Nous rejoignons ainsi Assude et al. (2012) dans leur quête des raisons d'être et des finalités de l'enseignement de l'algèbre en redonnant une place importante aux activités de justification des étapes du calcul algébrique.

2. Propositions didactiques

Dans la pratique enseignante courante, au deuxième cycle de l'enseignement de base et au début de l'enseignement secondaire tunisien, le calcul algébrique est généralement mobilisé de façon décontextualisée et coupé des problèmes qui en montrent l'intérêt et qui lui donnent du sens. Dans les programmes et les manuels scolaires, des connexions sont établies entre calcul algébrique et calcul numérique dans une optique assimilant en quelque sorte l'algèbre à une arithmétique généralisée (Hassayoune, 2014). Les activités algébriques sont, de ce fait, réalisées dans le prolongement du calcul numérique (en remplaçant les nombres par des lettres, en guise de généralisation) et sont exclusivement basées sur l'application formelle de règles préalablement mémorisées. Ce constat n'est pas propre au cas tunisien, Chevallard (1989) constate que « la manipulation des expressions algébriques au cours du premier apprentissage […] n'est tendue vers aucun but (mathématique) extérieur au calcul algébrique, lequel doit alors trouver en lui-même la source de ses propres exigences » (Chevallard, 1989, p. 47).

Il est avéré aujourd'hui que de telles pratiques sont inefficaces. Il faudrait plutôt construire du sens aux notions mathématiques étudiées à travers la résolution de problèmes par la voie de la modélisation des situations, la mobilisation des savoirs sous leurs deux formes « outil » et « objet » et l'usage de jeux de cadres adéquats (Douady, 1987).

Dans cette optique, la résolution algébrique des problèmes ne doit pas constituer, comme c'est le cas aujourd'hui dans les systèmes scolaires privilégiant le paradigme de la visite des savoirs (Chevallard, 1999), uniquement un aboutissement de l'enseignement de l'algèbre. Au lieu de considérer qu'une fois les élèves équipés d'aptitudes et d'habiletés algébriques préalables, ils seront à même de pouvoir s'engager a posteriori dans la résolution de problèmes, il serait plutôt question de faire de cette dernière activité le point d'ancrage, voire le support de toute œuvre didactique visant le développement de la pensée algébrique chez les élèves (Marchand et Bednarz, 2000).

Par ailleurs, les programmes scolaires tunisiens ne cessent de rappeler, tout au long de leurs libellés, la nécessité de la mise en fonctionnement des connaissances algébriques acquises en vue de résoudre des problèmes familiers et non familiers, y compris des problèmes d'optimisation. « Les élèves résolvent des problèmes algébriques dans des situations mathématiques ou en rapport avec leur environnement […] Les élèves modélisent des situations réelles […] Les élèves résolvent des problèmes d'optimisation » (République tunisienne, 2005, p. 10).

En nous inscrivant dans cette optique didactique de résolution de problèmes et en tenant compte des résultats de nos investigations épistémologiques et conceptuelles, nous avons élaboré un « Document-ressource » constitué d'un corpus de dix situations didactiques[3] en vue de le mettre à la disposition des enseignants. En guise de contrôle de la validité de ce document, nous avons proposé les situations à un échantillon d'élèves de première année du secondaire et à leurs professeurs pour en apprécier la pertinence en matière de développement de l'activité algébrique telle qu'elle a été caractérisée dans la première partie de cet article. Nous décrivons dans ce qui suit, la méthodologie suivie dans l'élaboration, l'analyse a priori, l'expérimentation et l'analyse a posteriori des situations proposées, ensuite nous présentons à titre d'exemple la mise en œuvre de cette méthodologie dans l'analyse de l'une de ces situations.

2.1 Méthodologie

La théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1991, 1992, 1999) constitue le cadre théorique principal de nos investigations didactiques expérimentales. Cette théorie didactique a l'avantage de situer les activités mathématiques dans

---

[3] Voir leurs énoncés en annexe 1.

l'ensemble des activités humaines habituellement accomplies en les modélisant par des praxéologies ou organisations praxéologiques. Une praxéologie est composée dans sa forme ponctuelle primitive d'un type de tâches, d'une technique servant à l'accomplir, d'une technologie justifiant l'utilisation de cette technique et d'une théorie étayant la technologie. Ainsi, ce cadre d'analyse nous convient dans notre travail d'investigation et s'adapte bien à ce que nous comptons proposer comme alternative didactique. En effet, la modélisation des œuvres mathématiques en termes de praxéologies nous permet de délimiter efficacement les composantes et les manifestations de l'activité algébrique étudiée et d'envisager des conditions et des supports pour son développement.

Nous empruntons également à la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1988), les concepts d'a-didacticité, de milieu, d'ostension assumée ou déguisée et de contrat didactique dans l'analyse des situations didactiques que nous proposons comme support de développement de l'activité algébrique.

Par ailleurs, plusieurs variables ont été prises en compte et opérationnalisées pour faire réussir l'élaboration et la mise en œuvre des situations proposées. Ces variables constituent tout autant des indicateurs de leur validité didactique que des leviers sur lesquels l'enseignant peut s'appuyer pour les gérer en contextes d'enseignement, d'apprentissage et/ou d'évaluation.

Nous citons, ci-dessous, celles que nous avons retenues pour mener nos analyses didactiques :

V_1 : La formulation de l'énoncé de la situation (champ lexical utilisé, ordre d'introduction des informations, mode de questionnement, place de la question dans l'énoncé, interconnexions des notions mobilisées, enjeux heuristiques, etc.);

V_2 : L'accessibilité (la situation et le questionnement du problème sont conçus de façon qu'un élève moyen puisse s'engager dans sa résolution avec les ressources linguistiques et cognitives dont il dispose);

V_3 : La mobilisation de la dialectique outil/objet;

V_4 : Le champ et la nature des objets mathématiques sollicités (domaine numérique, domaine algébrique, statut d'outil, statut d'objet, etc.);

V_5 : Les composantes de l'activité algébrique mobilisées;

V_6 : Les praxéologies algébriques prescrites dans le programme d'algèbre de la première année du lycée tunisien;

V_7 : La conversion des registres sémiotiques et les jeux de cadres sollicités;

V_8 : Le système de représentation symbolique susceptible d'être utilisé lors de l'exécution des tâches par l'élève (lettres, signes opératoires, expressions algébriques, équations, inéquations, systèmes, fonctions, tableaux de valeurs, graphes, etc.).

Nous avons également respecté un certain nombre de conditions permettant aux situations didactiques proposées de constituer de véritables opportunités d'apprentissage. Ces conditions sont inspirées de Brousseau (1988) et Douady (1994); nous les exposons ci-dessous :

- La tâche proposée n'est pas réduite à une simple application des règles ou des méthodes connues. Les connaissances disponibles ne permettent pas à elles seules de résoudre le problème;
- Les nouveaux savoirs déclaratifs (théoriques), procéduraux (savoir-faire) et conditionnels (stratégiques) à construire ou à développer, qui constituent les enjeux de l'apprentissage, sont les outils de la résolution du problème (Tardif, 1992);
- La situation du problème est susceptible de s'exprimer dans au moins deux cadres ou registres sémiotiques.

Sur le plan de l'expérimentation des situations, nous avons pris comme base d'analyse, les composantes et la structure de l'œuvre didactique prévue ou mise en œuvre en termes de moments de l'étude (Chevallard, 2009).

Selon la théorie anthropologique du didactique, pour être efficace, le cheminement de l'étude doit comporter six phases didactiques appelées « moments de l'étude » : le moment de la première rencontre avec le type de tâches T, le moment de l'exploration du type de tâches T et de l'émergence d'une technique τ, le moment de l'élaboration de l'environnement technologico-théorique $[\theta, \Theta]$, le moment du travail de la technique, le moment de l'institutionnalisation et le moment de l'évaluation. Sans qu'ils soient nécessairement successifs sur le plan chronologique, ces moments doivent avoir lieu aux instants opportuns avec des possibilités d'aller-retour, le cas échéant.

Pour avoir une idée d'ensemble du corpus des situations didactiques suggérées, nous consignons dans les tableaux 1 et 2 suivants, leurs principales caractéristiques mathématiques et didactiques. En raison du manque d'espace, nous nous restreindrons, dans le premier tableau, à la considération des trois variables V_1, V_2 et V_3 et nous n'exposerons pas de façon détaillée toutes les analyses, mais uniquement quelques résultats de celles-ci.

Tableau 1 : Caractérisation des dix situations au regard des variables V_1, V_2 et V_3

Variables → / Situations ↓	V1 : Formulation de l'énoncé de la situation	V2 : Accessibilité de la situation	V3 : Mobilisation de la dialectique Outil/objet dans la gestion de la situation
S1	- Langage simple, vocabulaire à la portée. - Phrases courtes. - Questionnement heuristique.	Engagement facile par l'entremise des connaissances arithmétiques disponibles.	Pour le concept d'expression algébrique : des programmes de calcul, outils pour modéliser et objets d'étude à travers leur traitement.
S2	- Questionnement varié et direct. - Énoncés falsifiables.	Possibilité de preuve, par exemples génériques, à la portée de tous les élèves.	Règles du calcul algébrique : - Outils en situation de preuve. - Objets d'étude et de revue en cas d'utilisation maladroite, de remédiation ou d'approfondissement.
S3	Formulation en langage algébrique et questionnement heuristique.	Présentation claire et détaillée des étapes du raisonnement algébrique étudié, convenablement accessible aux élèves.	- Contrôle du résultat de chaque étape. - Retour sur les justifications technologico-théoriques en réexaminant les traitements algébriques réalisés.
S4	- Questionnement clair. - Introduction de mots techniques spécifiques à l'épargne (intérêt composé, taux, etc.)	Un possible démarrage numérique accessible à tous les élèves.	- Règles de transformation de l'expression modélisant le montant final obtenu (factorisation, puissances, etc.). - Outils pour mener une résolution algébrique.
S5	- Présentation en langue naturelle accessible. -Problème d'optimisation.	Une entrée possible par essais et erreurs, ce qui favorise l'expérimentation et l'engagement de tous les élèves.	La technologie : [si $x + y = c$, où c est une constante donnée, alors le produit $x.y$ est maximal lorsque $x = y = c/2$] est en même temps objet d'étude et outil de résolution.

S6	- Formulation langagière simple et concise. - Pourrait s’accompagner de figures géométriques illustratives.	Accessibilité facile par l’intermédiaire de la manipulation des configurations géométriques élémentaires familières.	Le théorème de Pythagore dans sa forme algébrique est un outil de résolution du problème. Il devient un objet d’étude sous des formulations géométriques.
S7	Problème déconnecté : pas de pont apparent entre les données et les inconnues.	Engagement préalable par voie numérique.	-Système de 3 équations linéaires à trois inconnues ramené à un système de 2 équations à 2 inconnues. -Outil de résolution algébrique.
S8	Énoncé langagier étayé par deux tableaux de valeurs.	Les connaissances sur la proportionnalité, disponibles depuis l’école primaire permettent aux élèves de s’engager dans la résolution au moins numériquement.	Équations, inéquations, fonctions linéaires, fonctions affines : outils de résolution mais aussi objets d’étude in situ.
S9	-Toutes les données sont fournies. Questionnement direct.	Accessible, vu la disponibilité de la formule v = d/t.	Outils/objets algébriques et vectoriels (équation, repérage sur une droite orientée)
S10	Formulation adaptée au niveau langagier des élèves du point de vue du vocabulaire et des mots techniques.	Assez bonne accessibilité eu égard à la mise en situation adoptée.	Équations, inéquations, fonctions linéaires et affines : outils de modélisation et objets d’étude en contexte.

Tableau 2 : Objets et processus algébriques susceptibles d'être mobilisés dans la gestion des dix situations

→ Objets et processus algébriques mobilisés / Situations ↓	Expressions algébriques et identités remarquables	Équations et inéquations, Systèmes d'équations et d'inéquations	Fonctions linéaires et affines	Composantes de l'activité algébrique mobilisées
S_1	Produit (résultat) et processus du programme de calcul.	Prolongement : -Recherche du nombre pensé pour que deux programmes de calcul donnent deux résultats égaux, dans un ordre donné, etc. -Considération de deux nombres pensés.	Prolongement : en considérant la variation du produit du programme de calcul en fonction du nombre pensé.	c_1, c_2, c_3, c_4, c_5
S_2	Modélisation des propriétés arithmétiques à l'aide d'expressions algébriques.	X	X	c_1, c_2, c_3, c_4, c_5
S_3	- Équivalence d'égalités algébriques. - Identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$	X	X	c_3, c_5
S_4	Établissement d'une formule générale régissant l'épargne à intérêt annuel composé.	Outils potentiels pour répondre à des questions subsidiaires concernant la détermination de certains paramètres (t, c_0, n), les autres étant fixés. $C_n = C_0(1 + t.10^{-2})^n$		c_1, c_2, c_3, c_4

S_5	- Identités remarquables. - Complétion d'un début de carré. - Majoration d'expressions algébriques.	$2(l+L)=a \Leftrightarrow L=\frac{a}{2}-l$	$S(l)=\frac{al}{2}-l^2$ S n'est pas une fonction du programme. Un traitement algébrique de la situation d'optimisation est alors tout attendu de la part de l'institution.	c_1, c_2, c_3, c_5
S_6	- Théorème de Pythagore. - Règles d'équivalence d'égalités algébriques.	X	X	c_2, c_3, c_5
S_7	Expressions à l'aide d'une inconnue opérationnelle.	Système de 3 équations linéaires du premier degré à trois inconnues.	Ramené à un système de 2 équations à 2 inconnues, une résolution graphique deviendrait possible.	c_1, c_2, c_3, c_5
S_8	Expressions des coûts C et C'en fonction de la distance à parcourir.	Équations et inéquations utilisées dans la résolution algébrique.	Graphes des fonctions définies par : *C(x) = 1//3.x et C'(x) = 1/5.x + 31 (x ≥ 90)*	c_1, c_2, c_3, c_4, c_5
S_9	Expressions des équations horaires.	Équation : $v_1.t = 90 - v_2.t$	En cas de résolution graphique.	c_1, c_2, c_3, c_4, c_5
S_{10}	Expressions des propositions des deux agences.	$60 + 4x = 5x$ $60 + 4x < 5x$	En cas de modélisation fonctionnelle à l'aide de fonctions affines	c_1, c_2, c_3, c_4, c_5

c_1 : Raisonner analytiquement, c_2 : Modéliser des situations, c_3 : Traiter des expressions algébriques, c_4 : Généraliser et valider algébriquement une conjecture, c_5 : Prouver algébriquement.

L'analyse didactique du corpus des dix situations proposées, dont les deux tableaux précédents présentent quelques éléments, met en évidence les faits saillants suivants :

- La gestion des situations proposées favorise le développement de toutes les composantes de l'activité algébrique ainsi que la consolidation des savoirs et des processus algébriques du programme d'une manière efficace et équilibrée. En effet, tout en privilégiant la construction et le traitement finalisés des modèles algébriques, cette gestion ne manque pas d'activer *in situ* des processus transformationnels, équationnels, fonctionnels et graphiques pertinents;
- Notre proposition didactique semble satisfaire aux conditions théoriques retenues pour sa construction. Elle offre des ressources et des outils d'apprentissage qui permettent de rompre avec les pratiques fortement axées sur l'acquisition des techniques algébriques hors contexte et se basant souvent sur l'usage des contrats didactiques d'ostension assumée ou déguisée (Brousseau, 1996) qui laissent une place réduite à la construction des connaissances et ne favorise pas le déplacement topogénétique vers les élèves;
- En privilégiant l'entrée dans l'activité algébrique essentiellement par l'entremise de modélisation de situations mathématiques ou extramathématiques, notre proposition se veut également porteuse d'une intention d'accompagnement des élèves pour surmonter leurs difficultés en langue française, particulièrement accentuées par le changement de la langue d'enseignement des mathématiques de l'arabe au français à partir de ce niveau scolaire;
- La conversion des registres de représentation (rhétorique, numérique, algébrique, géométrique, graphique et fonctionnel) permet de consolider la maîtrise des deux processus sémiotique et sémantique et d'appréhender le sens et la structure des expressions algébriques par l'intermédiaire des transformations syntaxiques appropriées.

2.2 L'expérimentation des situations didactiques

L'expérimentation des situations est réalisée dans un contexte scolaire d'apprentissage au cours de l'année scolaire 2018/2019 et dans deux lycées du Commissariat régional de l'éducation de Monastir (Tunisie).

Nous avons convenu avec les enseignants associés à la recherche que l'expérimentation des situations proposées soit réalisée sous forme de devoir à la maison et que la correction des productions écrites et la séance de compte-rendu en classe soient des occasions propices à l'analyse didactique desdites situations et à l'évaluation de l'impact de leur mise en œuvre sur l'activité mathématique des élèves. Plusieurs raisons nous ont amenés à faire ce choix :

- Le programme scolaire, chargé en contenus disciplinaires (République tunisienne, 2005), laisse peu de place aux activités de recherche et d'approfondissement. Le temps scolaire (4 h/semaine) ne suffit même pas à couvrir ce programme;
- La préconisation par l'institution des devoirs à la maison n'a pas été suivie de dispositifs d'accompagnement étayant sa consistance, son contenu et ses objectifs. Notre proposition didactique s'inscrit donc également dans cette perspective explicative de ce qui pourrait être préconisé en termes de développement d'attitudes de recherche, d'initiation à la rédaction des solutions et de gestion de situations non familières;
- Le choix de proposer ces situations en devoirs à la maison permet de laisser aux élèves plus de temps à la réflexion, la résolution et la rédaction soignée des solutions. Les analyses didactiques de leurs acquis s'en trouveraient ainsi améliorées d'autant plus que ceux-ci sont susceptibles de transparaître sous deux formes, l'une écrite (à la maison) et l'autre orale et présentielle (en séance de correction).

Les activités sont proposées aux élèves de trois classes de première année du secondaire au fur et à mesure de l'avancement du programme d'algèbre et en accompagnement des cours ordinaires, sous forme de devoirs à la maison. Cette modalité fait en sorte que le temps scolaire puisse être consacré à la gestion des erreurs et à la remédiation aux insuffisances qui seront éventuellement constatées.

Participent à cette expérimentation 89 élèves scolarisés dans trois classes d'effectifs respectifs 32, 35 et 22, ainsi que leurs enseignants. Nous avons tenu à informer ces derniers, à temps, de l'objectif et des supports de la recherche et à les convier à les étudier avant l'expérimentation. Ceci leur a permis de programmer des interventions pédagogiques (proposition de situations selon la progression dans l'application du programme et en fonction des besoins ressentis, correction et annotations des productions écrites, déroulement des séances de correction, etc.) adaptées du point de vue du calibrage du travail demandé, des plages horaires et de l'orchestration de la mise en œuvre. La réponse au questionnaire qui leur a été adressé nous a révélé leurs avis sur la pertinence didactique des situations et leur a permis également de prévoir et d'anticiper les comportements de leurs élèves dans la gestion des situations.

Parmi les dix situations proposées, une situation semble particulièrement pertinente de par son aspect non familier, son contexte géométrico-algébrique et son caractère général et évolutif. Nous la choisissons comme exemple pour illustrer notre démarche d'analyse didactique du corpus des situations. Les raisons de notre choix étant les suivantes :

- Cette situation d'optimisation est recommandée par le programme scolaire et est non familière aux élèves de la première année du secondaire qui sont souvent exposés aux activités de calcul algébrique formel hors contexte;
- La gestion de cette situation fait appel à plusieurs registres de représentation ce qui permet de donner sens aux différentes manipulations par l'entremise de leur mutuelle conversion in situ;
- Le paramétrage des données de la situation lui confère un caractère général. De ce fait elle engendre toute une famille de situations dont la modélisation par une expression paramétrée favorise l'émergence de nouvelles questions et l'accroissement des connaissances.

Nous présenterons dans les sections suivantes, nos analyses a priori et a posteriori de cette situation, en discutant sa potentielle efficacité dans le développement de l'activité algébrique chez les élèves à l'entrée au lycée tunisien.

2.3 Analyse a priori de la situation choisie

La situation didactique, intitulée « Problème d'optimisation » a pour objectif d'établir une propriété remarquable des rectangles isopérimétriques. Elle porte sur l'optimisation de l'aire d'une parcelle de terrain rectangulaire à périmètre fixé en permettant aux élèves d'investir leurs connaissances algébriques pour répondre, dans un contexte idoine, à la question « Comment optimiser une quantité dépendante d'une autre quantité? ». Cette situation s'inscrit également dans le vif des injonctions institutionnelles relatives à la mobilisation des savoirs algébriques construits dans la résolution de problèmes (République tunisienne, 2005).

2.3.1 Analyse a priori du point de vue mathématique

Cette situation fait partie d'une famille de situations engendrée par ce que Chevallard appelle « question génératrice » au sens de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 2009, p. 27). La situation répond, dans un contexte donné, à la question « Comment optimiser une quantité dépendant d'une autre? ».

La gestion de cette situation génère une activité mathématique relative au type de tâches T : « Optimiser algébriquement une quantité dépendante d'une autre quantité »; selon le contexte et le niveau scolaire, plusieurs techniques τ_k attendues par l'institution sont susceptibles d'être convoquées pour accomplir ces tâches. L'activité mathématique à déployer peut donc être symbolisée en dernière instance, par $[T, \tau_k, \theta_k, \Theta_k]_{1\leq k\leq 3}$ où, suivant l'avancement dans le cursus scolaire, les τ_k sont :

τ_1 : « Majoration algébrique de la quantité à optimiser »;

τ_2 : « Détermination graphique des extremums d'une fonction modélisant la quantité à optimiser »;

τ_3 : « Détermination des extremums d'une fonction en utilisant sa fonction dérivée ».

Le niveau scolaire étudié restreint notre analyse à la considération de la technique τ_1[4].

Tel qu'il est posé, ce problème appelle la construction d'un modèle algébrique et à l'engagement dans un processus de résolution s'appuyant sur un minimum de connaissances mathématiques (formules donnant l'aire et le périmètre d'un rectangle et identités remarquables).

La présence d'un paramètre (a périmètre du rectangle) confère à l'étude un caractère général permettant de gérer, dans un même élan, toute une famille de situations faisant intervenir l'aire, le périmètre et les dimensions d'un rectangle donné. Cette paramétrisation de la situation permet d'élargir les aspects de son étude au-delà de la question posée en poussant le processus d'algébrisation entrepris dans sa modélisation jusqu'à sa dernière étape (Ruiz-Munzón et al., 2012) à travers la manipulation de formules à plusieurs variables (toutes équivalentes à la relation $2l^2 - al + 2S = 0$).

Enfin, l'aspect significatif et finalisé de la situation (contexte géométrique d'optimisation) ne manque pas de susciter la motivation des élèves à relever le défi et à s'engager dans la résolution en mobilisant, en contexte, leurs savoirs et savoir-faire algébriques.

Si l'on désigne par l et L les dimensions du rectangle et S son aire, on aura successivement les écritures suivantes :

$$2(l+L) = a \Leftrightarrow L = \frac{a}{2} - l \quad (1)$$

$$\text{or} \quad S = lL \ \text{ donc } \ S = l\left(\frac{a}{2} - l\right) \quad (2)$$

$$S = \frac{al}{2} - l^2 \quad (3)$$

[4] Conformément au programme de la première année du secondaire actuellement en vigueur en Tunisie, l'analyse fonctionnelle porte uniquement sur les fonctions linéaires et affines. Il est donc hors de question, pour ce niveau scolaire, d'envisager l'étude des variations des fonctions autres que celles-ci.

$$S = \frac{al}{2} - l^2 - \frac{a}{16}^{2} + \frac{a^2}{16} \quad (4)$$

$$S = -(l^2 - \frac{al}{2} + \frac{a^2}{16}) + \frac{a^2}{16} \quad (5)$$

$$S = \frac{a^2}{16} - (l - \frac{a}{4})^2 \quad (6)$$

L'égalité (6) montre que l'aire S est maximale lorsque $l - \frac{a}{4} = 0$; elle est alors égale à : $\frac{a^2}{16}$. Dans ce cas on a : $l = L = \frac{a}{4}$, ce qui veut dire que la surface clôturée est un carré de côté $\frac{a}{4}$.

Notons enfin que le nombre a est susceptible de jouer le rôle d'une variable didactique sur laquelle l'enseignant peut jouer pour gérer le travail des techniques de transformation des expressions algébriques à l'aide d'une identité remarquable. Ainsi, celui-ci pourrait par exemple commencer par traiter des cas particuliers où le réel a est donné numériquement avant d'aborder le cas général.

Notons également que c'est dans ce même ordre d'idées que nous avons choisi un rectangle de périmètre a afin que le début du développement d'un carré ne soit pas visible du premier coup par les élèves.

Les écritures (1) et (2) sont obtenues par application directe des formules donnant le demi-périmètre et l'aire d'une surface rectangulaire.

L'écriture (3) est obtenue par un développement de l'expression algébrique précédente.

Les écritures (4) et (5) ne sont pas, a priori, évidentes pour un élève moyen du niveau scolaire étudié. Elle nécessite une bonne observation de la structure de l'expression (3) qui permet de faire apparaître un début du développement d'un produit remarquable. La technique sous-jacente est d'ailleurs utilisée pour établir la forme canonique d'un trinôme du second degré et ouvre ainsi la porte à plusieurs applications algébriques.

La dernière étape du processus d'optimisation prévu consiste à voir dans l'expression (6) une différence d'une quantité constante ($\frac{a^2}{16}$) et d'une quantité variable dépendant de l, à savoir $(l - \frac{a}{4})^2$ et de déployer un raisonnement analytique qui fournit la condition sur la variable l pour que l'aire S soit maximale.

La composante « Traiter des expressions algébriques » de l’activité algébrique est ainsi sollicitée et mobilisée in situ. Chaque pas de la chaîne du raisonnement algébrique est validé et motivé par un but, une preuve et une technologie spécifique.

Notons que malgré la modélisation de l’aire S du rectangle par l’expression d’une fonction polynôme du second degré de variable l ($S(l)=\frac{a}{2}.l-l^2$), il n’est malheureusement pas possible d’accomplir le type de tâches proposé en utilisant une technique d’optimisation fonctionnelle, et ce, conformément au programme scolaire de la première année du secondaire qui limite l’étude des variations fonctionnelles aux seules fonctions linéaires et affines. Cette technique pourra alors être mise en œuvre l’année scolaire suivante (deuxième année du secondaire) pour traiter le type de tâches considéré.

Le tableau 3 ci-dessous fait état des connaissances mathématiques mises en jeu, des composantes de l’activité algébrique à mobiliser et des représentations sémiotiques susceptibles d’être convoquées.

Tableau 3 : Aspects sémantiques et sémiotiques de la situation

Objets mathématiques mis en jeu	Composantes de l’activité algébrique convoquée	Formulation de l’énoncé de la situation	Les systèmes de représentation symbolique mobilisés
- Formules donnant le périmètre et l’aire d’un rectangle. - Identités remarquables. - Optimisation de la valeur d’une grandeur variable.	- Modéliser une situation. - Raisonner analytiquement. - Traiter des expressions algébriques. - Prouver algébriquement un résultat.	- Présentation de l’énoncé en langue naturelle accessible. - Données relationnelles non explicitées. - Questionnement d’optimisation. - Aucune indication sur le processus de résolution à suivre.	- Algébrique. - Géométrique. - Rhétorique.

2.3.2 Analyse a priori du point de vue didactique

Compte tenu des résultats de l’analyse a priori de l’activité mathématique et du niveau des élèves auxquels s’adresse la situation, nous prévoyons que l’action didactique réservera une place de choix au moment de la première rencontre avec le type de tâches projeté. Ainsi, la compréhension de l’enjeu du problème, la distinction de ce qui a été donné de ce qui ne l’est pas, l’exemplification à l’aide de données numériques, etc., constituent des arrêts clés dans ce moment didactique de l’étude.

Dans le moment de l'exploration du type de tâches et l'émergence de la technique susceptible de l'accomplir, la modélisation algébrique de la situation jouera un rôle prépondérant; c'est elle qui traduira la situation en termes d'objets algébriques (expressions littérales, inégalités et égalités) manipulables et se prêtant à des transformations porteuses de nouveaux sens et productrices de nouvelles connaissances. Nous prévoyons des interventions décisives et calibrées de la part de l'enseignant ainsi qu'une activité soutenue des élèves au cours de ces deux moments de l'exploration du type de tâches et de l'émergence de la technique compte tenu du caractère non familier de la situation et des difficultés de réinvestissement des connaissances disponibles en contexte de résolution de problèmes.

La mobilisation des éléments du bloc technologico-théorique, étayant la technique sollicitée, s'accomplira alors au fur et à mesure de l'avancée dans le processus d'algébrisation (expression de l'aire S en fonction d'une dimension du rectangle et son écriture sous une forme permettant de conclure).

Deux composantes d'une technique concluante pourraient particulièrement être travaillées et institutionnalisées au cours des deux moments didactiques « Travail de la technique » et « Institutionnalisation », la première a trait au traitement des expressions qui se présentent comme début du développement d'un carré et la deuxième concerne le processus d'optimisation d'une grandeur dépendante d'une variable en recourant à une majoration adéquate de l'expression algébrique modélisante de cette grandeur.

Enfin, dans le moment de l'évaluation, l'enseignant pourrait revenir sur la même situation mais en changeant les données du problème (en jouant sur la variable « périmètre a ») ou encore proposer d'autres situations de la même famille (recherche de deux ou trois nombres de somme constante et de produit maximal, par exemple). Dans cet ordre d'idées, une situation particulièrement intéressante de par les contraintes supplémentaires qu'elle induit, pourrait alors être proposée :

> Soit (C) un cercle de rayon r donné. Déterminer, en fonction de r, les dimensions d'un rectangle d'aire maximale inscrit dans (C).

Le carré de côté $r\sqrt{2}$, répondant à la question pourrait alors s'obtenir soit en appliquant la règle permettant de maximiser le produit de deux nombres positifs de somme constante, soit en calculant le carré de l'aire du rectangle en fonction de r et de l'une de ses dimensions et majorer l'expression obtenue par $4r^4$.

En conclusion, on constate que la situation proposée possède un potentiel a-didactique non négligeable. L'intention d'enseigner des nouveaux savoir-faire n'est pas explicite, l'enjeu est heuristique et vise l'investigation algébrique du sens des variations des aires des rectangles isopérimétriques.

De plus, l’accessibilité à la gestion de la situation est grandement facilitée eu égard à son support géométrique et aux outils mathématiques élémentaires requis. En fait, ce que l’on veut faire apprendre aux élèves ce ne sont point des savoirs déclaratifs (théoriques) tout court, mais c’est un processus d’optimisation lequel processus constitue le moyen et l’outil de résolution du problème proposé. En outre le contrôle que peut exercer chaque élève sur ses propres réponses est également facilité par de possibles vérifications ad hoc portant sur des calculs simples d’aires de surfaces rectangulaires.

Pour terminer cette analyse a priori, notons que la situation considérée se prête également à une gestion informatique favorisant l’intégration des TICE dans l’apprentissage des mathématiques. Deux possibilités sont ainsi offertes :

1. À l’aide de logiciels de géométrie dynamique à l’instar de Cabri-Géomètre ou GeoGebra, il est possible de modéliser la situation par la construction d’un rectangle de périmètre fixé et l’affichage de son aire, et procéder, par déformation du rectangle, à des conjectures portant sur le sens des variations de cette aire;
2. À l’aide d’un tableur (Excel, par exemple), en calculant le produit P de deux nombres a et b dont la somme est constante, en observant le sens de variation de P et en émettant des conjectures portant sur la valeur maximale de P.

Cette opportunité permet aux élèves, en les familiarisant avec l’environnement informatique pour l’apprentissage humain (EIAH), d’expérimenter, de visualiser l’état maximal d’une grandeur variable et de contrôler les résultats obtenus. Cela serait alors une occasion propice à l’outillage de la classe d’un support technologique pendant les deux moments de la première rencontre avec le type de tâches et de l’évaluation.

2.3.3 Conclusion de l’analyse a priori de la situation choisie

L’analyse a priori de la situation permet de souligner sa richesse à la fois sur les plans mathématique et didactique. Sa gestion favorise la mobilisation et la consolidation des connaissances ainsi que des processus algébriques visés par le programme d’enseignement. Ainsi le traitement des expressions algébriques, les identités remarquables et les techniques de majoration et d’optimisation de quantités dépendantes sont mobilisés.

L’articulation des deux cadres géométrique et algébrique et la conversion des registres sémiotiques dans chacun d’eux ont permis de conférer du sens aux activités qui seront entreprises lors des moments de l’étude. Les composantes « Modéliser des situations », « Traiter des expressions algébriques », « Raisonner analytiquement » de l’activité algébrique sont susceptibles d’être principalement mobilisées et développées.

2.4 Analyse a posteriori de la situation choisie

La situation articule les deux cadres géométrique et algébrique et pose le problème d'optimisation de l'aire d'une surface rectangulaire de périmètre constant. Elle s'inscrit dans le cadre du développement des aptitudes algébriques stipulées dans le programme scolaire en vigueur.

2.4.1 Analyse des productions écrites des élèves

L'analyse des productions écrites des élèves (réalisées à la maison) montre que la majorité d'entre eux (80 %) se sont engagés dans la résolution du problème, mais rares sont ceux (10 %) qui ont efficacement traité le problème proposé.

Certains élèves (20 %) procèdent par essais et erreurs, en considérant des cas particuliers ($l = a/3$, $L = a/6$; $l = a/5$, $L = 3a/10$; $l = a/4$, $L = a/4$) ou en donnant au paramètre a une valeur numérique.

D'autres modélisent algébriquement la situation, mais commettent des erreurs de calcul algébrique, ce qui les a empêchés de trouver la bonne réponse. Le tableau 4 suivant résume les niveaux de réussite et le genre des démarches adoptées dans la gestion de cette situation par les 89 élèves testés.

Tableau 4 : Niveaux de réussite des élèves testés

	Adoption d'une méthode inductive en envisageant des cas particuliers	Adoption d'une modélisation algébrique		Non-réponse
		Concluante	Non concluante	
Nombre d'élèves	18	9	44	18

De par son caractère inhabituel et non familier, cette situation a engendré des réticences et des non-réponses de la part des élèves (20 %), mais elle n'a pas manqué de favoriser le recours à la modélisation algébrique par 60 % des élèves et à la mobilisation des connaissances disponibles (formules du périmètre et de l'aire d'un rectangle, traitement d'expressions algébriques, identités remarquables, inégalités, etc.) en contexte de résolution de problème.

2.4.2 Analyse de la séance de correction du devoir à la maison

Au vu des modestes résultats des élèves relevés dans leurs productions écrites, l'enseignant décide de réserver la majeure partie de l'apprentissage à l'explication de l'enjeu du problème posé et à la modélisation algébrique de la situation (moments de la première rencontre avec le type de tâches et de l'émergence d'une technique).

En s'adressant à toute la classe et par des questions ciblées, l'enseignant amène ses élèves à dégager des hypothèses, les éléments variables (les dimensions de la surface rectangulaire) et l'élément constant (le périmètre a, où a désigne un nombre réel strictement positif donné). La symbolisation des dimensions variables n'a pas soulevé de difficultés, les élèves se sont habitués à les noter l (pour largeur) et L (pour longueur).

Après l'écriture au tableau, par un élève, des expressions littérales donnant le périmètre et l'aire du rectangle en fonction de l, L et a, un travail de groupes s'est vite mis en place. Le professeur circule dans les rangs s'empêchant de suggérer une quelconque réponse, mais toujours disponible et prêt à encourager ses élèves à persévérer dans leur recherche en relançant le débat au sein des groupes par des questions du genre : « où en êtes-vous? », « êtes-vous sûrs de ce résultat? », « comment comptez-vous maximiser cette expression? », « comment allez-vous le prouver? », etc. Bref, tout en s'interdisant de répondre à la place des élèves, l'enseignant tient à les encourager et à ne pas les laisser sans aide.

À ce stade, un silence s'installe dans les groupes qui sont toujours en possession des deux formules initiales et qui s'activent à les exploiter à bon escient :

$$a = 2(l + L) \text{ et } S = l.L$$

Remarquant une initiative particulièrement intéressante émanant d'un groupe qui est arrivé à écrire l'aire en fonction d'une seule variable (l), le professeur invite l'élève rapporteur du groupe à faire part de la découverte :

$$S = l(\frac{a}{2} - l)$$

Celui-ci écrit alors :

$$S = l(\frac{a}{2} - l) = -l^2 + \frac{al}{2}$$

L'enseignant intervient alors et demande à l'élève d'écrire cette dernière expression de façon à faire apparaître un carré, une identité remarquable. Mais la présence du signe « - » devant l^2 n'a pas facilité la tâche et un nouveau moment de silence s'installe dans la classe.

L'enseignant intervient de nouveau et débloque la situation en suggérant :

$$S = l(\frac{a}{2} - l) = -l^2 + \frac{a}{2}l = -\left[l^2 - \frac{al}{2}\right]$$

Arrivé à ce stade, l'élève au tableau, accompagné de quelques camarades, et aidé par l'enseignant termine le travail en écrivant :

$$S = l(\frac{a}{2} - l) = -l^2 + \frac{al}{2} = -\left[l^2 - \frac{al}{2}\right] = -\left[(l - \frac{a}{4})^2 - \frac{a^2}{16}\right] = \frac{a^2}{16} - (l - \frac{a}{4})^2 \leq \frac{a^2}{16}$$

Cela montre que l'aire est maximale lorsque $l = a/4$ et $L = a/4$, c'est-à-dire lorsque la surface clôturée est un carré de côté $a/4$.

L'enseignant adopte une démarche d'apprentissage qui met en œuvre une intervention didactique prenant en charge principalement les deux moments exploratoire et technologico-théorique. Un tel choix semble orienter ses interventions didactiques vers des pratiques constructivistes qui sont caractérisées par la contextualisation des activités de résolution de problèmes proposées et par la construction de connaissances à travers la mobilisation des acquis antérieurs sous des contraintes déterminées (Bosch et Gascon, 2002).

En guise de travail de la technique et d'institutionnalisation de cette technique utilisée dans la réalisation de ce type de tâches (moments du travail de la technique et d'institutionnalisation), l'enseignant pose ensuite à ses élèves le problème général suivant :

> Soit deux nombres réels positifs de somme constante c donnée. Déterminer ces nombres de façon que leur produit soit maximum.

Les élèves n'ont pas rencontré de difficultés majeures dans le processus de la modélisation algébrique de la situation. Ils ont proposé une symbolisation littérale des nombres cherchés en les notant x et y et ont écrit successivement les relations :

$$x + y = c \quad \text{et} \quad xy \text{ maximal.}$$

C'est à partir de ce moment que l'enseignant est intervenu pour accompagner la réflexion de ses élèves en les invitant à utiliser la première relation et à écrire autrement le produit xy.

Le processus algébrique est alors déclenché et la classe obtient successivement les écritures suivantes :

$$\begin{aligned} xy &= x(c - x) \\ &= xc - x^2 \\ &= -(x^2 - xc) \\ &= -[(x - \frac{c}{2})^2 - \frac{c^2}{4}] \\ &= \frac{c^2}{4} - (x - \frac{c}{2})^2 \leq \frac{c^2}{4}. \end{aligned}$$

Le produit est alors maximal lorsqu’il est égal à $c^2/4$; dans ce cas on a :

$$x = c/2 \text{ et } y = c/2.$$

Le professeur fait remarquer aux élèves qu’on pourrait également raisonner autrement en soulignant que la dernière expression est une différence de deux quantités qui prend une valeur maximale lorsque la quantité positive à retrancher $(x - c/2)^2$ est minimale, c’est-à-dire, dans ce cas, nulle. On aura alors : $x - c/2 = 0$, ce qui implique que : $x = y = c/2$.

Malgré un encadrement très rapproché de la part du professeur, l’espace des responsabilités des élèves est resté assez important. La relance répétée de leur activité a ainsi permis de circonscrire leur travail mathématique dans le vif du but poursuivi, à savoir « optimiser une grandeur variable à l’aide de l’outil algébrique ».

Par ailleurs, il semble également que les élèves se sont trouvés, par moments, désarmés devant cette situation non familière, non par déficit de connaissances théoriques, mais par manque de fonctionnalité effective des savoirs appris.

2.4.3 Avis des enseignants sur la pertinence didactique de la situation choisie

La réponse au questionnaire qui a été adressé aux enseignants associés à l’expérimentation nous a révélé leurs avis sur la pertinence didactique de la situation et leur a permis également de prévoir et d’anticiper les comportements de leurs élèves face au travail proposé.

Les avis des enseignants questionnés sont très divers, voire parfois divergents. Certains d’entre eux apprécient l’activité mathématique susceptible d’être convoquée et soulignent son potentiel a-didactique. Ils perçoivent également sa portée à rendre fonctionnels les acquis algébriques disponibles, à travers les activités de résolution de problèmes.

D’autres pensent que les élèves seront rebutés par les difficultés rencontrées et ne fourniront, de ce fait, aucun effort de réinvestissement des connaissances algébriques construites.

Quatre des dix enseignants questionnés doutent des apports didactiques de la situation et vont même jusqu’à affirmer que les élèves ne disposent pas, à ce niveau scolaire, des outils nécessaires pour résoudre ce problème d’optimisation.

Ceci rend probable l’hypothèse selon laquelle les élèves concernés par notre étude ne sont pas suffisamment exposés aux situations complexes dont la gestion nécessite une modélisation et un traitement algébrique, et justifie notre intention de contribuer, par ce travail, à mettre à la disposition des enseignants des supports didactiques susceptibles de développer une véritable activité algébrique à ce niveau scolaire. Le tableau 5 résume ces avis partagés des enseignants (leurs réponses sont transcrites en italique) :

Tableau 5 : Appréciation par les enseignants de la pertinence didactique de la situation

Solution (concise) attendue de la part des élèves :

- Majoration de l'aire du rectangle exprimée en fonction d'une dimension.
- Écriture de l'expression donnant l'aire du rectangle sans arriver à la maximaliser.
- L'élève de première année du secondaire n'a aucun moyen pour déterminer la valeur maximale d'une expression algébrique du second degré en l, où l désigne une variable réelle [*sic*].

Appréciation de la situation en termes de conformité avec le programme en vigueur, de clarté de l'énoncé et de potentiel d'activité algébrique :

Mettre une croix dans la case correspondant à votre appréciation (0 : non pertinente; 1 : peu pertinente; 2 : pertinente; 3 : très pertinente).

0	1	2	3
4/10	2/10	4/10	0/10

Commentaires (pertinence didactique de l'activité en matière de mobilisation de contenus, de raisonnements et de processus algébriques) :

- Situation difficile pour un élève de première année du secondaire.
- Le programme scolaire en vigueur ne fournit pas les outils théoriques et méthodologiques pour résoudre le problème.
- La situation est conforme au programme et est utile à la mise en fonctionnement des connaissances algébriques disponibles.

2.4.4 Conclusion de l'analyse a posteriori de la situation choisie

Compte tenu de leurs productions écrites à la maison et de leur comportement en séance de correction, les élèves ont fait preuve d'attitude de recherche et de connaissances mathématiques relativement suffisantes leur permettant d'entrer dans la gestion de la situation. Inversement, eu égard au pourcentage relativement faible des non-réponses, la situation proposée est apparue convenablement accessible à la diversité des profils cognitifs des élèves de ce niveau scolaire.

Par ailleurs, l'analyse des praxéologies algébriques que la situation sollicite montre qu'elle dispose d'un fort potentiel de développement de l'activité algébrique chez les élèves au début de l'enseignement secondaire tunisien. Elle dispose d'un milieu didactique riche permettant aux élèves d'interagir et de participer activement à la résolution du problème d'optimisation posé. Elle permet également de mettre en évidence l’efficacité de la démarche algébrique dans la résolution de ce genre de problèmes par la voie d’une modélisation appropriée et d’une mobilisation à bon escient des techniques et des règles du calcul algébrique.

Conclusion

Par l’entremise d’une revue de littérature, nous nous sommes d’abord intéressés au décryptage de l’essence et des caractéristiques épistémologiques et conceptuelles de l’activité algébrique, ce qui nous a conduits à délimiter ses composantes cognitives ainsi que les types de tâches et les techniques qui lui sont associés.

Ainsi, nous avons constaté que l’activité algébrique se mobilise et se développe de façon optimale en contexte de résolution de problèmes faisant intervenir des relations et des variations quantitatives et nécessitant des aptitudes de modélisation et de raisonnement analytique. De plus, l’activité algébrique est sous-tendue par des aptitudes de traitement d’expressions algébriques, de généralisation et de preuve.

Nous avons ensuite présenté un ensemble de conditions et de critères servant à élaborer et analyser des supports didactiques susceptibles de favoriser le développement de l’activité algébrique chez les élèves à l’entrée au lycée tunisien. Dix situations didactiques sont ainsi élaborées et analysées en vue d’être proposées aux enseignants pour les aider à faire évoluer leurs pratiques et rendre leurs élèves plus aptes à mobiliser leurs acquis algébriques pour résoudre des problèmes.

L’expérimentation et les analyses a priori et a posteriori d’une situation d’optimisation nous ont alors permis de confronter, sur un exemple, nos propositions didactiques aux principales caractéristiques épistémologiques et conceptuelles de l’activité algébrique mises en évidence dans la première partie de cet article.

Ainsi les constats suivants sont relevés :

- L’expérimentation a permis aux élèves de gérer une situation problématique en faisant appel à des praxéologies algébriques pertinentes et conformes au programme scolaire actuellement en vigueur. La fonctionnalité et la raison d’être des connaissances mobilisées sont en grande partie, dégagées et mises en lumière in situ;
- Les difficultés rencontrées par les élèves dans la gestion de la situation font apparaître leur incapacité à travailler le modèle algébrique par l’intermédiaire d’un traitement qui permet de conclure. Les remédiations apportées par l’enseignant à ces difficultés lors de la séance de correction du devoir ont permis de parfaire leurs pratiques de modélisation et

> d'analyse des situations, et de développer chez eux l'aptitude à articuler les deux aspects sémantique et syntaxique des écritures algébriques.

Nous estimons que ce que nous suggérons pourrait constituer des éléments de contenu scientifique et didactique en matière de formation initiale et continue des enseignants. En effet, sans l'association et la conviction de ceux-ci à cette alternative, rien ne sera possible et tout restera lettre morte comme c'était malheureusement le cas pour plusieurs initiatives didactiques innovantes récemment mises en place dans le système éducatif tunisien et vite abandonnées (l'approche par compétences, l'enseignement optionnel interdisciplinaire, l'approche par projets, etc.).

Par ailleurs, comme toute initiative personnelle de recherche, ce travail n'est pas dépourvu d'insuffisances et présente certaines limites.

Malgré la diversité de nos références épistémologiques et théoriques ainsi que la prise en compte des apports récents de la recherche en didactique de l'algèbre, notre cadre de référence de l'activité algébrique reste, tout de même, une construction théorique falsifiable en la confrontant davantage à la contingence de l'enseignement de l'algèbre dans les différents niveaux scolaires.

Un approfondissement de cette initiative et des perspectives de recherches pourrait concerner l'instauration à grande échelle des alternatives didactiques proposées sur le terrain de l'enseignement de l'algèbre au lycée tunisien. Des prolongements porteraient alors sur l'étude de l'impact des suggestions didactiques sur les pratiques ordinaires des enseignants en les accompagnant dans l'analyse réflexive de leurs interventions et dans l'appropriation de supports didactiques plus robustes.

Références

Assude, T., Coppé, S. et Pressiat, A. (2012). Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège. Atomisation et réduction. *Recherches en didactique des mathématiques, Hors-série,* 41–62.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situation de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(2) 147-176. https://doi.org/10.1007/BF00314724

Barallobres, G. (2004). La validation intellectuelle dans l'enseignement introductif de l'algèbre. *Recherches en didactique des mathématiques, 24*(2.3), 285-328.

Ben Nejma, S. (2009). *D'une réforme à ses effets sur les pratiques enseignantes. Une étude de cas : l'enseignement de l'algèbre dans le système scolaire tunisien* [thèse de doctorat, Université Paris VII et Université de Tunis]. TEL. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01267461

Ben Nejma, S. (2010). Les difficultés rencontrées dans la résolution algébrique des problèmes du premier degré. *Revue Africaine de DIdactique des Sciences et des Mathématiques RADISMA*, *5*.

Bosch, M. et Gascon, J. (2002). Organiser l'étude 2. Théories & empiries. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot et R. Floris (dir.), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques* (p. 23-40). Éditions la Pensée sauvage.

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique : Le milieu. *Recherche en didactique des mathématiques*, *9*(3), 309-336.

Brousseau, G. (1996). L'enseignement dans la théorie des situations didactiques. Dans R. Noirfalise et M.-J. Perrin-Glorian (dir.), *Actes de la 8e école d'été de didactique des mathématiques* (p. 3-46). IREM de Clermont Ferrand.

Burgermeister, P.-F. et Dorier, J.-L. (2013). La modélisation dans l'enseignement des mathématiques en Suisse romande. *Petit x*, *91*, 5-24.

Carraher, D. W., Martinez, M. V. et Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education,* 40, 3-22. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7

Carraher, D. W., Schliemann, A. D. et Schwarz, J. L. (2008). Early algebra is not the same as Algebra early. Dans J. Kaput., D. Carraher et M. Blanton (dir.), *Algebra in the Early Grades* (p. 235-272). Erlbaum.

Chevallard Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège, deuxième partie, perspectives curriculaires : La notion de modélisation. *Petit x, 19*, 43-72.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné* (2e éd.). Éditions la Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques, 12*(1), 73-112.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 28*(2), 135-182.

Chevallard, Y. (2007). *Séminaire de didactique des mathématiques PLC2, année universitaire 2006/2007*. IUFM d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (2009). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. Dans C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F.

Vandebrouck et F. Wozniak (dir.), *Actes de la XV*[e] *école d'été de didactique des mathématiques* (p. 81-108). Éditions la Pensée sauvage.

Cousin, V. (1826). *Œuvres de Descartes, Tome onzième* (p. 201- 329). F. G. Levrault.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*(2), 5-31.

Douady, R. (1994). Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. *Repères Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques, 15*, 37-61.

Frege, G. (1882). *Écrits logiques et philosophiques* (traduction et introduction par Claude Imbert). Éditions du Seuil.

Gascon, J. (1993). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée ». *Petit x, 37*, 43-63.

Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques, 17*(2), 167-210.

Hassayoune S. (2014). *L'enseignement de l'algèbre en Tunisie, à la jonction classe du tronc commun/classe d'orientation du cycle secondaire : analyse praxéologique multidimensionnelle* [mémoire de maîtrise inédit]. Université virtuelle de Tunis.

Hitt, F., Saboya, M. et Cortés Zavala, C. (2016). An arithmetic-algebraic work space to promote free transit between the arithmetic and algebraic thinking: triangular numbers. *ZDM Mathematics Education, 48*(6), 775-791. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0749-5

Kaput, J. J. (1995). A research base supporting long term algebra reform. Dans D. T. Owens, M. K. Reed, et G. M. Millsaps (dir.), *Proceedings of the 17th Annual Meeting of North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-NA). Volume 1* (p. 71-94). ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. Dans C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde et A. Pérez (dir.), *Proceedings of the 8*[th] *International Congress on Mathematical Education* (p. 271-290). Sociedad Andaluza de Educación Matemática. Thales.

Kieran C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139-151.

Kouki, R. (2008). *Enseignement et apprentissage des équations, inéquations et fonctions au secondaire : entre syntaxe et sémantique* [thèse de doctorat, Université de Lyon 1 et

Université de Tunis]. TEL. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00346287v2/document

Kouki, R. et Hassayoune, S. (2015). Développement de la pensée algébrique dans le curriculum tunisien : Analyse épistémologique et institutionnelle. Dans L. Theis (dir.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes du colloque EMF2015* (p. 290-312). Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene.

Marchand, P. et Bednarz N. (2000). Développement de l'algèbre dans un contexte de résolution de problèmes. *Bulletin AMQ (Association mathématique du Québec), XL*(4), 15-25.

République tunisienne. (2005). *Programmes de mathématiques. 1re et 2e années du secondaire.* Ministère de l'Éducation et de la Formation. https://www.sigmaths.net/Reader.php?var=Programme%20math_1_2anne.pdf

Oliveira, I., Rhéaume, S. et Geerts, F. (2017). Apprentissage de l'algèbre : procédures et difficultés rencontrées lors de la résolution de problèmes. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, *20*(3), 157-180. https://doi.org/10.7202/1055732ar

OCDE (2014), *Résultats du PISA 2012. Savoirs et savoir-faire des élèves : Performance des élèves en mathématiques, en compréhension de l'écrit et en sciences. Volume 1.* Éditions OCDE. http://dx.doi.org/10.1787/9789264208827-fr

Radford, L. (2004). La généralisation mathématique comme processus sémiotique. Dans G. Arrigo (dir.), *Atti del Convegno di didattica della matematica 2004* (p. 1-27). Divisione della Scuola.

Radford, L. (2013). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Group of Australia*, *26*, 257-277. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Ruiz-Munzón, N., Matheron, Y., Bosch, M. et Gascón, J. (2012). Autour de l'algèbre : les entiers relatifs et la modélisation algébrico-fonctionnelle. *Recherches en didactique des mathématiques, Hors-série*, 81-101.

Squalli, H. (2000). *Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base* [thèse de doctorat, Université Laval]. Corpus. https://corpus.ulaval.ca/jspui/handle/20.500.11794/51025

Tardif, J. (1992). *Pour un enseignement stratégique. L'apport de la psychologie cognitive.* Éditions Logiques.

Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. Dans C. Laborde (dir.), *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique* (p. 189-99). Éditions La Pensée sauvage.

Annexe 1 : Corpus des situations didactiques proposées

1- Le problème du prestidigitateur

- Pense à un nombre.
- Ajoute-lui 2.
- Élève le résultat au carré.
- Multiplie ce que tu trouves par 2.
- Retranche le double du carré du nombre auquel tu as pensé.
- Divise le résultat par 8.
- Retranche le nombre auquel tu as pensé.
- Que trouves-tu? Ce résultat est-il le même pour tout nombre auquel tu peux penser? Justifie ta réponse.

2- Problèmes de preuve

A- Les cinq assertions suivantes sont-elles vraies? Si oui justifie-les, sinon donnes-en un contre-exemple:

1- La différence des carrés de deux entiers consécutifs est un nombre impair.
2- Le carré d'un entier impair est impair.
3- La différence des carrés de deux entiers impairs consécutifs est un multiple de 8.
4- Tout nombre multiple de 4 s'écrit comme somme de deux entiers impairs consécutifs.
5- Tout nombre entier impair s'écrit comme différence des carrés de deux entiers consécutifs.

B- La somme de deux entiers impairs est-elle toujours multiple de 4? Dans quels cas l'est-elle?

3- Où est l'erreur?

Soient a et b deux nombres réels non nuls tels que : $a = b$ (1)
- En multipliant par b les deux membres de cette égalité on obtient : $ab = b^2$ (2)
- Retranchons a^2 aux deux membres, nous aurons : $ab - a^2 = b^2 - a^2$ (3)
- Cette dernière égalité s'écrit aussi : $a(b-a) = (b-a)(b+a)$ (4)
- En simplifiant par (b-a) on aura : $a = b + a$ (5)
- Or : a=b donc : $b = 2b$ (6)
- En simplifiant de nouveau par b, il vient finalement :$1 = 2$ (7)

Où est l'erreur?

4- Problème d'épargne

On place un capital C_0 à un intérêt composé au taux annuel de t % où t désigne un nombre entier compris entre *1* et *10*.

- Le taux d’intérêt étant fixé à *10 %*, au bout de combien d’années peut-on doubler ce capital?
- Quel taux permet de tripler le capital en 15 ans?
- Quel capital permet d’obtenir 1000 dinars après cinq années d’épargne à un taux de 10 %?

5- Problème d’optimisation

On veut clôturer une parcelle de terrain de forme rectangulaire à l’aide d’un grillage de longueur a, où a est un nombre réel strictement positif.
Quelle surface d’aire maximale peut-on ainsi clôturer?

6- Une autre formulation du théorème de Pythagore

Le théorème de Pythagore dit qu’une condition nécessaire et suffisante pour qu’un triangle soit rectangle est que l’aire du carré construit sur son hypoténuse soit égale à la somme des aires des carrés construits sur ses côtés de l’angle droit.
Ce théorème reste-t-il vrai si l’on remplace les carrés par des triangles équilatéraux? Par des demi-cercles?

7- Problème de dénombrement

550 élèves venant de Tunisie, de l’Algérie et du Maroc participent à un concours. Mais le nombre d’Algériens dépasse de 164 le nombre de Marocains et il y a trois fois plus d’Algériens que de Tunisiens.
Trouver le nombre d’élèves participants de chaque pays.

8- Location d’une voiture

Voulant louer une voiture, une personne s’adresse à deux agences de location. Une agence A demande un taux fixe par kilomètre parcouru tandis qu’une autre agence B demande un taux fixe par kilomètre parcouru et une majoration d’un montant de frais fixes. Les deux agences pratiquent les tarifs indiqués dans les tableaux de valeurs ci-dessous pour le même type de modèle d’automobile et exigent que la distance parcourue soit supérieure ou égale à 90 *km*.

Distance parcourue en *km*	**90**	**180**	**270**
Coût de location demandé par l’agence A en dinars tunisiens	30	60	90

Distance parcourue en *km*	**90**	**180**	**270**
Coût de location demandé par l’agence B en dinars tunisiens	49	67	85

On vous demande de déterminer la distance pour laquelle les deux agences A et B proposent le même coût et de préciser laquelle des deux est la plus avantageuse.

9- Problème de rencontre de deux trains

Deux trains T_1 et T_2 roulant sur des rails parallèles et en sens contraires partent au temps t_0, respectivement de deux villes *A* et *B* distantes de *90 Km*.
- En supposant les vitesses moyennes, v_1 et v_2 des deux trains constantes, déterminer le temps et le lieu de leur rencontre.
- Que se passe-t-il lorsque les vitesses v_1 et v_2 sont dans un rapport *r* donné?
- Quelles conditions doivent remplir les vitesses v_1 et v_2 pour que la rencontre des deux trains ait lieu en un point donné? En un temps donné?

10- Organisation d'une visite à un site industriel

Conformément à notre projet d'établissement et dans le cadre de son ouverture sur l'environnement économique, notre classe se propose d'organiser une visite à un site industriel. En consultant deux agences de location de bus, elles nous présentent les choix suivants :
- L'agence A demande : 60 dinars pour la réservation et 4 dinars pour chaque kilomètre parcouru.
- L'agence B demande : 5 dinars pour chaque kilomètre parcouru avec une réservation gratuite.
Tâches : Il s'agit d'explorer les deux propositions (suivant les distances à parcourir), de préciser pour quelle distance leurs propositions sont équivalentes, de déterminer le choix le plus économique puis de prospecter les médias pour explorer d'autres alternatives et les comparer à ce qui été déjà proposé.

Annexe 2 : Extraits du programme de la première année du secondaire

Démarche et raisonnement mathématique

1. Les élèves développent leur aptitude à chercher et cultivent leur persévérance.

- Les élèves utilisent les instruments de dessin, la calculatrice ou un logiciel en vue de faire des essais ou une expérimentation sur des cas simples ou particuliers.

2. Les élèves développent des raisonnements.

- Ils émettent des conjectures en utilisant un raisonnement inductif, un raisonnement déductif ou un raisonnement par l’absurde ;
- Ils produisent un argument pour valider une affirmation en utilisant des inférences et des déductions ;
- Ils développent des chaînes de raisonnement déductif pour prouver une conjecture ou un résultat ;
- Ils produisent un contre-exemple pour montrer qu’une assertion est fausse ;
- Ils vérifient des résultats et jugent s’ils sont raisonnables ;
- Ils distinguent entre une conjecture et un résultat démontré ;
- Ils distinguent entre une implication et une équivalence.

3. Les élèves développent une méthodologie de résolution de problèmes.

- Ils élaborent des stratégies pour résoudre un problème en :

- établissant des connexions entre le problème et des situations déjà rencontrées ;
- utilisant leur pensée intuitive ;
- se représentant des stratégies de résolution.

- Ils élaborent une solution au problème en :

- faisant appel à un répertoire de connaissances, de techniques, de procédures appropriés ;
- développant des raisonnements appropriés ;
- validant la solution du problème.

- Ils procèdent à une vérification en :

- confrontant leur solution avec les données du problème ;
- exerçant leur esprit critique pour juger si les résultats sont raisonnables.

Figure 4 : Démarche et raisonnement mathématique (République tunisienne, 2008, p. 7)

Activités algébriques

Contenu disciplinaire

- ✓ Identités remarquables.
- ✓ Fonctions linéaires – Fonctions affines.
- ✓ Equations et inéquations linéaires du premier degré à une inconnue réelle.
- ✓ Systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues réelles.

Aptitudes à développer

1. Les élèves mobilisent les règles et les techniques de calcul algébrique pour :

- Additionner, soustraire et multiplier des expressions algébriques ;
- Calculer la valeur numérique d'une expression littérale ;
- Développer, factoriser et simplifier des expressions algébriques en utilisant les produits remarquables ;
- Résoudre des équations et des inéquations linéaires du premier degré à une inconnue ;
- Résoudre des systèmes linéaires de deux équations du premier degré à deux inconnues.

2. Les élèves mobilisent un algorithme ou une procédure de calcul algébrique pour :

- Déterminer le signe d'un binôme du premier degré ;
- Résoudre des équations et des inéquations se ramenant à des équations et des inéquations du premier degré à une inconnue ;
- Déterminer l'expression d'une fonction linéaire connaissant l'image d'un réel ;
- Déterminer l'expression d'une fonction affine connaissant les images de deux réels distincts.

3. Les élèves résolvent des problèmes algébriques dans des situations mathématiques ou en rapport avec leur environnement dans des contextes familiers ou non familiers.

En particulier,

- les élèves modélisent des situations réelles menant à des équations, des inéquations ou des fonctions linéaires ou affines ;
- les élèves résolvent des problèmes d'optimisation ou de point de rencontre de deux mobiles.

Figure 5 : Activité algébrique (République tunisienne, 2008, p. 10)