La généralisation dans la pensée algébrique

Alain BRONNER
LIRDEF, Université de Montpellier
alain.bronner@umontpellier.fr
Hassane SQUALLI
Université de Sherbrooke
Hassane.Squalli@USherbrooke.ca

Résumé : Notre travail traite du développement de la pensée algébrique avant l'introduction du symbolisme formel de l'algèbre à travers des problèmes de généralisation. Il s'inscrit dans l'étude des potentialités de certaines classes de problèmes et de la mise en évidence des conditions favorisant l'émergence de la généralisation dans les classes du primaire et du début du secondaire. Nous questionnons tout d'abord le concept de généralisation et sa place dans le développement de la pensée algébrique. Pour appuyer notre étude nous analysons une situation de généralisation réalisée dans une classe de 6e du primaire du Québec dans le cadre d'une analyse praxéologique (Chevallard, 1992, 1999) soutenue par un modèle de la généralisation algébrique (Squalli, 2015) adapté de Dörfler (1991). Enfin nous souhaitons montrer l'apport d'une telle analyse conjointe pour l'étude des problèmes de généralisation au niveau des caractéristiques des situations, des raisonnements des élèves et de la pratique enseignante.
Mots clés : pensée algébrique, numérique, généralisation, école primaire, praxéologie

Generalization in algebraic thinking

Abstract: This article primarily focuses on the development of algebraic thinking before the introduction of formal algebraic symbolism through problems of generalization. It partakes in the study of the potential of certain classes of problems as well as the identification of conditions promoting the emergence of generalization in primary and beginning secondary classes. First, we question the concept of generalization and its role in the development of algebraic thinking. In order to support our study we analyze a situation of generalization within a 6th grade class in Quebec in the context of a praxeological analysis (Chevallard, 1992, 1999) supported by a model of algebraic generalization (Squalli, 2015) adapted from Dörfler (1991). Finally, we present the

https://doi.org/10.71403/1feg0520

contribution of such a joint analysis to the study of problems of generalization in terms of situational characteristics, student reasoning, and teaching practice.

Keywords: *algebraic thinking, numerical, generalization,* primary school, praxeology

Introduction

Nos travaux portent sur le développement de la pensée algébrique avant l'introduction du symbolisme formel de l'algèbre, lequel soulève des difficultés importantes, tant au niveau des apprentissages des élèves qu'au niveau des stratégies d'enseignement (Coulange et al., 2012). Relativement à cette question les recherches didactiques ont souvent mis en avant la nécessité d'une articulation des savoirs et connaissances numériques et algébriques (Bronner, 1997, 2007). Cette question du passage des savoirs et connaissances numériques vers l'algébrique se pose depuis fort longtemps (Booth, 1984; Vergnaud, 1988; Chevallard, 1989, 1990; Kieran, 1992), mais elle reste encore une question d'enseignement et de recherche comme le montrent des études au Québec (Marchand et Bednarz, 1999; Squalli et al., 2011; Squalli et al., 2012). Face à cette question, ces travaux proposent, au niveau curriculaire et des pratiques enseignantes, de développer précocement la pensée algébrique, c'est-à-dire avant l'introduction du symbolisme algébrique conventionnel. De nombreux chercheurs et enseignants se sont tournés vers les problèmes dits de généralisation.

Notre travail s'inscrit dans cette perspective de recherche et vise à étudier les potentialités de certaines classes de problèmes pour favoriser une pensée algébrique avant toute introduction du symbolisme algébrique conventionnel à travers l'émergence de généralisation dans les classes du primaire et du début du secondaire.

Dans une première section de cet article, nous précisons notre problématique, puis nous présentons dans la section suivante notre cadre conceptuel et méthodologique issu de l'approche praxéologique de Chevallard (1992, 1999) et du modèle de la généralisation de Dörfler (1991). Ce cadre nous permet de préciser nos questions de recherche. Dans la troisième section notre étude s'appuie sur une situation de généralisation expérimentée dans une classe de 6e année du primaire du Québec. L'étude de cette situation se réalise dans le cadre d'une analyse conjointe praxéologique et du modèle adapté de Dörfler en nous centrant sur les généralisations mobilisées par les élèves et sur le rôle du professeur. En conclusion, nous synthétisons nos résultats sur les potentialités de certaines classes de situations de généralisation et terminons par une discussion sur l'apport de notre cadre conjoint d'analyse pour notre problématique autour des situations de généralisation.

1. Problématique de l'étude

La pensée mathématique est depuis longtemps au centre des programmes d'étude à l'école primaire et à l'école secondaire. Bien que le véritable objectif du programme au Québec soit le développement de différentes formes de la pensée mathématique (pensée arithmétique, algébrique, géométrique, probabiliste, statistique, fonctionnelle, etc.), ce dernier reste organisé selon une logique de hiérarchisation de domaines de contenus (Squalli, 2019). Ainsi, l'arithmétique est enseignée essentiellement au primaire et l'algèbre est enseignée au secondaire. Cette organisation a montré ses limites et crée un problème de transition entre les mathématiques du primaire et celles du secondaire, notamment entre arithmétique et algèbre. Ce problème est devenu une préoccupation majeure du milieu scolaire québécois car, comme le vivent les enseignants dans leur classe et comme le montre un grand nombre de travaux de recherches en didactique des mathématiques (Jeannotte, 2005; Oliveira et al, 2017; Saboya et al, 2013; Vergnaud et al., 1988), l'algèbre continue à poser problème aux élèves. Le passage pour les élèves d'un mode de pensée arithmétique à un mode de pensée algébrique est loin d'être facile à réaliser et présente d'importants obstacles (Vergnaud et al., 1988; Kieran, 1992; Rojano, 1996). Jusqu'à la fin des années 1980, la plupart des recherches en didactique de l'algèbre étaient principalement centrées sur l'étude des difficultés d'apprentissage rencontrées par les élèves lors du passage de l'arithmétique à l'algèbre. Dans leur article synthèse, Kieran (1992), Carraher et Schliemann (2007) présentent des exemples de telles difficultés documentées par la recherche.

Différentes interprétations des sources de ces difficultés sont proposées. Vergnaud (1988) évoque une double rupture épistémologique lors du passage de l'arithmétique à l'algèbre. On note, d'une part, une opposition des caractéristiques de la résolution arithmétique à celles de la résolution algébrique. D'autre part, une opposition des modes d'appréhension des écritures algébriques et numériques (statut du signe d'égalité, statut des lettres) ainsi que des modes de contrôle dans la transformation des écritures. Kieran (1992, 1994) avance qu'entre l'arithmétique et l'algèbre résident à la fois de fausses continuités et des discontinuités. Les fausses continuités résident dans l'utilisation des mêmes symboles et signes pour représenter le signe d'égalité et les opérations, mais avec des interprétations différentes. Les discontinuités sont reliées à la mise en œuvre de démarches de résolution distinctes, à l'utilisation de nouveaux objets, voire à la mise en jeu de conceptions structurales et non plus procédurales des objets, à la représentation formelle des problèmes par des équations et à l'utilisation de procédures formelles nouvelles pour les résoudre.

Au début des années 1990, l'ensemble de la communauté internationale s'accorde sur le fait que l'enseignement de l'algèbre pose problème et souligne la nécessité de sa rénovation en profondeur en mettant l'accent sur le développement de la pensée algébrique. Or, le développement de la pensée algébrique peut commencer avant l'introduction du symbolisme littéral de l'algèbre, dès les premières classes du primaire.

La généralisation et l'analycité sont deux caractéristiques essentielles de la pensée algébrique qui sont soulignées par la majorité des chercheurs (elles sont définies plus loin). La généralisation est un processus essentiel dans l'activité mathématique et tout particulièrement en algèbre. Elle est reconnue par plusieurs auteurs comme étant une composante très importante de la pensée algébrique (Lee, 1996; Kaput, 2008; Carraher et al., 2008; Radford, 2010, 2014; Squalli, 2000; Grugeon, 1995). Lee va jusqu'à penser qu'en algèbre, les activités de généralisation sont les plus importantes et constituent les seuls moyens d'initier les élèves à la culture algébrique. Elle ajoute : « Ce n'est pas non plus un défi de démontrer que les fonctions, la modélisation et la résolution de problèmes sont tous des types d'activités de généralisation, que l'algèbre et en fait toutes les mathématiques consistent à généraliser des modèles » (Lee, 1996, p. 102-103, traduction libre[1]).

Grugeon (2000) souligne les liens entre généralisation et compétence algébrique, montrant le rôle que peuvent jouer les problèmes de généralisation dans l'articulation des connaissances numériques et algébriques :

> La compétence algébrique s'évalue aussi à travers la capacité à exprimer des relations numériques générales. En effet, l'algèbre est un outil essentiel pour rendre l'accès possible aux propriétés numériques et pour les généraliser … De façon générale, le langage algébrique permet de formuler des problèmes dans leur généralité puis de les résoudre de façon systématique. (p. 11-12)

L'intérêt pour les problèmes de généralisation a conduit à des expérimentations de situations de généralisation s'appuyant sur divers supports et problèmes dans une perspective de développement de la pensée algébrique, notamment dans des situations de modélisation algébrique. En France, dans le rapport de la Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques (CREM) , une première entrée dans le calcul littéral est située dans « le travail sur les formules, qu'il s'agisse d'exploiter des formules données, ou d'en élaborer » (Kahane, 2002, p. 30). Pour la CREM, le statut de la lettre évolue : « elle devient représentant d'un nombre quelconque, engagée dans les calculs au même titre que le nombre qu'elle

[1] Nor is it much of a challenge to demonstrate that functions, modeling, and problem solving are all types of generalizing activities, that algebra and indeed all of mathematics is about generalizing patterns (Lee, 1996, p. 102-103).

représente » (Kahane, 2002, p. 235). On retrouve ici les premières caractéristiques d'une entrée dans la pensée algébrique, que nous préciserons plus loin, au service de la généralisation :

> Il y a là une évolution essentielle et, en même temps, un moyen de faire sentir à l'élève la puissance du calcul algébrique, dans une perspective complémentaire de celle ouverte par l'approche en termes d'équations et d'inéquations : il intervient ici comme outil au service de la généralisation. (Kahane, 2002, p. 235)

Toujours pour Kahane (2002), ce travail peut être engagé relativement tôt et il suggère comme habitat les problèmes de dénombrement :

> Le travail de production de formules, associé par exemple à des situations de dénombrement, est sans doute nécessaire pour ressentir en quoi consiste cette démarche de généralisation par le passage au littéral et la puissance que nous donne le calcul algébrique, une fois la formule établie. En fait, ce qui est en germe ici, c'est la pensée fonctionnelle et le calcul associé. (p. 31)

En Belgique aussi, les situations de dénombrement sont mises en avant pour le développement de la pensée algébrique comme l'indiquent Demonty et al. (2015) :

> Les programmes de Belgique francophone autorisent l'exploitation de situations de dénombrement, en proposant de les travailler à la fin de l'enseignement primaire (à travers des exploitations numériques) et au début de l'enseignement secondaire (où l'accent sera mis sur l'élaboration d'une formule permettant de généraliser le phénomène à tous les cas possibles). (p. 277)

C'est ce que Krysinska et al. (2009) appellent, à propos, des problèmes de dénombrement « l'engouement de la noosphère aussi bien que de chercheurs estimant que ces problèmes "marchent" et appréciant leur portée dans l'émergence de ce qu'ils appellent la "pensée fonctionnelle" » (p. 274). Krysinska et al. (2009) testent la crédibilité didactique des problèmes de dénombrement et proposent une ingénierie innovante de classement de ces problèmes dans le contexte des suites figurées pour montrer leur importance dans l'introduction à la pensée fonctionnelle.

Notre travail porte plus précisément sur l'émergence de la généralisation dès les classes du primaire, sur la nature des processus de généralisation au niveau des élèves et sur la recherche des conditions favorisant cette émergence au niveau des situations et de la pratique de l'enseignant. Notre hypothèse avance ainsi que ces problèmes de dénombrement constituent aussi des potentialités intéressantes pour le développement précoce de la pensée algébrique en favorisant les processus de généralisation.

En s'inspirant d'une série de travaux, Radford (2014, 2015) caractérise quant à lui la pensée algébrique élémentaire à l'aide de trois éléments :

1) indéterminés : la situation mathématique considérée contient des nombres dont les valeurs sont non déterminées (inconnues, variables, paramètres, etc.).
2) dénotation : les nombres non déterminés impliqués dans la situation doivent être nommés ou signifiés d'une certaine manière. On peut utiliser des signes alphanumériques, mais pas nécessairement.
3) analyticité : les nombres non déterminés sont traités comme s'ils étaient des nombres connus, c'est-à-dire, bien qu'ils ne soient pas connus, les nombres non déterminés sont traités de la même manière que les nombres déterminés (dont la valeur est connue) : on les additionne, les soustrait, les multiplie, les divise, etc. en respectant les propriétés des opérations.

2. Cadre théorique et méthodologique

Nous explicitons notre cadre conceptuel en présentant la notion de praxéologie au sens de Chevallard pour modéliser les savoirs et les activités dans la situation que nous analyserons dans cet article. Étant attentifs aux instruments sémiotiques mobilisés dans les activités de généralisation, nous compléterons notre cadre par la notion de registre sémiotique de Duval. Notre cadre d'analyse est aussi enrichi par un modèle des processus de généralisation algébrique à partir du modèle de Dörfler.

Nous terminerons cette partie en précisant nos questions de recherche et notre méthodologie.

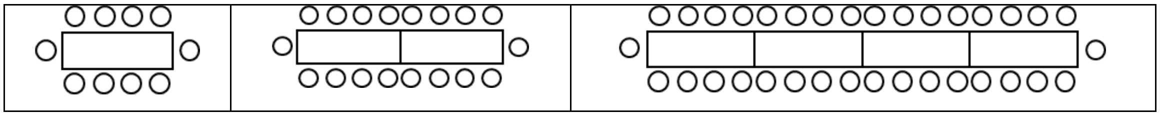
2.1 L'approche praxéologique et sémiotique des activités

Nous utilisons la modélisation de l'activité mathématique développée par Chevallard (1999) dans le cadre de l'approche anthropologique avec la notion de praxéologie constituée de quatre dimensions articulées (type de tâches, techniques, technologies, théorie) pour construire un premier axe d'analyse a priori des démarches possibles des élèves dans des activités de généralisation. Ainsi pour Chevallard (1997) :

> En toute institution, l'activité des personnes occupant une position donnée se décline en différents *types de tâches* T, accomplis au moyen d'une certaine *manière de faire*, ou *technique*, τ. Le couple [T/τ] constitue, par définition, un *savoir-faire*. (p. 38)

Prenons un exemple classique de problème de généralisation de type dénombrement « les tables de la cafétéria » :

> Dans une cafétéria d'école, le cuisinier dispose de petites tables rectangulaires qu'il faut mettre bout à bout pour former de plus grandes tables. Voici quelques dispositions possibles :



> Donne une manière de trouver rapidement le nombre de chaises placées autour d'une grande table, peu importe la longueur de celle-ci.

Pour chaque nombre de petites tables fixé, il se présente une tâche ou un spécimen (par exemple : déterminer le nombre de chaises pour 10 petites tables) de ce que Chevallard appelle un type de tâches que l'on peut formuler dans ce contexte de la manière suivante : déterminer le nombre de chaises d'une telle configuration selon le nombre de petites tables. La distinction « tâche » et « type de tâches » est importante dans la mesure où ce que le professeur vise est de faire élaborer, non pas seulement une méthode pour un cas particulier, et notamment pour les premiers, avec 2, 3 ou 4 petites tables, mais une méthode ou technique générale valable pour tous les cas particuliers. Nous expliciterons, dans l'analyse de notre situation, des techniques possibles qui peuvent être mobilisées pour un tel type de tâches de généralisation. Néanmoins, on peut déjà se baser sur la catégorisation des démarches de généralisation mises en place par les élèves de 10 à 14 ans pour ce problème par Radford (2006, 2008) : l'induction naïve, la généralisation arithmétique et la généralisation algébrique. Demonty et al. (2015) résument ainsi la catégorisation de cet auteur :

> - L'induction naïve consiste à rechercher un motif inconnu en analysant les caractéristiques d'un seul motif connu.
> - Une autre démarche est qualifiée par Radford (2006, 2008) de généralisation arithmétique : dans celle-ci, la personne identifie un point commun à travers l'analyse de plusieurs termes de la suite (il s'agit du fait qu'il y a un accroissement constant entre les termes consécutifs). Cette caractéristique peut être utilisée pour identifier correctement un terme à partir d'un terme proche (par addition successive de la raison).
> - Dans la démarche de généralisation algébrique, l'élève identifie une régularité à travers l'analyse de quelques termes de la suite, étend ou généralise cette régularité aux autres termes, et parvient à proposer une expression directe de n'importe quel terme de la suite. (p. 267-268)

Pour Chevallard (1997) une praxéologie a besoin, pour être viable, de mobiliser, de manière souvent très parcellaire, un savoir associé :

> Mais un tel savoir-faire ne saurait vivre à l'état isolé : il appelle un environnement technologico-théorique [θ,Θ], ou savoir (au sens restreint), formé d'une technologie θ, « discours » rationnel (logos) censé justifier et rendre intelligible la technique (tekhnê), et à son tour justifié et éclairé par une théorie Θ, généralement évanouissante. Le système de ces quatre composantes, noté [T/τ/θ/Θ], constitue

> alors une organisation praxéologique ou praxéologie, dénomination qui a le mérite de rappeler la structure bifide d'une telle organisation, avec sa partie pratico-technique [T/τ] (savoir-faire), de l'ordre de la praxis, et sa partie technologico-théorique [θ/Θ] (savoir), de l'ordre du logos. (Chevallard, 1997, p. 38)

Chevallard (2007), en explicitant la fonction de l'environnement tecnnologico-théorique, précise que sa modélisation s'applique aussi bien à une institution qu'à une personne (élève ou enseignant par exemple) :

> Est technologie ce qui, dans une institution ou pour une personne, remplit la fonction technologique – justifier, éclairer la technique t relative au type de tâches T, voire permettre de l'engendrer (ou de la reconstruire, quand elle est « donnée »). De même, est théorie ce qui assume, en cette institution ou pour cette personne, une fonction théorique. Dans un tel univers, les stratégies institutionnelles ou personnelles de diffusion, de rétention, de rejet praxéologique vont jouer un rôle prééminent; mais on s'en doutait déjà. (p. 714)

Dès la communication des tâches, comme on peut le voir sur l'exemple donné précédemment, les élèves sont confrontés à divers ostensifs, au sens de Bosch et Chevallard (1999) :

> Un « objet ostensif » – du latin ostendre, « montrer, présenter avec insistance » – pour nous référer à tout objet ayant une nature sensible, une certaine matérialité, et qui, de ce fait, acquiert pour le sujet humain une réalité perceptible. (p. 90)

C'est par ces objets que l'accès aux objets mathématiques abstraits, non ostensifs, est possible. Dans le traitement des tâches, notamment dans les moments d'élaboration de techniques, les élèves manipulent divers types d'objets, qu'ils soient matériels, numériques ou algébriques, à l'aide de divers ostensifs, dont certains se constituent en des registres de représentations sémiotiques :

> Les représentations sémiotiques sont des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses règles propres de signifiance et de fonctionnement. (Duval, 1993, p. 39)

Ainsi, dans l'exemple proposé, les élèves peuvent exprimer en mots ou en abrégé « le nombre de tables » ou « le nombre d'étapes » et évoquer des opérations sur cette grandeur.

Duval (1995) a souligné les problèmes sémiotiques spécifiques du point de vue de l'apprentissage comme de l'enseignement. Ainsi se présentent dans les situations de généralisation (de type dénombrement) les problèmes de l'articulation entre le registre des écritures symboliques arithmétiques, ou numériques pures pourrait-on dire, et celui des écritures algébriques, et entre ces registres sémiotiques et d'autres registres, notamment le registre de la langue naturelle et le registre graphique. Ces problèmes ne sont pas spécifiques de l'algèbre et se présentaient déjà avec les questions numériques comme l'indiquait Bronner (2007) :

> On le voit, il ne s'agit pas seulement de problème algébrique en opposition à arithmétique, mais de problèmes mettant en jeu des nombres qu'ils soient mis en scène dans des apparats numériques directs ou sous de belles lettres. (p. 17)

Cette approche praxéologique et sémiotique des situations est articulée avec un deuxième axe d'analyse s'appuyant sur le modèle de généralisation de Dörfler (que nous présentons dans la section suivante) pour étudier les situations de généralisation.

2.2 La généralisation : une composante essentielle de la pensée algébrique

À l'instar de Radford (2010), nous définissons la pensée algébrique comme une manière d'agir et de réfléchir dans des activités algébriques, c'est-à-dire des activités faisant intervenir des opérations (lois de composition internes, externes, binaires ou n-aires) pouvant être de nature quelconque (addition, multiplication, rotation, translation, etc.), mais répétées un nombre fini de fois (Squalli, 2000, 2015). Sur le plan opératoire la pensée algébrique se déploie au moyen de 1) un ensemble de raisonnements particuliers, comme généraliser, raisonner de manière analytique, symboliser et opérer sur des symboles; raisonner sur des relations entre variables, en particulier des relations fonctionnelles; raisonner en termes de structures, etc.; 2) des manières d'approcher des concepts en jeu dans les activités algébriques, comme traiter l'égalité comme une relation d'équivalence; laisser les opérations en suspens; voir une expression numérique comme un objet en soi et non uniquement comme une chaîne de calculs, etc. et des modes de représentation et des manières d'opérer sur ces représentations (Squalli, 2015, Squalli et al., 2020).

La généralisation peut être vue à la fois comme processus et comme produit. Pour faire une distinction entre ces deux aspects, nous parlerons de généralisation quand il s'agit du processus et de généralité quand il s'agit du produit. Une généralisation est algébrique quand la généralité produite peut être représentée dans le registre algébrique, par exemple par une expression faisant intervenir un nombre fini de fois, des opérations, des nombres, des lettres, des mots, des symboles. La présence des lettres n'y est pas indispensable (Radford, 2018; Squalli, 2020).

Pour décrire le processus de généralisation algébrique, nous nous appuyons sur une version adaptée (Squalli, 2015) du modèle de la généralisation théorique de Dörfler (1991). Nous allons illustrer ce modèle, schématisé dans la figure 1, par l'exemple de la situation des tables de la cafétéria.

Le point de départ est une action concrète ou un système d'actions. Les actions peuvent être physiques, imaginées ou symboliques. Les buts des actions, les moyens utilisés ainsi que le cours des actions orientent l'attention du sujet vers certaines relations et connexions entre les objets sur lesquels portent ces actions.

Dans la situation des tables de la cafétéria un système initial d'actions peut être le suivant : déterminer le nombre de chaises pour une table, ensuite pour une chaîne formée de deux tables, de trois tables et ainsi de suite.

Détachement des invariants de leur véhicule original

↑

Les invariants comme prototypes – Extension du domaine de référence

↑

Formulation d'invariants – Description symbolique des invariants

↑

Réflexion sur le système d'actions

↑

Système d'actions à partir d'une situation

Figure 1. Modèle simplifié de généralisation théorique de Dörfler (1991)

La répétition de ces actions conduit le sujet à une certaine constance dans leur réalisation : des invariants. Dans notre exemple, les invariants des actions sont, par exemple, « pour chacune des tables du centre, il faut compter 2 fois 4 chaises » alors que « pour les deux tables extrêmes, il faut compter deux chaises de plus » ou encore, « quand on rallonge une chaîne de tables d'une table on augmente le nombre de chaises de 2 fois 4 ». La formulation des invariants nécessite une description symbolique, parce qu'il est nécessaire d'utiliser des symboles pour décrire les objets sur lesquels portent les actions (nombres de tables, nombre de chaises) ou pour décrire les transformations subies par le nombre de chaises lorsqu'on fait varier le nombre de tables. Ces symboles peuvent relever de diverses natures ostensives : verbale, iconique, géométrique ou algébrique. Les invariants sont potentiellement plus généraux que les actions elles-mêmes, ils peuvent être appliqués à n'importe quelle chaîne de tables.

Un moment crucial dans le processus de généralisation se produit quand ces invariants sont remplacés par des prototypes. C'est-à-dire quand la formulation du système d'actions ne sert plus uniquement à décrire les cas spécifiques examinés, mais aussi à envisager les cas potentiels. Ainsi, dans la description du système d'actions précédent, « compter 2 fois 4 chaises pour chaque table du centre et 2 fois 4 + 1 chaises pour chacune des tables extrêmes » s'applique au cas de la chaîne de tables sur laquelle a porté le système d'actions initial, mais aussi à n'importe quelle autre chaîne de tables (formée de 3 tables ou plus). Les invariants et leurs formulations symboliques sont alors détachés des actions originales. Dans notre exemple, le schéma d'actions peut dès lors être formulé de la manière suivante : le nombre de chaises d'une chaîne de tables est : « le nombre de tables moins 2 fois 4 plus 2 fois 4 plus 2 », ou encore, en langage numérico-littéral, $(n-2) \times 2 \times 4 + 2 \times 4 + 2$ où n est le nombre de tables dans la chaîne.

Le détachement total des actions originales permet d'écrire notre règle comme $8n + 2$, où n est un entier naturel non nul représentant le nombre de tables dans la chaîne.

Nous pouvons maintenant préciser nos questions de recherche dans la section suivante.

2.3 Questions de recherche et méthodologie de l'étude empirique

Nous souhaitons tester l'efficacité du cadre construit conjointement autour de l'approche praxéologique et sémiotique, et du modèle adapté de généralisation algébrique de Dörfler pour étudier les situations de généralisation, notamment de type dénombrement, à travers les questions suivantes :

- Au niveau des situations, quelles sont les caractéristiques et la structure de réseau de tâches qui favorisent l'engagement des élèves vers des degrés de généralisation *via* l'identification d'invariants dans un travail conduit autour de problèmes de généralisation proches?
- Au-delà des catégories de Radford, peut-on identifier une variété de techniques au sens de Chevallard et de raisonnements d'élèves dans le processus de généralisation (y compris dans la production d'une même « généralité »), à partir du modèle de Dörfler?
- Au niveau de l'enseignant, quels sont les gestes spécifiques dans ces situations pour engager les élèves dans une activité de généralisation, pour conduire les élèves à formuler les généralités construites et à améliorer leurs formulations, et pour amener les élèves à valider les généralités produites?

Pour appuyer notre étude, nous présenterons et analyserons une situation de généralisation « les chaînes du joaillier », expérimentée dans une classe de 6e année du primaire au Québec dans le cadre d'une analyse praxéologique et du modèle adapté de Dörfler. Cette étude nous permet de montrer l'apport d'une telle analyse conjointe pour l'étude des problèmes de généralisation au niveau des caractéristiques des situations, des raisonnements des élèves et de la pratique enseignante dans les actions de dévolution et d'engagement des élèves vers les processus de généralisation.

3. Le contexte, la trame et les tâches d'une séance observée sur la généralisation

La séance d'enseignement analysée a été réalisée au Québec dans une classe de 6e année du primaire composée de 23 élèves. Nous présentons dans ce qui suit la description de la trame générale de la leçon ainsi que des tâches effectives proposées aux élèves.

3.1 Le contexte et la trame générale de la séance

L'activité se déroule en deux moments consécutifs de 65 minutes chacun, séparés par une récréation.

L'analyse se base sur les documents utilisés par l'enseignant lors de la séance ainsi que sur une narration en épisodes de la séance de classe à partir d'une observation directe et d'un enregistrement vidéo.

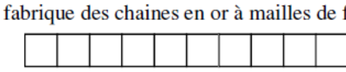
Nous décrivons tout d'abord une trame de la séance qui permet d'identifier des traces relativement objectives de ce qui est observé (Bronner, 2006). Le détail de la trame est fourni dans le tableau en annexe.

Le professeur propose un problème « les chaînes du joaillier » dans lequel il s'agit de produire un programme de calcul du nombre de tiges d'une chaîne en fonction du nombre de mailles. Il a choisi de commencer sa séquence par une première situation basée sur des chaînes carrées (figure 2).

Les chaines du joaillier

Mise en situation

Laurent, un bijoutier, fabrique des chaines en or à mailles de forme carrée comme celle-ci :



Il fait des chaines de différentes longueurs pour diverses utilisations (au cou, au pied, comme boucles d'oreilles).

L'or coûte cher. Quand il fait une commande, il compte les tiges une par une pour être sûr de ne pas en commander de trop ni en oublier. Mais c'est long. Il voudrait pouvoir trouver le nombre de tiges dont il a besoin sans être obligé de compter les tiges une par une. Vous devez envoyer un message au bijoutier dans lequel vous allez lui expliquer comment il pourrait faire pour trouver combien de tiges il a besoin selon le nombre de mailles.

Figure 2. Première situation « la maille carrée »

Puis, il propose aux élèves d'étudier le cas de chaînes à mailles triangulaires, puis hexagonales. Ensuite les élèves inventeront des formes, en fait octogonales et pentagonales. Enfin le professeur demande aux élèves d'étendre l'étude à n'importe quelle forme de mailles.

3.2 Les tâches proposées effectivement aux élèves dans la séance

Le professeur demande de commencer par des chaînes à 1, 2, 3, 5 et 9 mailles, puis il met à la disposition des élèves des bâtonnets en nombre suffisant pour la construction d'une chaîne carrée à 9 mailles. Les élèves sont ainsi confrontés dans les 3 premières phases à un premier type de tâches Tcn (au sens de Chevallard, 1999) :

1. Tcn : Calculer le nombre de constituants élémentaires (tiges) d'une chaîne à mailles carrées (c) connaissant (de manière déterminée) le nombre de mailles.

Précisons dès maintenant les notations que nous utiliserons selon le même principe dans la suite : la première lettre sera soit T, si nous considérons un type de tâches, soit la lettre minuscule t si on ne considère qu'une ou plusieurs tâches isolées. La deuxième lettre désigne la forme de la maille, par exemple c pour carrée, la troisième lettre est soit n pour numérique, soit a pour algébrique.

Le professeur propose encore des tâches particulières du type de tâches Tcn avec le cas de 44 ou 45 mailles, avant que les élèves soient confrontés à une première tâche de généralisation tca (nous y reviendrons particulièrement dans les sections 4.1. et 4.2.) :

2. Tca : Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaîne à mailles carrées pour n'importe quelle longueur de la chaîne.

Le choix d'une quantité de mailles comme 44 peut être vu comme une tâche intermédiaire entre le type de tâches Tcn, étiqueté de numérique, et la tâche tca que nous qualifions d'algébrique. En fait, ce choix du professeur doit être souligné comme une tentative pour engager les élèves dans un processus de généralisation. En effet, bien que le nombre de mailles 44 soit un nombre déterminé, il est suffisamment grand pour que la quantité de tiges ne soit pas facile à obtenir directement par un dénombrement, mais seulement via un schéma de calcul. Le cas de 44 mailles joue donc ici le rôle d'une tâche intermédiaire entre les tâches numériques et une tâche de généralisation algébrique. On pourrait même le considérer comme faisant partie des tâches de généralisation algébrique.

Les phases 4 et 5 amènent à jouer sur la variable forme et le professeur propose maintenant des tâches analogues, mais avec le cas d'une chaîne à mailles triangulaires. Les élèves étudient ainsi le type de tâches :

3. Ttn : Calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaîne à mailles triangulaires connaissant (de manière déterminée) le nombre de mailles.

Les différents cas suivants sont proposés pour la variable N nombre de mailles :

- calcul pour 1, 2, 3, 4, 5 mailles (phase 4);
- calcul pour 44 mailles (phase 5).

Ici encore, il est remarquable que les choix de la variable didactique « nombre de mailles » demandent implicitement de rentrer dans une première généralisation avant que le professeur propose de travailler explicitement sur la tâche de généralisation suivante :

4. tta : Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaîne à mailles triangulaires pour n'importe quelle longueur de la chaîne.

Il est à noter qu'avec notre notation, nous souhaitons bien montrer qu'il s'agit à ce stade du déroulé de la séance observée de tâches isolées tca et tta et non pas encore d'un type de tâches.

Le scénario se poursuit de manière analogue avec le cas d'une maille hexagonale dans les phases 6 et 7, faisant rencontrer le type de tâches Thn à travers le calcul pour 44 mailles (phase 6) :

5. Thn : Calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaîne à mailles hexagonales connaissant (de manière déterminée) le nombre de mailles.

Puis encore une tâche isolée de généralisation (phase 7) :

6. tha : Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaîne à mailles hexagonales pour n'importe quelle longueur de la chaîne.

Dans les phases 8 et 9, le professeur demande aux élèves de choisir leurs propres formes de mailles avec la contrainte suivante : la forme doit être différente des précédentes. En plus de la consigne « trouver une phrase mathématique pour calculer le nombre de tiges pour une chaîne de 44 mailles », il précise aussi à la suite d'une question d'un élève à propos de la longueur des tiges : « les tiges doivent être toutes égales et les mailles, elles sont toutes de la même forme. C'est pourquoi je te demande de dessiner une maille et toutes tes mailles vont être identiques. Et elles vont s'attacher par un côté ».

Cela amène les élèves, selon les groupes, à deux tâches de généralisation :

7. toa : Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaîne à mailles octogonales pour n'importe quelle longueur de la chaîne ;
8. tpa : Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaîne à mailles pentagonales pour n'importe quelle longueur de la chaîne.

Le professeur demande ensuite de trouver : « une phrase mathématique à envoyer au bijoutier qui permettra de calculer le nombre de tiges pour n'importe quelle chaîne ». La succession des différentes tâches tca, tta, tha, toa et tpa, apparaissant comme isolées dans un premier temps, alimentent ainsi le travail des phases 10 et 11, qui les font alors apparaître comme des spécimens d'un nouveau type de tâches, encore plus général :

9. Ta : Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaîne à mailles pour n'importe quelle forme et pour n'importe quelle longueur de la chaîne.

4. Analyse a priori des raisonnements des élèves et des processus de généralisation

Nous menons dans cette section une analyse a priori des raisonnements des élèves et des généralisations associées selon les types de tâches proposés par l'enseignant à l'aide de la notion de praxéologie. Cette grille est articulée avec un deuxième axe d'analyse s'appuyant sur le modèle de généralisation de Dörfler.

Ainsi, nous commençons par identifier les types de tâches de cette séance, liés à la forme carrée, pour lesquels nous avions déjà proposé de grandes catégories possibles de techniques et de technologies associées (Bronner, 2015, 2017) que nous rappelons ici et dont nous articulons l'analyse des raisonnements des élèves avec le modèle de Dörfler. Nous présentons ensuite les possibilités d'extension à d'autres types de tâches en jouant sur les variables didactiques principales.

4.1 Le premier type de tâches Tcn et les techniques numériques σ1

Rappelons que la première situation concerne le type de tâches Tcn pour lequel il s'agit de calculer le nombre de tiges d'une chaîne à mailles carrées (c) connaissant de manière déterminée le nombre de mailles. On peut envisager deux catégories de techniques σ1 associées à ce type de tâches dans le cas d'un petit nombre déterminé de mailles :

- Dénombrer les tiges : Le dénombrement peut se faire de manière désorganisée ou raisonnée suivant une réorganisation spatiale. Dans ce dernier cas, plusieurs procédures sont à envisager, par exemple, on peut d'abord compter toutes les tiges horizontales (soit deux par deux, soit toutes celles du haut, puis celles du bas, …), et ensuite les tiges verticales.

- Calculer de proche en proche : Une autre procédure consiste à compter selon un principe de récurrence. On peut dénombrer tout d'abord les tiges de la première maille (4), puis on compte les tiges de la maille suivante, soit en énumérant, soit en ajoutant 3 d'un coup (7), et ainsi de suite (10) ...

Nous dirons que ces techniques sont du type « numérique », car elles s'appuient sur un dénombrement effectif ou un calcul sur ces nombres déterminés. Ces techniques sont ainsi basées sur des technologies numériques et ne mobilisent pas des généralisations.

4.2 Une première tâche de généralisation tca

Après, les premiers cas déterminés étudiés pour les mailles carrées, certains élèves peuvent ne pas comprendre qu'il s'agit d'étudier le cas général et ne pas entrer dans la généralisation demandée au niveau de la tâche tca : Formuler une méthode pour calculer le nombre de tiges d'une chaîne à mailles carrées pour n'importe quelle longueur de la chaîne.

Les stratégies des élèves par rapport à la généralisation peuvent se répartir en trois grandes catégories de techniques. Chacune de ces catégories est mise en lien avec celles avancées par Dörfler (voir section 2.2).

4.2.1 Les techniques σ2 basées sur des technologies de généralisation explicite

Ces techniques s'élaborent en général par la mise en œuvre de techniques σ1 en examinant le cas d'un petit nombre de mailles 1, 2, 3, 4, … dans le cadre du type de tâches Tcn. Il est nécessaire de comprendre que le schéma de dénombrement ou de calcul est invariant pour le cas des nombres déterminés examinés, et qu'il peut s'appliquer à n'importe quelle chaîne à mailles carrées, même si on ne connaît pas de manière déterminée la quantité de mailles. Ici, la généralisation porte sur l'extension du domaine de validité de l'invariant des premiers cas examinés sur de petites quantités de mailles aux cas potentiels de quantités plus importantes. Elle correspond à une généralisation théorique au sens de Dörfler (1991) que nous proposons d'appeler « généralisation algébrique » dans le contexte étudié. Ces généralisations algébriques sont aussi l'indice d'une identification explicite d'une relation fonctionnelle entre les deux grandeurs en jeu « nombre de mailles » et « nombre de tiges ».

Par exemple, l'élève se base sur une décomposition du motif en distinguant les tiges horizontales et verticales. Ainsi, pour une quantité donnée de mailles, il faut compter 2 fois plus de tiges horizontales et autant de tiges verticales plus une tige verticale pour terminer le motif. Cela conduit à des expressions, dans divers registres de représentations sémiotiques (Duval, 1993), conformes à $M1 = 2n + (n + 1)$ où n désigne le nombre de mailles.

En synthèse, pour n mailles, plusieurs types de formulation sont possibles, conformes à une certaine « lecture » de la configuration spatiale :

> $M1 = 2n + (n + 1)$ en considérant le nombre de tiges horizontales d'une part et celui des tiges verticales d'autre part;
> $M2 = 3n + 1$ en considérant le nombre de mailles avec 3 tiges et en ajoutant une tige pour commencer ou terminer la chaîne;
> $M3 = 4n -(n - 1)$ en considérant le nombre de mailles à 4 tiges et en retranchant les tiges mises en double;
> $M4 = 4 + 3(n - 1)$ en considérant une première maille à 4 tiges et les tiges correspondant aux mailles suivantes à 3 tiges.

Mais, un élève de sixième année (au Québec) ne produira certainement pas de telles expressions dans le registre du langage algébrique. Toutefois, on peut s'attendre à des réponses dans un système ostensif mixte qui associe des ostensifs du langage mathématique et de la langue naturelle. Les élèves peuvent ainsi produire des formulations comme « le nombre de tiges est 2 fois le nombre de mailles plus le nombre de mailles plus un ») ou un code mixte verbal-numérique (comme « Nombre de tiges = 2 × Nombre de mailles + Nombre de mailles + 1 »).

Une autre technique consisterait à exprimer la généralité au moyen d'un exemple générique avec un sens proche de celui proposé par Balacheff (1987) pour une validation empirique. Par exemple, pour 10 mailles, il faut 3 fois 10 tiges et une tige de plus. L'élève est porté à rendre visible le schéma de calcul (l'invariant), et non la valeur numérique du résultat (ici 31 tiges); le nombre 10 a ici le statut d'une instanciation de la variable par un nombre spécifique. Le projet de l'élève est bien l'extension, même si la généralité n'est pas encore construite, c'est un processus prospectif. L'élève fait montre d'une conception procédurale (Sfard, 1991; Kieran, 1992) dans laquelle l'expression décrit un schéma ou un programme de calcul à l'aide d'un cas déterminé, mais il est ici, pour nous, dans une procédure de généralisation.

L'élaboration de ces techniques et la production des généralités (au sens défini à la section 2.2) formulées de diverses manières par ces élèves sont conformes à un processus de généralisation théorique au sens de Dörfler (1991).

4.2.2 Les techniques σ3 basées sur des technologies de généralisation locale

Des techniques s'appuient sur l'identification d'une régularité ou d'un invariant pour passer du cas d'une quantité de mailles au cas de celle augmentée d'une unité (de mailles). Une certaine généralisation est à l'œuvre et peut se traduire de cette façon : quand on ajoute une maille, on ajoute une tige en largeur et 2 tiges en longueur, on ajoute donc 3 tiges. La généralité exprimée ici s'arrête à la récurrence repérée. Elle pourrait se traduire par un opérateur du type : pour trouver le nombre de tiges pour n + 1 mailles, j'ajoute 3 au nombre de tiges pour n mailles. Ici aussi un langage mixte devrait être utilisé dans ce type de procédure.

Nous appelons ce processus une « généralisation locale ». En effet, cette généralisation s'appuie quand même sur un invariant, portant sur une comparaison des configurations de deux chaînes avec des nombres de mailles consécutifs. Même s'il s'agit encore d'une généralisation théorique au sens de Dörfler (1991), cet invariant n'a pas la puissance en termes de généralité pour exprimer le cas général. Cette généralisation demande de calculer au fur et à mesure les quantités obtenues à partir du premier cas et se trouve rapidement limitée pour un nombre de mailles assez grand.

4.2.3 Les techniques σ4 basées sur des technologies de généralisation par induction

Les élèves peuvent déterminer les quantités de tiges des premiers cas en faisant plusieurs dessins pour 1 maille, 2 mailles, jusqu'à 5 ou 6 mailles ou un dessin qu'ils complètent au fur et à mesure. Par exemple, ils obtiennent des résultats comme dans le tableau 1.

Tableau 1. Calculs des premiers cas organisés en tableau

Mailles	1	2	3	4	5	6	7	8
Tiges	4	7	10	13	16	19	22	25

Ensuite, ils conjecturent une relation générale par induction à partir de l'examen des valeurs numériques du tableau. Des élèves peuvent généraliser les résultats sur les petits nombres en faisant apparaître une relation numérique liée au nombre de mailles de départ. Ils peuvent ainsi remarquer la récurrence indiquée précédemment $T(n + 1) = T(n) + 3$, mais cette fois-ci en observant les quantités numériques et en faisant une induction numérique plutôt que sur la configuration spatiale comme dans la catégorie précédente. L'activité de ces élèves est ici conforme à une généralisation empirique au sens de Dörfler (1991), que l'on pourrait qualifier aussi de « généralisation arithmétique », car l'argument de l'induction est porté par les caractéristiques nombrantes des valeurs du tableau, c'est-à-dire sur la valeur des quantités et non sur les relations sémantiques entre les quantités.

Ils peuvent aussi remarquer que les résultats obtenus pour la deuxième ligne sont des multiples de 3 augmentés d'une unité. Cela peut conduire à des expressions conformes à M2 = 3n + 1, mais encore une fois cette conjecture est obtenue par observation et induction des valeurs numériques.

4.3 L'extension du type de tâches et l'analyse des variables didactiques

Nous étudions maintenant l'influence des variables didactiques principales dans le cadre de la situation observée.

4.3.1 La variable « nombre de mailles »

Dès le premier type de tâches relatives à la forme carrée, le professeur joue sur la valeur du nombre N de mailles à étudier, laquelle peut influencer de manière significative les procédures des élèves. Ainsi, on peut distinguer plusieurs domaines relativement à cette variable pour une forme donnée :

- N petit (inférieur ou égal à 10) : une procédure de dénombrement systématique ou par calcul peut être envisagée comme on l'a vu.
- N grand (supérieur à 10) : ici la procédure précédente, non réalisable, doit être abandonnée, mais les élèves peuvent mimer les procédures de dénombrement direct, les remplacer par l'invariant de calcul d'un terme au suivant et aller vers les procédures de généralisation locale.
- N très grand. Dans ce domaine, les procédures de généralisation locale ne sont pas réalisables ou le sont difficilement, et l'élève doit déjà se projeter vers la généralité pour pouvoir répondre à la question et évoluer vers des procédures de généralisation explicite.
- N non déterminé : En fait il s'agit d'un véritable changement de type de tâches comme avec la tâche tca qui demande un changement radical de techniques. Même si l'enseignant ne le suggère pas ou ne le demande pas, l'élève peut examiner les premiers cas de sa propre initiative. Mais, pour répondre en fonction du contrat didactique, il doit entrer dans un processus de généralisation avec une technique du type σ2, σ4 ou σ4.

4.3.2 La variable « forme de la maille »

Comme indiqué plus haut, le problème proposé sera étendu par le professeur à d'autres formes de maille : triangulaire, carré, pentagonale, etc, De nouvelles tâches apparaissent relativement à ces autres formes dans la séance et l'on peut, bien sûr, avancer qu'elles conduisent à des techniques similaires à celles de la maille carrée en conservant le même raisonnement. Nous ne les reprenons pas ici, car il s'agit d'une adaptation des techniques σ1, σ2, σ3 et σ4 en tenant compte de la différence du nombre d'éléments constitutifs de la maille selon la forme. Les différents choix de cette variable aboutissent évidemment à des expressions différentes du nombre de tiges, mais peuvent aussi jouer progressivement un rôle sur le raisonnement pour déterminer une formule générale pour une forme donnée, et donc sur la généralisation engagée. De plus, l'expérience et la familiarisation avec le type de tâches peuvent aussi conduire les élèves à faire évoluer leur raisonnement et les caractéristiques de la généralisation. Nous y reviendrons dans nos analyses ultérieures au niveau de l'analyse des productions effectives des élèves de la classe observée.

4.3.3 Un jeu ultime sur les deux variables « nombre de mailles » et « forme de la maille »

Le nouveau type de tâches Ta termine la séance en jouant sur les deux variables en même temps et en demandant de généraliser pour n'importe quelles formes et quantités de mailles. Nous verrons alors comment les élèves s'engagent dans cette nouvelle activité, et comment le professeur les accompagne pour une production conforme à l'évolution du contrat didactique.

Nous nous intéressons maintenant à l'analyse de la séance relativement aux raisonnements des élèves et à l'étayage de l'enseignant.

5. Les raisonnements des élèves effectivement développés dans la séance et les gestes d'étayage de l'enseignant

Nous analysons les raisonnements développés par les élèves dans la séance selon le type de tâches proposées et la régulation du professeur dans le développement des processus de généralisation. Nous décrivons notamment les éléments principaux des techniques élaborées par les élèves et repérables dans les données de la séance « bijoutier » et identifions les processus de généralisation associés à ces techniques.

Dans le contexte de la séance observée, nous montrerons notamment que le rôle de l'enseignant est fondamental pour la réussite de l'engagement et de l'activité des élèves, en prenant en compte les questions suivantes :

- comment l'enseignant s'y prend-il pour engager les élèves dans une activité de généralisation?
- comment l'enseignant s'y prend-il pour amener les élèves à formuler les généralités construites et à améliorer leurs formulations?
- comment l'enseignant s'y prend-il pour amener les élèves à valider les généralités produites?

5.1 Activités et techniques associées aux types de tâches numériques Tcn, Ttn Thn

Dans le cas des calculs sur un petit nombre de mailles carrées (1 à 5, puis 9 parfois) en début de séquence, les élèves utilisent certainement des techniques conformes à σ1 basées sur des technologies numériques comme nous l'avions indiqué dans l'analyse a priori. Le professeur ne demande pas la procédure des élèves et la classe se met rapidement d'accord sur le nombre de tiges pour 1, 2 et 3, puis 5 :

> Il compte avec les élèves, les tiges qui composent une maille, deux mailles et trois mailles. Puis il ajoute deux mailles de plus (5 mailles) sans les afficher sur l'écran. … Il demande à une élève le nombre de tiges obtenues. Elle dit 16 et il vérifie que tous sont d'accord.

Visiblement on n'est pas dans une tâche problématique, comme on peut encore le voir avec la construction d'une chaîne de 9 mailles :

> Il suit en particulier l'équipe 4 : ils en comptent 22. Il leur demande de vérifier. Ils recomptent et obtiennent 28. Il fait le tour des équipes, revient ensuite en grand groupe et demande si quelqu'un a autre chose que 28. Aucun. Il leur fait constater que c'est facile si l'on peut les compter.

Pour introduire le cas d'une chaîne à 45 mailles, l'enseignant explique aux élèves que le calcul du nombre de tiges pour les chaînes à 2, 3, 5 et 9 mailles était facile, car il suffisait de compter les tiges. Il ajoute qu'il est difficile de faire la même chose avec plusieurs mailles, car ils ne disposent pas d'assez de bâtonnets. Il leur demande de « trouver une façon d'expliquer au bijoutier comment trouver la quantité de tiges à commander ». Par cette consigne, l'enseignant amène les élèves à prendre conscience d'un protocole d'actions, dans le sens de Dörfler (1991), la tâche n'étant plus orientée vers l'exécution d'un dénombrement ou d'un calcul effectif pour trouver un nombre déterminé, mais vers la réflexion pour trouver le programme de calcul. Il y a là un changement de point de vue, une invitation à penser algébriquement. Ainsi, pour un grand nombre de mailles carrées (44 ou 45), les élèves essaient d'expliquer leur technique, comme dans l'équipe 4 :

> E[4.3] explique que pour 2 mailles, il faut faire 2 × 3 + 1, pour 3 mailles 3 × 3 + 1, pour 5 mailles… E[4.4] trouve que c'est compliqué alors que E[4.1] suggère que pour 45 mailles, il faut faire 45 × 3 et que le terme + 1 est pour commencer la chaîne, car la première maille comprend 4 tiges.

L'équipe 3 envisage une autre décomposition dans le cas de 45 mailles : « E[3.1] explique à E[3.3] qu'elle a calculé 1 fois 4, et pour les autres mailles 1 fois 3 et donc … E[3.2] récapitule : 1 × 4 + 44 × 3 ». Puis, quelques minutes après que le professeur demande de travailler sur 44 au lieu de 45, l'équipe confirme sa procédure : « E[3.1] dit encore 1 fois 4 est égal à 4, et 43 fois 3 …». On souligne ici encore comment cette équipe évolue d'une technique de dénombrement de type $\sigma 1$ basée sur des technologies numériques vers une technique de type $\sigma 2$ basée sur des technologies de généralisation explicite consistant à voir la configuration comme un carré avec 4 tiges, puis un nombre (ici 43) de composants de 3 tiges.

Par ce choix du professeur sur la quantité de mailles (44 ou 45 mailles) et sur l'engagement dans une situation de formulation (expliquer à un acteur fictif, le bijoutier), les élèves s'engagent déjà sur le chemin de la généralisation algébrique. Le matériel devient insuffisant pour le calcul du nombre de tiges pour une chaîne à 45 (ou 44) mailles. Dans ce premier travail de groupes à propos des mailles carrées et d'un nombre déterminé, considéré comme déjà grand, 44 ou 45, on observe ainsi que certains élèves ont déjà compris qu'il fallait décrire le programme de calcul, et non pas se limiter à donner la quantité de tiges nécessaire.

5.2 Activités et techniques associées à la tâche de généralisation tca

Nous étudions dans cette section les activités des élèves relatives à la tâche isolée de généralisation tca concernant la maille carrée, première tâche de généralisation explicitement rencontrée par les élèves. Le professeur précise à plusieurs moments « qu'il veut un message à dire au bijoutier, pour qu'il sache comment trouver le nombre de tiges, et ce, pour n'importe quelle longueur de chaîne » et encore il rappelle qu'après avoir trouvé la réponse pour 44 mailles, ils doivent écrire un message pour tout nombre de mailles. On note ainsi ce geste du professeur envers les élèves dans l'entrée de la tâche de généralisation tca, et on le reverra aussi pour les tâches tta, tha, toa et tpa, vraisemblablement, pour faire entrer les élèves dans une situation de formulation et une formulation explicite des généralités.

5.2.1 L'articulation entre la tâche de généralisation tca et les tâches numériques de type Tcn

Examinons plus précisément comment se sont développés les processus de généralisation au niveau de la tâche tca et le lien avec les techniques numériques du type de tâches Tcn. Les cas déterminés à 44 ou 45 mailles ont bien joué un rôle crucial dans le processus de généralisation pour la tâche tca, puisqu'il s'agit de pouvoir anticiper non pas un cas déterminé mais tout cas potentiel. Le nombre de mailles devient une variable pouvant prendre n'importe quelle valeur spécifique. Après avoir étudié le cas de la chaîne à 45 mailles, l'enseignant dit aux élèves qu'« il ne veut pas seulement le nombre de tiges, mais aussi un message mathématique pour aider le bijoutier à trouver le nombre de tiges à commander pour d'autres longueurs de chaînes ». Dans cette consigne, il positionne bien les élèves dans un projet d'extension, à partir du cas de la chaîne à 45 mailles. L'enjeu de la tâche est double. Primo, il s'agit pour les élèves de transformer le cas spécifique à 45 mailles en un cas prototypique, et ce, par la prise de conscience que les invariants et le protocole d'actions jusque-là valides pour les cas spécifiques singuliers examinés et étendus au cas de 45 mailles sont aussi valides pour des cas potentiels. Secundo, il s'agit de formuler un message au bijoutier expliquant comment il peut calculer le nombre de tiges pour une chaîne de longueur quelconque.

Cette invitation du professeur, déjà présente lors du passage à 45 mailles, conduit les élèves à exprimer la généralité de deux manières, soit en itérant sur chaque cas à partir de 1, 2, …, le schéma de calcul, soit en faisant jouer au cas « 45 », un rôle de variable en explicitant sur cet exemple le programme de calcul. Comme on l'a vu, c'est explicitement ce que fait l'élève E4.3 en indiquant qu'« il faut faire 45 × 3 et que le terme + 1 est pour commencer la chaîne ». Cette description est proche du système d'action initial qui consiste à isoler la première tige de la première maille de la chaîne et de voir ensuite que le reste de la chaîne est formé par une chaîne de triplets de tiges, et qu'il y a autant de triplets que de mailles. En outre, cette première formulation symbolique réfère explicitement au système d'action initial, aux invariants ainsi qu'à la justification de ces invariants. Le cas de la chaîne à 45 mailles est ainsi un bon candidat pour devenir un prototype, l'élève l'exploite ici pour étendre les invariants au cas de 45 mailles. Une nouvelle extension est encore nécessaire pour anticiper non seulement un cas déterminé lointain mais n'importe quel cas potentiel. Les formulations des élèves montrent que le cas de la chaîne de 45 mailles est devenu prototypique, et cela est rendu possible car l'élève serait convaincu que les invariants en jeu dans la formation de la chaîne de 45 mailles demeurent stables pour n'importe quel autre nombre de mailles. En outre, ces invariants ainsi que leur justification constituent le contenu du message de l'élève E4.4 au bijoutier. De cette façon, l'élève évite de représenter la variable (nombre de mailles) de manière explicite.

5.2.2 Les types de formulation traduisant la généralité

Pour la tâche tca, au niveau de l'équipe 4 : « E[4.4] explique qu'il lui dirait qu'à chaque maille il faut 3 tiges, mais qu'il faut en ajouter une pour la première ». Il associe bien la correspondance sans pouvoir exprimer globalement la quantité nécessaire. Vers la fin de cette phase, l'élève débouche sur cette généralisation explicite en verbalisant « multiplier nombre de mailles par trois plus un pour le premier ». La généralisation explicite, signe d'une pensée algébrique, semble en route dans cette équipe. Finalement, il va modifier son message sous la demande du professeur de griffonner ce message sur sa feuille pour produire la formulation suivante de la généralité « × nombre de m. par 3 et + 1 pour 1er » puis, après une remarque du professeur à propos du terme « 1er », l'élève finit par formuler : « trois fois nombre de mailles plus un ». Cette généralisation est passée par l'abstraction d'une configuration générale où le « plus un » avait encore la signification de la 1re. Finalement, dans la phase 3 où un bilan est proposé, cette équipe produit au tableau le message « 3 × nombre de mailles + 1 = chaîne » qui sera transformé par le professeur en « 3 × nb de mailles + 1 = nb de tiges de la chaîne », qui propose aussi que « nombre dorénavant on va le simplifier : “nb” » (figure 3).

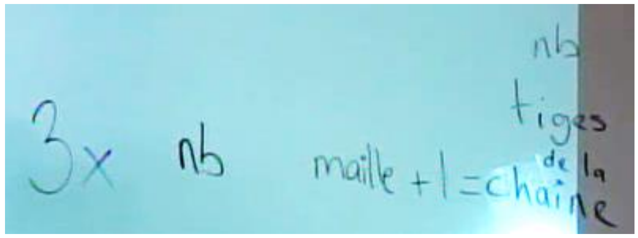


Figure 3. Message de l’équipe 4, abrégé par le professeur

L’équipe 2 entre aussi dans une généralisation explicite conforme à la modélisation M4 = 4 + 3(n – 1), du moins pour l’élève E[2.4], qui dit à voix haute « 3 × nombre de mailles – 1 + 4 ». Il s’ensuit un échange fourni avec le professeur pour amener l’élève à écrire le message en tenant compte des priorités des opérations. Dans le bilan collectif de la phase 3 l’élève E[2.4] de cette équipe ira écrire son message (figure 4) au tableau sous la forme « (nb de mailles – 1) × 3(+ 4) = nb de tiges de la chaîne » qui sera corrigée par le professeur.

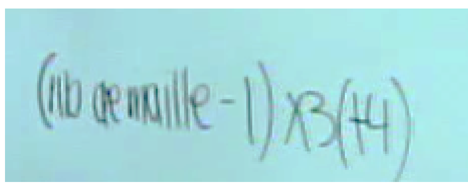


Figure 4. Message de l’équipe 2

Les deux messages précédents, conformes aux modélisations M2 = 3n + 1 et M4 = 4 + 3(n – 1), sont validés par le professeur et la classe par retour aux premiers cas numériques, et constituent alors une référence pour la suite.

5.2.3 Le rôle du langage et de la symbolisation

Dès les premières tâches, le langage verbal et divers ostensifs sont sollicités pour formuler les généralités produites. Ainsi, la composante sémiotique de cette situation, à travers divers systèmes ostensifs et registres sémiotiques, fait apparaître une caractéristique du travail algébrique.

Pour amener les élèves à décrire et à améliorer l'expression des généralités construites sous cette forme, l'enseignant fera un ensemble d'interventions en plénière et au sein des équipes. S'adressant à toute la classe il commence par préciser qu’il ne veut pas un texte, que « le message sera composé surtout de nombres, de symboles et d’un peu de mots : on parle de tiges, de chaînes ». Lors de ses passages chez les différentes équipes, il apportera des précisions de plus en plus explicites. Il précise que les nombres sont écrits avec des chiffres et les opérations avec les symboles ×, ÷, + et - et non en mots. L'enseignant devient de plus en plus explicite dans son exigence de réduire le nombre de mots : la forme ostensive qu'il attend et vers laquelle il veut que les élèves s'orientent est composée de nombres (chiffres) de signes des opérations arithmétiques, du signe = et des expressions « nombre de tiges » et « nombre de mailles » : « Dans votre message, je ne devrais voir que 2 ou 3 mots, je ne devrais pas voir des bouts de phrases ». Il vise à obtenir, par cette tâche de généralisation tca, des généralités exprimées au moyen d'expressions pseudo-mathématiques utilisant les registres numérique et verbal. Bien que cette exigence puisse être critiquable dans le contexte strict de la séance, car non motivée par un besoin immédiat de « réduction syntaxique », le professeur souhaite peut-être s'inscrire dans une perspective ultérieure de la dimension calculable des expressions algébriques.

5.3 Activités et techniques associées à l'extension aux tâches de généralisation tta, tha, toa et tpa

Dans la phase 4, à propos des mailles triangulaires, la dévolution (Brousseau, 1998) sur la tâche de généralisation tta est réussie et les élèves essaient d'élaborer un message général. L'élève E[1.1] précise l'élaboration de la technique en expliquant qu'elle se base sur l'adéquation numérique avec les premiers cas : « si tu fais deux fois le nombre de mailles plus un, car 2 × 2, 4, + 1, 5 ». Mais surtout l'idée lui est venue du message de l'équipe 4 à propos des mailles carrées : « L'autre chaîne avait 4 côtés, ils ont enlevé 1 et ils ont mis 3, alors moi, vu qu'il y a 3 côtés, j'ai enlevé 1 et ça m'a fait 2 ». On observe ici une démarche par analogie validée numériquement sur les premiers cas qui correspond plutôt à un processus de généralisation empirique. Le professeur l'invite même à expliciter cette démarche dans la phase 5 de bilan à partir du premier message pour le calcul des mailles carrées (3 × nb de mailles + 1) : « soustraire 1 au nombre de côtés d'une maille ». Nous reviendrons sur l'attention du professeur à propos de cette élaboration qui conduit au message : « 2 × nb de mailles + 1 = nb de tiges » de même type de modélisation que M2.

Dans ce bilan, nous trouvons aussi une modélisation du type M4 proposée à la classe par l'équipe 3 par l'élève E[3.2] : « (nb de mailles –1) × 2 + 3 = nb de tiges dans la chaîne ». Ce message est validé par le professeur et les élèves par un test avec les cas 3 et 5.

Les deux premières tâches de généralisation tca et tta (mailles carrées et triangulaires) scellent le scénario et les trois autres tâches tha, toa et tpa (mailles hexagonales, octogonales et pentagonales) se déroulent de la même manière que celles de la phase 6 à la phase 9 avec des messages du même type que les modélisations M2 et M4 des chaînes à mailles carrées. Par exemple, pour l'octogone, des groupes donnent le message « (nb de mailles – 1) × 7 + 8 = nb de tiges », tandis que pour les pentagones des groupes le message « (nb de mailles – 1) × 4 + 5 = nb de tiges » est avancé.

5.4 Activités et techniques associées au type de tâches Ta

Dans les phases 10 et 11, le professeur propose aux élèves de se situer au niveau du type de tâches de généralisation Ta pour lequel les tâches précédentes (tca, tta, tha, toa et tpa) constituent alors des spécimens. Cette situation est un exemple de la dialectique « tâches-type de tâches », car c'est bien le type de tâches Ta qui est l'enjeu de la situation à travers les tâches particulières précédentes. Le professeur présente ainsi le travail demandé :

> À chaque coup on a trouvé une phrase mathématique qui permettait de trouver le nombre de tiges. Maintenant, ce que je veux que vous me trouviez, je veux avoir une phrase mathématique qu'on va pouvoir envoyer au bijoutier et dans cette phrase peu importe la commande du client, c'est-à-dire que le client qu'il décide que sa maille est triangulaire, carrée qu'elle est de forme hexagonale, pentagonale, octogonale, peu importe la forme de sa maille, le bijoutier va pouvoir prendre cette formule-là et dire : Ah là, parfait, j'aurai besoin de tant de tiges.

Après un travail de groupes de huit minutes environ dans la phase 10, les élèves livrent leurs « phrases mathématiques » demandées par le professeur. On retrouve ici deux types de formules généralisant les formes M2 et M4 vues dans les cas particuliers de formes :

- G2 : (nb côtés de la maille – 1) × nb de mailles + 1 = nb de tiges
- G4 : (nb de mailles – 1) × (nb de côtés – 1) + nb de côtés = nb de tiges.

Pour la formule G2, une élève explique qu'ils ont observé que, dans la formule « 2 × nb de mailles + 1 = nb de tiges » du cas triangulaire, le « 2 » représente le nombre de côtés de la maille moins 1. Le professeur pousse un peu le raisonnement en disant « donc vous avez remplacé votre 2 … d'où il vient ce 2 là … c'est justement le nombre de côtés de la maille moins 1 ».

Le professeur poursuit la demande d'explicitation du raisonnement pour la formule G2 en mettant en parallèle au tableau (voir figure 5) la formule pour le pentagone pour bien faire ressortir le rôle joué par les différentes variables et explicite lui-même le raisonnement supposé des élèves : « on part de la formule précise pour ce type de mailles-là, et puis on généralise avec une formule qui va nous permettre de trouver ». Et il compare les deux formules en précisant que la deuxième est un peu moins évidente à voir. Il favorise, et explicite lui-même, ce processus de généralisation à ce moment de la séance.

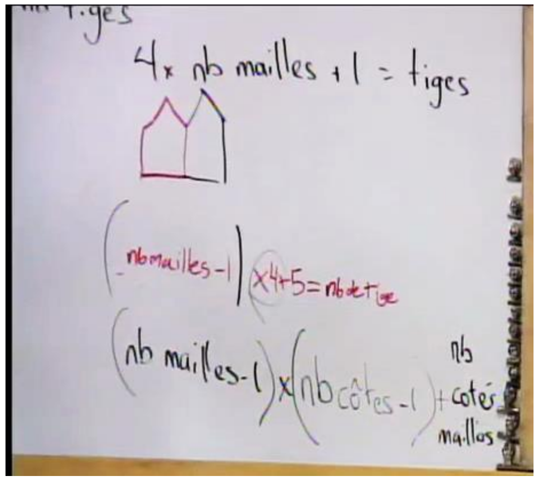


Figure 5. Message G4 pour la tâche de généralisation Ta

Une première interprétation de ce passage d'une généralité d'une forme vers celle d'une autre serait de la qualifier de généralisation empirique au sens de Dörfler (1991), car elle est basée sur un seul cas, a priori en rien spécifique. Or, une autre interprétation est possible qui dénote une pensée généralisatrice plus avancée. Dans le cas du travail sur des mailles à une forme déterminée, le nombre de mailles de la forme était une constante. Mais l'élève vient d’apprendre ce que signifie cette constante par rapport à la forme (le nombre de tiges d'une maille - 1). Dans le dernier type de tâches Ta, la forme devient une variable, ainsi que le nombre de tiges d'une maille avec un statut de nombre non déterminé. Dans ce cas, compte tenu de l'expérience des élèves avec les différentes formes, ils voient les nombres déterminés des cas précédents (les constantes) comme des instanciations de la variable « nombre de tiges d'une maille ». Ils utilisent l'analogie sur les formes comme raisonnement en adaptant la variabilité sur la quantité de tiges de la maille, mais ils seraient capables de justifier la généralité en recourant à une généralisation de leur schéma de calcul de la quantité cherchée. D'ailleurs, dans ce sens, on peut remarquer que les expressions des généralités pour toutes les formes, y compris la forme générale, proviennent toutes des mêmes invariants, ou schémas de calcul, elles ont toutes la même structure syntaxique. On peut ainsi avancer qu’une généralisation théorique, et ici algébrique, se met en place.

5.5 Analyse du degré de généralisation en lien avec le réseau des tâches de la séance

La succession des tâches fait apparaître une structure complexe d’enseignement de cette séance comme un réseau de tâches enchâssées en parallèle et en série (voir la figure 6, où N est pris pour numérique et A pour algébrique, et les flèches désignant des généralisations successives). Ainsi, après avoir fait travailler les élèves sur les formes de mailles carrée, triangulaire et hexagonale, en lien avec les types de tâches Tcn, Ttn, Thn, le professeur les amène à se placer sur les tâches respectives de généralisation tca, tta, tha. Même si la réalisation des différentes tâches est proposée successivement, nous analysons le début de la structure comme parallèle dans la mesure où il apparaît une répétition en jouant sur la variable forme de la maille (carrée, triangulaire et hexagonale) avec la même structuration interne au niveau d'un type de tâches numérique en proposant plusieurs spécimens de la variable « nombre de mailles » (étude sur les premiers termes au niveau du nombre de mailles 1, 2, 3 et 5, puis 44 et 45, puis cas général).

N → A **A** **→** **A**

Généralisation du 1^er^ degré (1 variable) — **Généralisation du 2^e^ degré (2 variables)**

•Tcn → tca
•Ttn → tta
•Thn → tha

… → toa
… → tpa

} → **Ta**

Figure 6. Le réseau de tâches en parallèle et en série

Ainsi, l'étude commence par des types de tâches Tfn (« f »comme forme et « n » comme numérique) que nous avons qualifiés de numérique dans la mesure où il s'agit tout d'abord de considérer un nombre déterminé de mailles et de produire la quantité de tiges correspondante. Mais à chaque fois, le contrat conduit, pour chaque forme f, à terminer l'étude avec une tâche de généralisation algébrique tfa ("a" ici comme algébrique).

La structure parallèle aurait pu se poursuivre strictement sur les phases suivantes 8 et 9, mais pour la suite, l'étude se réalise directement sur les tâches de généralisation toa et tpa à propos des formes octogonale (o) et pentagonale (p) comme le précise le professeur à un élève : « il doit faire une phrase mathématique plus générale, pas seulement pour le cas de 44 mailles ». Par cette intervention, le professeur essaie d'engager les élèves vers un premier degré de généralité plus important. Le nouveau réseau se complète par un ajout en parallèle sur les tâches de généralisation laissant vides les types de tâches numériques pour les formes octogonale et pentagonale (deuxième colonne A de la figure 6).

Les phases 10 et 11 font alors apparaître les différentes tâches précédentes tca, tta, tha, toa et tpa comme de simples spécimens d'un nouveau type de tâches de généralisation Ta avec la recherche d'une méthode pour calculer le nombre de tiges d'une chaîne à mailles pour n'importe quelle forme et pour n'importe quelle longueur de la chaîne. Le réseau se complexifie alors en série si l'on peut dire (comme le suggère la figure 6).

Le professeur, par le choix de ce réseau, engage les élèves dans un processus de généralisation de degré encore supérieur en considérant les deux variables « forme de la maille » (F) et « nombre de mailles » (N). Cette analyse montre que les praxéologies ponctuelles s'agrègent en des praxéologies locales, voire régionales, emboîtées autour du type de tâches Ta et permet de mettre au jour une structuration mathématique complexe et emboîtée favorisant le développement de généralisation algébrique chez les élèves.

Conclusion

Nous soulignons ici la fécondité d'une analyse conjointe à l'aide d'une approche praxéologique et du modèle de Dörfler pour identifier les processus de généralisation et les conditions de leurs développements. L'analyse praxéologique a permis de mettre au jour la structure de la situation proposée avec la succession des tâches numériques et de généralisation que nous avons qualifiée de réseau de tâches enchâssées en parallèle et en série. Cette analyse montre la complexité du système de tâches qu'a utilisé l'enseignant pour engager les élèves dans des activités de généralisation et d'expression des généralités. Nous faisons l'hypothèse qu'il permet ainsi d'engager les élèves dans un processus de généralisation de degré de plus en plus étendu en considérant les deux variables « forme de la maille » et « nombre de mailles ».

Cette analyse conjointe a permis de caractériser et de différencier les techniques développées par les élèves dans les diverses tâches numériques et algébriques et de montrer des processus de généralisation différents grâce au modèle de Dörfler. L'analyse conjointe permet aussi de rendre compte de l'activité de généralisation des élèves provoquée par ces tâches, de mettre au jour les techniques et les processus de généralisation développés par les élèves, ainsi que le rôle de l'enseignant, notamment dans les processus de dévolution et d'engagement des élèves dans la transition du numérique vers l'algébrique. Nous avons notamment montré le rôle crucial de l'enseignant pour gérer ces situations dans lesquelles il doit notamment engager les élèves dans un projet de généralisation : construction d'invariants à partir de cas déterminés; transformation des cas déterminés en cas prototypiques (extension du domaine de validité des invariants); amener les élèves à perfectionner la manière de parler du général à partir du spécifique, à utiliser des représentations langagières de plus en plus formelles.

Nous avons ainsi identifié des conditions d'une dévolution de ce processus en commençant par des types de tâches numériques et en mobilisant des raisonnements et des techniques basées sur des technologies numériques. Les productions des élèves attestent une articulation numérique-algébrique bien ajustée en jouant sur la taille de la variable « nombre de mailles ». Ainsi le passage de l'étude des premiers cas du nombre de mailles (entre 1 et 9) à celui d'un nombre comme 44 ou 45 contraint les élèves à faire évoluer leurs procédures vers des techniques de généralisation explicite. Ce saut informationnel fait ainsi fonctionner ces valeurs numériques comme des exemples prototypiques ou génériques (Balacheff, 1987; Squalli, 2015) et oblige à ne plus considérer ce cas comme un cas déterminé mais comme une instanciation d'une variable, montrant ainsi un aspect de la pensée algébrique. Les élèves élaborent tout d'abord, pour le cas d'un nombre déterminé (plus grand), des germes de techniques σ2 basées sur des technologies de généralisation explicite au sens de Dörfler (1991). Le but est ensuite d'orienter les élèves à réfléchir sur le système d'actions utilisé dans les cas précédents (ou à le construire) et à dégager des invariants et un protocole d'actions pouvant être appliqués au cas de nombres déterminés plus grand. Nous avons montré que cette étape est cruciale pour aborder ensuite des tâches de degré de généralisation de plus en plus élevé dans le cadre du réseau de tâches enchâssées en parallèle et en série que nous avons identifié. Ce développement de la généralisation s'accompagne en général d'un développement de la symbolisation en jouant sur plusieurs systèmes ostensifs et registres sémiotiques.

Cette recherche constitue pour nous une étape fondamentale pour améliorer les stratégies d'enseignement en envisageant différents degrés de généralisation *via* l'identification d'invariants (au sens de Dörfler) et pour fonder un projet plus global d'enseignement de la généralisation en algèbre, en lien avec l'identification d'invariants *via* des actions enseignantes appropriées.

Références

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(2), 147-176. https://doi.org/10.1007/BF00314724

Booth, L. (1984). Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. *Petit x, 5*, 5-17.

Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(1), 77-124.

Bronner, A. (1997). Étude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée [thèse de doctorat inédite]. Université Joseph Fourier.

Bronner, A. (2006). Installation et régulation par l'enseignant de l'espace « parole-pensée-action-relation ». Gestes d'étude, gestes professionnels, événements et ajustements. Dans M. C. Guernier, V. Durand-Guerrier et J.-P. Sautot (dir.), *Interactions verbales, didactiques et apprentissages : recueil, traitement et interprétation didactiques des données langagières en contextes scolaires* (p. 115-136). Presses de l'Université de Franche-Comté

Bronner, A. (2007). *La question du numérique : Le numérique en questions* [habilitation à diriger des recherches]. Université Montpellier 2.

Bronner, A. (2015). Développement de la pensée algébrique avant la lettre - Apport des problèmes de généralisation et d'une analyse praxéologique. Dans L. Theis (dir.) Actes du colloque EMF2015, *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* (p. 247-264).10-14 octobre 2015, Alger.

Bronner, A. (2017), Analyse d'une séquence basée sur des problèmes de généralisation pour l'entrée dans l'algèbre : Apport d'une analyse praxéologique. *Actes du 5e congrès international sur la théorie anthropologique du didactique,* 278-297.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Éditions la Pensée sauvage.

Carraher, D. W. et Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. Dans F. Lester (dir.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 669-705). Information Age Publishing.

Carraher, D. W., Martinez, M. V. et Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education,* 40, 3-22. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, 19, 43-75.

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie. Voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x*, 23, 5-38.

Chevallard, Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *12*(1), 73-112

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques*, *17*(3), 17-54.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. Dans L. Ruiz-Higueras, A. Estepa et F. J. Garcia (dir.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría antropológica de lo didáctico (TAD)* (p. 705-746). Universidad de Jaen.

Coulange, L., Drouhard, J.-P., Dorier, J.-L. et Robert, A. (dir.). (2012). Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. *Recherches en didactique des mathématiques, numéro spécial hors-série*.

Demonty I., Fagnant A. et Vlassis J. (2015). Le développement de la pensée algébrique : quelles différences entre les raisonnements mis en place par les élèves avant et après l'introduction de l'algèbre? Dans L. Theis (dir.), *Actes du colloque EMF2015. Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* (p. 265-279). Université d'Alger.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. Dans A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen et J. Van Dormolen (dir.), *Mathematical knowledge: its growth through teaching* (p. 63-85). Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 5,* 37-65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Grugeon B. (1995). Étude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première [thèse de doctorat, Université Paris 7]. TEL. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01252058/document

Grugeon, B. (2000). L'algèbre au lycée et au collège. Une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire : conception, exploitation et perspectives. Dans J. Delgoulet, J.-P. Guichard, M. Janvier, B. Capponi et B. Grugeon (dir.), *L'algèbre au lycée et au collège. Actes des journées de formation de formateurs* (p. 5-39). IREM de Montpellier.

Jeannotte, D. (2005). *L'interprétation de la lettre et des erreurs commises en algèbre par les élèves du secondaire d'aujourd'hui et ceux de la fin des années 70 : une étude comparative* [mémoire de maitrise inédit]. Université de Sherbrooke.

Kahane, J. P. (dir.). (2002). *L'enseignement des sciences mathématiques. Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques*. Odile Jacob.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? Dans J. J. Kaput, D. W. Carraher et M. L. Blanton (dir.), *Algebra in the early grades* (p. 5-17). Routledge.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. Dans D. A. Grouws (dir.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 390-419). Macmillan.

Kieran, C. (1994). A functional approach to the introduction of algebra - Some pro and cons. Dans J. Ponte et J. F. Matos (dir.), *Proceedings of The 18th International Conference for the Psychology of Mathematical Education* (vol. 1, p. 157-175). Université de Lisbonne.

Krysinska M., Mercier A. et Schneider M. (2009). Problèmes de dénombrement et émergence de premiers modèles fonctionnels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 29(3), 247-303.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. Dans N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (p. 87-106). Springer.

Marchand, P. et Bednarz, N. (1999). L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une analyse des problèmes présentés aux élèves. *Bulletin AMQ (Association mathématique du Québec), XXXIX*(4), 30-42.

Oliveira, I., Rhéaume, S. & Geerts, F. (2017). Apprentissage de l'algèbre : procédures et difficultés rencontrées lors de la résolution de problèmes. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, *20* (3), 156–180. https://doi.org/10.7202/1055732ar

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, *12*(1), 1-19. https://doi.org/10.1080/14794800903569741

Radford, L. (2014) The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 257-277. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Radford, L. (2015). La pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation. *Actes du colloque EMF2015. Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* (p. 334-345). Université d'Alger.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. Dans C. Kieran (dir.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds. The global evolution of an emerging field of research and practice* (p. 3-26). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_1

Rojano, T. (1996). Developing algebraic aspects of problem solving within a spreadsheet environment. Dans N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), *Approaches to algebra* (p. 137-145). Springer.

Saboya, M., Besançon, V., Martin, F., Adihou, A., Squalli, H. et Tremblay, M. (2013). Résolution de problèmes écrits au moment de l'introduction de l'algèbre: analyse de productions d'élèves du premier cycle du secondaire. Dans L. Bacon, V. Martin, I. Oliveira et J. Proulx (dir.), *Expériences mathématiques uniques et multiples. Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec* (p. 112-122). Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematics conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 1-36.

Squalli, H. (2000). *Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base* [thèse de doctorat, Université Laval]. Corpus. https://corpus.ulaval.ca/jspui/handle/20.500.11794/51025

Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes du colloque EMF2015* (p. 346-356). Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene.

Squalli, H. (2019). Le développement de différentes formes de la pensée mathématique : recherches et perspectives curriculaires. *Revue RMDM, 4,* 33-49.

Squalli, H. (2020). Early algebra : genèse d'un domaine de recherche, évolution et perspectives. Dans H. Squalli, I. Oliveira, A. Bronner et M. Larguier (dir.), *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires.* Livres en ligne du CRIRES. https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches

Squalli, H., Mary, C. et Marchand, P. (2011). Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre : cas du Québec et de l'Ontario. Dans J. Lebeaume, A. Hasni et I. Harlé (dir.), *Recherches et expertises pour l'enseignement scientifique* (p. 65-78). De Boeck.

Squalli, H., Oliveira, I., Bronner, A. et Larguier, M. (2020). *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires*. Livres en ligne du CRIRES. https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches

Squalli, H., Suurtaam, C. et Freiman, V. (2013). Préparer les enseignants au développement de la pensée algébrique au primaire et au secondaire. Dans S. Oesterle, D. Allan et P. Liljedahl (dir.), *Actes de la rencontre annuelle du Groupe canadien d'étude en didactique des mathématiques* (p. 125-136). Université Laval.

Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. Dans C. Laborde (dir.), *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique* (p. 189-200). Éditions La Pensée sauvage.

Vergnaud, G., Cortes, A. et Favre-Artigue, P. (1988). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. Dans G. Vergnaud, G. Brousseau et M. Hulin (dir.), *Didactique et acquisition des concepts scientifiques. Actes du Colloque de Sèvres* (p. 259-279). Éditions la Pensée sauvage.

Annexe : Trame de la séance « bijoutier »

Phases	Instants Narration	Moments ou épisodes : tâches du professeur et des élèves	Types de tâches /tâches	Modalités de travail
1	0 à 16 min 11	Présentation de la situation générale, de la chaîne à mailles carrées et calcul du nombre de tiges pour 1, 2, 3, 5/Calcul pour 9 mailles	Tcn	Collective/ Groupe pour le cas de 9 mailles (2 min)
2	16 min 11 à 40 min 15	Calcul du nombre de tiges pour 45, puis 44, mailles et explicitation du programme de calcul général (cas des chaînes à mailles carrées)	Tcn / tca	Groupe (appelé équipe au Québec)
3	40 min 15 à 49 min 43	Retour sur la chaîne à mailles carrées : bilan et débat	tca	Collective
4	49 min 43 à 57 min 40	Présentation de la chaîne à mailles triangulaires, calcul du nombre de tiges pour 44 mailles et explicitation du programme de calcul général	Ttn / tta	Collective/ Groupe
5	57 min 40 à 1 h 04	Retour sur la chaîne à mailles triangulaires : bilan des réponses du problème	tta	Collective
6	1 h 04 à 1 h 08	Présentation de la chaîne à mailles hexagonales, calcul du nombre de tiges pour 44 mailles et explicitation du programme de calcul général	Tth / tha	Collective/ Groupe
7	1 h 08 à 1 h 14	Retour sur la chaîne à mailles hexagonales : bilan du travail des élèves	tha	Collective
	Récréation			
8	4 min à 11 min 23	Créer sa propre chaîne à mailles différentes, calcul du Nb de tiges pour 44 mailles et explicitation du programme de calcul général	toa / tpa	Collective / Groupe
9	11 min 23 à 17 min 04	Retour sur les propres chaînes octogonale et pentagonale : bilan du travail des élèves	toa / tpa	Collective
10	17 min 04 à 25 min 30	Rechercher une expression commune dans tous les cas de formes de chaîne	Ta	Collective / Groupe
11	25 min 30 à 31 min 36	Retour sur la généralisation : bilan	Ta	Collective