Mathématiques, danse et robotique pédagogique : Résoudre des problèmes en faisant danser des robots

Fabienne Venant
Université du Québec à Montréal
venant.fabienne@uqam.ca

Résumé : La résolution de problèmes est au cœur de l'apprentissage des mathématiques. Cependant, il peut être difficile de concevoir des situations novatrices incluant des tâches significatives pour les élèves. Face à cette difficulté, nous avons décidé d'explorer les possibilités offertes par la robotique pédagogique, considérée comme un environnement d'apprentissage dans lequel les apprenants résolvent des problèmes en utilisant des robots. Dans cet article, nous analysons les processus de résolution de problèmes mis en œuvre par des apprenants universitaires dans un cours de mathématiques, dans le contexte d'un projet en robotique pédagogique.

Mots-clés : résolution de problèmes, pensée informatique, activité mathématique, robotique pédagogique

Solving mathematical problems by making robots dance? An experiment in initial teacher education

Abstract: Problem-solving is at the heart of mathematics learning. However, it can be difficult to design innovative situations that include meaningful tasks for students. To overcome this difficulty, we explore the possibilities offered by educational robotics, considered as a learning environment in which learners solve problems using robots. This paper analyzes the problem-solving processes that university learners used in a mathematics course within the context of an educational robotics project.

Keywords: problem-solving, computational thinking, mathematical activity, educational robotics

Introduction

La résolution de problèmes occupe une place centrale non seulement dans l'enseignement des mathématiques, mais en éducation en général. La figure 1 montre qu'elle est considérée comme une des compétences clés pour le 21e siècle, aussi bien par des chercheurs comme Romero et al. (2017), que par le Gouvernement du Québec (2019), qui l'inclut dans les « dimensions jugées indispensables pour apprendre et évoluer au 21e siècle » au sein du cadre de référence de la compétence numérique (p. 3).

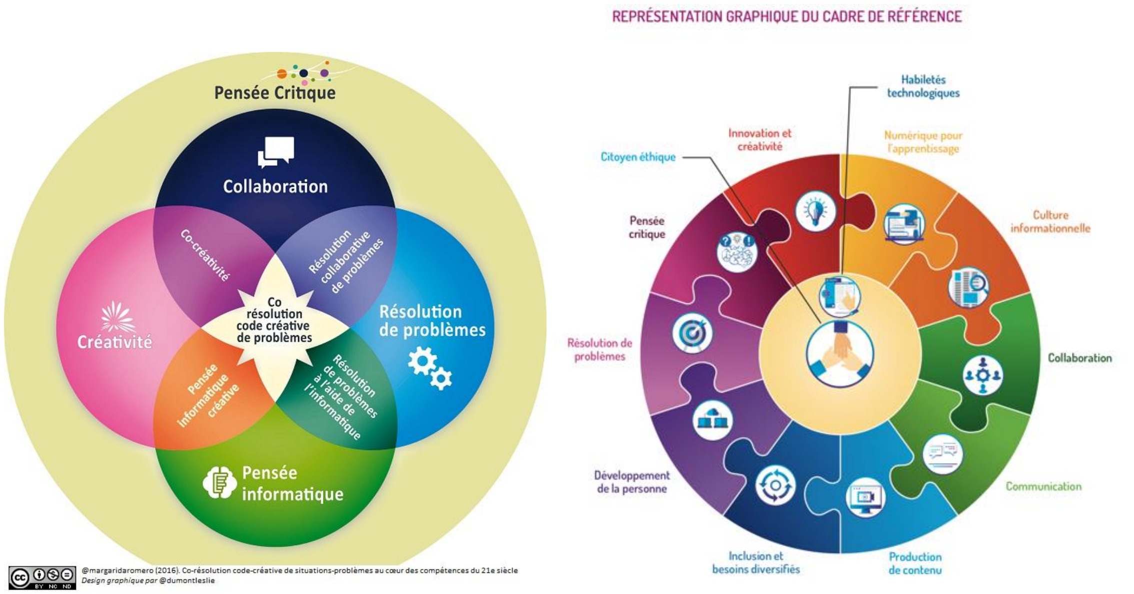


Figure 1. Les compétences du 21e siècle d'après Romero et al. (2017, p. 4) à gauche, et le cadre de référence de la compétence numérique (Gouvernement du Québec, 2019, p. 12), à droite

Freiman et Savard (2014), dans leur introduction du numéro spécial de la revue « Éducation et francophonie » consacré à la résolution de problèmes en mathématiques, soulignent ainsi que les citoyens de demain, et donc les jeunes d'aujourd'hui, « devront être capables, à la fois de maîtriser le contenu des matières scolaires et de les mobiliser en situation de résolution de problèmes et de communication, tout en mettant en œuvre une pensée critique » (p. 1). Les analyses curriculaires de Lajoie et Bednarz (2012, 2014, 2016) ont fait ressortir le caractère de plus en plus ambitieux des fonctions assignées à la résolution de problèmes. Ainsi, depuis 1998, celle-ci joue un double rôle puisqu'elle est à la fois une habileté de base qui constitue en soi un objet d'apprentissage, et une approche pédagogique permettant le déploiement d'une activité mathématique. Désormais, l'élève qui résout un problème de mathématiques ne développe plus uniquement son raisonnement et ses compétences mathématiques. Il développe des stratégies générales de résolution et des attitudes positives (être conscient de ses capacités, respecter le point de vue d'autrui, être imaginatif et créatif, rigoureux et précis…). Lajoie et Bednarz (2016) ont mis en évidence l'apparition d'un critère de complexité dans la conception et la sélection des tâches de résolution de problèmes. L'enseignant est désormais encouragé à privilégier des situations complexes, c'est-à-dire des situations « qui mobilisent l'ensemble des composantes d'une compétence, représentent un défi intellectuel, suscitent un conflit cognitif, favorisent la prise de risques et se prêtent à plus d'une démarche » (Gouvernement du Québec, 2006, p. 14).

Les situations complexes qu'un élève québécois du secondaire du 21e siècle est amené à résoudre dans le cours de mathématiques sont presque toutes construites sur un même modèle : un énoncé très long (souvent plusieurs pages) contenant un grand nombre de données, idéalement présentées dans différents registres (texte, illustration, graphique, tableau…). L'élève est « plongé » dans une situation réaliste et il doit se repérer dans les données présentées pour décider si un projet est réalisable, en respectant un certain nombre de contraintes (budgétaires, environnementales, logistiques…). Ces situations sont pensées pour mettre en jeu différents concepts et processus mathématiques. Cependant, comme le soulignent Lajoie et Bednarz (2016), la mobilisation des savoirs et savoir-faire relève souvent d'une mise en fonction technique (Robert, 1998), réduisant les notions mathématiques à un rôle d'outil. Ces situations se réduisent bien souvent à une succession de problèmes d'application assez simples, « ce qui en fait le caractère nouveau résidant davantage dans la combinaison nécessaire de ces différents sous-problèmes » (Lajoie et Bednarz, 2016). La complexité à laquelle l'élève est confronté réside uniquement dans la lecture et le traitement des données. Sans nier la pertinence de ces situations dans l'acquisition de la résolution de problèmes en tant que compétence transversale et quotidienne, nous pensons qu'elles gagnent à être articulées avec des problèmes dont la complexité est d'une autre nature. Notre premier objectif est donc d'explorer des contextes de résolution de problèmes mettant en jeu une complexité mathématique plus sémantique qu'instrumentale.

L'une des principales difficultés dans la construction des tâches de résolution de problèmes et de modélisation est de construire des activités signifiantes pour les élèves, c'est-à-dire des activités dont ils puissent entrevoir la pertinence et le propos (Blum, 2015). Une approche privilégiée consiste à utiliser des contextes réels. Cependant, construire une activité vraiment pertinente du point de vue des apprentissages mathématiques à partir d'un contexte réel n'est pas une tâche facile. Ainsi, en France, le rapport Villani souligne que « souvent, les contextes retenus perturbent les élèves plutôt qu'ils ne les aident et ces modèles sont tellement simplifiés qu'ils n'apportent pas de réelle plus-value aux disciplines auxquelles ils sont empruntés (économie, sciences physiques, etc.) » (Villani et al., 2018, p. 23). C'est pourquoi nous explorons ici les possibilités offertes par la robotique pédagogique. Cet environnement nous semble prometteur pour créer des contextes signifiants, pouvant mêler science, technologie, mathématiques, intelligence artificielle et arts, en lien avec les enjeux sociétaux actuels (Benitti et Spolaôr, 2017). Ces liens, encore largement inexplorés, devraient soutenir une interdisciplinarité effective, c'est-à-dire complémentaire plutôt que cumulative, articulant les savoirs disciplinaires et permettant des convergences entre les disciplines (Lenoir, 2003). Nous avons cherché à les mettre en œuvre dans un cours de mathématiques universitaire, dans le cadre d'un projet combinant mathématiques, informatique et danse. Dans cet article, nous cherchons à mettre en évidence l'activité de résolution de problèmes des étudiants, lors de la construction, la mise au point et la programmation d'un robot danseur.

1. Pensée informatique et résolution de problèmes

La pensée informatique, mise au goût du jour par Wing (2006), occupe, elle aussi, une place de choix dans les compétences du 21e siècle montrées en figure 1. Elle entretient des liens très forts avec la résolution de problèmes, avec en particulier l'idée d'utiliser la technologie aussi bien comme contexte que comme moyen d'aide à la résolution du problème. Tout comme la résolution de problèmes, la pensée informatique est difficile à circonscrire. La définition la plus fréquente est celle proposée par Wing (2006), celle « d'une attitude et d'un ensemble de compétences que les programmeurs mettent en jeu quand ils font face à un problème à résoudre, et que nous gagnerions tous à acquérir » (p. 1). Il ne s'agit pas d'amener l'humain à raisonner comme une machine, capable seulement d'appliquer des instructions structurées, mais plutôt d'une, « aptitude à formuler les problèmes et leurs solutions de manière à ce que leur résolution puisse être effectuée par un agent de traitement automatique de l'information » (Wing, 2011, p. 20).

L'idée d'introduire la pensée informatique à l'école n'est pas nouvelle. Papert (1980) défendait déjà l'idée qu'apprendre à communiquer avec un ordinateur pouvait influencer les apprentissages mathématiques. Ainsi que nous l'avons souligné dans des travaux antérieurs (Venant, 2018), la pensée informatique contribue au développement de compétences plus générales en résolution de problèmes. L'apprenant est en effet amené à analyser le problème posé pour le restructurer sous forme de tâches correspondant chacune à un ou des objectifs précis. Dans cette optique, la programmation informatique et la pensée informatique qui la sous-tend peuvent être mises en œuvre comme une approche possible de la résolution de problèmes mettant en jeu quatre processus fondamentaux : 1) la décomposition (du problème complexe initial en sous-problèmes plus simples); 2) la reconnaissance de motifs (au sein de chacun des sous-problèmes); 3) l'abstraction (en lien avec le traitement de l'information); 4) les algorithmes (description logique et structurée des étapes menant à la résolution de chacun des sous-problèmes). La pensée informatique inclut aussi un processus de recherche et de traitement des erreurs (débogage), et par là même favorise le développement de la pensée critique. Les composantes de la pensée informatique comportent une part d'abstraction et de généralisation qui semble favorable à la mise en œuvre d'une activité mathématique. Notre deuxième objectif est de mettre au jour les différentes composantes de la résolution de problèmes en contexte robotique et de mieux comprendre la nature du travail mathématique effectué.

2. Cadre théorique

Les fondements théoriques de notre travail mêlent l'approche constructionniste initiée par Papert (1980, 1993) et des modèles récents de résolution de problèmes. Papert, dans la lignée de Piaget, considère que tout apprentissage se poursuit par la découverte. Selon lui, l'ordinateur constitue un outil idéal pour créer un environnement dans lequel les apprenants sont les maîtres de leurs découvertes, peuvent développer leurs propres idées et explorer librement les mathématiques. Dans le même ordre d'idée, Papert (2000) soutient que les problèmes travaillés par les élèves ne doivent pas être initiés par les enseignants, mais provenir plutôt des élèves et avoir de l'importance à leurs yeux. Le rôle de l'enseignant est alors de créer des conditions permettant aux apprenants de poser leurs questions et de résoudre leurs problèmes. Il préconise donc une approche par projets, s'échelonnant dans le temps, pour permettre aux élèves d'entrer dans une activité créatrice propice à l'exploration et aux découvertes mathématiques (Barabé et Proulx, 2017). Nous nous intéressons plus particulièrement à la part de résolution de problèmes inhérente à cette activité. Du point de vue de la recherche, la difficulté réside alors dans la description de ce qui se passe dans cette résolution (Favier, 2022). Dans la lignée de Weil-Barais et Dubois (1993), nous cherchons à utiliser les événements observables (geste, verbalisations, productions symboliques…) pour interpréter les événements inobservables (dans la tête du sujet). Pour cela, nous nous appuyons sur les travaux de Polya (2004) et Schoenfeld (1985), repris et adaptés par Rott (2011) et cités par Favier (2022).

Polya (2004) est un des premiers chercheurs à avoir proposé un modèle de la résolution de problèmes en mathématiques, en quatre phases successives qui consistent à 1) comprendre le problème ; 2) concevoir un plan ; 3) mettre le plan à exécution ; 4) examiner la solution obtenue. Bien que ces phases aient été pensées de manière prescriptive, elles ont servi de base à d'autres chercheurs pour décrire les processus de résolution mis en œuvre par des élèves. Schoenfeld (1985), par exemple, renomme les 4 phases proposées par Polya en 1) appropriation ; 2) planification ; 3) mise en œuvre ; 4) vérification. Il ajoute également une phase d'exploration, intermédiaire entre l'appropriation et la planification, pour rendre compte de la part du processus de résolution qui ne relève plus tout à fait de la compréhension du problème à proprement parler, mais qui ne constitue pas pour autant un plan prêt à être mis en œuvre. Enfin, il considère que le processus de résolution de problèmes n'est pas aussi linéaire que ce que propose Polya, et peut même prendre une forme cyclique (figure 2), avec des allers et retours entre les phases d'appropriation, d'exploration et de planification pouvant être nécessaires à l'élaboration d'une stratégie de résolution.

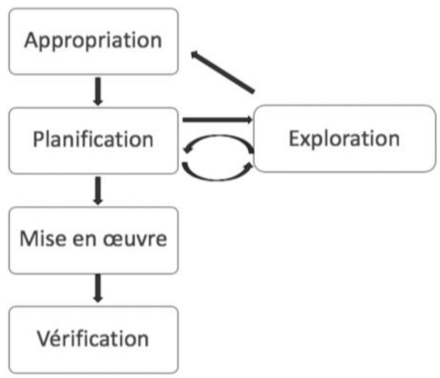


Figure 2. Présentation simplifiée du modèle de résolution de problèmes de Schoenfeld par Favier (2022, p. 22)

Rott (2011) généralise cette notion de cycle afin de permettre des « jonctions entre les différentes phases du processus de résolution » (Favier, 2022, p. 23). Il accorde, lui aussi, une grande importance à la phase d'exploration qui permet de rendre compte de la part non structurée des comportements. Il propose également de regrouper les phases de planification et de mise en œuvre, car les élèves n'explicitent pas nécessairement leur plan de résolution avant de le mettre en œuvre.

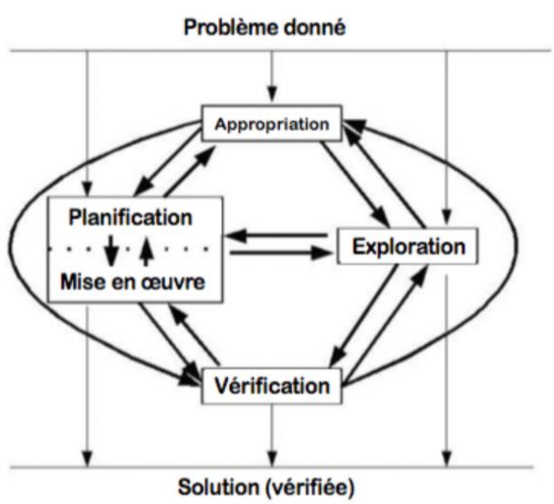


Figure 3. Traduction du modèle de résolution de problèmes de Rott (2011) par Favier (2022, p. 24)

C'est sur le modèle de Rott (2011) que nous nous appuierons pour analyser les processus de résolution de problèmes mis en œuvre par les apprenants.

3. Méthode et données recueillies

Dans un premier temps, le contexte d'expérimentation et le groupe d'étudiants ayant participé à ce projet seront exposés. Le matériel utilisé pour mener à bien ce projet sera décrit dans un deuxième temps.

3.1 Contexte et participants

Nous avons testé le potentiel de la robotique pour engager des apprenants dans une activité mathématique dans un cours de mathématiques universitaire. Dans le cadre de ce cours, les étudiants doivent réaliser un projet en équipe pour explorer une notion mathématique de leur choix, à l'aide d'outils numériques. Les étudiants ont travaillé en équipe de 3 ou 4. Au total, 8 projets de robotique ont été réalisés. Le travail s'est déroulé en deux temps. Les étudiants ont d'abord effectué un travail de recherche sur les liens entre mathématiques et danse. Une liste initiale de documents multimédias (textes, vidéos, pages Web…) leur était proposée selon les thèmes suivants : mathématiques pour penser et/ou expliquer le mouvement (Birringer, 2013 ; De Keersmaeker, 2019), symbolisme et mathématiques pour décrire et écrire la danse (Benesh, 1969 ; Prudhommeau, 1987), danse et numérique (Davidson, 2003 ; Menicacci, 2003), danse et enseignement des mathématiques (Mickelson et Ju, 2010 ; Schaffer et Stern, 2010). Les étudiants devaient compléter cette liste préliminaire, approfondir une ou plusieurs thématiques de leur choix et écrire une synthèse de leur réflexion. Ce travail a servi d'inspiration et posé les bases du travail chorégraphique robotique.

3.2 Matériel utilisé

Un kit de robotique EV3 a été attribué à chacune des équipes pour toute la durée du projet. Les étudiants ont donc pu construire le robot qui convenait le mieux à leur chorégraphie et le retrouver à chaque séance de cours. Le kit de robotique EV3 est très modulable. Il est constitué d'une brique programmable à laquelle on peut ajouter différentes parties encastrables les unes dans les autres. Cette brique peut contrôler différents moteurs et capteurs (de distance, de luminosité, de température, gyroscope…).

Chaque équipe a rédigé un journal de bord, relatant les choix effectués à chaque séance de travail, les difficultés rencontrées et les stratégies mises en œuvre pour les contourner. Ces journaux de bord, ainsi que les programmes informatiques produits par les étudiants, constituent les seules données recueillies pour cette recherche.

Ces données ont été soumises à trois lectures. La première lecture, très globale, visait à observer les opportunités d'interdisciplinarité créées par les étudiants à travers leurs choix mathématiques et chorégraphiques. La deuxième lecture, plus approfondie, a été effectuée selon une grille permettant de repérer dans les journaux et les programmes informatiques les extraits relevant de chacune des phases de résolution de problèmes identifiés par Rott (2011) : appropriation, exploration, planification, mise en œuvre et vérification, ainsi que les allers et retours entre ces différentes phases. Nous avons ensuite relevé, dans chacun des extraits retenus, la nature des objets[1] et des connaissances en jeu (mathématiques, techniques et algorithmiques), et les éléments clés de la pensée informatique (décomposition du problème, reconnaissance de motifs, abstraction et enjeux algorithmiques). C'est ce qui nous a permis, par exemple, de différencier deux types d'exploration, une exploration mathématique et une exploration informatique.

4. Résultats

Les résultats de cette recherche sont présentés selon deux angles d'analyse. Le premier traite du volet interdisciplinaire du projet et le deuxième porte plus spécifiquement sur le processus de résolution de problème impliqué dans cette tâche voulant faire danser un robot.

4.1 Interdisciplinarité

Les résultats en ce qui a trait à l'interdisciplinarité sont abordés par le biais d'une analyse de l'articulation entre les mathématiques et la danse et par l'identification de liens possibles avec les sciences.

4.1.1 Articulation entre les mathématiques et la danse

Le tableau 1 présente les projets proposés par les étudiants selon les objets mathématiques retenus et le rôle qu'ils jouent dans l'élaboration de la chorégraphie. Toutes les équipes ont eu recours à au moins un objet possédant une représentation graphique (représentation d'une fonction) ou géométrique (figures géométriques). Le rôle de ces objets est de décrire la trajectoire qui sera effectuée par le robot. Cependant, aucune équipe ne va utiliser pour cela un capteur, qui permettrait par exemple au robot de suivre le tracé sur une feuille de papier. Les étudiants ont choisi unanimement de décrire de façon algorithmique l'objet à parcourir afin de décrire les séquences de mouvements du robot. La seule équipe qui a eu recours à des capteurs (tactile et de couleur) l'a fait pour des besoins

---

[1] Il est question ici d'objets mathématiques et non de concepts mathématiques qui les sous-tendent.

artistiques de mise en scène. Ces choix révèlent une volonté de la part des étudiants de mettre en œuvre la robotique comme un outil d'exploration mathématique. La chorégraphie ne sert pas uniquement à visualiser un objet mathématique. Le travail chorégraphique se fait conjointement avec un travail mathématique, visant à dégager les propriétés mathématiques caractéristiques de l'objet choisi, et un travail algorithmique visant à traduire ces propriétés en déplacements. Quelques équipes cherchent à compléter les liens entre mathématiques et danse en proposant de contrôler mathématiquement d'autres aspects du comportement du robot. Par exemple, l'équipe 1 utilise la fonction sinusoïdale pour moduler la vitesse du robot. L'équipe 2 utilise la distributivité pour rythmer les mouvements de bras du robot. De son côté, l'équipe 7 utilise deux robots dont les mouvements se correspondent dans une transformation géométrique (symétrie, translation, homothétie). Puis, l'équipe 8 ajuste la vitesse du robot selon son avancée dans les étapes de construction d'une spirale. Nous n'analyserons pas en profondeur les enjeux artistiques, un peu éloignés de notre expertise, mais nous avons relevé quelques enjeux liés à des questions algorithmiques. Ces enjeux sont relatifs, par exemple, au choix d'une musique, à la synchronisation des mouvements et du rythme, à l'esthétisme et à la fluidité du mouvement (qui implique une programmation en parallèle plutôt que séquentielle).

Tableau 1 : Description des projets proposés par les étudiants

Équipes	Utilisation de capteurs	Objets mathématiques	Rôle		
			Décrit la trajectoire	Module la vitesse	Contrôle la distribution des mouvements
1	non	Triangles emboîtés	x		
		Sinusoïde		x	
2	non	Polygones réguliers,	x		
		Flocon de Von Koch	x		
		Distributivité			x
3	oui	Coniques	x		
		Fonctions trigonométriques	x		
4	non	Forme géométrique définie par des points caractéristiques et des coordonnées cartésiennes	x		

5	non	Équations polaires et polygones emboîtés	x		
		Flocon de Von Koch	x		
6	non	Spirale	x		
		Sinusoïde	x		
7	non	Transformations géométriques			x
		Polygones réguliers	x		
8	non	Spirale	x	x	

4.1.2 Liens avec les sciences

Dans leur journal de bord, des étudiants établissent des liens explicites avec les sciences et la technologie. Plusieurs thématiques sont abordées : l'exploration de savoirs scientifiques, comme les changements de vitesse et le calcul de l'accélération, la mécanisation du travail à travers les fonctions de guidage, la prise en compte de l'adhérence et du frottement, la qualité de liaison entre les pièces mécaniques et son incidence sur la distance parcourue et la nature des mouvements, le travail sur les machines simples, à travers les liens entre engrenages et augmentation de la vitesse ou de la force du robot, ou nature du déplacement du robot. Par exemple, l'équipe 6 note dans son journal les observations suivantes :

> L'engrenage formé d'une roue dentée produit un mouvement de type translation.
>
> L'engrenage formé de plusieurs dents dentées produit un mouvement de type rotation.
>
> Les engrenages ont pour but de changer la direction ou le sens du mouvement et la vitesse.

4.2 Processus de résolution de problèmes

Conformément au cadre théorique choisi, nous décrivons ci-dessous nos observations pour chaque phase de la résolution de problèmes (figure 3). La description linéaire adoptée ne nous permet pas de rendre pleinement compte de la nature cyclique du processus, mais nous signalons au fil du texte les allers et retours qui nous ont semblé les plus significatifs. Les citations présentes dans la suite du texte sont des extraits des journaux de bord des étudiants.

4.2.1 Appropriation

Pour toutes les équipes, l'appropriation du problème passe par la construction d'un robot et le choix d'un modèle proposé par le guide d'utilisation du kit robotique, avec ou sans intention de le modifier. Les critères prévalant au choix du robot peuvent être purement émotionnels ou esthétiques, sans prise en compte des perspectives mathématiques et chorégraphiques du projet :

> La première étape de notre projet est de décider quel modèle de robot nous souhaitons utiliser. Pour ce faire, nous avons regardé les modèles d'ensemble de base sur le logiciel Mindstorm EV3. Parmi ces modèles, deux ont retenu notre attention : le Gyro Boy et le chiot. Nous aimions ces modèles, car nous voulions voir le visage de notre robot. (Équipe 2)

D'autres équipes, comme les équipes 5 et 8, anticipent des modifications à apporter au robot après validation des choix mathématiques : « On tentera d'abord de construire un programme qui permettra au robot de tracer des courbes polaires et on modifiera, ensuite, le modèle du robot au besoin » (équipe 5).

Certaines équipes tiennent compte dès le départ des contraintes imposées par le choix de l'objet mathématique. C'est le cas de l'équipe 1, qui cherche à pouvoir faire varier la vitesse du robot selon une fonction trigonométrique :

> Notre première construction du Gyro Boy version stable ne fut pas aussi concluante que ce que nous le souhaitions. En effet, à basse vitesse, notre robot est stable lorsqu'il avance et lorsqu'il recule, mais il tombe dès que la vitesse excède les alentours de 50. (Équipe 1)

4.2.2 Exploration

Nous observons deux types d'exploration, mathématique et informatique, qui s'entrecroisent jusqu'à l'élaboration d'une stratégie de programmation. Nous les illustrons à partir des travaux des étudiants ci-dessous.

4.2.2.1 Exploration informatique. Elle vise à établir un vocabulaire de base de mouvements qui pourront composer la chorégraphie. Certaines équipes explorent librement les mouvements possibles, indépendamment de toute anticipation de chorégraphie. Les éléments qui président à leur exploration sont alors la gestion de l'équilibre et la nature et la variété des mouvements possibles : « Nous nous sommes questionnés sur la quantité de mouvements que notre robot peut faire actuellement » (équipe 3). D'autres se concentrent sur les mouvements qui permettront de décrire l'objet mathématique choisi : « Nous avions aussi commencé à travailler sur des mouvements qui forment des figures géométriques remarquables, en débutant par un triangle équilatéral » (équipe 2).

Pour la plupart des équipes, cette phase d'exploration se traduit par la création de modules de programmation destinés à être repris dans la programmation finale. Elle est aussi l'occasion d'ajustement dans la construction du robot : « Pour pouvoir faire [faire] différents mouvements à notre robot, nous avons eu l'idée de faire tourner la base du robot afin que notre personnage suive les mouvements de façon réaliste […] Pour ce faire, nous avons utilisé un troisième moteur » (équipe 3).

Ce n'est pas le cas pour l'équipe 4 qui travaille de façon très linéaire. Le choix et la construction du robot constituent pour eux la première étape du travail, préliminaire à toute exploration, et ils n'y reviendront pas : « Nous avons officiellement terminé la construction de notre robot ! Nous n'y retoucherons plus » (équipe 4).

4.2.2.2 Exploration mathématique. Les équipes 1, 2, 3, 5 et 8 s'engagent dans une modélisation mathématique poussée avant toute tentative de programmation. Cette exploration vise à mieux appréhender l'objet mathématique visé et à repérer les éléments mathématiques clés qui devront être transposés sous forme de variables informatiques : « Avant de commencer à programmer, nous avons décidé d'enrichir nos connaissances mathématiques sur ce sujet » (équipe 5).

Ces équipes raisonnent en termes généraux, et cherchent des caractérisations mathématiques et informatiques indépendantes des conditions de réalisation du déplacement. La figure 5 montre une partie de l'exploration réalisée par l'équipe 1. Le tracé de la figure les amène à comprendre que les éléments mathématiques permettant de décrire le triangle sont l'angle extérieur et la longueur des côtés. Les notations en bas à gauche de l'image traduisent ces éléments mathématiques en termes de puissance et de nombre de rotation des moteurs. Par exemple, une rotation externe de 120 degrés peut s'obtenir en donnant des puissances opposées à chacun des moteurs et en ajustant le nombre de rotations : pour des puissances de 50, le nombre de rotations est 0,686, pour des puissances de 30, le nombre de rotations est 0,9.

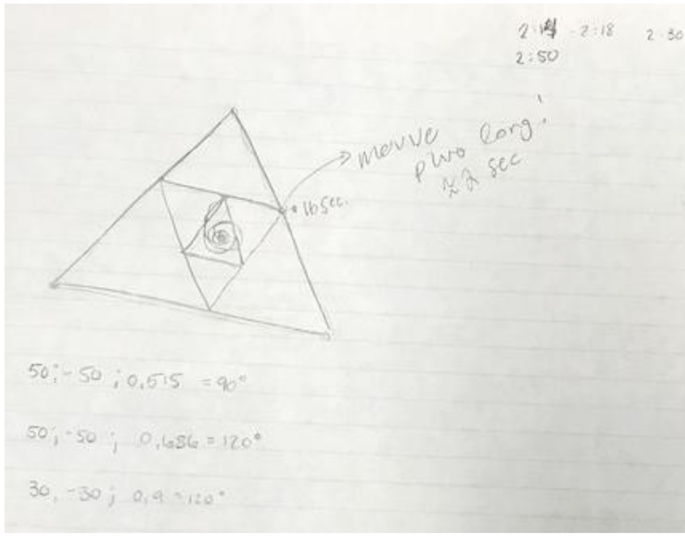
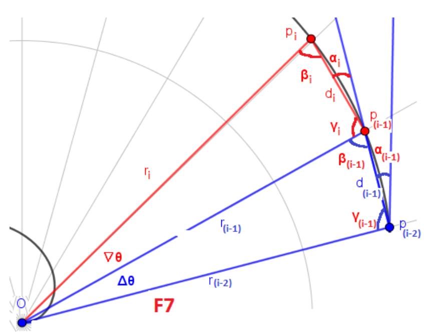


Figure 4. Modélisation par l’équipe 1 du tracé des triangles équilatéraux en termes de puissance et de nombre de rotation des moteurs

La figure 6 résume le travail de modélisation réalisée par l’équipe 8. La spirale d’Archimède est d’abord décomposée en positions successives du robot (à gauche de l’image), elles-mêmes décrites algébriquement selon leurs coordonnées polaires (colonne « Formule » du tableau de droite) ce qui permet de définir enfin les variables qui seront utilisées dans l’algorithme (colonne « Variable utilisée dans le programme » du tableau de droite). Ce travail mathématique préalable permet de déterminer l’angle de rotation et la distance à parcourir par le robot, qui sont les commandes informatiques pertinentes.



Formule	Variable utilisées dans le programme
$r_{i-1} = \rho(\theta) = 2\pi + (i-1)\times\Delta\theta$	r_{i-1} → rp : désigne le rayon précédent qui correspond à la position p_{i-1} du robot sur la spirale.
$r_i = \rho(\theta) = r_{i-1} + \Delta\theta$	r_i →ri : désigne le rayon actuel qui correspond à la position p_i du robot sur la spirale.
$d_i = \sqrt{r_{i-1}^2 + r_i^2 - 2.r_{i-1}.r_i.\cos(\Delta\theta)}$	d_i →di : déplacement du robot de la positionp_{i-1} à la position p_i
$\beta_i = sin^{-1}(\frac{r_{i-1} . \sin(\Delta\theta)}{d_i})$	β_i → bi : angle utilisée dans la formule R22 pour calculer l’angleα_i de déviation du robot. β_{i-1} → bp : angle de l’étape(i-1) utilisée dans la formule R22 pour calculer l’angle α_i de déviation du robot. (Voir F7 ci-dessous)
$\alpha_i = \Delta\theta + \beta_i - \beta_{i-1}$	$\Delta\theta$ → pas : incrémentation de l’angle pour passer de la position p_{i-1} du robot à la position p_i α_i → a_i : angle de déviation du robot avant le déplacement di

Figure 5. Modélisation de la spirale d’Archimède par l’équipe 8

Dans une démarche assez similaire, l'équipe 3 se livre à une exploration mathématique qui vise à établir les équations algébriques définissant les objets mathématiques représentant les trajectoires. Ce travail est réalisé dans le logiciel Geogebra (figure 7).

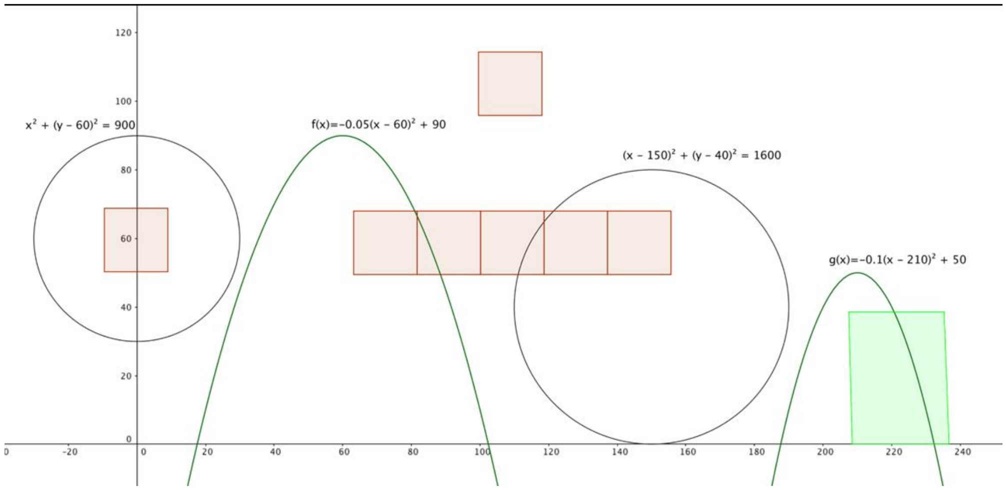


Figure 6. Modélisation mathématique des trajectoires du robot par l'équipe 3

Les équipes 4, 6 et 7 ne réalisent pas d'exploration mathématique préalable. Pour ces équipes, l'exploration est mixte. La partie mathématique se fait, en partie pendant la phase d'exploration informatique, en partie pendant la phase de mise en œuvre, dans un fonctionnement par essais et erreurs.

4.2.3 Planification et mise en œuvre

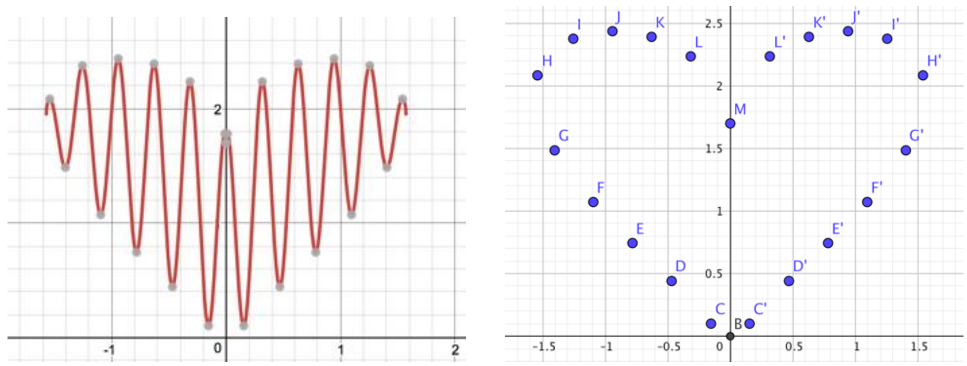
La planification est d'ordre algorithmique et chorégraphique. Elle consiste à décrire une séquence de mouvements, structurée selon des caractéristiques mathématiques, esthétiques et rythmiques. Toutes les équipes réalisent une planification par étapes chorégraphiques. Les chorégraphies sont découpées en moments, chaque moment est composé d'une séquence de mouvements traduite en une procédure algorithmique incluant une itération sous forme de boucle. La programmation repose donc sur une recherche de motifs, souvent issus de l'exploration mathématique. L'enjeu est de repérer dans la structure mathématique une propriété ou une relation récurrente. On est ici en prise directe avec une pensée informatique qui permet de décomposer le problème (la succession chorégraphique des mouvements du robot) en sous-problèmes (les moments de la chorégraphie), eux-mêmes descriptibles en termes de répétions d'une structure générale (partie d'une figure géométrique, séquence de mouvements de bras, modulation de vitesse).

Conformément au modèle de Rott (2011), nous constatons que toutes les équipes fonctionnent avec des allers et retours permanents entre planification et mise en œuvre. Une fois l'opération à itérer repérée, sa traduction algorithmique en paramètres pour les commandes des moteurs est mise à l'épreuve du comportement réel du robot, qui conduit en général à un ajustement par essais et erreurs. Même l'équipe 8, qui a effectué un travail de modélisation mathématique très poussé afin d'obtenir une trajectoire physique la plus proche possible de l'objet théorique mathématique a dû corriger à chaque pas les approximations dans les calculs d'angle de rotation.

Les équipes 2, 3, 4 et 5 ont dû, quant à elles, revoir à la baisse leurs exigences mathématiques pour obtenir un déplacement réaliste du robot. L'équipe 3 modifie les équations théoriques dans Géogébra au fur et à mesure de la programmation.

> Nous avons dû jouer avec les paramètres très souvent. Pour certaines coniques, nous avons fini par autant modifier les paramètres dans la programmation que les paramètres du plan GeoGebra de départ (pour conserver les bonnes équations des coniques dans le fichier GeoGebra). (Équipe 3)

Les équipes 4 et 5 abandonnent l'idée d'une description fonctionnelle de la trajectoire pour revenir soit à une description par points caractéristiques dans le plan cartésien, soit à des figures mieux connues comme les polygones réguliers. La figure 8 illustre le choix réalisé par l'équipe 4 pour une figure géométrique en forme de cœur. L'équipe 4 qui revendiquait l'idée d'explorer une représentation mathématique difficile, sous forme de coordonnées polaires, réalise que la traduction du registre analytique vers le registre algorithmique est trop complexe. Elle décide alors de changer de registre de représentation de départ, en travaillant dans le registre géométrique, et de miser sur la complexité conceptuelle de l'objet, en choisissant d'explorer les fractales.



$$\left\{ |x| < 2 : \sqrt{\cos x}\ \cos(20x) + 0.7 + \sqrt{|x|} \right\}$$

Figure 7. Simplification de la description mathématique choisie pour l'équipe 4

Les étapes d'exploration et de planification sont très liées. En effet, la sélection des commandes, leurs mises en relations dans une structure algorithmique et la détermination des variables informatiques pertinentes amènent un travail mathématique sur des objets comme les angles des polygones réguliers, l'équivalence sémantique et syntaxique d'expressions algébriques, le rôle des paramètres dans une équation fonctionnelle, les régularités dans une figure géométrique (symétrie, récursivité). Le travail informatique s'articule avec le travail informatique à travers, par exemple, l'établissement de liens entre la puissance de rotation du moteur, la vitesse de déplacement du robot et la distance parcourue. La traduction de propriétés mathématiques en instructions de programmation structurées suppose la prise en compte d'enjeux algorithmiques comme le nombre et la nature des variables informatiques, le caractère général d'un algorithme ou la définition optimale de l'itération à effectuer. La capacité à généraliser est au cœur de cette phase. Elle constitue un enjeu aussi bien du point de vue mathématique qu'algorithmique « Nous avons effectué des boucles et des conditions pour simplifier la longueur du programme et nous rapprocher davantage d'une généralisation de toutes les fractales » (équipe 5). Le nombre de variables à utiliser est un obstacle fréquent en programmation. La création de variables différentes pour capturer les différentes valeurs prises par un même objet au cours du temps dénote un processus de généralisation en cours, mais encore inabouti (Venant, 2022).

> Nous avons beaucoup utilisé les variables dans le calcul des distances entre les points et la différence d'angle. Pour calculer la distance entre les points, nous avons utilisé la formule pour calculer l'hypoténuse d'un triangle rectangle. […] Nous avons décidé d'utiliser une variable différente pour chaque passage d'un point à un autre pour ne pas nous confondre lors de la programmation. […] À la moitié du cœur, nous utilisons la symétrie pour faire le processus inverse qui part du point intérieur du cœur au point de départ qui forme la pointe du cœur. (Équipe 4)

4.2.4 Vérification

Cette phase est difficile à isoler en contexte de programmation. Elle s'entremêle à toutes les autres étapes décrites précédemment, chaque fois qu'une hypothèse est soumise à la validation du comportement réel du robot. Le processus de résolution est définitivement cyclique et repose sur des allers et retours permanents entre anticipation mathématique, programmation, construction du robot et mise à l'épreuve des ajustements effectués. Le nombre et la variété des contraintes à prendre en compte, depuis l'adéquation du modèle mathématique jusqu'à l'état de propreté du sol, rend impossible d'anticiper toutes les erreurs. Le repérage de ces erreurs et leur traitement font donc partie intégrante du processus de résolution. Le débogage est, de fait, au cœur de la pensée informatique, et du cycle de résolution. Il s'agit de trouver un équilibre entre anticipation et correction des erreurs. La recherche d'erreurs est facilitée par une décomposition du problème global en sous-problèmes locaux. Par exemple, la réalisation d'une figure complexe, comme des polygones emboîtés ou une fractale, peut se décomposer sous forme de fonctions pour les mouvements de base, de modules simples itérant ces fonctions pour créer le motif initial, et de modules plus généraux, itérant les modules simples pour créer la figure complexe visée. Décomposer ainsi un problème, et donc sa solution, en sous-parties qui sont ensuite combinées pour résoudre la question initiale est constitutif de la pensée informatique. Cette stratégie ne s'applique pas uniquement à l'élaboration des programmes informatiques. Par exemple, l'équipe 1 l'utilise pour construire le robot « par petits bouts » en testant à chaque fois la viabilité de la partie construite pour les mouvements chorégraphiques anticipés : « Nous avons pris l'habitude de tester nos constructions avec différents programmes afin de nous assurer une moindre marge d'erreur dans le futur » (équipe 1).

Les ajustements réalisés au cours de la résolution sont de différentes natures. Ils peuvent être techniques quand il s'agit de modifier la construction du robot en ajoutant ou déplaçant des pièces, par exemple pour améliorer l'équilibre ou la résistance aux accélérations, ou encore de jouer sur les engrenages pour des déplacements de plus grande amplitude…. Ils peuvent également être mathématiques, quand il s'agit de modifier ou simplifier l'objet mathématique, de changer des paramètres dans les équations ou encore de travailler sur l'angle externe plutôt qu'interne… Ils peuvent enfin être algorithmiques, quand il s'agit de factoriser des procédures, de changer une variable ou d'ajuster sa valeur, ou encore de changer de type de programmation. Le fonctionnement par essais et erreurs permet souvent de choisir entre deux solutions techniques ou algorithmiques : « Nous avons testé plusieurs alternatives : la boucle de rotations infinie ne fonctionne pas. En revanche, la boucle de rotations activée avec une variable fonctionne très bien » (équipe 7).

Les journaux de bord montrent le développement, au fil du projet, de stratégies de recherche et de traitement systématique des erreurs. Ces stratégies sont de différentes natures : modulation de la vitesse d'exécution du robot pour mettre à l'épreuve la précision mathématique, ajout d'instructions pour repérer des moments clés dans l'exécution, affichage des valeurs de certaines variables pour vérifier l'adéquation avec le modèle théorique, exploitation des rétroactions du logiciel, utilisation d'artefacts comme des sons, des *posts-it* ou des crayons fixés sur le robot pour visualiser et valider sa trajectoire : « Nous avons développé une astuce qui nous a permis de détecter les erreurs plus facilement. Celle-ci consiste à ajouter un son à des endroits précis si et seulement si la commande désirée est exécutée » (équipe 5).

4.5 Synthèse

Nos analyses confirment l'hypothèse qu'un projet robotique constitue une occasion de mettre en œuvre des processus de résolution de problèmes. Nous avons ainsi pu identifier les différentes phases du modèle de Rott (2011). Nous avons également mis au jour des caractéristiques propres au contexte de la robotique. Tout d'abord, l'appropriation du problème peut se faire soit par une entrée technique de construction du robot, soit par une entrée théorique portant sur le choix des objets mathématiques. Cette articulation entre théorie et pratique se retrouve également dans la phase d'exploration, indépendamment d'ailleurs de celle réalisée dans la phase d'appropriation. Nous avons ainsi observé deux types d'exploration, mathématique et informatique, qui s'entrecroisent jusqu'à l'élaboration d'une stratégie de programmation. Les choix réalisés influencent les processus de généralisation et de modélisation, qui sous-tendent la phase d'exploration. L'avancement du travail de programmation informatique repose sur une dynamique entre le débogage, les ajustements techniques et théoriques, et les processus de modélisation et de généralisation. Cette dynamique est en permanence soumise à l'épreuve du comportement du robot.

À la lumière de ces résultats, nous proposons dans la figure 9 un modèle du processus de la résolution de problèmes en contexte robotique, adapté de celui de Rott (2011). Nous y mettons en évidence le rôle central et cyclique de la vérification. Nous mettons également en évidence le rôle des processus de généralisation et de modélisation qui sous-tendent le travail de programmation informatique, toujours sous le contrôle du comportement réel du robot.

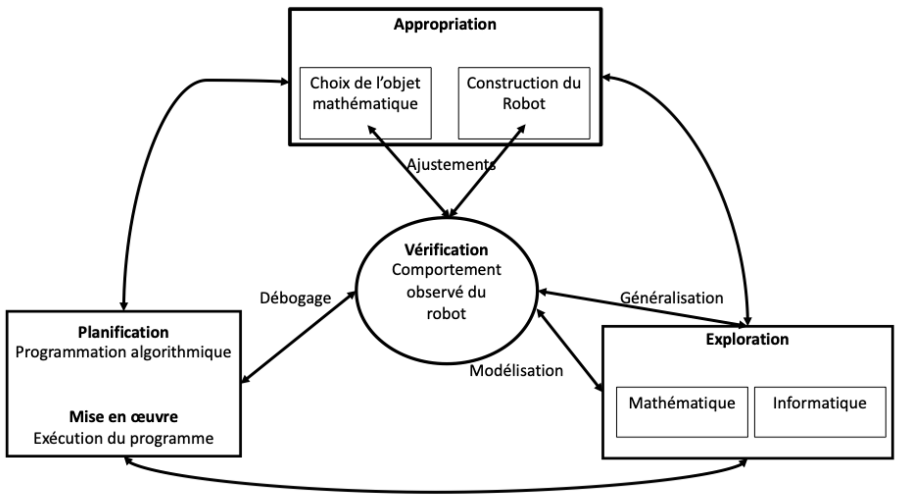


Figure 8. Modèle du processus de la résolution de problèmes en robotique pédagogique

Conclusion

Ce projet robotique a constitué, conformément à notre hypothèse de départ, une activité signifiante, interdisciplinaire, propice à la mise en relation des mathématiques, des sciences, de la technologie et de la danse. Nous n'avons pas analysé ici les enjeux artistiques. Nous notons simplement que ce travail a constitué l'occasion pour les étudiants, et leur formateur, de découvrir les enjeux mathématiques rencontrés par les chorégraphies, ce qui a contribué au côté signifiant de l'activité. La question de la transposition en milieu scolaire se pose cependant. Les résultats observés nous ont incités à expérimenter ce genre de tâches dans des classes du secondaire. Les observations sont en cours.

Notre premier objectif concernait la possibilité d'engager les apprenants dans un processus de résolution complexe. Il ressort de nos analyses que cette complexité prend différentes formes. Pour certaines équipes, elle réside dans la complexité de l'objet mathématique exploré et dans la profondeur de la modélisation mathématique réalisée. D'autres équipes se sont davantage confrontées à une complexité algorithmique, en explorant par exemple différents types d'itérations, les possibilités de la programmation en parallèle ou les enjeux de la récursivité selon le langage de programmation choisi. D'autres équipes enfin ont également abordé la complexité esthétique et artistique en poussant très loin les enjeux de synchronisation, de rythme et de mise en scène. Aucune équipe n'a abordé de front les trois types de complexité.

Du point de vue informatique, nous nous intéressons tout particulièrement au développement de la pensée informatique. Les analyses montrent que toutes ses composantes ont été sollicitées : décomposition du problème, reconnaissance de motifs, abstraction et enjeux algorithmiques. D'autres composantes habituellement liées à la pensée informatique (Romero et al., 2017), que nous n'avons pas placées au centre de nos analyses, ont pu également être observées, comme la collaboration et la persévérance. Les étudiants se sont vraiment partagé les tâches, chacun trouvant sa place dans le projet, selon son degré d'aisance en programmation, en construction, en mathématiques, ou selon sa créativité artistique. Nous avons également mis en évidence la non-linéarité du processus de résolution de problèmes en contexte de robotique pédagogique. Les allers et retours entre les différentes phases sont permanents, guidés par la phase de vérification qui prend, dans ce contexte, une place centrale. Toutes les équipes ont donc mis en œuvre les composantes de développement de la pensée informatique, et résolu tour à tour des problèmes, plus ou moins complexes, de nature algorithmique, technique, mathématique et chorégraphique.

Notre deuxième objectif visait à mieux comprendre l'activité mathématique effectuée. De fait, les concepts et processus mis en œuvre sont difficiles à circonscrire. Le caractère signifiant repose, en effet, également sur la liberté laissée à l'apprenant dans le choix du problème et les stratégies mises en place pour le résoudre. Il est donc difficile d'anticiper, par exemple, quels sont les objets mathématiques qui seront explorés, et la nature exacte de cette exploration. Certaines équipes se sont livrées à un travail de modélisation mathématique très poussée, alors que d'autres ont travaillé par essais et erreurs tout au long du projet. Pour ces équipes, le travail mathématique relève davantage de la mobilisation de connaissances mathématiques que d'une résolution de problèmes complexes. Cependant, toutes les équipes ont été amenées à mettre en œuvre un processus de généralisation et à revisiter le sens de concepts mathématiques, comme les angles des polygones ou les paramètres des fonctions. Les objets mathématiques ne sont donc pas restés cantonnés dans le rôle d'outil dénoncé par Robert (1998). Quel que soit le niveau de complexité mathématique finalement atteint, un véritable travail mathématique semble avoir eu lieu au cours la réalisation du projet.

Cette expérience nous incite donc à nous poser les questions suivantes : quels instruments de travail mathématique (Rabardel, 1995; Trouche; 2005; Venant, à paraître) la programmation informatique permet-elle de construire? Un travail algorithmique peut-il être utile pour aborder explicitement des concepts et processus mathématiques inscrits dans le programme de formation de l'école québécoise? Nous travaillons actuellement à élaborer d'autres tâches, plus ou moins ouvertes, nous permettant d'explorer ces questions (Venant et al., à paraître). D'un point de vue didactique, nous nous intéressons particulièrement au rôle central que joue la validation dans la résolution de problèmes en contexte informatique et qui ouvre des perspectives quant au développement du contrôle en situation de résolution de problèmes mathématiques (Saboya et al., 2015).

Références

Barabé, G. et Proulx, J. (2017). Révolutionner l'enseignement des mathématiques: le projet visionnaire de Seymour Papert. *For the Learning of Mathematics, 37*(2), 25-29.

Benesh, R. (1969). *An introduction to Benesh dance notation*. Dance Horizon.

Benitti, F. B. V. et Spolaôr, N. (2017). How have robots supported STEM teaching? Dans M. S. Khine (dir.), *Robotics in STEM education* (p. 103-129). Springer.

Birringer, J. (2013). Bauhaus, constructivism, performance. *PAJ: A Journal of Performance and Art, 35*(2), 39-52. https://doi.org/10.1162/PAJJ_a_00145

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? Dans S. Cho (dir.), *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education* (p. 73-96). Springer.

Davidson, A. (2003). *Les enjeux du numérique en danse: pour une chorégraphie interactive* [Thèse de doctorat, Université Paris 8]. Thèses. https://www.theses.fr/2003PA082658

De Keersmaeker, A. T. (2019). Comme je marche, je danse. *Repères, cahier de danse*, (1), 15-15. https://doi.org/10.3917/reper.042.0015

Favier, S. (2022). *Étude des processus de résolution de problèmes par essais et ajustements en classe de mathématiques à Genève.* [Thèse de doctorat, Université de Genève]. TEL. https://archive-ouverte.unige.ch/unige:159466

Freiman, V. et Savard, A. (2014). Résolution de problèmes en mathématiques. *Éducation et francophonie, 42*(2), 1-6. https://doi.org/10.7202/1027902ar

Gouvernement du Québec. (2006). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, deuxième cycle*. Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport.

Gouvernement du Québec. (2019). *Cadre de référence de la compétence numérique.* Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur.

Lajoie, C. et Bednarz, N. (2012). Évolution de la résolution de problèmes en enseignement des mathématiques au Québec: un parcours sur cent ans des programmes et documents pédagogiques. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 12*(2), 178-213. https://doi.org/10.7202/1027903ar

Lajoie, C. et Bednarz, N. (2014). La résolution de problème en mathématiques au Québec : évolution des rôles assignés par les programmes et les conseils donnés aux enseignants. *Éducation et francophonie, 42*(2), 7-23. https://doi.org/10.7202/1027903ar

Lajoie, C. et Bednarz, N. (2016). La notion de situation-problème en mathématiques au début du XXIe siècle au Québec: rupture ou continuité ? *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 16*(1), 1-27. https://doi.org/10.1080/14926156.2014.993443

Lenoir, Y. (2003). *La pratique de l'interdisciplinarité dans l'enseignement: pour construire des savoirs transversaux et intégrés dans le cadre d'une approche par compétences* [présentation faite au ministère de l'Éducation du Québec].

Menicacci, A. (2003). *Rapports entre danse et technolo[g]ies dans la création et la pédagogie: expériences, réflexions, et propositions* [Thèse de doctorat, université Paris 8]. Thèses. https://www.theses.fr/2003PA083700

Mickelson, J. et Ju, W. (2010). Math propulsion: Engaging math learners through embodied performance & visualization. Dans M. D. Gross et N. J. Nunes (dir.), *Proceedings of the fifth international conference on Tangible, embedded, and embodied interaction* (p. 101-108). Association for Computing Machinery

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas*. Basic books.

Papert, S. (1993). *The children's machine: Rethinking school in the age of the computer*. Basic Books, Inc.

Papert, S. (2000). What's the big idea? Toward a pedagogy of idea power. *IBM systems journal, 39*(3.4), 720-729. https://doi.org/10.1147/sj.393.0720

Polya, G. (2004). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton university press.

Prudhommeau, G. (1987). Danse et mathématiques. *Séminaire de Philosophie et Mathématiques*, 9, 1-22.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies : approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 8*(2), 139-190.

Romero, M., Lille, B. et Patiño, A. (2017). *Usages créatifs du numérique pour l'apprentissage au XXIe siècle*. Presses de l'Université du Québec.

Rott, B. (2011). *Models of the problem solving process–A discussion referring to the processes of fifth graders*. Dans T. Bergqvist (dir.), *Proceedings from the 13th ProMath conference* (p. 65-72). Umeå University.

Saboya, M., Bernarz, N. et Hitt, F. (2015). Le contrôle exercé en algèbre: analyse de ses manifestations chez les élèves, éclairage sur sa conceptualisation. Partie 1 : La résolution de problèmes. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 20*, 61-100.

Schaffer, K. et Stern, E. (2010). Workshop on mathematics and dance. Dans G. W. Hart et R. Sarhangi (dir.), *Proceedings of Bridges 2010: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture* (p. 151-154). Tessellations Publishing.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press Inc.

Trouche, L. (2005). Des artefacts aux instruments, une approche pour guider et intégrer les usages des outils de calcul dans l'enseignement des mathématiques. Dans J. Moisan (dir.), *Université d'été, Le calcul sous toutes ses formes*. Académie de Clermont-Ferrand.

Venant, F. (2018). Programmer les mathématiques: la pensée informatique à l'école primaire. *Bulletin AMQ, 58*(3), 57-70.

Venant, F. (2022). *La programmation informatique dans la formation initiale des enseignants de mathématiques. Prendre en compte les enjeux algorithmiques* [présentation orale]. Colloque Rendez-vous didactique, LDAR.

Venant, F. (à paraître). Enjeux didactiques dans les genèses instrumentales professionnelles des futurs enseignants de mathématique au Québec. *Recherches en didactique des mathématiques.*

Venant, F., Jeannotte, D., Passaro, V., Saboya, M., Guillemette, D. et Knoll, E. (à paraître). Pensée algébrique et pensée algorithmique : réflexion autour d'une tâche de généralisation. *Actes du colloque Espace mathématique francophone 2022*, Cotonou, Bénin.

Villani, C., Torossian, C. et Dias, T. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques.* Ministère de l'éducation nationale.

Weil-Barais, A. et Dubois, D. (1993). *L'homme cognitif*. Presses universitaires de France.

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM, 49*(3), 33-35. https://doi.org/10.1145/1118178.1118215

Wing, J. (2011). Research notebook: Computational thinking—What and why. *The Link Magazine*, 6, 20-23.