



Sens et interprétation du signe « = » du point de vue d'élèves de 6-7 ans

Céline CONSTANTIN

LIRDEF, Univ Montpellier, Univ Paul Valéry Montpellier 3, Montpellier, France
celine.constantin@umontpellier.fr

Lalina COULANGE

LaB-E3D (EA 7441), Univ Bordeaux, France
lalina.coulangue@u-bordeaux.fr

Remerciements : Nous tenons à remercier Florence Luong Dinh Giap et Martine Champagne pour les extraits de transcriptions (Luong Dinh Giap, 2020) et les échanges avec elles deux, non sans lien avec le sujet au cœur de cet article. Un très grand merci également à toutes les enseignantes qui se sont prêtées au jeu délicat de l'observation filmée sur l'introduction délicate de ce fameux « = ».

Résumé : La prise en compte du point de vue de l'élève dans des situations d'introduction du « = » en première année de primaire nous a amenées à identifier des phénomènes nouveaux d'ambivalence sémantique quant au sens et à la dénotation des représentations sémiotiques, auxquels peuvent se référer les élèves dans ces situations d'enseignement-apprentissage. Les analyses d'épisodes de quatre classes de CP en France (élèves de 6-7 ans) montrent que cette ambivalence joue un rôle important dans la construction de significations du signe « = » du point de vue des élèves. Ces significations dépendent également de contextes construits autour de tâches scolaires variées et des ressources relevant de la littératie (chronotopique) convoquées par les élèves.

Mots-clés : Signe égal, sens, dénotation, contextes interprétatifs, littératie (chronotopique), point de vue de l'élève.

The meaning and interpretation of the "=" sign from 6-7-year-old pupils' point of view

Abstract: Taking into account pupils' point of view in situations where the "=" sign is introduced in the first year of primary school led us to identify new phenomena of semantic ambivalence surrounding the meaning and denotation of semiotic representations, to which pupils can refer in these teaching-learning situations. Analysis

of sessions from four first-grade classes in France (with 6-7-year-olds) shows that this ambivalence plays a significant role in pupils' construction of meanings associated with the "=" sign. These meanings also depend on the context of various school tasks and on the (chronotopic) literacy resources used by the pupils.

Keywords: Equals sign, sense, denotation, interpretative contexts, chronotopic literacy, students' point of view.

Introduction

Les recherches internationales en didactique des mathématiques sont nombreuses à avoir identifié des difficultés de compréhension autour du signe « = ». Dès les années 1970, elles montrent la prégnance de l'interprétation de ce signe comme « annonce de résultat » ou comme « opérateur » tout au long du primaire (notamment, Denmark et al., 1976 ou Behr et al., 1980) voire au-delà (Kieran, 1981) constituant un obstacle potentiel à l'entrée dans l'algèbre élémentaire dans le secondaire. Se centrant sur la première année de primaire (élèves de 6-7 ans), Falkner et al. (1999) et Theis (2005a) ont conçu et expérimenté des séquences d'enseignement destinées à améliorer les apprentissages autour du signe « = ». Si des progrès notables sont constatés, les chercheurs montrent qu'ils prennent du temps, avec des retours à une interprétation comme « opérateur » amenant Theis (2005b) à conclure que « l'apprentissage du signe = est un puissant obstacle cognitif pour des élèves de première année d'études » (Theis, 2005b, p. 11) y compris pour des élèves en réussite. Des observations dans des classes de première année de primaire en France (CP) montrent que, confrontés à des tâches d'écriture pour rendre compte de leur activité dans la résolution de problèmes arithmétiques, les élèves peuvent rencontrer bien plus de difficultés à produire une écriture d'égalité valide qu'à trouver la réponse au problème (Margolinas, 2019). Explorant l'articulation entre comptage, opérations numériques et écritures en ligne d'égalités lacunaires, Conne (1988) souligne l'importance d'éléments liés à la syntaxe, mais aussi des interactions entre enseignants et élèves susceptibles de contribuer à la (re)construction de significations. Ces recherches montrent également que si les élèves investissent des connaissances sur l'écrit elles paraissent peu identifiées par les enseignants. Dans le cadre d'une recherche codirigée par l'une d'entre nous (Luong Dinh Giap, 2020), une enquête conduite auprès d'enseignants français de CP a montré que 75 % d'entre eux considéraient l'introduction du signe « = » comme facile. Ceci explique

sans doute la moindre attention qui semble être accordée à cette introduction par rapport aux symboles opératoires « + » ou « - »¹.

Nous avons donc, d'une part, supposé que les difficultés des élèves de première année de primaire sont encore peu reconnues ou prises en charge par la profession enseignante en France, et ce, malgré de nombreuses propositions formulées par des enseignants ou des formateurs dans des revues d'interface, anciennes (Daniau, 1976) ou plus récentes (Brignon et Eysseric, 2012). D'autre part, nous avons choisi d'adopter un nouveau point de vue sur l'activité des élèves lorsque des situations introductives du signe « = » sont effectivement organisées par des enseignantes et enseignants. Nous cherchons à mieux identifier dans quelle mesure et comment les élèves peuvent construire de premières significations autour du signe « = » en prenant en compte la coprésence d'autres signes liés aux nombres et aux opérations. Nous avons observé des situations d'enseignement et d'apprentissage visant à introduire le signe « = » dans quatre classes françaises de CP (élèves de 6-7 ans). De ce point de vue, les classes ne sont pas tout à fait représentatives de l'ordinaire de l'enseignement des mathématiques au CP. Précisons de plus que parmi les quatre enseignantes qui nous ont ouvert leurs portes, trois ont des proximités avec la formation ou la recherche en didactique des mathématiques, sans que nous puissions faire l'hypothèse qu'elles aient développé des connaissances spécifiques des questions qui nous préoccupent. De fait, ce ne sont pas les caractéristiques de leurs pratiques qui nous ont intéressées, mais l'opportunité qu'elles nous ont donnée d'étudier l'activité mathématique d'élèves dans des situations dédiées à l'introduction du signe « = ». Avant de préciser la démarche méthodologique qualitative suivie pour cette recherche, nous abordons dans une première partie les choix d'éléments de cadrage théorique fondant ce que nous qualifions qu'un point de vue sémiolinguistique ancré en didactique des mathématiques sur l'activité des élèves. Dans une deuxième partie, nous présentons les résultats d'analyses d'épisodes de classe en prise d'appui sur ces éléments. Ils mettent à jour des phénomènes qui révèlent le rôle joué par ce que nous qualifions d'ambivalence sémantique de certains signes (liés à des « collections » d'objets), mis en coprésence avec d'autres signes (liés aux écritures symboliques), dans les situations d'enseignement et d'apprentissage observées.

¹ Parmi les 32 enseignants de CP interrogés, 81 % affirment proposer une séance dédiée à l'introduction du signe « + ». Ils sont 41 % à répondre toujours (25 %) ou souvent (16 %) pour le signe « = » (Luong Dinh Giap, 2020).

1. Sens et interprétation de signes du point de vue de l'élève

À l'instar d'autres travaux en didactique des mathématiques (Bloch, 2015; Conne, 2008; Drouhard, 1992; Drouhard, 2012; Gobert, 2013; etc.), nous nous intéressons à la construction de connaissances mathématiques en prenant en compte les interactions des élèves avec une certaine variété de signes. Nous nous intéressons plus spécifiquement à un moment de la scolarité où il s'agit d'inviter les élèves à produire des premiers « écrits mathématiques » (Margolinas, 2019). De ce fait, l'élaboration de significations de signes symboliques, ici du signe « = », peut s'avérer d'autant plus complexe que d'autres signes de nature variée (iconiques, matériels, etc.) interviennent, renvoyant eux-mêmes à des connaissances mathématiques plurielles, comme celles des nombres et des opérations. Afin d'éclairer la complexité de ce qui se joue, nous allons dans cette partie centrer nos analyses sur des signes désignant potentiellement des nombres avant d'approfondir le cas de l'égalité dans la partie suivante.

1.1 Représentations sémiotiques, sens et dénotation

Nous postulons que le signe « = » s'inscrit d'emblée dans un système de signes, celui des écritures symboliques mathématiques (des nombres, des opérations, etc.), que nous considérons comme un registre de représentation sémiotique au sens de Duval (1993).

Dans les premières années d'enseignement, les écritures symboliques d'égalités interagissent avec d'autres représentations sémiotiques, par exemple au niveau scolaire considéré, des représentations iconiques de collections d'objets (figure 1).

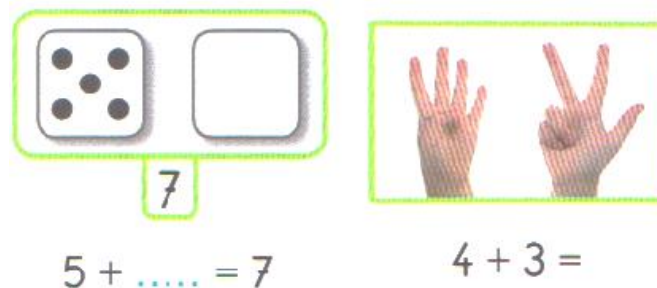


Figure 1. Diversité de représentations sémiotiques associées au signe « = », extraits du manuel de CP Opération Maths (Peltier et al., 2019, p. 17)

Ces collections peuvent être représentées graphiquement par le biais de « marques unités » (Duval, 2006a) comme les points des constellations de dé, ou effectivement présentes et manipulables comme les doigts d'une main ou des cubes. Ceci peut dès lors être l'occasion d'opérations de conversion d'un registre sémiotique à l'autre ou bien de traitements internes à un registre sémiotique donné. Ces opérations dépendent pour partie des propriétés des représentations

sémiotiques en jeu. Ainsi le caractère « déplaçable » ou non de collections (Laparra et Margolinas, 2016) peut apparaître comme une propriété d'une représentation sémiotique iconique donnée, importante à prendre en compte pour caractériser les opérations permises sur ou avec cette représentation sémiotique. Traitements et conversions peuvent se réaliser alternativement ou simultanément dans l'activité mathématique (Duval, 2006b) selon des processus cognitifs complexes, l'enjeu majeur étant celui de l'articulation des représentations pour la compréhension des concepts en jeu.

Du point de vue des savoirs associés aux écritures symboliques autour du signe « = », suivant Drouhard (2012), nous considérons que la construction de significations de ces écritures articule des savoirs spécifiques des représentations sémiotiques (les traitements en faisant partie) et des savoirs correspondant aux notions mathématiques en jeu (comme l'égalité ou l'équivalence ou la commutativité). Ces deux dimensions sémiolinguistique et notionnelle fonctionnent en étroite interrelation et sont constitutives des significations des écritures. La distinction entre sens et dénotation introduite par Frege (1892/1971) et reprise par Drouhard (1992) permet de les étudier plus avant.

Ainsi, les écritures symboliques « $3 + 4$ » et « $6 + 1$ » dénotent le même nombre, la dénotation renvoyant à un objet mathématique dans la dimension notionnelle. Le dénoté de l'écriture symbolique « $3 + 4 = 6 + 1$ » est alors « Vrai »². Les deux écritures « $3+4$ » et « $6+1$ » n'ont cependant pas le même sens, s'agissant de deux sommes avec des paires distinctes de termes. Frege définit en effet le sens du signe comme résidant « où est contenu le mode de donation de l'objet » (Frege, 1892/1971, p. 103). Autrement dit, le sens réside dans la manière spécifique dont l'objet dénoté est donné « à voir » par le signe. Nous étendons l'emploi des notions de sens et de dénotation, envisagé dans les travaux de Drouhard (1992) pour les écritures symboliques, aux représentations sémiotiques iconiques liées aux collections (figure 1). Ceci nous conduit à envisager des aspects spécifiques de ces notions au regard des propriétés de ces représentations, ce que nous illustrerons plus loin à partir d'un exemple (voir 1.4).

1.2 Un point de vue sémiolinguistique sur l'activité de l'élève

En général, les liens entre signe, sens et dénotation sont objectivés et ne recouvrent pas de dimension singulière liée aux sujets (élèves ou enseignants) et aux usages des signes qu'ils font dans leurs activités. Voulant réintégrer le point de vue de l'activité de l'élève, tout en prenant en compte la production et la communication

² À l'instar de Drouhard, nous notons entre guillemets les écritures, ce qui permet par exemple de distinguer l'écriture d'une égalité comme « $3 + 4 = 6 + 2$ » de son dénoté, ici « Faux ».

de signes, nous empruntons une voie qui nous semble proche d'une « approche pragmatique dans l'analyse de productions sémiotiques » telle que décrite par Duval (2006a). Il s'agit pour nous d'identifier des significations potentielles données aux signes par les élèves dans et par leur activité (notamment langagière) au sein de la classe de mathématiques, significations potentielles que nous qualifions d'interprétations.

1.2.1 Contextes d'interprétation des signes dans des tâches scolaires

Ces interprétations seront appréhendées au regard de caractéristiques des tâches mathématiques scolaires à même de les solliciter, mais aussi au regard de l'activité (notamment langagière) des élèves et des enseignants qui accompagne ou est convoquée par ces tâches. Ceci renvoie à la notion de contexte (Brossard, 1993, Bernié, 2004) – c'est-à-dire à tout ce qui participe de la « compréhension »³ d'une tâche scolaire par les élèves et qui est coconstruit par les élèves et les enseignants au sein d'une situation d'enseignement et d'apprentissage. Ces contextes participent de l'interprétation des signes mis en présence ou en coprésence dans ces situations par les élèves (Gobert, 2013). Ils intègrent des dimensions (intra ou inter-) subjectives, propres aux usages de signes faits par les élèves et les enseignants dans leur activité. Si nous n'accédons d'ailleurs a priori qu'aux contextes liés aux tâches dans des situations scolaires à un instant donné (celui de notre observation), nous faisons l'hypothèse que les signes en présence ou en coprésence sont potentiellement « chargés » de significations déjà construites ou coconstruites (que ce soit au sein ou à l'extérieur de l'école) et que ces significations antérieures participent de ces contextes. Ainsi, nous nous interrogerons parfois sur l'origine des interprétations des signes, convoquées par les élèves et qui entrent en jeu de leur point de vue, dans une tâche scolaire donnée.⁴ Nous intéressant à l'activité de jeunes enfants (de 6-7 ans), il nous a paru, de plus, essentiel de considérer les négociations de ces interprétations au regard des corps et des mouvements des corps. Nous rejoignons en cela Laparra et Margolinas (2012) qui

³ Compréhension n'est pas à entendre ici comme une compréhension qui serait nécessairement celle visée par l'enseignant. Bernié (2004) définit le contexte comme tout ce qui fait sens pour les élèves dans une tâche scolaire – mais le mot « sens » prenant précisément une tout autre signification dans les travaux préalablement cités de Frege – nous avons préféré éviter de le reprendre ici.

⁴ En cela, notre point de vue associant contexte (interprétatif, en lien avec une tâche scolaire) et interprétation (de signes par les élèves) se rapproche de celui de Laparra et Margolinas (2016), quand elles parlent « d'objets du monde », mais l'importance que nous accordons aux interactions langagières dans la façon dont se négocient des interprétations de signes par les élèves nous conduisent à préférer parler de contextes que de milieux de situations.

distinguent les connaissances relevant de ce qu'elles ont qualifié de l'oralité et de la littératie en référence aux travaux de Goody (1997).

1.2.2 Oralité et littératie

Les connaissances relevant de l'oralité renvoient aux « ressources corporelles » (Laparra et Margolinas, 2016) dont disposent les élèves pour faire usage et interpréter des signes. Les représentations sémiotiques iconiques (mais pas seulement) peuvent ainsi renvoyer aux mouvements des corps lorsqu'une collection est explorée en ligne ou en colonne, ou lorsque les objets sont déplaçables. Parallèlement, les signes relevant des écritures symboliques (mais pas seulement), peuvent nécessiter de convoquer des ressources typiques de l'écrit et des usages raisonnés de ces ressources, soit des connaissances relevant de la littératie. Se pose dès lors la question d'un continuum entre ces connaissances dans l'interprétation des signes par les élèves. Margolinas (2019) interroge précisément ce continuum dans la production d'écritures symboliques relevant d'égalités par des élèves de CP. Elle montre combien les ressources de l'écrit qui permettent de manifester un lien entre l'espace et le temps sont importantes à prendre en compte dans l'analyse de ces premiers écrits mathématiques par les élèves, ce qui l'amène à parler de littératie chronotopique (Laparra et Margolinas, 2016) pour rendre compte de cet empan spécifique de la littératie considéré comme « transparent » pour les enseignants. De ce point de vue, les représentations sémiotiques iconiques de nombres nous amènent à nous questionner plus avant. En effet, elles convoquent potentiellement des ressources relevant de l'oralité plus que les représentations symboliques, tout en posant la question du continuum possible avec la littératie, dans le rôle que l'on peut faire jouer à ces représentations dans la production ou l'interprétation d'écritures symboliques mathématiques. Nous avons dès lors cherché à approfondir des spécificités potentielles de ces représentations iconiques, du point de vue de la distinction entre sens et dénotation.

1.2.3 Sens et dénotation d'une représentation iconique de nombre?

Nous cherchons à déterminer dans quelle mesure, dans la classe de mathématiques, les représentations sémiotiques iconiques peuvent renvoyer à une incertitude quant à l'objet dénoté du point de vue de l'élève.

Prenons l'exemple de deux représentations sémiotiques iconiques liées aux doigts d'une main. L'une est issue de la figure 1, l'autre sera montrée aux élèves dans l'une des classes observées.



Figure 2. Deux représentations iconiques avec les doigts d'une main

On peut considérer que ces deux représentations dénotent le même objet : le nombre 4. Elles peuvent être regardées comme équivalentes de ce point de vue, à la condition que ces deux représentations soient effectivement considérées comme celles d'un nombre. Toutefois, une telle dénotation de type nombre nous semble renvoyer à un usage de cette représentation sémiotique comme un signe de signe au sens de Frege (1892/1971), car elle suppose une prise d'appui sur le sens de cette représentation sémiotique, elle-même liée à une autre dénotation, celle d'une collection constituée d'unités à dénombrer. Le cas des signes de signes fait partie des exceptions soulevées par Frege (1892/1971) au lien régulier entre signe, sens et dénotation. Il advient, par exemple, lorsque le sens du signe ou le signe lui-même peuvent devenir des objets de discours. Les représentations iconiques que nous avons considérées à la figure 2 peuvent alors être appréhendées comme dénotant une collection (de cardinal 4). Dans ce cas, elles ne dénotent pas le même objet, les deux collections étant organisées différemment par rapport à la partie du corps que constitue la main (l'une englobant le pouce, l'autre le petit doigt). Ceci renvoie à une différence de sens entre les deux représentations dans le cas de la dénotation de type nombre, puisque le nombre 4 est en quelque sorte « donné à voir » différemment du point de vue de l'organisation spatiale des doigts d'une main.

Nous considérons donc qu'il y a ici une incertitude quant à la dénotation d'un même signe (de type iconique et collection) selon qu'il soit considéré comme signe de nombre ou signe de signe, c'est-à-dire signe d'une collection elle-même signe de nombre, ainsi que l'illustre la figure ci-dessous (à l'instar de Drouhard, nous utilisons la notation δ pour la dénotation).

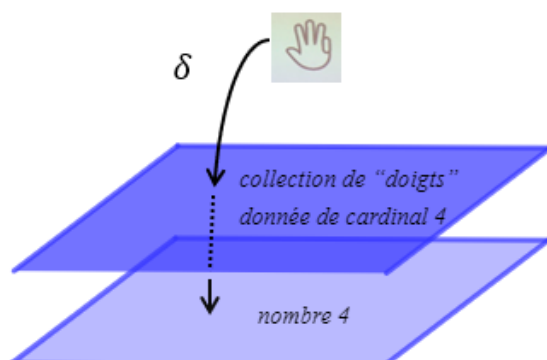


Figure 3. Une représentation iconique comme signe ou signe de signe

De telles représentations sémiotiques iconiques dénotent possiblement, tantôt des collections (même si représentées graphiquement) de cardinaux donnés, tantôt des nombres, prenant pour sens, les cardinaux de ces collections.

Nous résumons, dans le schéma ci-après, ce que cette ambivalence dénominative recouvre plus précisément :

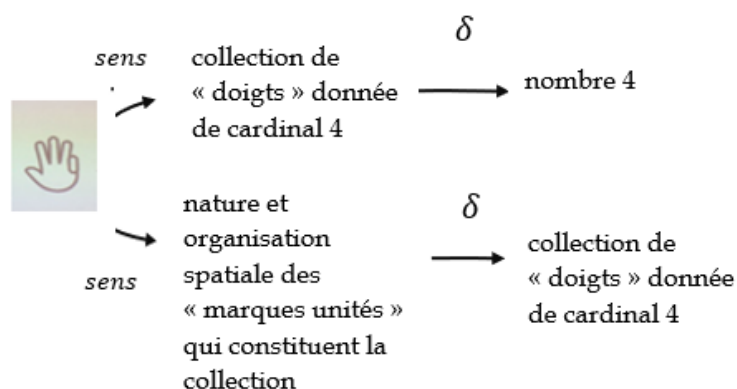


Figure 4. Ambivalence sémantique d'une représentation iconique

L'ambivalence sémantique des représentations sémiotiques iconiques fait émerger la nécessité d'analyser la situation de l'interprétant (enseignant ou élève) en ouvrant la possibilité que celui-ci les interprète au regard d'une dénotation ou d'une autre. Lorsque de telles représentations sont utilisées pour introduire le signe « = », la construction possible de significations associées à l'équipotence de collections nous semble présenter d'emblée une certaine forme d'épaisseur au regard de cette ambivalence sémantique. Suivant les différentes entrées présentées en 1.2., nous avons donc analysé des séances d'introduction du signe « = » dans quatre classes différentes de première année de primaire. Nous présentons notre

corpus avant d'aborder les résultats de nos analyses dans la deuxième partie de ce texte à partir des critères d'analyse retenus en lien avec notre étude théorique.

1.3 Présentation du corpus et des critères d'observation et d'analyse liés aux interprétations de représentations sémiotiques

Notre corpus est constitué de films et de retranscriptions de quatre séances d'introduction au signe « = » réalisées par quatre enseignantes de CP. La première classe filmée (celle de P1) se situe dans un « quartier prioritaire » d'une grande ville, ce qui va de pair avec un public d'élèves majoritairement issus de milieux socio-économiques défavorisés, voire très défavorisés. Les trois autres classes se situent dans des milieux ruraux. Les élèves de l'une de ces classes (celle de P3) sont issus de milieux socio-économiques défavorisés, contrairement aux deux autres (celles de P2 et P4). Ainsi que nous l'avons présenté en introduction, ces enseignantes n'ont pas des pratiques tout à fait ordinaires, mais nous les avons sollicitées parce qu'elles avaient l'habitude ou l'intention de proposer une séance spécifique autour du signe « = ». Les séances ont eu lieu sur deux années scolaires, mi-septembre 2018 (P1), mi-octobre 2018 (P2), début février 2019 (P4) et octobre 2019 (P3).

Lorsque cela a été possible (pour P2 et P4), nous avons utilisé plusieurs caméras (face et dos aux élèves, fixes et mobiles) afin de collecter davantage de données sur les gestes et regards des élèves et de l'enseignant. Nous avons complété nos retranscriptions par des photos ou extraits de films.

À des fins de concision, les situations choisies et aménagées par les enseignantes seront présentées au fur et à mesure des épisodes retenus pour illustrer nos résultats. Nous pouvons cependant dire que dans tous les cas, les situations proposées aux élèves renvoient à des comparaisons de cardinaux de collections représentées ou « manipulables » pour introduire l'égalité. Les représentations sémiotiques présentes dans ces situations sont toutefois d'une grande diversité, comme nous le verrons.

Au travers de nos analyses, nous cherchons quel(s) sens ou quelle(s) dénotation(s) peuvent être assignés aux représentations sémiotiques à la fois iconiques et symboliques par les élèves (et l'enseignante). Nous cherchons aussi à déterminer dans quelle mesure des opérations sur et permises par ces représentations sémiotiques (comme des conversions et des traitements) peuvent contribuer aux apprentissages autour du signe « = », tant du point de vue notionnel que sémiolinguistique. Nous cherchons enfin à identifier quels sont les points d'appui liés à des éléments de contexte susceptibles d'entrer en jeu dans l'activité de l'élève. Il s'agit de prendre en compte des caractéristiques des tâches données, mais aussi les activités (y compris langagières) des enseignantes ou d'élèves à

même de participer à la construction ou à la coconstruction d'interprétations par les élèves, des représentations sémiotiques utilisées. Nous interrogeons également le rôle des connaissances liées à l'oralité et à la littératie dans cette (co)construction au regard des spécificités des représentations iconiques et symboliques mises en avant plus haut.

2. Une diversité de représentations sémiotiques : verrou ou levier pour accéder au sens du « = »?

Dans cette partie, nous abordons les résultats de nos analyses selon trois sections qui correspondent aux principaux types de résultats obtenus. La première section concerne des ambiguïtés potentielles des représentations sémiotiques utilisées dans les situations d'enseignement et d'apprentissage observées. Des épisodes de classe donnent à voir comment ces ambiguïtés peuvent prêter à des malentendus du point de vue de l'activité sollicitée de la part des élèves. Les deux sections suivantes visent à montrer comment et sous quelles conditions de telles ambiguïtés peuvent se muer en verrous mais aussi parfois en leviers pour la construction de significations pertinentes des écritures symboliques par certains élèves.

2.1 Des représentations sémiotiques iconiques ambiguës

Nous nous appuyons dans cette section sur deux épisodes observés dans deux classes différentes.

2.1.1 Un malentendu sur le sens

Le premier épisode concerné a été observé dans la classe de P1. L'enseignante a élaboré une situation à partir d'un jeu présenté dans un ouvrage pédagogique, le « jeu du Lucky Luke » (Charnay et al., 2005). Elle en a revu le scénario pour introduire le signe « = ». Le jeu mis en œuvre dans la classe est donc le suivant : la maîtresse donne un nombre à l'oral et les élèves doivent le représenter à l'aide des doigts de leurs deux mains. Il est possible de fermer le poing pour représenter le nombre 0. Lors de la séance filmée, la maîtresse utilise des représentations sémiotiques dessinées de mains gauches (ce qui ne correspond pas tout à fait à la situation vécue par les élèves qui utilisent leurs deux mains).

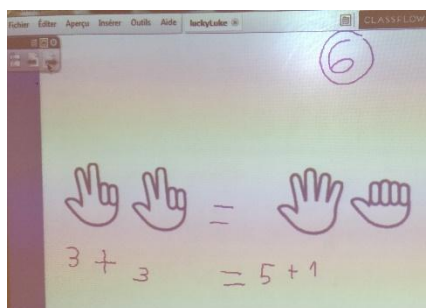


Figure 5. Représentations sémiotiques et symboliques du 6 – situation du Lucky Luke

Les nombres qui font l'objet de l'introduction du « = » sont 5, 6 et 7. Ainsi ci-dessus, le nombre 6 (« 6 » étant entouré en haut du tableau numérique) a été représenté de deux façons différentes avec les images de deux mains. Ces représentations correspondent à deux organisations possibles de deux sous-collections de marques unités : trois marques unités et trois marques unités ou cinq marques unités et une marque unité. Le signe « = » a été apposé entre ces deux représentations iconiques pour indiquer qu'elles dénotent le même nombre 6. En dessous, P1 a produit une écriture symbolique qui correspond pour partie à une conversion dans le registre des écritures symboliques des représentations iconiques données – même si le signe « = » était déjà écrit en amont. L'enjeu de la tâche donnée collectivement aux élèves semble être précisément la production de telles écritures symboliques.

L'épisode qui nous intéresse est lié au nombre 7. Les dessins donnés au tableau sont les suivants.

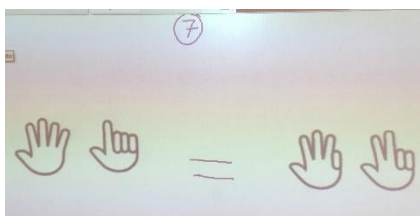


Figure 6. Égalité et représentations sémiotiques et symbolique du 7 – situation du Lucky Luke

La maîtresse introduit le signe « = » entre ces deux représentations sémiotiques iconiques et interroge les élèves sur la signification de ce « = » verbalisé « signe égal » à l'oral.

Tableau 1. Extrait de transcription sur le « 7 » – situation du Lucky Luke

P1	Égal / qu'est-ce que ça veut dire SOL / égal / ? pourquoi on a écrit le signe égal / ici? // LAM /
LAM	pour dire que / ça fait / heu / ça fait encore sept /

Sens et interprétation du signe « = » du point de vue d'élèves de 6-7 ans

P1	pour dire que / cinq doigts et deux doigts / ça donne le même nombre de doigts que / quatre et trois / ça veut dire que de ce côté-là et de ce côté-là / on a le même nombre / la même quantité / d'accord?/ (à ALIY) je te vois qui fais comme ça // comment?/
ALIY	ça fait / heu / (<i>lève quatre et trois doigts mais en disposant ses doigts différemment</i>)
P1	[...] comme ça / non, regarde /il a levé quatre / il a quand même levé quatre et trois / quatre et trois on l'a ici / déjà /
YAN	non / comme ça /
ALIY	ça fait /
P1	(à YAN) oui / mais c'est quand même quatre / et trois / YAN /
ALIY	ça fait sept /
P1	ce n'est pas les mêmes doigts / mais c'est quand même quatre / et trois / tu m'entends?/ et ça fait / c'est quand même égal / et ça fait sept / bien sûr / puisque c'est quatre et trois [...]

Certains élèves comme LAM semblent s'inscrire assez spontanément dans les attentes de l'enseignante en se référant au nombre dénoté par chacune des représentations sémiotiques iconiques données (comme cardinal des deux collections organisées en deux sous-collections différentes) pour justifier l'introduction du « = ». Cependant, d'autres comme ALIY et YAN sont visiblement perturbés par l'une des deux représentations iconiques données, liée à 4 et 3, car elle ne correspond pas à la configuration obtenue avec leurs propres mains. Une forme d'ambivalence dénotationnelle apparaît ainsi dans cette situation d'enseignement et d'apprentissage. Les représentations sémiotiques iconiques dénotent soit le nombre cardinal de la collection (du point de vue de l'enseignante et peut-être d'un élève comme LAM), soit la collection (du point de vue de ALIY et YAN) avec une importance à accorder à son organisation spatiale. Le contexte de production de collections de doigts lors de la séance précédente joue un rôle non négligeable de ce point de vue dans la classe. Les interventions de P1 tentent de revenir sur la dénotation de type nombre de la sous-collection de cardinal 4 (« c'est quand même quatre ») pour lever le malentendu visiblement rencontré par certains de ses élèves. Toutefois si l'on considère ce que révèle ce malentendu du point de vue des élèves investis dans la tâche donnée par l'enseignante, celle-ci peut paraître particulièrement ambiguë au regard des deux dénotations possibles des représentations sémiotiques en jeu. D'un côté, l'organisation spatiale des « 4 doigts » levés sur une seule main n'a pas d'importance. D'un autre côté, l'organisation spatiale des deux mains est déterminante pour que la représentation sémiotique iconique dénote un nombre cardinal d'une collection, lui-même somme des nombres cardinaux des deux sous-collections ainsi représentés. Implicitement, la tâche nécessite donc de considérer conjointement une dénotation de type nombre, renvoyant au sens lié au cardinal

de la collection et aux cardinaux des deux sous-collections réunies, et une dénotation de type collection pour envisager le sens lié à l'organisation spatiale en deux sous-collections d'une collection de cardinal 7. Ce jeu interprétatif peut être d'autant moins accessible pour les élèves que le signe « = » a été écrit entre les deux images. Le propos tenu par LAM qui s'inscrit visiblement davantage dans les attentes de l'enseignante est particulièrement révélateur de ce point de vue. En disant « ça fait encore sept », cet élève paraît investir la dénotation de type nombre des représentations sémiotiques des deux mains en lien avec le sens « cardinal » de chaque collection, ce qui correspond aussi à la mémoire de la situation précédente vécue (il fallait faire 7 avec les mains lors de la séance précédente). Dès lors, on peut penser que l'écriture symbolique qui traduirait un tel propos d'élève n'est ni le signe « = » entre les deux représentations sémiotiques des mains, ni même l'écriture produite par la suite en dessous « $5 + 2 = 4 + 3$ », mais plutôt « $7 = 7$ ». En effet, cette écriture traduit directement l'identité des dénotés de chacune des deux représentations – liés au sens du cardinal de chaque collection. Au contraire, « $5 + 2 = 4 + 3$ » nécessite une conversion qui s'appuie sur une transformation préalable de la collection de doigts en réunion de deux sous-collections spatialement visibles – pour envisager ce cardinal comme somme des cardinaux de chaque sous-collection. Si l'enseignante est attentive (et cela démontre une forme d'expertise de sa part) au malentendu que recouvrent les interventions de deux de ses élèves au sujet de la représentation sémiotique liée au nombre 4, l'analyse de la tâche mathématique proposée révèle ainsi une forme d'épaisseur dans les interprétations attendues de la part des élèves. L'ambivalence dénotationnelle de telles représentations sémiotiques iconiques éclaire ainsi une part des difficultés rencontrées par certains élèves lors de l'épisode analysé. Dans le même temps, si les élèves n'accèdent pas aux sens finalement indirects de ces représentations iconiques de nombres comme cardinaux de collections, alors il est fort à parier que ces représentations ne jouent pas leur rôle par rapport à la construction du sens du signe « = » et des écritures symboliques introduites par la suite. C'est un peu ce que tend à montrer la section suivante à partir d'une observation faite dans une autre classe.

2.1.2. Un projet d'introduction du signe « = » rendu impossible?

Dans la classe de CP de P2, les élèves disposent d'étiquettes avec des représentations sémiotiques faites de marques unités. Ils ont à les ranger dans les colonnes d'un tableau, chaque colonne étant surmontée d'un nombre représenté par son écriture symbolique chiffrée (entre 1 et 9).



Figure 7. Représentations sémiotiques et symboliques – situation des étiquettes

Les représentations iconiques sur les étiquettes renvoient soit à des représentations de mains ou de dés, soit à des collections non organisées spatialement avec, par exemple, deux poissons, quatre coccinelles ou quatre points.

Dans la tâche ainsi aménagée par P2, la dénotation de type nombre de telles représentations iconiques sémiotiques peut permettre de penser ces représentations comme équivalentes entre elles et équivalentes également à ce que dénote le symbole emblème de chaque colonne. Le projet de l'enseignante est de s'appuyer sur le fait que ces représentations ont le même dénoté (nombre) même si elles n'ont pas le même sens (collection) pour introduire l'égalité. Les élèves placent les étiquettes correctement dans le tableau sans éprouver de difficulté particulière. Toutefois, quand l'enseignante demande aux élèves de préciser ce qu'ils ont observé sur les étiquettes, il semble que les élèves résistent à revenir au sens (collection) de ces représentations sémiotiques du nombre. À plusieurs reprises dans la séance, les élèves montrent qu'ils considèrent d'emblée le dénoté nombre en répondant « j'ai deux » à la question « qu'est-ce que tu as toi [sur ton étiquette] », ou encore « moi j'ai neuf » ou plus tard, lorsqu'on leur demande ce qu'ils observent dans la colonne du six « y'a six à chaque fois ». L'enseignante relance sans cesse en demandant « y'a six quoi ? » par exemple, alors que du point de vue de l'élève dans la tâche (placer dans la bonne colonne), c'est pourtant le dénoté « nombre » qui permet d'effectuer la conversion implicite entre l'écriture symbolique « 6 » (en tête de la colonne du tableau) et la représentation iconique.

Les élèves ne comprenant visiblement pas les attentes de l'enseignante, signalent des caractéristiques très variées des objets représentés (« poissons », « points noirs » ou « petits points alignés »). Ils précisent certes à chaque fois le cardinal de la collection d'objets concernés (« deux poissons », « trois points noirs » ou

« quatre petits points alignés ») mais semblent perdre de vue que nonobstant les différences relevées liées aux objets représentés ou à leur disposition spatiale, ce qui peut justifier leur regroupement (par colonne) provient précisément des cardinaux qui ne sont pas pointés par les élèves comme une caractéristique commune des collections. Si l'enjeu des formulations paraît être celui d'assurer la relation entre nombre (dénuté) et sens (collection) en appui sur le cardinal, du point de vue des élèves, on peut se demander au regard de leurs interventions s'ils ne restent pas sur un « autre » objet dénoté que celui visé par l'enseignante (la collection). Le malentendu perdure au moment de l'introduction du signe « = » qui se fait entre deux représentations sémiotiques iconiques (de la même façon que dans la classe de P1 d'ailleurs). Deux étiquettes sont placées sous le tableau (figure 8) et un élève vient écrire « = » entre les étiquettes au feutre.

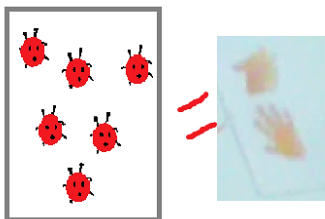


Figure 8. Introduction du signe « = » - reproduction du tableau

Tableau 2. Extrait de transcription sur l'introduction du signe « = » - situation des étiquettes

P2	<i>(prend deux cartes : six doigts et six coccinelles)</i> est-ce que les images sont les mêmes?
EE	noon
P2	Non / pourquoi c'est pas les mêmes images? TIM
TIM	parce que y'a des doigts / et sur l'autre y'a des coccinelles
P2	très bien, alors qu'est-ce qui est identique / qu'est-ce qui est pareil? <i>(P2 attend)</i> NOL?
NOL	le chiffre
P2	le chiffre / donc c'est ... la quan...
EE	..tité <i>(en même temps que P)</i>
P2	c'est le nombre, quand on a des quantités qui sont pareilles, identiques, les mêmes, on dit qu'elles sont é./.
EE	./ . gales
P2	Égales / vous le connaissez ce mot? Certainement que vous le connaissez / alors on peut dire que quand les quantités sont identiques / elles sont égales / et égal / c'est un signe qui existe en mathématiques / est-ce que quelqu'un le connaît ce signe?

L'ambivalence dénotationnelle tient au fait qu'en écrivant le signe « = » entre les deux représentations iconiques, on peut considérer que les représentations sont celles de nombres, alors qu'elles viennent d'être identifiées dans le discours à des images qui ne sont pas les mêmes, c'est-à-dire à des représentations de collections d'objets de nature différente. L'introduction du symbole « = » paraît presque

contradictoire avec ce que l'enseignante tentait de faire en premier lieu, c'est-à-dire de faire distinguer deux représentations sémiotiques iconiques de collections différentes, comme un préalable nécessaire pour accéder au dénoté type nombre. *A contrario*, tout comme dans la classe précédente, l'égalité « $6 = 6$ » qui paraîtrait plus cohérente avec son projet n'est pas apparue. Ainsi, les amalgames constatés entre représentations sémiotiques et dénotés semblent rendre a priori difficile d'accès l'idée même d'un dénoté commun à des représentations différentes, pourtant au cœur de la signification de l'égalité.

Finalement, que dénotent ces représentations sémiotiques iconiques? Peut-on dire qu'elles dénotent un nombre, sans pour autant renvoyer au mode de notation associé – une collection dont il est le cardinal – qui lui-même renvoie à une forme de dénotation directe d'une collection organisée d'une certaine façon (spatialement et du point de vue des éléments censés jouer le rôle d'unités)? Le difficile retour à un tel sens qui paraît au cœur du projet de cette deuxième enseignante, et les malentendus observés dans la classe de la première enseignante révèlent combien les interprétations en jeu peuvent être complexes pour les élèves au regard de l'ambivalence dénotationnelle des signes. Les phénomènes observés semblent constituer des verrous d'accès potentiels à la construction du sens du signe « = ». Pour autant, d'autres observations tendent à montrer que sous certaines conditions, des usages de ces mêmes représentations sémiotiques iconiques peuvent au contraire provoquer des interprétations d'élèves participant potentiellement à l'apprentissage de connaissances mathématiques. Ces connaissances paraissent toutefois assez difficiles à « capitaliser » pour les enseignants dans un registre de représentation sémiotique symbolique, car elles sont couplées à des connaissances relevant de l'oralité et de la littératie dans une forme de continuum (Laparra et Margolinas, 2016) peu aisé à négocier. C'est ce que nous abordons dans la section suivante.

2.2 Représentations sémiotiques iconiques et symboliques : quel continuum entre oralité et littératie du point de vue des élèves?

Retour sur le jeu du Lucky Luke. Revenons au jeu du Lucky Luke. Lors de la séance précédant l'introduction du signe « = », les élèves ont représenté un nombre donné oralement (comme « six » ou « sept ») à l'aide des doigts de deux mains. Les représentations iconiques dénotent donc a priori des nombres. Comme nous l'avons soulevé précédemment, la conversion en « $5 + 1$ », par exemple, nécessite à la fois de considérer la dénotation collection et de réaliser un traitement visuel pour distinguer deux sous-collections tout en considérant les deux mains comme réunion de ces sous-collections. Au regard de la tâche de production de l'égalité symbolique, une forme de simultanéité statique devient nécessaire dans

le point de vue à adopter sur la production sémiotique issue de la première séance pour y envisager une collection donnée, organisée en deux sous-collections données. Or, l'enseignante introduit dans son discours une forme de temporalité : liée tantôt à la façon dont cette représentation a été produite par les élèves ou tantôt à la façon dont elle peut être validée, par surcomptage ainsi que le montre l'extrait suivant.

Tableau 3. Extrait de transcription sur la production d'une représentation de 7 – situation du Lucky Luke

P1	ça c'était les façons qu'on avait trouvées pour faire cinq / (<i>change la page affichée au TNI</i>)
NEL	et là c'était les sept /
	oui / on avait essayé / NEL a dit / même sans lever le doigt / de trouver sept / mais qu'est-ce qu'on a écrit au tableau /
YAN	Lucky Luke /
P1	JOM ce serait bien que tu sois un peu attentive et que tu sois avec nous / SOL / pourquoi on a écrit ça au tableau // on va regarder ces doigts-là d'abord / (<i>montre la représentation de gauche</i>) qu'est-ce que c'est ça /
SOL	cinq /
P1	cinq /
EL2	moi je sais /
SOL	et deux /
P1	et deux / ça fait sept? / (<i>lève ses deux mains avec cinq et deux doigts</i>)
EE	oui /
P1	ah / (<i>avance la main avec les cinq doigts</i>) cinq / (<i>touche son menton avec ses deux doigts</i>) six / sept / je compte / je rajoute deux / cinq / six / sept / et là / (<i>montre la représentation de droite</i>) qu'est-ce que c'est? /
EE	quatre et trois /
P1	est-ce que ça fait toujours sept? / (<i>lève quatre et trois doigts</i>)
EE	oui /
LAM	non / euh oui /
P1	quatre /
EL1	non /
LAM	oui /
P1	quatre / (<i>baisse tour à tour chacun des trois doigts</i>) cinq six sept / quatre et deux / cinq six / et encore un / sept /

Si on considère le champ additif tel que défini par Vergnaud (1991), les actions de l'enseignante liées au surcomptage convoqué conduisent à transformer un problème de relation partie-partie-tout (liée à la réunion des deux sous-collections) à un problème de transformation d'états (ajout d'une collection à une collection donnée initialement). Si l'on comprend bien la logique de l'action enseignante qui envisage le surcomptage comme nécessaire du point de vue de ses élèves pour produire ou valider de telles représentations sémiotiques iconiques, dans le même temps, on peut penser que ces actions brouillent le contexte interprétatif.

LAM semble ainsi résister à la réinterprétation formulée par l'enseignante qui introduit une forme de temporalité en disant « t'as fait quatre et après tu as rajouté pour faire cinq » dans l'extrait suivant.

Tableau 4. Extrait de transcription sur la production d'une représentation de 7 – situation du Lucky Luke

LAM	heu / en fait / moi j'avais dit cinq / j'avais /
P1	oui / comment tu l'as fait, toi / le cinq /
LAM	en fait / moi j'avais / moi j'avais / j'avais mis cinq / mais je me suis trompée avec les doigts /
P1	ah d'accord / mais comment est-ce que tu as fait, toi, le cinq / quand j'ai dit/ Lucky Luke cinq / t'as fait quatre et / et après tu as rajouté // pour faire cinq /
LAM	non / non / j'avais mis un /
P1	tu avais fait / quatre et un (<i>montre le cadre correspondant au TNI</i>) / mais tout le monde n'a pas fait la même chose / (<i>montre le deuxième cadre</i>) ça c'était quel Lucky Luke?/

Le désaccord de LAM conduit finalement P1 à une reformulation plus proche du sens visé de telles représentations sémiotiques (« tu avais fait quatre et un »). Si cette intervention peut paraître assez anodine à première vue, nous faisons l'hypothèse qu'elle ne l'est pas du point de vue de ce qui se joue en termes de contexte interprétatifs des représentations sémiotiques en présence. Il est d'ailleurs à noter que l'élève qui intervient ici est celui qui semble rentrer plus que les autres dans des interprétations des signes conformes au sens visé comme nous l'avons vu plus haut. Un autre fait notable concerne le couple de nombres dont il est question (4 et 1). La représentation « 4 + 1 » peut être produite en appui sur la relation arithmétique entre 4 et son suivant. On peut également questionner le rôle que peut jouer le « 5 », cardinal de la collection doigts d'une seule main auquel LAM se réfère précisément juste avant, « j'avais mis cinq, mais je me suis trompée avec les doigts ». Il est possible que ce soit en partant de ce « 5 », en faisant passer un doigt levé d'une main à l'autre que LAM ait produit le « 4 » et « 1 », dans une temporalité autre que celle mise en avant par l'enseignante. Nous reviendrons sur ce point plus loin, car d'autres faits observés dans d'autres classes nous semblent à même de confirmer cette hypothèse.

Deux tours de hauteurs « égales ». Dans l'une des autres classes observées, l'enseignante P3 a fait un choix de représentations sémiotiques iconiques qui présente à la fois des similarités et des différences avec celles du jeu du Lucky-Luke. Dès lors, il nous est apparu intéressant de rapprocher certains des faits observés lors des deux séances concernées⁵. La tâche mathématique proposée par

⁵ Nous remercions Florence Luong Dinh Giap pour nous avoir permis de reproduire le corpus recueilli dans le cadre de son mémoire (Luong Dinh Giap, 2020) et sur lequel nous avons conduit une nouvelle étude au regard de la problématique qui nous occupe dans cet article.

l'enseignante prend appui sur le matériel suivant : des cubes colorés emboîtables de couleurs variées. Deux couleurs différentes sont censées coder deux sous-collections différentes et il s'agit de construire des tours de même taille mais en jouant sur ce codage de manière à faire apparaître plusieurs décompositions d'un même nombre. Notons que la situation d'enseignement et d'apprentissage observée dans cette classe présente plusieurs aspects intéressants à noter par rapport aux précédentes. Tout d'abord cette caractéristique des deux tours à construire « de même taille » peut faire apparaître l'égalité des cardinaux des deux collections constituées – celle-ci sera d'ailleurs codée dans le registre symbolique par une égalité « $5 = 5$ » en début de séance comme l'illustre l'image ci-dessous.

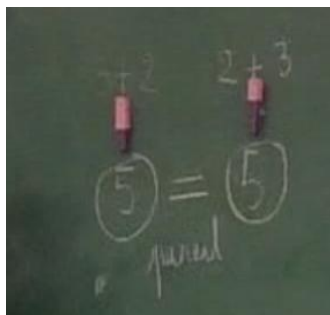


Figure 9. Représentations sémiotiques et symboliques du 5 – situation des tours
(Luong Dinh Giap, 2020)

Ensuite, le codage par des couleurs différentes des cubes pour distinguer chacune des deux sous-collections (ce qui est souvent utilisé pour des problèmes de type partie-partie-tout) paraît a priori judicieux. Mais l'enseignante fait le choix de montrer deux collections avec deux sous-collections de cardinaux identiques 2 et 3 en jouant sur la couleur pour amener une connaissance qui relève de la propriété de commutativité de l'addition. De fait, une forme de chronologie est introduite dans l'écriture produite et dans l'organisation spatiale orientée verticalement des deux sous-collections codées par ces couleurs (« 3 roses puis 2 violets » et « 2 roses puis 3 violets »). Ainsi que le montre l'extrait suivant, les élèves et l'enseignante semblent s'accorder sur les organisations spatiales : roses en haut et violet en bas, les cardinaux correspondants étant codés de gauche à droite dans l'écriture additive. C'est une chronotopie (Laparra et Margolinas, 2016) qui n'était pas présente initialement dans la situation (relevant d'une réunion simultanée de deux sous-collections). Ceci rend sans doute complexe pour les élèves la compréhension de ce qui se joue.

Sens et interprétation du signe « = » du point de vue d'élèves de 6-7 ans

Tableau 5. Extrait de transcription autour du « 5 » – situation des tours (Luong Dinh Giap, 2020)

EE	trois et deux / trois plus deux	
P3	trois / plus deux /	
EE	Plus	
P3 / EE	plus / deux / d'accord la PE retourne la tour pour que les trois cubes roses soient en haut, puis écrit 3+2 au tableau et fixe cette première tour sous l'écriture symbolique	
E	égal cinq	
EE	Plusieurs élèves proposent des calculs, inaudibles, mais ils ne semblent pas d'accord non / deux et trois par un élève qui semble interrompre le débat entre d'autres élèves	
P3	ah/ qu'est-ce qu'il dit? Tu préf/	
E	trois plus deux cinq	
P3	tu préfères faire trois plus deux/on est d'accord?/ et ça, alors, t'écrit quoi là?/ (P3 montre une deuxième tour aux élèves avec 2 cubes roses en haut et 3 cubes violets en bas)	
E	deux plus trois / deux plus trois P3 écrit 2+3 au tableau et fixe la deuxième tour montrée au tableau	

Cependant, en amont de cet échange, un élève semble investir les représentations sémiotiques matérielles des deux mêmes tours concernées avec une autre logique. TEO envisage que la couleur rose s'est substituée à la couleur violette entre les sous-collections qu'il a visiblement identifiées comme équipotentes. Plus que la

chronologie imposée dans la formation de l'écriture, en lien avec une organisation spatiale donnée, ceci aurait pu constituer un levier d'accès à une interprétation des écritures symboliques d'égalités proche de celle qualifiée de transformation de mouvement (Drouhard, 1992, Constantin, 2017) en lien avec la commutativité visée par l'enseignante de manière concomitante à l'introduction du signe « = ». Toutefois l'enseignante réintroduit une forme d'organisation spatiale (en retournant la deuxième tour) qui paraît presque contradictoire avec la proposition de l'élève, en prise d'appui sur le rôle d'une permutation constatée des couleurs – d'autant que le « pareil » alors formulé par l'enseignante semble renvoyer à une forme d'organisation identique des collections, peu importe la couleur et l'organisation spatiale.

Tableau 6. Intervention de TEO sur le « 5 » – situation des tours (Luong Dinh Giap, 2020)

TEO Y a / y a la même chose en bas TEO montre les deux cubes roses dans la tour tenue par la PE dans la main droite	
E/TE O ah oui / mais pas du même côté TEO montre les deux cubes violets dans la tour tenue par P3 dans la main gauche	
P3 tu veux dire que les deux roses / oui / remplacent les deux violets qui sont là en haut/c'est ça? (TEO acquiesce de la tête) /et les trois roses// remplacent les trois violets qui sont là (TEO acquiesce de la tête)/ donc si je faisais ça/hop!/ cette fois//est-ce qu'ils sont pareils?	

À travers ces deux épisodes, on voit des effets potentiels de brouillage de contextes interprétatifs liés à la littératie chronotopique. L'ordre de formation des écritures symboliques semble piloter une organisation spatiale verticale des tours plus que les couleurs caractérisant une organisation de la collection en deux sous-collections dont la fonction sémiotique n'aura finalement pas été totalement élucidée.

Ceci peut éclairer pourquoi, par la suite, l'enseignante rencontre des difficultés à « faire vivre » la tâche mathématique prévue : construire des tours de taille identique pour produire des écritures symboliques correspondant à des égalités. Ainsi les élèves produisent parfois des tours identiques à la fois en taille, mais aussi en termes d'organisation en deux sous-collections, se contentant de « jouer sur les couleurs » de cubes. Suivant l'organisation spatiale explicitée en amont, ces choix

donneraient lieu à la production d'égalités « tautologiques » (par exemple : « $2 + 3 = 2 + 3$ » et « $3 + 7 = 3 + 7$ »).



Figure 10. Photos des productions d'élèves – situation des tours (Luong Dinh Giap, 2020)

Ceci poussera l'enseignante à tenter de réguler collectivement la situation en prenant appui sur des productions plus conformes à ses attentes en apparence. Nous verrons plus loin que cet épisode collectif montre aussi que certains élèves (TEO) semblent bel et bien tirer parti des représentations sémiotiques iconiques en jeu pour construire des interprétations d'écritures symboliques d'égalités pertinentes, mais inattendues et délicates à interpréter par l'enseignante.

2.3. Des opérations sur les représentations sémiotiques situées dans un continuum oralité – littératie : des leviers pour certains élèves

Dans cette section, nous abordons les analyses de deux épisodes de classe montrant comment les ambivalences identifiées précédemment peuvent soutenir la construction de significations pour certains élèves. Celles-ci concernent des interprétations liées à la valeur de vérité d'une égalité pour le premier épisode, et à des transformations de mouvement pour le second épisode. Comme nous le verrons, ces interprétations émergent à partir d'opérations de conversions et de traitements multiples et concomitantes de représentations sémiotiques et symboliques.

2.3.1 Conversions, traitements et valeur de vérité d'égalités

Dans la classe de P4, le scénario d'introduction du signe « = » est adapté d'une situation documentée par la recherche en didactique, le jeu des annonces (Mercier et Quilio, 2018 repris de Parra et Saiz, 2000 dans le cadre du projet ACE). Les élèves jouent par deux et disposent d'un tableau dans lequel ils doivent écrire leur annonce faite à l'aide des doigts de trois mains (un joueur montre successivement trois mains en levant autant de doigts qu'il veut), et le nombre de points obtenus par l'autre joueur en lançant simultanément deux dés. Les joueurs doivent se mettre d'accord pour écrire le signe « = » ou le signe « $\neq$ » dans la colonne centrale. Chacun écrit à tour de rôle l'annonce, les points obtenus par les dés et le signe. Une ligne est prévue pour chacune des dix parties à jouer.

 <u>DOIGTS</u> 	<u>SIGNE</u> = ou $\neq$	 <u>DES</u> 
$4 + 1 + 2$	$\neq$	$1 + 5$

Figure 10. Reproduction d'une ligne du tableau donné aux élèves – jeu des annonces

Rapidement dans les groupes, les élèves n'annoncent plus avec les doigts et écrivent directement une somme de trois termes dans la colonne de gauche. Ils lancent ensuite les dés, se mettent d'accord sur l'égalité ou non, avant d'écrire la somme de deux termes et le signe (dans cet ordre ou l'inverse) dans les deux autres colonnes. L'épisode qui nous intéresse ici correspond à l'extrait de transcription reproduit en annexe 1. Il s'agit d'un binôme d'élèves (ELI et MIA) qui donne à voir un premier phénomène intéressant du point de vue des représentations sémiotiques iconiques et symboliques mises en jeu.

Dans l'épisode, MIA écrit « $5 + 4 + 3$ » en annonçant « cinq quatre trois », puis ELI lance les deux dés. Ceux-ci font apparaître des représentations iconiques de « 5 » et de « 6 ». Il s'exclame alors « oh cinq » en montrant successivement l'écriture chiffrée et la constellation concernée, ce qui montre qu'il associe spontanément les deux types de représentations sémiotiques iconique et symbolique, équivalentes, comme dénotant le même nombre. Il dit ensuite « neuf » en regardant tout d'abord l'écriture « $5+4+3$ », ce qui laisse supposer qu'il identifie la sous-expression « $5+4$ » dans l'écriture chiffrée comme dénotant 9. Il revient alors aux deux dés et compte le nombre de points sur le deuxième dé « un, deux, trois, quatre, cinq, six » avant que de s'exclamer « ben non » puis continue de compter en désignant du doigt les points du deuxième dé « six, sept, huit, neuf ».

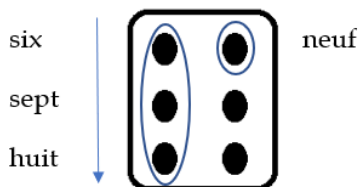


Figure 12. Comptage d'ELI sur le deuxième dé – jeu des annonces

Il s'arrête alors un instant et annonce à MIA : « onze /toi tu as fait douze ». Nous faisons l'hypothèse que derrière cette succession d'actions, ELI a isolé deux représentations sémiotiques et iconiques dénotant le même nombre : 9, puis isolé les deux représentations sémiotiques l'une, iconique, correspondant à « 2 » (voir figure ci-dessus) l'autre correspondant au terme de la somme restant : « 3 » dans l'écriture symbolique. Si nous n'avons pas trace de ce qui lui a permis d'obtenir les deux nombres 11 et 12 énoncés dans la suite de son intervention, au regard de

l'immédiateté de leur association dans son discours « onze / toi tu as fait douze », nous pensons probable qu'il ait identifié « 3 » comme succédant au « 2 » représenté par les deux points restant sur la constellation. Cette particularité des nombres en jeu, l'un étant le successeur de l'autre, paraît jouer un rôle essentiel dans cette mise en relation des deux types de représentations sémiotiques iconique et symbolique. Ainsi, ELI a commencé par associer des représentations sémiotiques iconiques et symboliques équivalentes (car dénotant le même nombre) : 5 (face du premier dé et écriture symbolique) puis 9 (face du premier dé et collection partielle de la face du second dé et écriture « $5 + 4$ ») avant d'isoler des représentations sémiotiques non équivalentes (car ne dénotant pas le même nombre). ELI semble alors identifier de manière saisissante que l'écriture chiffrée dénote le successeur 3 du nombre dénoté par les deux points restants dans la constellation, 2. Notons qu'il semble d'ailleurs avoir réussi à communiquer, partiellement du moins, une partie de son raisonnement à MIA qui exprime qu'à la place du « 3 » il aurait fallu mettre un « 2 ». On trouve également trace du raisonnement d'ELI lors de la mise en commun puisqu'il dira « parce qu'y en a un de plus » pour justifier qu'on ne peut apposer un « = » entre les deux écritures symboliques « $5 + 4 + 3$ » et « $5 + 6$ ». Ainsi, ce que l'on observe lors de cet épisode nous semble relever de transformations concomitantes de représentations sémiotiques iconiques et symboliques de nombres qui permettent de produire des interprétations d'élèves qui donnent le sens visé au signe « = » (comme dénotant le caractère vrai ou faux, dans le cas présent faux d'une affirmation liée à des dénnotations nombres). Ces transformations s'appuient sur des éléments de contexte spécifiques investis par cet élève, que ce soit la mise en relation arithmétique entre des nombres qui se suivent (3 comme successeur de 2), ou la coprésence de représentations sémiotiques à la fois iconiques et symboliques. Celles-ci font visiblement l'objet de conversions : ce qu'ELI fait d'emblée d'ailleurs en associant « 5 » et les cinq points du premier dé, puis « $5 + 4$ » et neuf points « surcomptés », etc. L'ambivalence dénotationnelle des représentations sémiotiques iconiques avec des « marques unités » déjà évoquée nous paraît jouer un rôle à la fois complexe et fructueux dans le cas présent, et ce, à de multiples égards. D'une part, elle permet (en dénotant indirectement une collection) le comptage, identifié par l'élève comme contexte de pertinence. Cette même dénotation rend possible un traitement dans le registre de la représentation iconique, celui-ci consistant en une reconfiguration visuelle (et gestuelle) des deux sous-collections (de cardinal 5 et 6) en deux nouvelles sous-collections (de cardinal 9 et 2), la comparaison avec le dénoté de « $5 + 4$ » se faisant en retour à la dénotation « nombre ». D'autre part, l'ambivalence dénotationnelle permet de faire émerger la relation arithmétique entre les nombres dénotés, 3 et 2, du fait d'un « point manquant » dans la collection représentée sur la face de dé pour représenter « 3 ». Ce faisant, une égalité intermédiaire semble se dessiner

implicitement, que l'on pourrait écrire « $5 + 4 + 3 = 5 + 4 + 2$ » dont il chercherait le dénoté (« Vrai » ou « Faux ») pour soutenir la comparaison de « $5 + 4 + 3$ » et « $5 + 6$ ». L'expression « $5 + 4 + 2$ » ne sera jamais écrite contrairement aux deux autres représentations symboliques. Ce qui se joue pour ce binôme n'est pas écrit, mais convoque et construit des connaissances de l'oralité et de littératie dont nous faisons l'hypothèse qu'elles participent de la construction de signification des écritures dans une forme de littératie chronotopique. Les conversions et traitements pourraient ainsi soutenir une transformation des écritures par le biais d'une lecture horizontale de l'égalité suggérée. Nous résumons dans le tableau ci-après les éléments que nous venons de développer.

Tableau 7. Rôle de l'ambivalence sémantique d'une représentation iconique – jeu des annonces

<i>Première conversion</i>	<i>Deuxième conversion et traitement</i>	<i>Troisième conversion</i>
« 5 » → 	« 5+4 » → 	« 5+4 +3 » → 
<i>Ambivalence dénotationnelle de la représentation iconique</i> Dénote le même nombre 5 que « 5 » ou collection de cardinal 5.	<i>Ambivalence dénotationnelle de la représentation iconique</i> Dénote le même nombre 9 que « 5 + 4 » ou collection reconfigurée par surcomptage des marques unités de la collection représentée jusqu'à « 9 »	<i>Ambivalence dénotationnelle de la représentation iconique</i> Une représentation qui ne dénote pas le même nombre que « 3 » car il manque une marque unité dans la collection dénotée indirectement (ou il en faudrait une en plus, 3 comme le successeur de 2)
<i>Littératie chronotopique</i> ⁶ « 5+... = 5 + ... » → → Lecture orientée du premier terme à droite et à gauche de l'égalité - vraie	<i>Littératie chronotopique</i> « 5+ 4... = 5 +4 ... » → → Lecture orientée et regroupée des premiers termes à droite et à gauche de l'égalité - vraie	<i>Littératie chronotopique</i> « 5+ 4 + 3 = 5 +4 + 2 » → → Lecture orientée du dernier terme à droite et à gauche de l'égalité – faux car « 3 » une marque unité de plus que « 2 » ou il manque une marque unité pour représenter « 3 »

⁶ Nous mettons ci-dessous en lumière ce que recouvrent les usages faits du point de vue des représentations sémiotiques iconiques et symboliques en jeu en termes d'interprétations

Ainsi, il nous semble que sous certaines conditions observées lors de cet épisode de travail « en binôme », la présence concomitante des deux types de registres de représentations, iconique et symbolique, participe d'un contexte permettant de produire des interprétations pertinentes d'élèves au regard des savoirs visés sur le signe « = » et sur l'égalité. Ces interprétations prennent appui sur l'ambivalence dénotationnelle des représentations sémiotiques iconiques qui faisait précédemment l'objet de malentendus entre enseignantes et enseignants d'une part, et élèves d'autre part. En effet, l'élève prend appui sur cette ambivalence sémantique, tout en repositionnant l'une ou l'autre dénotation possible des représentations sémiotiques iconiques dans un continuum entre oralité (quand il compte ou surcompte en prise d'appui sur une dénotation de type collection) et littératie (quand il prend appui sur ces opérations de dénombrement pour regrouper des termes de l'addition, comparer des nombres, en prise d'appui sur la dénotation nombre). Toutefois, une telle observation et analyse, qui est celle du chercheur, révèle l'épaisseur que recouvre l'activité de l'élève concerné, ce qui éclaire en retour la difficulté pour un enseignant de récupérer une telle activité. Ainsi, lors de la phase conclusive de cette séance que nous ne décrirons pas ici, l'action enseignante ne permettra pas de retour sur les représentations sémiotiques iconiques qui auront permis aux élèves de statuer sur le caractère vrai ou faux des égalités. Seules des interprétations d'écritures symboliques *stricto sensu* et des traitements qui restent internes à ce registre de représentation, seront officialisées.

2.3.2 Conversions, traitements et émergence d'une transformation de mouvement

Un autre épisode observé dans la situation des tours de cubes illustre de notre point de vue comment l'ambiguïté dénotationnelle des représentations iconiques peut constituer un levier d'interprétation pertinente d'élèves du signe « = ». L'extrait de transcription lié à cet épisode est reproduit en annexe (voir annexe 2).

Lors de cet épisode, les deux écritures « $3 + 4 = 7$ » et « $5 + 2 = 7$ » sont positionnées l'une sous l'autre au tableau. Elles ont été réalisées collectivement à partir de tours de 3 cubes bleus et 4 rouges d'une part, et de 5 cubes bleus et 2 cubes rouges d'autre part. L'égalité est construite par double désignation des cardinaux (obtenus par dénombrements) des collections et sous-collections. L'enjeu de l'extrait ci-dessous vise, pour l'enseignante, à démontrer aux élèves

d'écritures symboliques d'égalités qui sont liées à la littératie chronotopique. Ces égalités n'ont toutefois pas été produites par les élèves qui eux avaient juste à statuer sur le vrai et le faux d'une égalité « complète » entre deux sommes, l'une de trois termes donnés et l'autre de deux termes donnés, exprimées symboliquement.

l'égalité « $3 + 4 = 5 + 2$ » (qui ne sera pas écrite mais évoquée à l'oral) par le biais de l'identité des dénotés des sommes.

Tableau 8. Extrait de transcription autour du « $3 + 4 = 5 + 2$ » - situation des tours (Luong Dinh Giap, 2020)

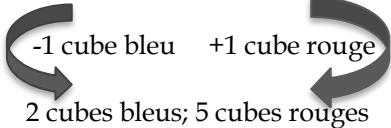
P3	égal // et regardez/ trois plus quatre égale sept (<i>la PE écrit la formule au tableau en même temps qu'elle la prononce, sous la première écriture $3+4 = 7$</i>)/ regardez/qu'est-ce que vous remarquez?/
E	han! / que il y a deux fois le sept dans les mêmes /
P3	Et pourtant/ on a pas les mêmes nombres au début
TEO	en fait
P3	en fait quoi?
TEO	en fait / c'est parce que quatre c'est / cinq plus deux ça fait sept et trois plus quatre ça fait sept / en fait, si on enlève un seul du trois et on le met au quatre / cela fait cinq / et après le trois / ça fait deux du coup / ça fait sept comme au départ
P3	C'est vrai/ il a raison/parce qu'il change la place des pions/ comme là (<i>la PE montre les ardoises avec les balles</i>)/il me prendrait les pions /° il fait pareil / il prend
ENZ	au trois / un seul
P3	au trois / un seul / et tu le mets au quatre / il enlève un et il reste plus que deux et il le met au quatre / plus un et ça fait cinq / du coup on obtient pareil deux plus cinq ou cinq plus deux / c'est
EE	pareil
P3	c'est pareil/ voilà! Donc, lui se dit ça/donc on peut obtenir sept / avec / des combinaisons différentes/ ça /on retravaillera/on le retravaillera/

Cet épisode révèle de nouveau la complexité de l'activité sémiolinguistique dans laquelle l'enseignante tente de faire rentrer les élèves, notamment en raison de la transitivité de l'égalité à laquelle une telle dénotation renvoie au regard des écritures symboliques au tableau. Toutefois TEO investit une autre voie d'interprétation des représentations symboliques et iconiques. Ces dernières pourraient constituer un levier pour « penser » le sens que prendrait le signe « = » dans l'écriture « $3 + 4 = 5 + 2$ ». Si cette égalité n'est jamais écrite, et s'il n'est pas certain que l'enseignante s'y réfère tout à fait, il n'en demeure pas moins que TEO tente de trouver une logique en rapprochant les écritures « $3 + 4$ » et « $5 + 2$ » des deux égalités écrites au tableau (l'une en dessous de l'autre) à la demande de l'enseignante (« qu'est-ce que vous remarquez? »). Quand TEO dit « en fait, si on enlève un seul du trois » pour le rajouter au « quatre », il paraît implicitement se référer à une transformation des représentations sémiotiques iconiques jouant sur leur ambivalence dénotationnelle. Il envisage ainsi le passage d'une marque unité d'une sous-collection (de cardinal « 3 ») à une autre (celle de cardinal « 4 ») tout en entrevoyant ce que ce passage traduit du point de vue des nombres dénotés par

ces sous-collections. Il cherche et produit dans le registre des écritures symboliques, une transformation qui émerge en prise d'appui sur les représentations iconiques ou matérielles dans un double mouvement de conversions et de traitements concomitants. Autrement dit, l'ambivalence dénotationnelle se retrouve repositionnée au cœur de ce qui pourrait potentiellement justifier l'égalité donnée initialement. L'ambivalence sémantique des « tours de cubes » permettrait d'envisager une perspective de transformation de mouvement liée à l'écriture symbolique « $3 + 4 = 5 + 2$ » (plus précisément : transformant « $3 + 4$ » en « $5 + 2$ »). La transformation se joue en prise d'appui sur la dénotation des représentations iconiques en présence, tour à tour de type nombre et collection. La conservation du dénoté nombre, qui prend le sens lié au cardinal de la collection de cubes réorganisée par la réunion de deux paires de sous-collections de cubes de couleurs différentes, permet de justifier l'égalité donnée initialement. Ainsi lorsque TEO lit les égalités au tableau « en fait, si on enlève un seul du trois et on le met au quatre / cela fait cinq », conversions et traitements sont étroitement imbriqués, « au quatre » ou « du trois » renvoyant à la fois aux représentations et aux dénotés nombre et collection. Les représentations verbales permettent ainsi à TEO de parler en même temps des écritures, des dénotés nombres et collection (« ça fait 5 » « et après le trois / ça fait deux du coup / ça fait sept comme au départ »), ce qui rend son discours particulièrement dense.

Tableau 9. Rôle de l'ambivalence sémantique d'une représentation iconique – situation des tours

<i>Première conversion</i>	<i>Traitement des représentations sémiotiques iconiques liées aux sous-collections</i>	<i>Deuxième conversion</i>
« $3+4$ » → 	 →  → 	 → « $5+2$ »
Transformation de ces représentations pilotée par celle des représentations symboliques « $3+4$ » en « $5+2$ », de part et d'autre du « = »		
Dénotation nombre – le cardinal « conservé » de la collection justifie l'égalité « $3+4 = 5+2$ »		
<i>Ambivalence dénotationnelle de la représentation iconique</i>	<i>Ambivalence dénotationnelle des représentations iconiques</i>	<i>Ambivalence dénotationnelle de la représentation iconique</i>
La représentation iconique dénote le nombre qui équivaut à « $3+4$ » (soit 7) ou la collection (de cardinal 7)	Les représentations dénotent des sous-collections réorganisées en enlevant une marque unité à l'une pour la	La représentation iconique dénote le nombre qui équivaut à « $5+2$ » (soit 7) ou la collection (de cardinal 7)

réunion de deux sous-collections (de cardinal 3 et 4)	rajouter à l'autre – ce qui renvoie à des actions sur des dénotés de type nombres verbalisées par l'élève (rajout de 1, ça fait 5...) mises en lien avec les représentations sémiotiques symboliques	réunion de deux sous-collections (de cardinal 5 et 2) La dénotation nombre associé à la dénotation collection permet de justifier l'égalité
<i>Littératie chronotopique</i> ⁷ 3 cubes bleus; 4 cubes bleus Mise en relation avec l'écriture « 3+4 »	<i>Littératie chronotopique</i> 3 cubes bleus; 4 cubes rouges  2 cubes bleus; 5 cubes rouges Mise en relation avec « 5 » et « 2 » de l'écriture « 5+2 »	<i>Littératie chronotopique</i> 2 cubes bleus; 5 cubes rouges mis en relation avec « 5 + 2 » « 3 + 4 = 5 + 2 » mise en relation avec la conservation du cardinal de la collection

Un peu comme pour l'épisode précédemment analysé, on voit comment une forme de flexibilité entre deux dénotations devient une prise d'appui pour rentrer dans des interprétations liées à ce qu'est censé signifier le signe « = » et une écriture symbolique du type « $3 + 4 = 5 + 2$ » même en l'absence de cette écriture *stricto sensu*⁸. L'ambivalence dénotationnelle tourne à plein comme levier d'interprétation pour TEO, et sans doute pour ENZ qui intervient à sa suite.

Toutefois, on entrevoit dans la façon dont l'enseignante cherche à s'emparer de l'intervention de TEO, des difficultés pour elle à identifier et à formuler les connaissances mises en fonctionnement par cet élève. De manière cohérente à son projet de départ (voir section précédente), elle semble considérer que ce raisonnement fait intervenir la propriété de commutativité de l'addition, ce qui est finalement éloigné de ce qui est en jeu du point de vue de l'élève. Il nous semble y avoir un amalgame entre une forme de littératie chronotopique convoquée par les élèves en prise d'appui sur les représentations sémiotiques iconiques en présence des écritures symboliques, et une connaissance littératienne tout autre qui prendrait appui sur la propriété de commutativité de l'addition, et ce, de manière

⁷ Pour représenter ce qui se joue du point de vue de la littératie chronotopique, nous renseignons ce qui, dans les opérations sur les représentations iconiques, se situe dans le *continuum* entre oralité (du point de vue des opérations sur les collections) et la littératie (du point de vue des significations d'écritures qui portent ces opérations ou qu'elles permettent de réinterpréter).

⁸ Si elle n'est finalement pas écrite dans la classe, elle nous paraît néanmoins centrale, car le raisonnement de TEO relève d'une transformation de mouvement associée à cette égalité. Nos analyses nous amènent à penser que les ressources liées à la chronotopie convoquées par TEO, sans qu'elles soient contrôlées par l'enseignante, pourraient conduire à des connaissances littératiées sur de telles écritures symboliques d'égalité.

récurrente lors de la séance observée. Dans le même temps, force est de constater que les connaissances mathématiques qui sont convoquées par des élèves comme TEO et ENZ, ou comme ELI et MIA (2.3.2) ne renvoient pas à des savoirs strictement notionnels sur les nombres en jeu, et à la littératie classiquement associée à ces savoirs notionnels. Ils renvoient plus véritablement à des savoirs sémiolinguistiques plutôt liés à ce que Laparra et Margolinas (2016) ont avant nous cherché à caractériser par la littératie chronotopique et qui pour reprendre les termes de ces deux auteures, semblent bel et bien « transparents » pour les enseignants.

Conclusion

Les résultats de notre recherche tendent à montrer une épaisseur importante des situations d'enseignement et d'apprentissage qui ont pour visée d'introduire le signe « = ». Cette épaisseur renvoie notamment à l'ambivalence sémantique des représentations sémiotiques iconiques que notre réflexion théorique a permis de mettre en exergue. Ceci nous amène à penser qu'elle puisse exister également dans les classes où des situations telles que celles que nous avons observées ne sont pas nécessairement aménagées. L'ambivalence sémantique portée par les signes peut se traduire par des incertitudes quant à la dénotation à laquelle se réfèrent des élèves (de 6-7 ans) ou qui peut être sollicitée par les enseignantes et enseignants quand ils ou elles font usage de représentations liées aux collections d'objets (et ce, que celles-ci soient représentées graphiquement ou effectivement présentes, voire déplaçables). Ces représentations paraissent néanmoins a priori nécessaires pour construire des significations sur les égalités à ce niveau scolaire.

L'incertitude postulée semble pouvoir se traduire par des interprétations par les élèves des tâches scolaires proposées et apprêtées par les enseignants qui questionnent quant à des malentendus possibles au regard de la (ou des) dénotation(s) possibles auxquelles de telles interprétations sont susceptibles de se référer dans la classe de mathématiques. Nos analyses ont pointé des amalgames possibles liés à une référence qui, dans les discours d'élèves et d'enseignant, semblait relever d'une dénotation de type nombre sans nécessairement renvoyer au sens visé de cardinal d'une collection. Certains éléments de discours ou de l'activité observable des élèves laissent penser que malgré la référence au nombre « déclarée », cela puisse être la dénotation de type collection qui tend à piloter l'activité des élèves avec la mise en fonctionnement de connaissances relevant de l'oralité. Cependant, en l'absence de lien avec la dénotation de type nombre, la représentation ne prend pas le sens voulu et nécessaire pour accéder à des significations pertinentes d'écritures symboliques d'égalités. Ainsi, la littératie visée, associée aux écritures symboliques paraît parfois difficilement accessible au

regard d'un continuum entre oralité et littératie délicat à négocier du point de vue de l'action enseignante. Les analyses que nous avons conduites montrent la complexité des phénomènes en jeu, ce qui explique sans doute les amalgames qui émergent dans les classes. Parfois encouragés, ils sont *a minima* particulièrement difficiles à exploiter avec les élèves pour s'emparer de ce qui pourrait favoriser l'entrée dans une littératie chronotopique à même d'éclairer la construction de significations des représentations symboliques liées aux égalités, à partir de représentations sémiotiques iconiques liées quant à elles à des collections ou des réunions de collections. Pour autant, les deux derniers épisodes analysés dans le cadre de notre étude montrent que certains élèves tirent parti de cette ambivalence dénotationnelle pour construire des significations pertinentes au regard de ce que sont censées dénoter des écritures symboliques d'égalité. Les interprétations contextualisées apparaissent toutefois assez délicates à « déplier », car elles se réfèrent tour à tour ou de manière quasi concomitante à une dénotation ou à l'autre en jouant sur leurs sens respectifs (de collection organisée et composée d'une certaine façon ou de nombre cardinal d'une collection) pour faire émerger des nouvelles connaissances potentiellement porteuses sur les égalités codées symboliquement en prise d'appui sur des ressources relevant de la littératie chronotopique. Dans ces conditions, il ne paraît pas étonnant que ces connaissances émergentes peinent à être récupérées par les enseignantes lors d'épisodes collectifs. Ces épisodes s'avèrent fréquemment centrés sur des significations des écritures symboliques, plus orientées par des connaissances mathématiques (des opérations ou des nombres) ou par des connaissances qui relèvent de ressources liées à la littératie, éloignées de celles mises en fonctionnement par les élèves.

Pour autant, l'étude de ces épisodes de classe permet selon nous d'identifier des leviers possibles pour faciliter l'accès à des significations des écritures symboliques relevant d'égalités en début d'école primaire.

Tout d'abord nous pensons que l'identification de phénomènes liés à l'ambivalence sémantique des représentations iconiques peut permettre d'accroître une certaine vigilance quant aux possibles sens de ces représentations, auxquels se réfèrent enseignants et élèves dans la classe de mathématiques. Ceci pourrait par exemple conduire à envisager l'usage d'écritures symboliques du type « $n = n$ » (avec n cardinal de collections) pour construire des significations pertinentes du signe « = ». Ces écritures paraissent a priori privées de sens si on les regarde sur le strict plan du registre symbolique, mais considérant des représentations iconiques liées aux collections, elles pourraient constituer une façon d'opérer un retour sur le sens visé de cardinal d'une collection ou de

cardinaux de sous-collection qui permettrait à son tour d'accéder au sens d'une égalité symbolique.

Plus encore, ce sont peut-être des mises en relation entre des sens distincts de telles représentations iconiques que recouvre cette même ambivalence sémantique qui nous paraissent aujourd'hui des points d'appui potentiels pour construire de nouvelles connaissances liées à l'égalité et aux écritures symboliques afférentes. Des comparaisons effectuées visuellement entre des sous-collections réunies dans une collection ou des traitements de ces sous-collections en prise d'appui sur la dénotation de type collection, mais réinterprétées au regard de la dénotation de type nombre peuvent éclairer des significations à donner aux égalités symboliques. Il reste toutefois à penser des situations d'enseignement et d'apprentissage qui permettent d'explorer plus avant de telles pistes en ne négligeant pas la mise en cohérence de l'activité de l'élève d'un point de vue sémiotique avec un continuum entre oralité et littératie prenant appui sur des ressources de la littératie chronotopique.

Références

- Behr, M., Erlwanger, S. et Nichols, E. (1980). How children view the equals sign. *Mathematics Teaching*, 92, 13-15.
- Bernié, J.-P. (2004). L'écriture et le contexte : quelles situations d'apprentissage? Vers une recomposition de la discipline « français ». *Linx*, 51. <https://doi.org/10.4000/linx.163>
- Bloch, I. (2015). Concepts, objets, symboles, enseignement des mathématiques ... Réflexions sur l'épistémologie et la didactique. *Petit x*, 97, 71-79.
- Brignon, P. et Eysseric, P. (2012). Des outils aux signes : construire des représentations arithmétiques du quotidien au CP. *Grand N*, 89, 71-102.
- Brossard, M. (1993). Un cadre théorique pour aborder l'étude des élèves en situation scolaire. *Enfance*, 47(2), 189-199. <https://doi.org/10.3406/enfan.1993.2054>
- Charnay, R., Douaire, J., Valentin, D., Guillaume, J.-C., Colomb, J. (2005). *ERMEL, apprentissages numériques et résolution de problèmes*. CP. Éditions Hatier.
- Conne, F. (1988). Comptage et écritures en ligne d'égalités numériques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9(1), 71-116.
- Conne, F. (2008). L'expérience comme signe didactique indiciel. *Recherches en didactique des mathématiques*, 28(2), 219-264.

Constantin, C. (2017). Unifier, formaliser, généraliser : une alternative pour l'enseignement du calcul algébrique au collège? *Recherches en didactique des mathématiques*, 37(1), 53-9.

Daniau, J. (1976). Introduction du signe "=" en classe de CP. *Grand N*, 9, 35-44.

Denmark, T., Barco, E. et Voran, J. (1976). Final report: A teaching experiment on equality. Rapport numéro PMDC – TR – 6. Tallahassee : Université de l'état de Floride.

Drouhard, J.-P. (1992). *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire* [thèse de doctorat, Université Paris VII, France].

Drouhard, J.-Ph. (2012). L'épistémographie, un outil au service de la didactique des mathématiques. Dans M. Abboud-Blanchard et M. Flückiger (dir.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques – Année 2011* (p. 129-133). IREM de Paris VII (Institut de recherche en enseignement des mathématiques), Université Paris Diderot.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, (5), 37-65.

Duval, R. (2006a). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques? *Relime, Numéro Especial*, 45-81.

Duval, R. (2006b). Transformation de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. Dans J.-C. Rauscher (dir.), *Actes du XXXII^e Colloque COPIRELEM* (p. 67-89). Institut de recherche en mathématiques (IREM).

Falkner, K., Levi, L. et Carpenter, T. (1999). Children's understanding of equality: a foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics*, 6(4), 232-236.

Frege, G. (1892/1971). *Écrits logiques et philosophiques* (C. Imbert, trad.). Éditions Points.

Gobert, S. (2013). Construire des significations dans et par le langage. Dans A. Bronner, C. Bulf, C. Castela et J.-P. Georget (dir.), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage. Actes de la XVI^e école d'été de didactique des mathématiques* (p. 547-566). La Pensée sauvage.

Goody, J. (1977). *La Raison graphique. La domestication de la pensée sauvage* (J. Bazin et A. Bensa, trad.). Éditions de Minuit.

Kieran, C. (1981). Concepts Associated with the Equality Symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12(3), 317-326. <https://doi.org/10.1007/BF00311062>

Laparra, M. et Margolinas, C. (2012). Oralité, littératie et production des inégalités scolaires. *Le français aujourd'hui*, 177, 55-64.

Laparra, M. et Margolinas, C. (2016). *Les premiers apprentissages scolaires à la loupe. Des liens entre énumération, oralité et littérature*. De Boeck.

Luong Dinh Giap, F. (2020). *Contextes d'interprétation des signes +, = introduits dans les situations de résolution de problèmes arithmétiques en début de CP* [Mémoire inédit, Université de Bordeaux].

Margolinas, C. (2019). Ce que peut apporter l'analyse des implicites et des conversions à la compréhension des difficultés des élèves concernant l'écrit mathématique au début de l'école primaire. Dans M. Maurel (dir.), *Jean-Philippe Drouhard. De la linguistique à l'épistémographie* (p. 79-91). Édition privée.

Mercier, A. et Quilio, S. (2018). *Mathématiques élémentaires pour l'école. Nombres, grandeurs, calcul*. Presses universitaires de Rennes.

Parra, C. et Saiz, I. (2000). *Hacer Matemática 1,2 y 3*. Estrada.

Peltier, M.-L., Briand, J., Vergnes, D., Ngono, B. et Sampo, M. (2019). *Opération Maths CP*. Éditions Hatier.

Theis, L. (2005a). *Les tribulations du signe = dans la moulinette de la bonne réponse*. Éditions Bande didactique.

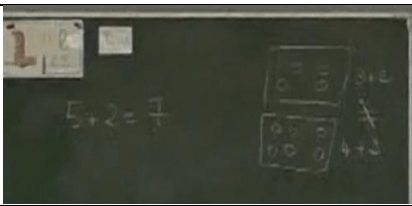
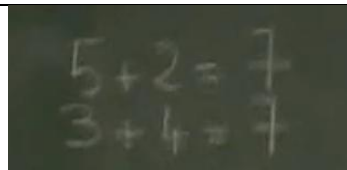
Theis, L. (2005b). L'apprentissage du signe = : un obstacle cognitif important. *For the Learning of Mathematics*, 25(3), 7-12.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10(2.3), 133-170.

Annexe 1

MIA	(MIA écrit $5 + 4 + 3$ puis annonce :) cinq quatre trois	$5 + 4 + 3$
ELI	J'essaye de te faire gagner (lance les dés et obtient 5 et 6) Oh Cinq (montre l'écriture du 5 sur la feuille et montre le dé avec les 5 points)	
MIA	Oui c'est bon / attends	
ELI	neuf //	ELI dit « neuf » en regardant la feuille sur laquelle est écrit $5+4+3$, puis compte le nombre de points sur l'autre dé : 1, 2, 3, 4, 5, 6, puis dit « beh non », regarde le premier dé annonce 5 et continue de compter en désignant les points sur le deuxième dé : 6, 7, 8, 9 fait une pause (il reste donc deux points à compter), regarde l'écriture sur la feuille puis 10, 11. Pendant ce temps MIA cherche un moyen d'effectuer la somme de l'annonce : elle regarde le dé, dit « cinq » puis regarde la feuille dit « 4 » et montre 4 avec ses doigts, puis surcompte en levant les doigts au fur et à mesure : 5, 6, 7, 8 puis s'arrête un instant, ELI l'interrompt en annonçant 11. MIA regarde les dés, et ELI dit « toi tu as fait 12 »
	Un deux trois quatre cinq six / beh non	
	Cinq / six sept huit neuf	
	onze	
	Toi, tu as fait 12	
		
MIA	Hooo// oh non	
ELI	J'ai essayé, hein	
MIA	(à voix très basse) mais en fait faudrait mettre 2 et ça fait 11 (montre le 3) (inaudible)	
ELI	Là tu laisses comme ça / ben c'est toi qui as demandé c'est toi qui as demandé // là tu triches (MIA finit par écrire $5 + 6$ puis écrit le signe différent dans la colonne centrale)	

Annexe 2

P3	égal/ donc je remarque au tableau ce que moi je voulais que vous écriviez sur l'ardoise/ 5 plus 2 égale /7 (P3 écrit au tableau « $5+2=7$ »)/on est d'accord?/allez/c'est ça que je veux/ $5+2=7$ /	
P3	<i>P3 propose un nouvel exercice de codage, elle montre une tour ayant 3 cubes bleus et 4 cubes rouges</i> alors regardez/vous codez celui-ci maintenant/°/on efface/allez on efface/on regarde tout le monde/j'ai les yeux de tout le monde?/ENZ?/#non#/on code/celui-ci (la PE montre la tour)/°/on va les compter ensemble/les bleus un deux trois /ensuite on compte:	
Élève	Les rouges	
P3	donc on écrit combien?	
Élève	quatre	
P3	ben non/qu'est-ce qu'on vient de compter?/	
Élèves	trois / deux /trois	
P3	trois / un deux trois quatre (P3 compte les cubes rouges) / voilà, j'ai combien en tout	
Élèves	Sept	
P3	sept? Donc, on écrit/ égal/ et nous on va vérifier/ si j'en mets sept/est-ce que ça fait la même hauteur/ donc un deux trois quatre cinq six sept (P3 construit une nouvelle tour de sept cubes)/ je le mets à côté / est-ce que j'ai la même hauteur?	
Élèves	<u>Oui</u>	
P3	Oui / donc ça veut dire que j'ai le droit d'écrire entre les deux::	
Élèves	égal/égal	
P3	égal // et regardez/ trois plus quatre égale sept (P3 écrit l'égalité au tableau en même temps qu'elle la prononce, sous la première écriture « $3+4=7$ »)/ regardez/qu'est-ce que vous remarquez?/	
Élève	han ! / que il y a deux fois le sept dans les mêmes /	
P3	Et pourtant/ on a pas les mêmes nombres au début	
TEO	en fait	

P3	en fait quoi?
TEO/ENZ	en fait / c'est parce que quatre c'est / cinq plus deux ça fait sept et trois plus quatre ça fait sept / en fait si on enlève un seul du trois et on le met au quatre / cela fait cinq / et après le trois / ça fait deux du coup / ça fait sept comme au départ
P3	C'est vrai/ il a raison/parce qu'il change la place des pions/ comme là (<i>P3 montre les ardoises avec les balles</i>)/il me prendrait les pions /° il fait pareil / il prend
ENZ	au trois / un seul
P3	au trois / un seul / et tu le mets au quatre / il enlève un et il reste plus que deux et il le met au quatre / plus un et ça fait cinq / du coup on obtient pareil deux plus cinq ou cinq plus deux / c'est
Élèves	pareil
P3	c'est pareil/ voilà! Donc lui se dit ça/donc on peut obtenir sept / avec / des combinaisons différentes/ ça /on retravaillera/on le retravaillera/