Réflexion autour du rôle du symbolisme littéral dans le développement de la pensée algébrique au primaire

Steve TREMBLAY
Université du Québec à Montréal
tremblay.steve.3@courrier.uqam.ca
Elena POLOTSKAIA
Université du Québec en Outaouais
elena.polotskaia@uqo.ca
Valériane PASSARO
Université du Québec à Montréal
passaro.valeriane@uqam.ca

Résumé : Cet article a pour objectif de discuter le rôle de l'utilisation des lettres dans la formation de la pensée algébrique chez les élèves du primaire. La question de l'utilisation de lettres lors de l'apprentissage des mathématiques au primaire est controversée dans la littérature. Depuis les années 1980, deux visions s'opposent : 1) le développement de la pensée algébrique doit être amorcé dès le primaire sans l'utilisation explicite du symbolisme littéral qui doit être amené progressivement et avec prudence; 2) le symbolisme est un outil indispensable au développement de la pensée mathématique et doit être utilisé dès le début de l'apprentissage. Notre réflexion vise à soulever des questions sur l'usage des lettres à la fois comme outil mathématique et comme outil d'apprentissage.

Mots clés : pensée algébrique, primaire, utilisation des lettres, pensée relationnelle, Early Algebra.

Discussing the role of literal symbolism in the development of algebraic thinking in primary school

Abstract: The purpose of this article is to discuss the role of the use of letters in the development of algebraic thinking in primary students. This question is controversial in the literature. Since the 1980s, two opposite perspectives have coexisted when it comes to

https://doi.org/10.71403/hvnq7r64

developing algebraic thinking: 1) we should start without letters and introduce the algebraic notation gradually and with caution; and 2) we need to use letters as a key learning tool from the beginning of students' formal learning. In our discussion, we ponder the use of letters as a mathematical tool and as a learning tool.

Key words: algebraic thinking, primary school, use of letters, relational thinking, Early Algebra

Introduction

En 2019, notre équipe a réalisé un projet d'analyse critique des travaux de recherche concernant le développement de la pensée algébrique des élèves de 5 à 12 ans (Polotskaia et al., 2019). Le projet a été financé par le Fonds de Recherche du Québec – Société et Culture (FRQSC) et fait partie du programme de recherche sur la persévérance et la réussite scolaires. Nous avons sélectionné 125 articles traitant de la pensée algébrique et publiés depuis les 15 dernières années dans 15 revues les plus reconnues et citées dans le domaine de l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Nous avons ensuite utilisé un outil d'analyse qualitative, AtlasTi, pour dégager les principales approches et leurs ancrages théoriques pour favoriser le développement de la pensée algébrique chez les élèves du primaire. En amont de cette analyse, nous avons constaté une divergence importante sur la question de l'utilisation des lettres ou, plus précisément, dans le contexte de l'algèbre, du symbolisme littéral. Nous avons aussi remarqué que plusieurs auteurs d'un même courant s'appuient sur des fondements théoriques communs tout en adoptant des positions divergentes sur l'usage du symbolisme littéral (Schmittau et Morris, 2004; Squalli, 2015). Il nous est donc apparu opportun d'approfondir nos recherches sur le sujet et de partager la synthèse des éléments dégagés. Ainsi, au corpus de textes sélectionnés dans notre étude, nous avons ajouté plusieurs publications plus anciennes citées dans cette sélection. Cela nous a ramené dans les années 1980 et 1990 lorsque la question de l'enseignement de l'algèbre était au cœur des préoccupations des chercheurs, que les difficultés des élèves étaient minutieusement décrites et analysées, et que les cadres théoriques étaient en construction.

D'un côté, depuis des décennies, les curricula de nombreux pays prescrivent un enseignement des nombres et des opérations sur les nombres au primaire, puis des notions d'algèbre, telles que les relations fonctionnelles, la résolution d'équations et d'inéquations, etc. au secondaire (ex. Blanton et al., 2015; Davydov, 2008). Cette organisation des apprentissages entraîne des problèmes de transition entre la pensée arithmétique et la pensée algébrique (Blanton et al., 2015; Grugeon, 1997; Kieran, 1992; Malara et Navarra, 2002). Les travaux de l'Observatoire internationale de la pensée algébrique (OIPA) (Polotskaia et al., 2017; Vlassis et al., 2017) soutiennent que, pour remédier à la rupture arithmétique-algèbre, il est possible et même souhaitable que l'élève amorce le développement d'une **pensée algébrique** dès le primaire. Ces auteurs se joignent ainsi au courant mondial de *Early Algebra* (voir Blanton et al., 2015; Knuth et al., 2016) et soulignent les avantages du développement d'une pensée algébrique précoce, entre autres, un enrichissement de la pensée mathématique et une meilleure réussite au secondaire. Kieran (2004) mentionne que ce développement s'opère notamment en mettant l'accent sur : 1) les relations entre les nombres plutôt que sur les calculs, 2) les opérations et leurs propriétés, 3) la représentation des relations entre les quantités dans la résolution de problème, 4) la manipulation de nombres et de symboles, 5) le sens de l'égalité. L'usage d'un symbolisme littéral constitue donc l'un des éléments de la pensée algébrique. Traditionnellement introduit lors de l'enseignement officiel de l'algèbre au secondaire, cet usage du symbolisme est reconnu depuis longtemps comme l'une des principales sources de difficulté lors de la résolution d'équations (Filloy et Rojano, 1989; Herscovics et Linchevski, 1991), de la manipulation d'expressions algébriques (Kieran, 1992; MacGregor et Stacey, 1997), de la résolution de problèmes (Bednarz et Janvier, 1996; Kaput, 1983) et de l'étude de relations fonctionnelles (Blanton et al., 2017; Janvier, 1996; Janvier et al., 1989).

D'un autre côté, certains programmes d'études proposent d'adopter une perspective différente sur le rôle et l'usage d'un symbolisme littéral. C'est le cas notamment du programme de Davydov (Bodanskii, 1991; Davydov, 2008) dans lequel l'usage du symbolisme littéral constitue un élément clé dans le développement d'une **pensée théorique**. L'introduction des lettres est alors suggérée dès le début de l'apprentissage des mathématiques (dès 6 ans). Actuellement, quelques recherches s'insèrent dans ce courant (Lee, 2006; Schmittau, 2011) et leurs résultats démontrent que l'utilisation d'un symbolisme littéral ancré dans les expériences sensorielles de l'enfant est accessible aux élèves dès 6 ou 7 ans.

Dans cet article, nous cherchons à mieux comprendre certains enjeux de l'usage du symbolisme littéral dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques au primaire. Nous présentons donc d'abord quelques réflexions autour des différents usages et interprétations de la lettre dans les mathématiques scolaires. Puis nous étayons les idées issues de deux « courants »[1] de recherche qui diffèrent

[1] Nous allons utiliser le mot courant pour distinguer les travaux qui s'inspirent principalement de la vision proposée par *Early Algebra* de ceux qui s'orientent davantage vers la vision proposée par Davydov et ses collègues. Ces deux courants nous sont apparus comme prédominants dans les travaux récents sur le développement de la pensée algébrique au primaire. Plus précisément,

dans leur vision sur le rôle et l'usage du symbolisme littéral dans le développement d'une pensée algébrique ou d'une pensée théorique. Finalement, nous proposons des réflexions autour des deux scénarios envisagés, leurs origines, les présupposés sur lesquels ils s'appuient et leurs impacts possibles sur l'apprentissage des élèves. Nos conclusions suggèrent notamment d'interroger les présupposés qui influencent le moment et la manière d'introduire le symbolisme littéral à l'école.

1. La lettre en mathématiques : usages, interprétations et dénominations

Nous relevons plusieurs enjeux d'apprentissage et d'enseignement du symbolisme littéral en algèbre. Premièrement, la lettre est utilisée de différentes manières en mathématiques; parfois cet usage est associé à une pensée algébrique, parfois non. Deuxièmement, en algèbre, plusieurs interprétations de la lettre se côtoient. Or, la dénomination courante de la lettre dans l'enseignement ne permet pas toujours de distinguer ces différentes interprétations.

1.1 Différents usages de la lettre en mathématiques au primaire et au secondaire

Lors de l'introduction de l'algèbre au secondaire, on a tendance à penser que les élèves n'ont jamais utilisé de lettres en mathématiques. Et pourtant, en arithmétique, les lettres u, d et c sont utilisées pour désigner respectivement les unités, les dizaines et les centaines dans un nombre exprimé en base dix. Dans ce contexte, une expression comme $2c + 3d + 5u$ pourra être utilisée comme décomposition du nombre 235, et les lettres peuvent être vues comme des étiquettes qui remplacent les mots unité, dizaine et centaine ou comme des constantes ($u = 1, d = 10\ et\ c = 100$). En géométrie et mesure, les lettres désignent des unités de mesures (L pour litre, g pour gramme, etc.) ou des grandeurs/quantités qui sont mises en relation. Dans ce dernier cas, l'usage de la lettre est théoriquement algébrique. Toutefois, dans le contexte où l'enseignement de l'algèbre n'est pas au programme du primaire au Québec, on pourrait se demander quel sens les enseignants et les élèves attribuent aux lettres utilisées. En effet, la lettre semble davantage être utilisée comme une étiquette qui remplace un mot si on se fie aux contenus des matériels didactiques sur lesquels s'appuient

---

nous avons constaté que certains chercheurs (Lins, 1992; Mason et al., 1985; Radford, 2018) conçoivent que l'usage des lettres n'est pas essentiel, pas plus qu'il ne constitue une caractéristique de la pensée algébrique alors que pour d'autres chercheurs (Kaput et al., 2008), l'utilisation des signes alphanumériques est requise pour qu'une activité soit déclarée algébrique.

généralement les enseignants. Par exemple, dans la figure 1, la lettre A remplace le mot « aire » et la lettre L le mot « longueur », alors que dans la figure 2, la lettre A remplace le nombre d'arêtes, la lettre F le nombre de faces, et la lettre S le nombre de sommets. Dans le premier extrait, l'aire et la longueur sont des grandeurs, et A et L remplacent des mesures, et dans le deuxième extrait, les lettres$S$, $F\ et\ A$, désignent respectivement le nombre de sommets, de faces et d'arêtes selon l'énoncé. Dans ce type de situation, la confusion entre les attributs géométriques et le nombre de ces attributs semble presque inévitable.

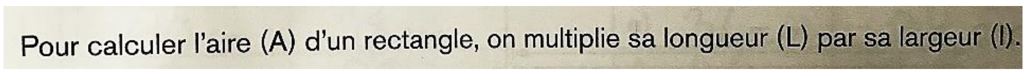
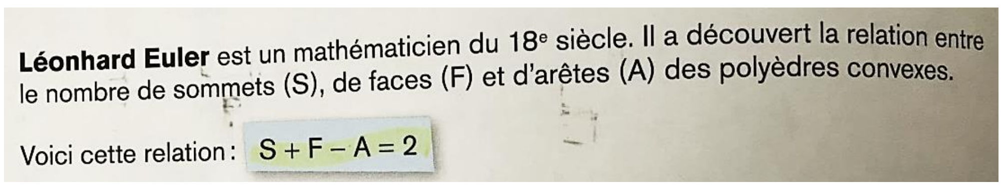

Pour calculer l'aire (A) d'un rectangle, on multiplie sa longueur (L) par sa largeur (l).

Figure 1 : extrait de Bernier et al. (2012, p. 99)


Léonhard Euler est un mathématicien du 18[e] siècle. Il a découvert la relation entre le nombre de sommets (S), de faces (F) et d'arêtes (A) des polyèdres convexes.

Voici cette relation : S + F – A = 2

Figure 2 : extrait de Bernier et al. (2012, p. 106)

Actuellement, d'après nos expériences et nos observations des matériels didactiques, le contexte d'enseignement au primaire au Québec peut souvent induire une interprétation de la lettre comme une étiquette remplaçant un mot au détriment d'une interprétation de la lettre comme représentation d'une quantité ou d'un nombre.

Par ailleurs, au secondaire, la lettre est utilisée en mathématique à différents escients, elle ne représente pas nécessairement une quantité indéterminée. Par exemple, on utilise les lettres pour désigner les unités de mesure, comme au primaire, et on les utilise pour représenter des constantes absolues comme π ou e. À cela s'ajoute l'usage algébrique de la lettre dans différents contextes et donc en association avec différents concepts et interprétations.

1.2 Les différents rôles de la lettre en algèbre

Comme nous l'avons rappelé en introduction, les composantes de la pensée algébrique sont diverses. Généraliser, prouver, modéliser… sont des activités mathématiques qui caractérisent particulièrement l'algèbre. Or, utilise-t-on la lettre de la même manière lorsqu'on généralise une propriété, une relation ou une situation de régularité, lorsqu'on prouve un énoncé ou lorsqu'on modélise une situation de variation? Oui et non. D'un côté, la lettre désignera souvent une quantité, un nombre et non un objet ou une qualité. Cette quantité ou ce nombre sera aussi forcément indéterminé dans la situation donnée. Ainsi, si on sait que $a = 3$ et qu'on doit calculer $2a + 7$, on n'est pas face à une tâche nécessitant une pensée algébrique puisque a désigne un nombre connu. D'un autre côté, la signification accordée à la lettre sera différente selon l'activité algébrique mise en œuvre. Par exemple, dans la généralisation de la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition $a(b + c) = ab + ac$, les lettres représentent n'importe quels nombres, on peut dire qu'elles ont le sens de nombres généralisés (Philipp, 1992). Alors que dans la résolution de l'équation $2x + 3 = x - 12$, la lettre x représente un nombre précis que l'on cherche à déterminer, on peut dire que x est une inconnue.

En algèbre, la lettre est donc utilisée dans différents contextes et à différents escients (Booth, 1984a, 1984b; Kieran, 1989; Küchemann, 1981; Usiskin, 1988). Différentes interprétations de la lettre se côtoient et le développement de la pensée algébrique implique forcément le développement de la flexibilité à interpréter la lettre selon le sens de la situation. On doit apprendre à interpréter la lettre et à l'utiliser selon les usages propres à l'algèbre mais aussi selon l'activité algébrique impliquée. Généralement, quand les chercheurs parlent de la lettre en algèbre, il est question des notions de « variable » et d'« inconnue ». Ces deux concepts apparaissent d'ailleurs distinctement dans le programme de formation de l'école québécoise (Gouvernement du Québec, 2006).

1.2.1 La variable

Pour mieux comprendre l'origine et le sens du mot « variable » dans le contexte mathématique, on peut se référer aux propos des mathématiciens qui l'ont inventé. Dans son livre *Mathematical thought from ancient to modern times*, Kline (1972) écrit :

> Cauchy commence son travail de 1821 par la définition d'une variable. « On appelle une quantité que l'on considère comme devant prendre successivement plusieurs valeurs différentes les unes des autres comme une variable. » Ainsi, pour le concept de fonction, « Quand des quantités variables sont liées de manière qu'à partir d'une valeur donnée de l'une on puisse déterminer les valeurs de toutes les autres, on conçoit ordinairement que ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de variable indépendante; et les autres quantités exprimées au moyen de la variable indépendante sont celles que l'on appelle fonctions de cette variable. » (Kline, 1972, p. 950, traduction libre[2])

---

[2] Cauchy begins his 1821 work with the definition of a variable. "One calls a quantity which one considers as having to successively assume many values different from one another a variable". As for the concept of function, "When variable quantities are so joined between themselves that, the value of one of these being given, one may determine the values of all the others, one ordinarily conceives these diverse quantities expressed by means of the one among them, which then takes the name independent variable; and the other quantities expressed by means of the independent variable are those which one calls functions of this variable" (Kline, 1972, p. 950).

Kline rapporte donc que pour Cauchy, une « variable » est une quantité qui prend successivement plusieurs valeurs – une quantité qui varie. Sa définition d'une fonction emploie le mot « variable » pour définir un nouveau concept, la « variable indépendante » et comme adjectif qui caractérise une quantité qui varie. Cauchy utilise donc le mot variable pour désigner la quantité variable elle-même et non sa représentation littérale. Selon Philipp (1992), le glissement dans l'usage de ce mot s'est opéré clairement lors du mouvement de réforme des mathématiques scolaires, à la fin des années 1950 et au début des années 1960. Il note que, dans ce contexte, les manuels de mathématiques définissent la variable comme une lettre (symbole) qui représente un ensemble d'éléments (de nombres). Ce changement substantiel dans l'usage du mot variable prédomine à l'école, selon nos expériences, encore aujourd'hui.

Dans ce même contexte d'évolution des mathématiques scolaires, la recherche de concepts unificateurs a débouché sur l'enseignement du concept de variable dans sa forme la plus générale dès le début de l'algèbre. En conséquence, voulue ou non, tous les symboles littéraux utilisés en algèbre à l'école sont maintenant appelés « variables » (Kieran, 1989). La variable n'est plus associée à la variation et à la notion de fonction mais plutôt à un symbole littéral, ce qui rejoint l'usage général qu'en fait, par exemple, Blanton et al.(2015).

Le concept de variable est donc réduit à sa représentation littérale et toute lettre utilisée en algèbre est appelée variable. Philipp (1992) souligne que cet amalgame est forcément source de confusion chez les élèves.

1.2.2 L'inconnue

La notion d'inconnue est aussi associée à l'utilisation de la lettre. Schoenfeld et Arcavi (1988) indiquent que l'inconnue est une valeur fixe que l'on ne connait pas encore dans une situation donnée :

> La connotation d'inconnue est quelque chose qui a une valeur fixe mais que vous ne connaissez pas encore. Par exemple, x est l'inconnue dans l'équation $3x + 2 = 5x - 4$. Dans cette équation, vous ne savez peut-être pas ce qu'est x; mais x n'est pas variable en ce sens qu'il n'a qu'une valeur. (Schoenfeld et Arcavi, 1988, p. 421, traduction libre[3])

Ces auteurs distinguent clairement « l'inconnue » de la « variable ». Une lettre désigne une inconnue lorsqu'elle est utilisée dans une équation, c'est-à-dire dans une égalité entre deux expressions algébriques. Dans ce contexte, le but de la tâche

---

[3] The connotation of unknown is something that has fixed value but that you don't yet know. For example, x is the unknown in the equation 3x + 2 = 5x – 4. In this equation, you may not know what x is; but x isn't variable in that it only has one value (Schoenfeld et Arcavi, 1988, p. 421).

(résolution d'une équation ou d'un problème) est de déterminer la valeur de cette inconnue. Au-delà du cas typique décrit par Schoenfeld et Arcavi, dans lequel on obtiendra **la** valeur de l'inconnue à la fin de la résolution, certaines situations peuvent créer de la confusion. Par exemple, la résolution d'une équation qui débouche sur une infinité de valeurs possibles rappelle forcément la définition de la notion de variable. Pourtant, le statut de la lettre (un nombre ou une quantité inconnue) dans l'équation donnée au départ ne change pas pour autant puisque le but de la tâche reste de déterminer la valeur (ou les valeurs) de l'inconnue.

1.2.3 Difficultés avec l'interprétation et l'usage de la lettre

Nous avons jusqu'à présent relevé trois sources de difficulté en lien avec l'usage ou l'interprétation de la lettre : 1) le fait que la lettre puisse représenter autre chose qu'un nombre ou une quantité (ex : abréviation de mots, objet, constante); 2) l'usage abusif du mot « variable » qui ne permet pas de différencier les rôles des quantités derrière les lettres dans une situation; 3) les cas particuliers de résolution d'équations dans lesquels il y a une infinité de solutions ou pas de solutions.

À cela, s'ajoute la nécessité de passer d'une interprétation de la même lettre à une autre, Janvier (1996) explique :

> Même si les élèves peuvent accepter qu'une lettre représente un nombre inconnu et peuvent effectuer des calculs sur cette base, ils pourraient être incapables d'imaginer simultanément qu'une lettre puisse également représenter un nombre qui change. Comme l'ont souligné Freudenthal (1983), Schoenfeld et Arcavi (1988) et Janvier (1993), l'utilisation d'une lettre comme variable ne dépend pas de la représentation symbolique utilisée, mais relève plutôt d'une interprétation particulière du « résolveur ». Par exemple, on peut utiliser pendant longtemps et avec succès (sous forme d'équations ou de formules) des expressions, telles que $A = \pi r2$ ou $d = v \times t$ ou $T = 9/5\,C + 32$, sans considérer un seul instant que r, t ou C varie et par conséquent A ou d ou T varie également. (Janvier, 1996, p. 227, traduction libre[4])

Ainsi, une même formule d'aire peut être utilisée pour représenter la relation entre les grandeurs impliquées, pour déterminer une mesure manquante, pour étudier

---

[4] Even if students can accept that a letter stands for an unknown number and can perform calculations on that basis, they might be unable to imagine concurrently that a letter can also stand for a number that changes. As Freudenthal (1983), Schoenfeld and Arcavi (1988), and Janvier (1993) have pointed out, using a letter as a variable does not depend on the symbolic representation used, but is rather a question of a particular interpretation of the "solver". For example, one can use for a long time and successfully (as equations or as formulas) expressions, such as $A = \pi r2$ or $d = v \times t$ or $T = 9/5\,C + 32$, without considering for a single moment that r, t, or C vary and consequently A or d or T vary too (Janvier, 1996, p. 227).

la variation d'une grandeur lorsque l'autre change, etc. Dans chacun des cas, le rôle de la quantité derrière la lettre n'est pas le même, la quantité varie selon l'interprétation donnée à la situation. Dans une formule d'aire, une lettre pourra désigner une inconnue, une variable ou un nombre généralisé selon le regard que l'on porte sur cette formule, selon l'usage que l'on veut en faire, selon la question que l'on se pose.

Janvier (1996) répertorie quatre manières différentes au moins d'interpréter la lettre a, et il mentionne que chacune appelle un processus mental différent : 1) une valeur indéterminée dans une formule telle que dans $P(\text{périmètre}) = 4a$ où a désigne la mesure du côté d'un carré; 2) une inconnue, comme dans l'équation $24 = 4a$; 3) en tant que variable dans la formule du périmètre d'un carré $P(a) = 4a$ (si a varie alors P varie); 4) comme un nom polyvalent (nombre généralisé selon Philipp, 1992) dans l'identité suivante : $4a = a + a + a + a$.

Les sources de difficulté que nous venons de rappeler viennent appuyer le constat de nombreux chercheurs : apprendre à utiliser le symbolisme algébrique adéquatement implique, d'une part, de penser algébriquement dans une variété de contextes d'usage de l'algèbre, et d'autre part, d'interpréter correctement la lettre dans chacun de ces contextes.

1.2.4 Lettre et pensée algébrique

L'usage algébrique d'un symbolisme littéral est considéré comme l'une des dimensions de la pensée algébrique (Kieran, 2004). Toutefois, faire de l'algèbre ce n'est pas uniquement manipuler des lettres (Bednarz et Janvier, 1996; Janvier, 1996; Radford, 2014). D'une part, il est possible d'utiliser mathématiquement des lettres sans mobiliser de pensée algébrique (voir les exemples § 1.1). Il est aussi possible, dans un contexte potentiellement algébrique utilisant des symboles alphanumériques, de contourner la pensée algébrique. Par exemple, à l'école primaire québécoise, on propose aux élèves de rechercher le terme manquant dans des égalités comme $2 + ? = 5$. Dans ces tâches, l'élément inconnu est généralement présenté sous forme d'un carré vide, un « ? » ou un espace vide. Ainsi, on a affaire à une « équation algébrique » dans laquelle une quantité inconnue est symbolisée. Toutefois, comme le travail sur les transformations littérales algébriques n'est pas au programme, les stratégies envisagées n'incitent pas la manipulation de la quantité inconnue. Par exemple, avec les petits nombres, l'élève fait appel à sa mémorisation de faits numériques (la réponse est 3 car je sais que $2 + 3 = 5$) ou effectue un comptage « en avant » à partir de 2 ($3 - 4 - 5$, donc il faut ajouter 3). Ainsi, même si ces tâches présentent un potentiel de développement de la pensée algébrique, elles ne sont généralement pas exploitées en ce sens.

D'autre part, il est possible de penser algébriquement sans manipuler de lettres. Cette affirmation, défendue notamment par Radford (2018) qui rappelle que les premiers travaux d'algèbre ont été réalisés par les mathématiciens sans aucun usage de lettres, est à la base de la proposition de la plupart des chercheurs qui suggèrent de développer la pensée algébrique avant d'introduire le symbolisme littéral.

2. La pensée algébrique avant la lettre

Dans cette section, nous discutons de la pensée algébrique avant la lettre sous les aspects suivants : description du courant *Early algebra*; des exemples concernant le système sémiotique et l'analycité seront discutés; prudence et équilibre dans l'utilisation précoce de la lettre; synthèse sur la pensée algébrique avant la lettre.

2.1 Le courant *Early Algebra*

Early Algebra est un courant de recherche qui est né de la volonté commune d'enrichir les connaissances scientifiques sur le développement précoce d'une pensée algébrique. Ces connaissances offrent notamment un éclairage nouveau sur la nature de la rupture arithmétique-algèbre observée chez les élèves du secondaire. Squalli et Bronner s'appuient sur les travaux des chercheurs initiateurs de ce courant (Carraher et Schliemann 2007; Kaput, 1998; Squalli et al., 2011) pour résumer :

> L'hypothèse actuelle concernant le courant Early Algebra est qu'il ne doit pas être perçu comme une version précoce de l'algèbre actuellement enseignée au secondaire ni comme une préparation à celle-ci, c'est-à-dire une préalgèbre. L'Early Algebra est plutôt une stratégie pour enrichir les contenus mathématiques enseignés au primaire en offrant aux élèves des opportunités pour développer la pensée algébrique et approfondir davantage certaines notions et certains concepts mathématiques (les concepts d'opération, d'égalité, d'équation, de régularité, de formule, de variable et de variation, entre autres). (Squalli et Bronner, 2017, p. 1)

La proposition consiste donc en un enrichissement de l'activité mathématique des élèves à travers des activités visant le développement d'une pensée algébrique avant l'enseignement officiel de l'algèbre. Kieran et al. (2016) identifient les quatre principaux thèmes explorés par le courant *Early Algebra* : 1) la généralisation liée aux activités de motifs (patterns) numériques et géométriques (imagées), 2) la généralisation liée aux propriétés des opérations et aux structures numériques, 3) la représentation des relations entre les quantités et 4) l'introduction de la notation alphanumérique. Ainsi, les différentes activités suggérées pour développer la pensée algébrique proposent d'amener les élèves à généraliser des situations présentant des régularités (souvent des suites de nombres ou de motifs) (ex. Blanton et al., 2015; Radford, 2011), à généraliser des propriétés des nombres et des opérations (ex. Carpenter et Levi, 2005; Cooper et Warren, 2008) et à étudier des relations entre des quantités dans l'optique de développer une certaine pensée fonctionnelle (ex. Carraher et Schliemann, 2018; Tanişli, 2011).

En ce qui concerne le quatrième thème évoqué par Kieran et al. (2016), deux positions semblent se dessiner. D'un côté, certains chercheurs (Mason et al., 1985; Squalli, Oliveira et al., 2020) considèrent que les signes alphanumériques ne sont pas essentiels ni caractéristiques de la pensée algébrique. Par exemple, selon Mason et al.(1985), « la symbolisation basée sur des signes alphanumériques - n'est pas nécessaire pour commencer à penser algébriquement : La symbolisation complète ne devrait venir que beaucoup plus tard » (Mason et al., 1985, p. 24, traduction libre[5]). D'un autre côté, même si l'algèbre précoce ne signifie pas déplacer le programme d'algèbre traditionnel au niveau de l'école primaire, certains chercheurs semblent estimer que la notation alphanumérique peut et doit être progressivement introduite au primaire (Kieran et al., 2016). Le symbolisme littéral est alors envisagé comme moyen de représenter les généralisations et les relations dégagées. Toutefois, cette introduction est effectuée avec prudence et progression même si elle semble souvent apparaître comme l'étape ultime de l'activité et même un but à atteindre.

Ainsi, la notation littérale, bien que liée à toutes les autres composantes de la pensée algébrique est judicieusement séparée de celles-ci. Comme il est possible de penser algébriquement sans faire usage d'un symbolisme algébrique formel, ce dernier devient comme un accessoire, un outil supplémentaire qui doit être enseigné et appris. Pourtant cet outil a un statut particulier puisqu'il contribue aussi au développement de la pensée algébrique et ce qui amène certains auteurs à envisager son introduction avec les élèves plus jeunes (Malara et Navarra, 2018) et donc à inclure le travail avec le symbolisme littéral dès l'amorce du développement de la pensée algébrique.

2.2 Système sémiotique et analycité

Pour Radford (2018), la pensée algébrique se caractérise par un travail sur des quantités indéterminées (inconnue, variable, paramètre, nombre généralisé, etc.). Il souligne, d'une part, que ces quantités indéterminées peuvent être exprimées dans n'importe quel système sémiotique et donc pas nécessairement avec des lettres : « Premièrement, les notations ne sont une condition ni nécessaire ni

[5] […] symbolization based on alphanumeric signs – is not required to start thinking algebraically: Full symbolization should only come much later (Mason et al., 1985, p. 24).

suffisante pour penser algébriquement » (Radford 2018, p. 7, traduction libre[6]). Il suggère alors que pour signifier une quantité ou une généralité, les élèves peuvent utiliser non seulement le code alphanumérique, mais aussi les gestes, le rythme, le langage naturel et d'autres systèmes sémiotiques permettant la représentation écrite de la quantité indéterminée (par exemple, un point d'interrogation, un carré vide ou même un nombre). D'autre part, il associe la pensée algébrique à l'utilisation d'un des systèmes de codes pour représenter les quantités indéterminées et pour agir sur celles-ci de façon analytique, notamment les ajouter, les soustraire, les multiplier ou les diviser comme si elles étaient connues. L'analycité ainsi mobilisée est basée sur la déduction et elle s'oppose aux raisonnements arithmétiques qu'il décrit comme des raisonnements de type tâtonnement ou essai/erreur (Radford, 2014). Nous voulons souligner ici que Radford parle des objets algébriques (variable, inconnue, etc.) qu'on peut représenter à l'aide des **systèmes sémiotiques variés**, plutôt que **des interprétations variées** de la lettre si bien expliquées par Janvier (1996).

2.2.1 Analycité : exemple avec une équation à partir d'un problème écrit

Pour illustrer la notion d'analycité de la pensée, prenons un exemple de recherche d'un terme manquant : $29 + ? = 51$. Selon la distinction proposée par Radford (2014), si l'élève résout cette tâche par essai/erreur ou par comptage, il ne mobilise pas une pensée algébrique puisqu'il opère directement sur des nombres connus donnés par la tâche ou qu'il se donne lui-même. Toutefois, si l'élève ne sait pas comment déterminer le nombre cherché et qu'il effectue une série de déductions comme « si 29 plus quelque chose équivaut à 51 alors c'est que 51 est 29 de plus que **ce nombre inconnu** et que **le nombre inconnu** est 29 de moins que 51 » qui l'amène à transformer l'égalité sous la forme $? = 51 - 29$, alors le déploiement d'une pensée analytique est amorcé. En effet, pour arriver à formuler l'opération $51 - 29$, l'élève a dû opérer sur l'inconnue. Ce qui caractérise la pensée analytique ce n'est donc pas la tâche en soi, mais bien le traitement qu'on en fait. Ici, la pensée évoquée ne peut être mis en œuvre que si le signe d'égalité est vu comme marqueur d'une équivalence et si la relation entre les nombres 51, 29, et « ? » est correctement perçue. De plus, il implique la reconnaissance et l'acceptation d'opérer sur une quantité indéterminée désignée par « ? », ainsi que la transformation d'une équation ($29 + ? = 51$) en une équation équivalente ($? = 51 - 29$). Ainsi, même si la tâche ne suscite pas plusieurs manipulations de la quantité indéterminée comme on pourrait l'avoir avec une

[6] First, notations are neither a necessary nor a sufficient condition for algebraic thinking (Radford, 2018 p. 7).

équation de la forme $ax + b = cx + d$, le traitement qui en est fait implique une certaine analycité.

2.2.2 Analycité : exemple de suites de motifs

Pour Radford (2011), et plusieurs autre chercheurs (ex. Grugeon-Allys et Pilet, 2017; Kieran et al., 2016), le travail sur l'analycité est plus important que l'utilisation des lettres. Leurs recherches démontrent que, dans le contexte de suites de motifs, les jeunes enfants sont tout à fait capables de mobiliser cette analycité dans leur pensée mathématique. Radford (2011) soutient que dans des situations de généralisation à partir de motifs croissants (patterns), une pensée algébrique peut émerger chez des jeunes élèves (2e année du primaire). Après avoir travaillé avec une série de figures (figure 3), les élèves parviennent à formuler la généralité sous forme d'instruction numérique ($500 + 500 + 1$ pour la 500e figure).

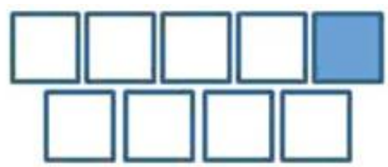


Figure 3 : élément d'une suite croissante (Radford, 2011, p. 305)

Squalli et Bronner (2017) partagent l'idée de Radford en ce qui concerne l'analycité et ajoutent une deuxième composante importante de la pensée algébrique : l'activité de généralisation (Bednarz et Janvier, 1996; Lins, 1992; Radford, 2014; Squalli, 2000). Ils expliquent : « La capacité à généraliser repose sur une bonne appréhension des structures des nombres tels que les régularités numériques, la divisibilité, les nombres triangulaires, nombres premiers, etc., et des propriétés des opérations (associativité, commutativité, élément neutre, etc.) » (Squalli et Bronner, 2017, p. 1).

Cette vision est tout à fait différente de ce que les jeunes élèves ont fait dans l'expérimentation de Radford (2011), car la généralisation décrite par Radford repose sur les structures graphiques et une analyse essentiellement visuelle (figure 3). Apparemment, les jeunes enfants qui ne maîtrisent pas pour l'instant les structures numériques peuvent généraliser sans toutefois représenter symboliquement cette généralisation.

Pour Radford (2018), les tâches de généralisation de motifs croissants dans lesquelles deux quantités sont mises en relation (voir exemple à la figure 4) incitent davantage la généralisation symbolique.

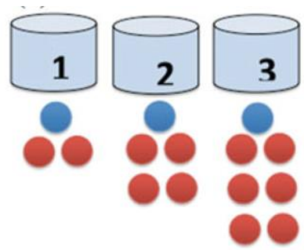


Figure 4 : suite croissante, 4^{e} année (Radford, 2018, p. 12)

En effet, face à cette tâche, les élèves de 4^{e} année qui ont été interrogés éprouvent des difficultés à distinguer le nombre de points dans la figure du nombre qui indique la position de la figure dans la suite. Ainsi l'articulation des variables en jeu et de leur relation apparait comme une difficulté autant à l'écrit qu'à l'oral.

Radford (2018) avance que l'introduction de la notation littérale est possible et nécessaire à ce moment-là puisque « l'attention des élèves se déplace sur les variables et leur relation, qui, petit à petit, deviennent l'objet central du discours » (Radford, 2018, p. 16, traduction libre[7]). Alors, selon Radford, on peut commencer à exprimer une pensée algébrique dans le langage courant, sans utiliser un symbolisme littéral. L'introduction de ce symbolisme devient nécessaire et pertinente lorsque le discours de l'élève évolue jusqu'à se concentrer sur les quantités variables et leur relation.

2.3 Utilisation précoce de la lettre : prudence et équilibre

Plusieurs chercheurs recommandent la prudence et une introduction graduelle de la notation littérale (Hewitt, 2014; Malara et Navarra, 2018; Schliemann, 2002; Squalli, Larguier et al., 2020; Van Amerom, 2002). Par exemple, Schliemann (2002) constate que même si les élèves apprennent bien les règles formelles de résolution d'équations et qu'ils sont capables de les appliquer rapidement et avec succès, on ne peut pas garantir que ces élèves ont développé une compréhension profonde des lois mathématiques fondamentales sous-jacentes :

> Ces puissants outils mathématiques peuvent permettre aux élèves de résoudre facilement et rapidement des équations et des problèmes de calcul et, s'ils sont explorés en profondeur, ils peuvent certainement contribuer à l'émergence d'une bonne compréhension de principes mathématiques. Cependant, à moins que les élèves ne soient guidés pour explorer ces principes, ils risquent d'apprendre des règles procédurales sans la compréhension mathématique appropriée implicitement incluses dans les étapes de ces procédures (voir, par exemple, les

[7] The students' attention moves to the variables and their relationship, which, bit by bit, become the central object of discourse (Radford, 2018, p. 16).

> données de Nunes, Schliemann, et Carraher, 1993, et de Schliemann, 2000). (Schliemann, 2002, p. 301-302, traduction libre[8])

Pour Carraher et Schliemann (2018), il s'agit de trouver le bon équilibre afin d'éviter les dangers d'un formalisme trop précoce évoqués par par Piaget (1964, cité dans Carraher et Schliemann, 2018), et ceux d'un « formalisme tardif, y compris une introduction trop tardive de la notation algébrique et d'autres formes conventionnelles de représentation » (p. 108).

2.4 Synthèse sur la pensée algébrique avant la lettre

En résumé, le courant *Early Algebra* propose d'amorcer le développement de la pensée algébrique dès le début du primaire, mais sans l'usage d'un symbolisme formel, la désignation de la quantité indéterminée étant envisagée à travers d'autres registres sémiotiques. De plus, une attention particulière est donnée aux situations dans lesquelles les manières de faire et de penser qui caractérisent l'algèbre sont mises en jeu (analycité, généralisation, etc.). Ces choix s'appuient sur trois constats : 1) il est possible de penser algébriquement en mobilisant d'autres registres sémiotiques (gestes, paroles, dessins, etc.); 2) l'usage de la lettre en mathématique est varié et complexe (différents contextes d'usages, etc.); 3) la pensée algébrique peut servir d'appui à une introduction ultérieure significative et graduelle d'un symbolisme algébrique. Ainsi, l'usage du symbolisme littéral est reconnu comme une composante importante de la pensée algébrique qui, à un moment donné, doit être développé chez l'élève. Toutefois, cette composante n'est pas considérée comme essentielle à l'amorce d'une pensée algébrique et elle peut être introduite plus tard, lorsque les élèves sont prêts, soit à compter de la 4e année du primaire.

D'autres chercheurs adoptent toutefois une position différente en considérant cette composante comme outil essentiel au développement de la pensée algébrique, même à ses balbutiements.

3. La lettre comme outil de développement de la pensée algébrique

Pour plusieurs chercheurs, le symbolisme littéral constitue un outil indispensable pour développer la pensée algébrique chez l'élève. Ces chercheurs s'appuient

[8] These powerful mathematical tools may allow students to solve equations and computation problems easily and rapidly and, if explored in depth, certainly can contribute to the emergence of sound understanding of mathematical principles. However, unless students are guided to explore these principles, they risk learning procedural rules without the proper mathematical understanding implicit in its procedural steps (see, e.g., data by Nunes, Schliemann, et Carraher, 1993, and by Schliemann, 2000) (Schliemann, 2002, p. 301-302).

généralement sur les travaux menés en Russie par le psychologue et philosophe Vassili Davydov et ses collègues (Bodanskii, 1991; Davydov, 2008; Frolova, 1963).

3.1 L'origine de la recherche de Davydov

Davydov (2008) explique que l'origine de sa recherche est la quête sur le développement de l'enfant comme apprenant averti, comme personne et comme citoyen. Plus précisément, en mathématiques, son équipe cherchait à organiser l'apprentissage (le programme et la méthode d'enseignement) autour de la formation du concept de nombre chez l'enfant de manière à éviter les obstacles et difficultés rencontrées par de nombreux élèves au secondaire. Parmi ces difficultés apparaissaient, notamment, un raisonnement logique peu développé et l'incapacité à affronter des problèmes complexes et des problèmes ouverts de la vie réelle. Ainsi, l'introduction de la pensée algébrique au primaire ne représentait pas pour cette équipe un objectif en soi. C'est leur quête d'outils et de stratégies d'enseignement ainsi que leur analyse épistémologique du concept du nombre qui ont amené cette équipe à se tourner vers « la pensée théorique » et le concept de relation quantitative comme le pivot central de leur approche (Davydov, 1982, 2008).

3.2 Pensée théorique et relations quantitatives

Afin de bien comprendre comment l'utilisation des lettres est envisagée dans les recherches qui suivent la direction tracée par Davydov (voir notamment Mellone et al., 2018; Schmittau et Morris, 2004; Tuominen et al., 2018; Venenciano et Dougherty, 2014; Venenciano et al., 2020), nous présentons brièvement le programme de mathématiques à l'école primaire élaboré par Davydov et ses collègues (Bodanskii, 1991; Davydov et al., 1999; Davydov et al., 2001).

Selon le programme de Davydov, en 1re année (6-7 ans), les élèves ne débutent pas avec les nombres, les chiffres, le comptage ou le calcul. À la place, ils manipulent des objets physiques pour comparer des grandeurs (longueur, aire, volume et masse). Les élèves apprennent à distinguer différentes caractéristiques quantitatives des objets, à les comparer et à communiquer leurs observations et conclusions à l'aide de dessins, de schémas, d'une notation littérale et d'un symbolisme mathématique approprié : =, ≠, >, et <. Schmittau et Morris (2004) précisent :

> Par exemple, ils comparent les longueurs de deux planches, nomment les longueurs A et B et représentent la relation entre elles comme $A = B$, $A \neq B$, A > B ou $A < B$. Il n'y a aucune référence aux nombres pendant ce travail : « A »

> représente la longueur non mesurée de la planche. (Schmittau et Morris, 2004, p. 62-63, traduction libre[9])

La notation littérale n'est pas le seul moyen de communication de relations entre les quantités; les dessins et les schémas sont aussi utilisés (voir figure 5). L'utilisation simultanée de plusieurs modes de communication aide les élèves à prendre du recul par rapport au caractère empirique des objets représentés et aux caractéristiques d'une représentation spécifique, pour se concentrer sur la relation entre les grandeurs observées. L'extraction de la relation qui s'opère est associée à la compréhension théorique de la situation. Ainsi, les élèves développent une pensée dite théorique.

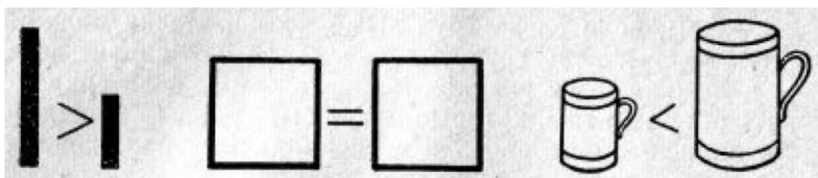


Figure 5 : Les représentations variées des relations quantitatives (Frolova, 1963, p. 35)

Ce qui est particulièrement inhabituel dans le programme de Davydov, c'est que les lettres, comme outil de communication des quantités, apparaissent avant les chiffres ou les nombres comme tels. Ainsi, les relations finalement décrites par des lettres ne sont pas des généralisations de faits numériques. Le caractère analytique de la pensée apparait lorsque l'élève effectue des déductions directement à partir des expressions mathématiques littérales pour établir les relations entre les caractéristiques quantitatives des objets qu'il ne peut pas comparer physiquement. Par exemple, à partir de $A > B$ et $C < B$ (les caractéristiques des objets ont été comparés physiquement ou cette information a été donnée par écrit), l'élève déduit que $A < C$ (Venenciano et al. 2020).

Les élèves apprennent aussi à « égaler » les grandeurs et préciser par quelle opération et à l'aide de quelle grandeur on peut le faire. Le processus de passage d'une inégalité à une relation d'égalité avec les actions (opérations) d'addition ou de soustraction est représenté symboliquement, par exemple, si « $K > D$ de A » (cette notation signifie que K est A de plus que D), alors $K - A = D$ et $K = D + A$ (voir Schmittau et Morris, 2004). Des déductions plus complexes deviennent ainsi accessibles aux élèves, par exemple : si $A > B$, alors $A + K > B + K$.

---

[9] For example, they compare the lengths of two boards, name the lengths A and B, and represent the relationship between them as A = B, A ≠ B, A > B, or A < B. There is no reference to numbers during this work: "A" represents the unmeasured length of the board (Schmitttau et Morris, 2004, p. 62-63).

L'approche du programme élaboré par Davydov permet de faire penser les enfants de diverses manières. Premièrement, l'enfant développe une pensée théorique qui, selon Vygotsky, constitue l'essence de l'algèbre (Vygotsky, 1986). Par exemple, il prend l'habitude de rechercher des relations entre les quantités dans des situations contextualisées (une sorte de généralisation) et il apprend à résoudre une équation par déduction en observant sa structure (une sorte de pensée analytique). Deuxièmement, les enfants s'habituent à ce que les expressions et les équations impliquant des lettres aient un sens, car leur compréhension de ces expressions a été fondée sur le travail avec des quantités réelles, des actions sur des quantités et des modèles de relations quantitatives.

Les résultats de certaines recherches (Morris et Sloutsky, 1998; Schmittau, 1994, 2003) démontrent qu'à la fin de la 3e année, les élèves ayant suivi un enseignement tel que décrit, ont une compréhension conceptuelle qui leur permet d'étendre leurs connaissances à de nouveaux contextes et problèmes. Ils ont aussi la capacité d'analyser et de modéliser des situations mathématiques qu'ils n'ont pas rencontrées auparavant ou du moins pour lesquelles ils ne possèdent pas la confiance nécessaire pour tenter de le faire.

L'approche de l'école de Davydov est encore actuellement reprise (Lee, 2006; Mellone et al., 2018; Polotskaia et al., 2017; Tuominen et al., 2018; Venenciano et al., 2020) et les résultats semblent démontrer le potentiel d'un travail sur la pensée relationnelle-théorique dans lequel l'usage algébrique de la lettre joue un rôle important.

3.3 Les résultats et les conclusions de Lee (2006)

Lee (2006) a réalisé une recherche dans le contexte d'enseignement basé sur le programme de mathématiques de Davydov. Le but de l'étude était de comprendre la pensée des élèves (6-7 ans) face à une tâche d'analyse d'un problème écrit et de représentation de la réponse à ce problème – le nombre qui est 2 de plus que a – sur la droite numérique. La discussion en classe, qui a duré trois heures et s'est étalée sur trois jours, a eu lieu au deuxième semestre de la première année de l'expérimentation du programme de Davydov. À ce stade, les élèves avaient discuté de la notion de quantité, comparé des objets selon certaines propriétés quantitatives, identifié l'égalité ou l'inégalité entre des quantités, et représenté les résultats de comparaison à l'aide de signes (dessins, schémas, etc.) et de lettres. De plus, la représentation à l'aide d'une droite numérique avait été introduite quelques temps avant les leçons décrites (figure 6).

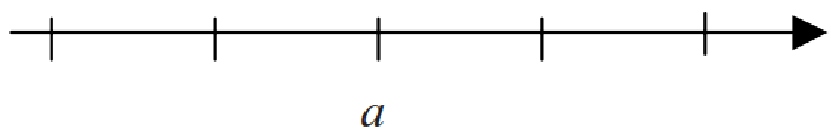


Figure 6 : La droite numérique utilisée dans l'étude de Lee (2006)

Au début, les élèves ont considéré le nombre a comme le début de la droite numérique ($a = 0$), comme deuxième point ($a = 2$) ou comme un nombre inconnu (et donc, on ne peut pas déterminer le nombre qui est 2 de plus que a).

Lee constate aussi qu'avant ces leçons, plusieurs difficultés bien connues en relation avec la compréhension des lettres (voir Collis, 1971; Küchemann, 1978; 1981) apparaissent. Par exemple, certains élèves ont interprété les lettres comme des étiquettes d'objets (par exemple, C pour Cup, B pour Ball, etc.) ou des valeurs numériques spécifiques.

> Par exemple, au cours d'une session du premier semestre de la 1re année, on a montré aux enfants deux bâtons et on leur a demandé: « La longueur de ce bâton (le plus long) est A et la longueur de l'autre bâton (le plus court) est B. Pouvez-vous comparer A et B ? » Six enfants sur sept ont proposé une formule correcte : A> B. Un élève a posé des questions sur la formule : « Comment se fait-il que A soit plus grand que B ? C'est faux. » Lorsqu'on lui a demandé une justification, il a expliqué : « A est le premier et B est le second de l'alphabet. Donc B est supérieur à A. » Il pense à l'ordre alphabétique. Cependant, il a rapidement ajusté sa réponse lorsqu'on lui a demandé : « Quelle propriété comparez-vous? » Il a répondu : « Longueur… Attendez ! Attendez ! À quoi je pense? A est supérieur à B. » (Lee, 2006, p. 101, traduction libre[10])

Toutefois après les trois heures de discussion dûment organisées par l'enseignant, les élèves identifient a comme une quantité donnée (« ce n'est pas important c'est combien exactement ») et déduisent que la quantité cherchée doit être « $a + 2$ » et qu'elle se situe deux unités à droite de a sur la droite numérique. « Finalement, Jamie a convenu avec le reste des enfants que a pouvait être n'importe quel nombre et a + 2 était le nombre qui était 2 de plus que a, quel qu'il soit » (Lee, 2006, p. 103,

---

[10] For example, in one session of the first semester of Grade 1, the children were shown two sticks and asked, "The length of this stick (longer one) is A, and the length of the other stick (shorter one) is B. Can you compare A and B?" Six children out of seven derived a correct formula: A > B. One student asked questions about the formula: "How come A is greater than B? It's wrong." When asked for a justification, he explained, "A is the first and B is the second in the alphabet. So B is greater than A." He thought about the alphabetical order. However, he quickly adjusted his answer when asked, "What property are you comparing?" He replied, "Length… Wait! Wait! What am I thinking? A is greater than B" (Lee, 2006, p. 101).

traduction libre[11]). L'auteur suggère que, malgré leur jeune âge, les élèves sont parvenus à développer une compréhension algébrique de la situation et à exprimer la réponse à l'aide d'un symbolisme algébrique. Ainsi, l'auteur conclut que les enfants sont en mesure de comprendre et d'utiliser certains concepts algébriques d'une manière théoriquement valable plus tôt qu'on ne pourrait le penser. Toutefois, cette compréhension ne peut émerger que dans le contexte où les tâches proposées s'insèrent dans un programme bien articulé et où les approches pédagogiques stimulent la participation, les échanges et la créativité des enfants.

3.4 Le cas de la résolution de problèmes

Une autre recherche inspirée par la théorie de Davydov (2008) a été réalisée au Québec (Polotskaia et al., 2017). Les chercheurs ont conçu un environnement virtuel pour soutenir la résolution de problèmes écrits traditionnels, à la différence que les données numériques du problème ont été remplacées par des lettres. Les élèves participants au projet ont suivi un programme expérimental visant l'apprentissage des relations additives et le développement de la pensée relationnelle dans le contexte de la résolution de problèmes écrits. Avant l'expérimentation, les lettres n'avaient jamais été utilisées et l'utilisation de schémas (des segments) pour représenter les relations entre les données du problème avait été enseignée.

Dans le cadre de cette expérimentation, qui avait eu lieu vers la fin de la 2e année du primaire, les élèves ont participé à trois sessions de travail à l'ordinateur (dans l'environnement de résolution), suivies de discussions en classe. Comme dans l'expérimentation de Lee (2006), les chercheurs constatent qu'au début, les élèves étaient confus avec le texte sans nombre et avec les lettres utilisées pour identifier les quantités représentées par des segments sur le schéma. Toutefois, à la fin de la troisième session, les élèves étaient plus à l'aise avec l'utilisation des lettres. Ils réussissaient à modéliser les problèmes à l'aide de schémas et de lettres pour ensuite déduire l'opération arithmétique à effectuer et exprimer cette opération avec des lettres. Depuis, l'environnement de résolution de problèmes écrits a été utilisé pour travailler avec une élève dyslexique avec succès (Pelczer et al., à paraître).

---

[11] Eventually, Jamie agreed with the rest of the children that a could be any number and a + 2 was the number which was 2 more than a, whatever it was (Lee, 2006, p. 103).

3.5 Synthèse sur la lettre comme outil de développement de la pensée algébrique

Plusieurs chercheurs (Davydov, 2008; Lee, 2006; Malara et Navarra, 2018; Venenciano et al., 2020) avancent que l'utilisation de lettres pour noter des quantités plus tôt dans le curriculum pourrait soutenir le développement de la pensée relationnelle, théorique et algébrique. Pour certains, la notation littérale n'est pas un sujet d'apprentissage mais plutôt un outil de modélisation et de communication des relations quantitatives – un outil de pensée.

Pour nous, la pensée théorique promue dans l'approche de Davydov, porte un caractère analytique similaire à celui défini par Squalli et Bronner (2017) de même que Radford (2018). En effet, dans le cadre du programme de Davydov, les élèves cherchent à « théoriser » le problème, modéliser sa structure mathématique à l'aide de systèmes sémiotiques variées incluant la notation littérale. À l'aide de lettres, les élèves opèrent sur les quantités indéterminées comme si elles étaient connues et au moment où les nombres ne sont pas disponibles.

Par ailleurs, plusieurs recherches démontrent que cette utilisation des lettres est potentiellement accessible aux enfants dès le début de l'école primaire (6 ans) et qu'elle complémente et rend efficace le processus de développement de leur pensée relationnelle-théorique-algébrique dès le début de l'apprentissage des mathématiques à l'école.

4. Synthèse et discussion

La nature abstraite de l'algèbre est souvent identifiée comme la source des difficultés des élèves (Collis, 1971; Küchemann, 1978, 1981). L'usage d'un symbolisme littéral peut être associé à ce caractère abstrait dans la mesure où il constitue un langage concis, organisé et régit par des conventions qui lui sont propres, qui peut exister et fonctionner indépendamment de toute situation concrète. Dans le contexte de l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire, il est justifié de se demander jusqu'à quel point cette abstraction a sa place. En effet, à ce niveau, les apprentissages sont ancrés dans les expériences sensorielles et motrices des enfants. L'observation et la manipulation des objets concrets du quotidien sont particulièrement mises à profit.

D'un côté, on pourrait penser que ce contexte mène forcément à un travail arithmétique avant tout dans lequel on construit et on manipule des nombres généralement associés à des quantités et des mesures concrètes. Certains auteurs envisagent alors le passage à l'algèbre qui s'ensuit à travers la généralisation des propriétés et des structures des nombres et de leurs relations. Cooper et Warren (2008) expliquent :

> Nous avons apprécié que le nombre puisse être réifié du comptage quotidien d'éléments à l'objet de pensée qui permet, par exemple, d'ajouter des nombres sans référence à des ensembles d'éléments. Nous avons également vu que, plus tard, la variable pouvait être réifiée, à son tour, à l'objet de la pensée lorsque les élèves avaient l'expérience d'idées mathématiques qui sont vraies pour n'importe quel nombre. Ainsi, nous en sommes venus à considérer l'algèbre comme une réification ou une abstraction de second niveau, une réification d'une réification antérieure, révélant que les difficultés en algèbre pourraient être réduites si le nombre était entièrement reifié (plus seulement vu comme un ensemble d'items) et que la généralisation serait résulterait d'autant d'activités numériques que possible. (Cooper et Warren, 2004, p. 24, traduction libre[12])

L'algèbre est alors considérée comme un second niveau, un travail mathématique abstrait qui s'appuie sur la compréhension de l'arithmétique. Cette vision traditionnelle de la succession arithmétique-algèbre fait en sorte que l'introduction d'un symbolisme littéral est forcément tardive. En effet, la consolidation des apprentissages arithmétiques est considérée comme préalable au passage à l'abstraction dans lequel le symbolisme littéral joue le premier rôle. Le courant *Early Algebra* s'insère dans ce cursus traditionnel dans lequel les mathématiques scolaires débutent par un travail sur les nombres tout en proposant un enrichissement à l'aide d'activités permettant l'amorce du développement d'une pensée algébrique. Le symbolisme littéral n'apparait alors pas comme central dans ce développement qui vise avant tout le déploiement d'une pensée à travers différents registres sémiotiques informels. Selon les auteurs, le symbolisme plus formel sera introduit plus ou moins tardivement (à partir de la 4e année du primaire) et graduellement pour éviter les dangers du formalisme précoce (Brizuela et Schlimann, 2004; Malara et Navarra, 2018; Radford, 2018). Le symbolisme littéral est alors vu comme un **outil mathématique**, un nouveau langage à apprendre pour exprimer la généralisation.

D'un autre côté, pour les chercheurs qui s'appuient sur les travaux de Davydov et ses collègues, l'observation et la manipulation de différents objets apparaissent aussi comme les stimuli d'apprentissages ancrés dans l'expérience sensorielle et motrice de l'enfant. Néanmoins l'exploitation de ce contexte s'effectue à travers

---

[12] We appreciated that number could be reified from counting everyday items to the object of thought that allows, for example, numbers to be added without reference to sets of items. We also saw that, at a later time, variable could be reified, in turn, to the object of thought when students were experienced with mathematical ideas that are true for any number. Thus, we came to regard algebra as a second level reification or abstraction, a reification of a previous reification, indicating that algebra difficulties might be reduced if number was fully reified (no longer a set of items) and generalisation was an outcome for as many number activities as possible (Cooper et Warren, 2004, p. 24).

des activités orientées vers la modélisation des relations quantitatives et la découverte de représentations variées de ces relations. Le symbolisme littéral apparait alors très rapidement (après 2 à 4 mois d'école avec les enfants de 6-7 ans) et il constitue l'une des représentations possibles des relations entre des propriétés quantitatives des objets observés (longueur, aire, masse) (voir Tuominen et al. 2018; Mellone et al., 2018; Venenciano et al., 2020). Ainsi, la pensée théorique développée et le sens attribué aux expressions littérales proviennent de la manipulation d'objets et de la compréhension de la réalité de ces objets. Dans cette approche, le symbolisme littéral joue le rôle d'outil de communication de la pensée à même titre que la schématisation et la verbalisation. Autrement dit, il est vu comme **un outil de développement de la pensée** théorique.

Dans les deux perspectives que nous avons présentées, le symbolisme littéral apparait soit comme un outil mathématique (à apprendre), soit comme un outil d'apprentissage (ce qui aide à apprendre autre chose). Malgré cette divergence qui influe sur le moment de la première rencontre des enfants avec le symbolisme littéral, les deux perspectives mettent de l'avant l'importance du sens comme support à la compréhension ainsi que la contribution de ce registre au développement d'une pensée algébrique comme le mentionnent Brizuela et Schliemann (2004) :

> Les notations conventionnelles aident à étendre la réflexion (Cobb, 2000; Lerner et Sadovsky, 1994; Vygotsky, 1978), mais si elles sont introduites sans compréhension, les élèves peuvent afficher une formalisation prématurée (Piaget, 1964). Pour ces raisons, les élèves doivent être initiés aux notations mathématiques d'une manière qui leur convient. (Brizuela et Schliemann, 2004, p. 34, traduction libre[13])

De plus, les auteurs des deux courants reconnaissent que la capacité intellectuelle des élèves du primaire est beaucoup plus étendue et variée que celle vers laquelle est orienté le contenu traditionnel de l'enseignement élémentaire (Blanton et al., 2015; El'konin et Davydov, 1975). Dans le cas d'*Early Algebra*, la proposition qui en découle consiste en un enrichissement de l'activité mathématique à travers de nouvelles activités favorisant le développement d'une pensée algébrique. Dans le cas du courant de Davydov, la proposition consiste à réenvisager l'entrée dans les mathématiques en visant en premier lieu une pensée théorique et analytique.

---

[13] Conventional notations help extend thinking (Cobb, 2000; Lerner and Sadovsky, 1994; Vygotsky, 1978), but if they are introduced without understanding, students may display premature formalization (Piaget, 1964). For these reasons, students need to be introduced to mathematical notations in ways that make sense to them (Brizuela et Schliemann, 2004, p. 34).

Ainsi, les idées développées au sein des deux courants présentent des similitudes et les intentions didactiques semblent se rejoindre autour de caractéristiques associées à la pensée algébrique, notamment : dégager et représenter les relations entre les quantités; et considérer, comparer et manipuler des quantités indéterminées. La différence fondamentale entre les deux approches concerne plutôt la manière de mettre en œuvre ces idées dans la classe de mathématique au primaire et, par conséquent, d'introduire le nombre. Alors que le comptage traditionnel rend l'utilisation de lettres au primaire ambigu ou inutile, le travail sur les relations quantitatives semble rendre l'utilisation des lettres indispensable.

Conclusion

Les enjeux d'apprentissage et d'enseignement sur l'usage du symbolisme littéral sont nombreux. Les lettres sont utilisées à différents escients en mathématiques alors que l'utilisation de la lettre comme représentant d'une quantité ou d'un nombre est essentielle en algèbre. De plus, le symbolisme littéral prend un sens différent selon les contextes et les usages algébriques associés. La variété de contextes, les multiples sens et interprétations, les ambiguïtés de dénomination de la lettre, etc. révèlent la complexité du mandat. Soit cette situation est perçue comme une complexité et une limitation pour l'apprentissage, soit elle est perçue comme une flexibilité et un levier d'enseignement. Dans le premier cas on aura tendance à repousser l'introduction du symbolisme en justifiant que c'est trop difficile pour les élèves. On préférera éventuellement utiliser un symbolisme non conventionnel (point d'interrogation, espace vide, voire un nombre général) pour favoriser la pensée avant tout. Dans le second cas, on considérera que plus tôt les élèves sont habitués à l'usage des lettres, plus cette représentation leur apparaitra commune et plus d'occasions et de temps ils auront d'approfondir leur compréhension.

Par ailleurs, comme la contribution du travail sur le symbolisme littéral au développement de la pensée algébrique semble acceptée de tous, on peut penser que le problème qui se pose concerne plutôt l'identification du « bon » moment pour amorcer le travail sur ce symbolisme. D'un côté, le courant *Early Algebra* préconise le développement de la pensée algébrique d'abord **sans utilisation du symbolisme littéral** (ex. Radford, 2018) et d'un autre côté, l'école de la pensée de Davydov introduit ce **symbolisme dès le début des apprentissages mathématiques scolaires**, avant même le travail sur les nombres et les opérations (ex. Lee, 2006). Toutefois, la revue de certains arguments avancés par les chercheurs des deux courants ainsi que les résultats de recherches récentes nous amènent à reconsidérer **le rôle** du symbolisme littéral dans l'apprentissage mathématique au primaire plutôt que le **moment** de son introduction. En fin de compte, ce rôle dépend fortement de la vision sur le lien entre la pensée algébrique (ou théorique) et la conceptualisation du nombre. Au-delà des conceptions partagées sur les capacités des élèves – notre bagage piagétien assumé – et des appréhensions face à la complexité de l'algèbre, il faut savoir qu'il existe d'autres manières de concevoir le nombre et la pensée algébrique.

Nous sommes convaincus que la rupture arithmétique-algèbre n'est pas une fatalité et que plusieurs difficultés rencontrées par les élèves, et engendrées par des choix didactiques fortement ancrés dans les pratiques, pourraient être amoindries. Pourrait-on faire faire des mathématiques aux enfants du primaire autrement, sans nombres par exemple, et considérer les différentes facettes de l'algèbre progressivement? Les différents usages de la lettre pourraient-ils se côtoyer? La diversité des éléments de la pensée algébrique, que ce soit généraliser, prouver, modéliser, etc., pourrait-elle être vue comme une richesse plutôt que comme un obstacle à l'apprentissage?

Pour conclure, le problème de l'utilisation de la lettre n'est pas tant comment et à quel moment de la scolarité de l'élève il faut lui enseigner l'utilisation des symboles, mais plutôt comment doit-on voir le rôle de la notation littérale. Est-elle un outil mathématique ou un outil didactique ou les deux? De plus, à quel moment et comment doit-on commencer le développement de la pensée analytique-théorique-relationnelle-algébrique : avant le nombre, après le nombre ou en même temps que le nombre?

Références

Bednarz, N. et Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. Dans N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (p. 115-136). Kluwer Academic Publishers.

Bernier, J-F., Longtin, J. et Rodrigue, V. (2012). *Cinémath. Cahier d'apprentissage. Mathématique. 3e cycle du primaire – 2e année.* Édition Chenelière Éducation.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. et Newman-Owens, A. (2017). A progression in first-grade children's thinking about variable and variable notation in functional relationships. *Educational Studies in Mathematics, 95*(2), 181-202. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9745-0

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Lsler, I. et Kim, J. S. (2015). The development of children's early algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*, 39-87. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.1.0039

Bodanskii, F. G. (1991). The formation of an algebraic method of problem-solving in primary school children. Dans L. P. Steffe (dir.), *Soviet studies in mathematics education (vol. 6): Psychological abilities of primary school children in learning mathematics* (p. 275-338). National Council of Teachers of Mathematics.

Booth, L. (1984a). Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. *Petit x, 5*, 5-17.

Booth, L. (1984b). *Algebra: childrens' strategies and errors*. NFER-Nelson.

Brizuela, B. et Schliemann, A. (2004). Ten-year old students solving linear equations. *For the Learning of Mathematics, 24*(2), 33-40. https://www.jstor.org/stable/40248456

Carpenter, T. P. et Levi, L. (2005). Algebra in Elementary School: Developing Relational Thinking 1. *ZDM Mathematics Education*, *37*(1), 53-59. https://doi.org/10.1007/BF02655897

Carraher, D. W. et Schliemann, A. D. (2007). Early Algebra and Algebraic Reasoning. Dans F. Lester (dir.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 669-705). Information Age Publishing.

Carraher, D. W. et Schliemann, A. D. (2018). Cultivating Early Algebraic Thinking. Dans C. Kieran (dir.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds. The global evolution of an emerging field of research and practice* (p. 107-138). Springer International Publishing.

Collis, K. F. (1971). A study of concrete and formal reasoning in school mathematics. *Australian Journal of Psychology, 23*(3), 289-296. https://doi.org/10.1080/00049537108254623

Cooper, T. J. et Warren, E. (2008). The effect of different representations on Years 3 to 5 students' ability to generalise. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 23-37. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0066-8

Davydov, V. V. (1982). The psychological characteristics of the formation of elementary mathematical operations in children. Dans T. P. Carpenter, J.M. Moser et T.A. Romberg (dir.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (p. 224-238). Lawrence Erlbaum.

Davydov, V. V. (2008). *Problems of developmental instruction: A theoretical and experimental psychological study*. Nova Science Publishers.

Davydov, V. V., Gorbov, S. F., Mikulina, G. G. et Saveleva, O. V. (1999). *Mathematics: Class I*. State University of New York.

Davydov, V. V., Gorbov, S. F., Mikulina, G. G., Saveleva, O. V. et Tabachnikova, N. L. (2001). *Mathematics 3rd Grade*. State University of New York.

El'konin, D. B. et Davydov, V. V. (1975). Learning capacity and age level: Introduction. Dans L. P. Steffe (dir.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics. Vol. 7, Children's capacity for learning mathematics* (p. 1-11). University of Chicago.

Filloy, E. et Rosano, T. (1989) Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19-25.

Frolova, T. A. (1963). Opyt vvedenia bukvennoi symvoliki pri obuchenii matematike v 1 klasse. Dans V. V. Davydov et J. A. Ponomareva (dir.), *Povyshenie effektivnosti obuchenia v nachalnoi shkole* (p. 31–40). Akademia pedagogicheskih nauk.

Gouvernement du Québec. (2006). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, premier cycle*. Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport.

Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques, 17*(2), 167-210.

Grugeon-Allys, B. et Pilet, J. (2017). Quelles connaissances et quels raisonnements en arithmétique favorisent l'entrée dans l'algèbre? *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 20*(3), 106-130. https://doi.org/10.7202/1055730ar

Herscovics, N. et Linchevski, L. (1991). Crossing the didactic cut in algebra. Dans R.G. Underhill (dir.), *Proceedings of the Thirteenth Annual Meeting of PME-NA. Volume 2* (p. 196-202). Virginia Tech.

Hewitt, D. (2014). The space between the unknown and a variable. *Proceedings of PME 38 and PME-NA 36*, 3, 289-296.

Janvier, C. (1996). Modeling and the initiation into algebra. Dans N. Bednarz, C. Kieran and L. Lee (dir.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (p. 225-236). Kluwer Academic Publishers.

Janvier, C., Charbonneau, L., et René de Cotret, S. (1989). Obstacles épistémologiques à la notion de variables : perspectives historiques. Dans N. Bednarz et C. Gamier (dir.), *Construction des savoirs.* Agence d'ARC inc.

Kaput, J. J. (1983). Representation systems and mathematics. Dans J. C. Bergeron et N. Herscovics (dir.), *Proceedings of the Fifth Annual Meeting of PME-NA. Volume 2* (p. 57-66). Université de Montréal.

Kaput, J J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by “algebrafying” the K-12 curriculum. Dans National Research Council (dir.), *The Nature and Role of Algebra in the K-14 Curriculum: Proceedings of a National Symposium.* The National Academies Press. https://doi.org/10.17226/6286.

Kaput, J. J., Blanton, M., et Moreno, L. (2008a). Algebra from a symbolization point of view. Dans J. J. Kaput, D. W. Carraher, et M. L. Blanton (dir.), *Algebra in the early grades* (p. 19–55). Routledge.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. Dans S. Wagner et C. Kieran (dir.), *Research issues in the learning and teaching of algebra. Volume 4 of Research agenda for mathematics education* (p. 33–56). National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. Dans D. A. Grouws (dir.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 390-419). National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139-151.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. et Ng, S. F. (2016). *Early Algebra. Research into its nature, its learning, its teaching*. Springer Open.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford University Press.

Knuth, E., Stephens, A., Blanton, M. et Gardiner, A. (2016). Build an early foundation for algebra success. *Kappan,* *97*(6), 65-68. https://doi.org/10.1177/0031721716636877

Küchemann, D. E. (1978). Children’s understanding of numerical variables. *Mathematics in School,* 7(4), 23-26. https://www.jstor.org/stable/30213397

Küchemann, D. E. (1981). Algebra. Dans K. Hart (dir.), *Children’s understanding of mathematics* (p. 11-16). John Murray.

Lee, J. (2006). Teaching algebraic expressions to young students: The three-day journey of “a + 2”. *School Science and Mathematics, 106*(2), 98-104. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2006.tb18139.x

Lins, R. C. (1992) *A framework for understanding what algebraic thinking is* [Thèse de doctorat, University of Nottingham]. Nottingham ePrints. http://eprints.nottingham.ac.uk/13227/1/316414.pdf

MacGregor, M., et Stacey, K. (1997). Students'understanding of algebraic notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics, 33*(1), 1-19. https://doi.org/10.1023/A:1002970913563

Malara, N. et Navarra, G. (2002). Influences of a procedural vision of arithmetics in algebra learning. Dans J. Novotná (dir.), *European Research in Mathematics Education II: Proceedings of the Second Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 2)* (p. 1-8). Bellaria.

Malara, N. et Navara, G. (2018). New words and concepts for early algebra teaching: sharing with teachers epistemological issues in early algebra to develop students' early algebraic thinking. Dans C. Kieran (dir.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds. The global evolution of an emerging field of research and practice* (p. 51-79). Springer International Publishing.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. et Gowar, N. (1985). *Routes to/Roots of algebra*. Open University Press.

Mellone, M., Ramploud, A., Di Paola, B. et Martignone, F. (2018). Cultural Transposition: Italian didactic experiences inspired by Chinese and Russian perspectives on Whole Number Arithmetic. *ZDM Mathematics Education*, *51*(1), 199-212. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0992-7

Morris, A. K. et Sloutsky, V. (1998). Understanding of logical necessity: Developmental antecedents and cognitive consequences. *Child Development*, *69*(3), 721-741.

Pelczer, I., Polotskaia, E. et Fellus, O. (à paraitre). La résolution des problèmes écrits: L'étude auprès d'une élève présentant une dyslexie. *McGill Journal of Education*.

Philipp, R. A. (1992). The many uses of algebraic variables. *The Mathematics Teacher, 85*(7), 557-561. https://www.jstor.org/stable/27967771

Polotskaia, E., Savard, A. et Freiman, V. (2017). La genèse de la pensée algébrique : macroanalyse d'une séquence d'enseignement expérimentale au primaire. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 20*(3), 79-105. https://doi.org/10.7202/1055729ar

Polotskaia, E., Anwandter-Cuellar, N., et Savard, A. (2019). *La réussite en mathématiques au secondaire commence à la maternelle : Synthèse des connaissances sur les pratiques d'enseignement des mathématiques efficaces à la maternelle et au primaire pour réussir l'algèbre du secondaire*. Rapport de recherche. Fonds de recherche Société et culture. Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. Dans J. Cai et E. Knuth (dir.), *Early algebraization* (p. 303-322). Springer-Verlag.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 257-277. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. Dans C. Kieran (dir.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds. The global evolution of an emerging field of research and practice* (p. 3-26). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_1

Schliemann, A. D. (2002). Representational tools and mathematical understanding. *Journal of the Learning Sciences*, *11*(2-3), 301-317. https://doi.org/10.1080/10508406.2002.9672141

Schmittau, J. (1994). Scientific concepts and pedagogical mediation: A comparative analysis of category structure in Russian and U.S. students [conférence]. *Annual meeting of the American Educational Research Association*, New Orleans.

Schmittau, J. (2003). Cultural–historical theory and mathematics education. Dans A. Kozulin, B. Gindis, S. Miller, et V. Ageyev (dir.), *Vygotsky's educational theory in cultural context* (p. 225-245). Cambridge University Press.

Schmittau, J. (2011). The role of theoretical analysis in developing algebraic thinking : A vygotskian perspective. Dans J. Cai et E. Knuth (dir.), *Early Algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (p. 71–85). Springer.

Schmittau, J. et Morris, A. (2004). The development of algebra in the elementary mathematics curriculum of V.V. Davydov. *The Mathematics Educator, 8*(1), 60-87.

Schoenfeld, A. et Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher, 81*(6), 420-427. https://doi.org/10.5951/MT.81.6.0420

Squalli, H. (2000). *Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base* [thèse de doctorat, Université Laval]. Corpus. https://corpus.ulaval.ca/jspui/handle/20.500.11794/51025

Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes du colloque EMF2015* (p. 346-356). Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene.

Squalli, H. et Bronner, A. (2017). Le développement de la pensée algébrique avant l'introduction du langage algébrique conventionnel. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 20*(3), 1-8. https://doi.org/10.7202/1055725ar

Squalli, H., Larguier, M., Bronner, A. et Adihou, A. (2020). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 22*(1), 36-62. https://doi.org/10.7202/1070024ar

Squalli, H., Mary, C. et Marchand, P. (2011). Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre : cas du Québec et de l'Ontario. Dans J. Lebeaume, A. Hasni et I. Harlé (dir.), *Recherches et expertises pour l'enseignement scientifique* (p. 67-78). De Boeck.

Squalli, H., Oliveira, I., Bronner, A. et Larguier, M. (2020). Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. *Recherches et perspectives curriculaires*. Québec : Livres en ligne du CRIRES. https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches

Tanişli, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *Journal of Mathematical Behavior*, *30*(3), 206-223. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.08.001

Tuominen, J., Andersson, C., Eriksson, I., et Bj, L. (2018). Relate before calculate: Students' ways of experiencing relationships between quantities. *Didactica Mathematicae, 40,* 5-33.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. Dans A. F. Coxford (dir.), *The ideas of algebra, K-12: 1988 Yearbook* (p. 8-19). National Council of Teachers of Mathematics.

Van Amerom, B. A. (2002). *Reinvention of early algebra. Developmental research on the transition from arithmetic to algebra*. CD-B Press, Centre for Science and Mathematics education.

Venenciano, L. et Dougherty, B. J. (2014). Addressing priorities for elementary school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *34*(1), 18-24.

Venenciano, L., Yagi, S. et Zenigami, F. (2020). The development of relational thinking: A study of Measure Up first-grade students' thinking and their symbolic understandings. *Educational Studies in Mathematics*, *106*(1), 1-16. https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-020-10014-z

Vlassis, J., Demonty, I. et Squalli, H. (2017). Développer la pensée algébrique à travers une activité de généralisation basée sur des motifs (patterns) figuratifs. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 20*(3), 131–155. https://doi.org/10.7202/1055731ar

Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and language*. MIT Press.