



L'activité numérico-algébrique dans des manuels scolaires français de primaire : le cas du calcul réfléchi multiplicatif

Julia PILET

Université Paris Est Créteil, Université de Paris, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, UNIROUEN, LDAR, F-94010 Créteil, France

julia.pilet@u-pec.fr

Brigitte GRUGEON-ALLYS

Université Paris Est Créteil, Université de Paris, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, UNIROUEN, LDAR, F-94010 Créteil, France

brigitte.grugeon-allys@u-pec.fr

Résumé : Notre étude s'inscrit dans une réflexion sur l'entrée dans l'algèbre au secondaire. Nous soutenons qu'une activité mathématique, appelée numérico-algébrique, porte sur des aspects épistémologiques communs aux deux domaines arithmétique et algébrique et cherchons à caractériser sa présence dans les manuels scolaires français à la fin de l'enseignement primaire. Après avoir présenté les caractéristiques de cette activité par un modèle praxéologique de référence dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique nous centrons l'étude sur la praxéologie de calcul réfléchi multiplicatif pour distinguer des structures de calculs favorisant l'utilisation de certaines propriétés des nombres et des opérations. Nous analysons ensuite les potentialités et limites offertes par deux manuels scolaires français sur le calcul réfléchi multiplicatif et les aspects épistémologiques de l'activité numérico-algébrique qu'ils travaillent.

Mots-clés : théorie anthropologique du didactique, activité numérico-algébrique, expressions numériques, calcul réfléchi

Numerical-algebraic activity in French primary school textbooks: the case of multiplicative reflexive calculation

Abstract: Our study builds on a reflection on the entry into algebra in secondary school. We argue that a mathematical activity, known as "numerical-algebraic," deals with

Revue québécoise de didactique des mathématiques, 2022, Numéro thématique 2 (Tome 1), p. 4-33. <https://doi.org/10.71403/343n7303>

epistemological aspects common to both arithmetic and algebraic domains, and describe its presence in French textbooks at the end of primary education. After having presented the characteristics of this activity, through a praxeological reference model within the framework of the anthropological theory of didactics, we focus on the praxeology of multiplicative reflexive calculation in order to distinguish calculation structures that promote the use of certain properties of numbers and operations. We then analyze the possibilities and limitations exhibited by two French textbooks on multiplicative reflexive calculation and the epistemological aspects of the numerical-algebraic activity they address.

Keywords: anthropological theory of didactics, numerical-algebraic activity, numerical expressions, reflective calculation

Introduction

De nombreux travaux (Kieran, 2018; Squalli et Bronner, 2017, Bronner et Squalli, 2020; Squalli et al., 2020) concernent le développement de la pensée algébrique en lien avec l'activité algébrique, préalablement à l'introduction du symbolisme algébrique (Chevallard, 1984, 1989; Kieran, 2007).

Dans ce texte, nous retenons le terme d'« activité algébrique » et non celui de « pensée algébrique ». Ce choix est également celui de Kieran (2007, p. 713), qui reprend une étude de Lee (1997) dans laquelle des mathématiciens, chercheurs, étudiants et enseignants devaient répondre à la question « Qu'est-ce que l'algèbre? ». Leurs réponses sont synthétisées par « une matière scolaire, une arithmétique généralisée, un outil, une langue, une culture, un mode de pensée et une activité » (Kieran, 2007, p. 713, traduction libre¹). L'un des points communs aux interviews est que l'algèbre est une activité, c'est-à-dire, « l'algèbre apparaît comme une activité, quelque chose que l'on fait » (Lee, 1997, p. 187, traduction libre²). Nous reprenons cette terminologie, l'algèbre n'étant pas seulement « un mode de pensée » mais aussi « quelque chose que l'on fait ».

Pour Kieran (2007), l'activité algébrique relève de trois composantes essentielles à travers son modèle conceptuel « GTG » : 1) l'activité générationnelle correspond à la formation des expressions algébriques et des équations, objets de l'algèbre; 2) l'activité transformationnelle concerne les processus de manipulation symbolique pour changer la forme des expressions algébriques et des équations en s'appuyant sur leurs propriétés afin de conserver leur équivalence; 3) l'activité

¹ « a school subject, generalized arithmetic, a tool, a language, a culture, a way of thinking, and an activity » (Kieran, 2007, p. 713).

² « Algebra emerges as an activity, something you do, an area of action » (Lee, 1997, p. 187).

méta au niveau global comprend les activités où l'algèbre est utilisée comme outil pour résoudre les problèmes. Ces activités ne sont pas exclusives à l'algèbre, comme la généralisation, la modélisation, la justification, la preuve, l'étude des situations fonctionnelles et la recherche de structure.

Kieran et Martínez-Hernández (2022) fait référence à l'activité mathématique du monde numérique-algébrique favorisant l'entrée dans la pensée algébrique préalablement à l'enseignement secondaire. Les recherches relevant de la pensée algébrique ont beaucoup concerné la généralisation (Kaput, 2008; Mason, 1996; Vlassis et al., 2017) et le raisonnement analytique sur des données indéterminées (Radford, 2013). Peu de travaux (par exemple, Linchevski et Livneh, 1999; Kieran et Martínez-Hernández, 2022) portent sur l'activité transformationnelle des expressions numériques, et plus particulièrement sur l'habileté à identifier la structure des expressions numériques et son usage pour conserver l'équivalence.

Nous faisons les hypothèses de travail suivantes :

- Les institutions scolaires sensibilisent peu les élèves à la transition entre l'arithmétique et l'algèbre (Chevallard et Bosch, 2012).
- Certaines activités mathématiques relevant à la fois du numérique et de l'algébrique « non symbolique » du primaire et du début du secondaire, en particulier les activités transformationnelles de calcul numérique, peuvent être des leviers pour négocier cette transition. Ces activités correspondent principalement au calcul réfléchi, c'est-à-dire « un calcul mental (Butlen 2007; Butlen et Pézard, 2000) ou écrit, dont la réalisation nécessite de mettre en œuvre une stratégie (Piolti-Lamorthé et Roubin, 2010), qui conduit à des calculs plus économiques » (Pilet et Grugeon-Allys, 2021, p. 15). Contrairement au calcul automatisé, il nécessite des transformations de décomposition et de recombinaison opérées sur les expressions numériques. Par exemple, le calcul $32 \times 25 = (8 \times 4) \times 25 = 8 \times (4 \times 25) = 8 \times 100 = 800$ met en jeu la structure d'expressions numériques intervenant dans les étapes du calcul [par exemple, 32×25 ou $8 \times (4 \times 25)$], la réécriture d'une expression numérique et l'égalité comme relation d'équivalence, ce que nous développons par la suite. Ces activités relèvent du monde numérique-algébrique et nous les regroupons sous le nom d'activité « numérique-algébrique » (Pilet et Grugeon-Allys, 2021).

Dans le cadre des travaux de l'Observatoire international de la pensée algébrique (OIPA), nous avons analysé les programmes français à la transition primaire-secondaire pour étudier la place attribuée globalement à l'activité numérique-algébrique. Il en ressort que les programmes et leurs documents

d'accompagnement ne développent pas les problèmes de généralisation et peu le calcul des expressions numériques (Pilet et Grugeon-Allys, 2020, 2021). Ce deuxième résultat nécessite d'autres investigations que nous poursuivons dans le cas des manuels scolaires français sur le calcul réfléchi multiplicatif. Aussi, nous interrogeons les potentialités des activités proposées dans les manuels scolaires français de fin de primaire (10-11 ans) pour développer une activité mathématique favorisant la transition entre l'arithmétique et l'algèbre.

Après avoir identifié les aspects épistémologiques de l'activité numérique-algébrique, fondements d'un calcul numérique appuyé sur l'équivalence, nous nous plaçons dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999). Nous présentons un modèle praxéologique de référence de cette activité (Pilet et Grugeon-Allys, 2021), défini par les trois praxéologies locales de généralisation, de modélisation et de calcul. Ensuite, nous nous centrons sur la praxéologie de calcul pour caractériser le type de tâche de calcul réfléchi multiplicatif selon des variables spécifiques de types de tâches et de tâches (Chaachoua, 2018; Grugeon-Allys et al., 2022; Jolivet et al., 2021). Puis, nous opérationnalisons cette caractérisation pour analyser les potentialités offertes par les exercices des manuels scolaires français de CM2 (10-11 ans) pour développer l'activité numérique-algébrique sur le calcul réfléchi multiplicatif.

1. Référence praxéologique du domaine numérique-algébrique

Les enjeux de cette étude portent sur l'analyse du savoir mathématique et sa transposition didactique dans les institutions scolaires dans la transition entre l'enseignement à l'école primaire (9-11 ans) et l'enseignement au collège (11-15 ans) en France.

Pour ce faire, nous rappelons rapidement les aspects épistémologiques de l'activité numérique-algébrique définis dans Pilet et Grugeon-Allys (2021) en resituant l'étude des objets mathématiques mis en jeu dans cette activité par rapport à des travaux anglo-saxons récents (Kieran et Martínez-Hernández, 2022). Comme Kieran et Martínez-Hernández, nous retenons d'abord que dans le monde numérique-algébrique dans lequel se développe l'activité numérique-algébrique, l'équivalence a deux dimensions, calculatoire et structurelle. Les élèves du primaire arrivant au secondaire se retrouvent souvent en difficultés en algèbre, cette deuxième dimension étant peu travaillée à travers le sens de la structure d'une expression numérique. Les propriétés des nombres et des opérations mises en jeu dans la décomposition et la recomposition d'une expression numérique conservant la valeur de l'expression sont peu mises en évidence, même si en France un calcul appelé « calcul en ligne » vient d'être récemment introduit (Pilet et Grugeon-Allys, 2020).

1.1 Les aspects épistémologiques de l'activité numérique-algébrique

Nous présentons les types de problèmes de l'activité numérique-algébrique puis les aspects épistémologiques des objets en jeu dans les calculs sur les expressions numériques.

1.1.1 Types de problèmes de l'activité numérique-algébrique

L'activité numérique-algébrique se développe à la fois dans la résolution de plusieurs types de problèmes présents dès le primaire et dans le calcul mis en jeu sur les expressions numériques. Cela fait référence à l'activité générative au sens de Kieran. Les trois caractéristiques des formes spécifiques de la pensée algébrique sont définies par Radford (2013) pour qui elles sont épistémologiquement différentes de celles de l'arithmétique : l'usage de nombres non connus (inconnues, variables, etc.) dans la résolution de problèmes, la désignation de ces nombres par différents moyens (codages, gestes, ...), l'analyticité, c'est-à-dire le traitement des quantités inconnues comme si elles étaient des nombres connus. Les types de problèmes mettant en jeu l'analyticité préalablement à l'entrée dans le symbolisme algébrique sont d'une part, les problèmes de généralisation (par exemple, motifs géométriques, suites) et d'autre part, les problèmes arithmétiques élémentaires relevant des champs conceptuels additifs et multiplicatifs (en particulier, les problèmes de comparaison déconnectés (Adihou et al., 2015) nécessitant la production de relations pour raisonner sur les quantités connues comme sur les quantités inconnues, et donc de construire un modèle du problème.

1.1.2 Aspects épistémologiques des objets en jeu dans les calculs sur les expressions numériques

Nous présentons les aspects épistémologiques des objets en jeu dans les calculs sur les expressions numériques et dans les relations arithmétiques utilisés lors de la résolution de problèmes arithmétiques.

L'équivalence de la relation d'égalité est au cœur de l'activité numérico-algébrique. Elle est portée par les propriétés de réflexivité, de symétrie et de transitivité de l'égalité. Dans le numérique, l'équivalence a à la fois une dimension calculatoire (avoir la même valeur) et une dimension structurelle (Kieran et Martínez-Hernández, 2022). Cette dernière met notamment en jeu la réflexivité pour justifier l'équivalence d'expressions numériques à partir de décompositions et de recompositions sans calculer la valeur des expressions, par exemple $5 + 9 + 3 = 10 + 7$. Le travail sur le sens de la structure d'une expression numérique s'appuie sur les nombres écrits dans le système de numération décimale et leurs propriétés (parité, multiples de, etc.), sur les propriétés des opérations (commutativité, associativité de l'addition et de la multiplication,

distributivité de la multiplication par rapport à l'addition), mais aussi sur les techniques de décomposition, recombinaison des expressions numériques. Dans l'exemple donné en introduction, le calcul multiplicatif de l'expression numérique 32×25 utilise le fait que 32 est un multiple de 4 et que la recombinaison multiplicative de 4 et de 25 est 100, fait numérique qui doit être un prérequis. Ces aspects étant travaillés à l'école primaire, l'équivalence peut donc être abordée dès l'école primaire. De plus, l'équivalence est mise en jeu dans les techniques de décomposition et de recombinaison des expressions numériques utilisées en calcul réfléchi écrit (Butlen 2007; Butlen et Pézard, 2000) pour obtenir des calculs plus économiques (Piolti-Lamorthé et Roubin, 2010). Par exemple, réécrire l'expression numérique 12×99 en $12 \times 99 = 12 \times 100 - 12$ repose sur la décomposition de 99 en $100 - 1$, la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et celle du produit par 100.

Nous interprétons les aspects épistémologiques, développés dans Pilet et Grugeon-Allys (2021), des objets en jeu dans un calcul sur les expressions numériques au regard de l'approche de Kieran. Chevallard (1984, p. 75) distingue l'efficacité désignative d'une expression numérique pour le calcul de sa valeur, de la valeur monstrative visant à réécrire une expression pour faire apparaître « l'information monstrative pertinente » au regard du but visé. La valeur monstrative prend en compte la structure de l'expression numérique, ce qui met bien en jeu la dimension structurelle de l'équivalence pour transformer l'expression en fonction du but visé (réflexivité).

Sfard (1991) distingue les caractères structural et procédural des concepts mathématiques, ceux-ci étant perçus soit comme des processus (procédural), soit comme des objets (structural). Ces deux caractères cohabitent lors de l'activité mathématique. Par exemple, en ce qui concerne l'exécution du programme de calcul « Prendre un nombre, lui additionner 3 et multiplier le résultat par 5 » pour le nombre 7, au moins deux stratégies de calcul sont envisageables, l'une qui privilégie le caractère procédural $7 + 3 = 10$ et $10 \times 5 = 50$, l'autre le caractère structural du programme de calcul $(7 + 3) \times 5 = 10 \times 5 = 50$. Le premier sollicite uniquement l'effectuation des calculs pas à pas. Le second nécessite d'appréhender la structure de l'expression, résultat du programme de calcul, de connaître les priorités opératoires et le rôle des parenthèses pour savoir représenter le programme de calcul et de mobiliser l'équivalence lors de la recombinaison. Selon Sfard (1991), dans l'apprentissage d'un concept, l'élève mobilise souvent en premier son caractère procédural avant son caractère structural.

Ainsi, nous avons montré qu'au-delà de l'activité générative pour travailler l'analyticité, l'aspect transformationnel de l'activité numérique-algébrique,

notamment dans des tâches de calcul, mobilise l'équivalence dans ses deux dimensions opératoire et structurelle et peut favoriser l'entrée dans la pensée algébrique, avant l'usage du symbolisme algébrique.

1.2 Une praxéologie régionale relative aux expressions numériques

Nous nous situons dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD) (Chevallard, 1999) et nous utilisons le modèle de praxéologie mathématique comme modélisation de l'activité mathématique et des savoirs qu'elle utilise et engendre. La pensée mathématique est associée à une activité mathématique que nous décrivons par des praxéologies. Les praxéologies sont décrites par des tâches t qui relèvent de type de tâches T , et chacune d'elles étant résolue par au moins une technique τ , justifiée par un discours justificatif appelé technologie θ , lui-même justifié par une théorie Θ . Ces éléments forment une praxéologie $[T; \tau; \theta; \Theta]$ dite ponctuelle.

Dans l'enseignement, les praxéologies ponctuelles ne peuvent pas vivre seules, elles s'agrègent selon différents niveaux de codétermination didactique, selon l'organisation didactique mise en œuvre dans les classes. Les praxéologies ponctuelles s'agrègent autour d'une même technologie pour former une praxéologie locale. Les praxéologies locales s'agrègent, à leur tour, autour d'une même théorie pour former une praxéologie régionale. Enfin, les praxéologies régionales peuvent s'agréger en une praxéologie globale qui forme une discipline (ici, les mathématiques).

Pour prendre en compte les évolutions de l'activité mathématique à la transition entre primaire et secondaire, et les évolutions technologiques en jeu dans les rapports institutionnels aux objets de savoir des programmes, il est nécessaire pour le chercheur de se dégager du modèle dominant de l'institution qu'il étudie et de construire une référence pour analyser la transposition didactique (Bosch et Gascón, 2005). De nombreux travaux contribuent à définir un modèle praxéologique de référence de l'algèbre élémentaire (Ruiz-Munzón et al., 2020), certains étant formalisés en termes praxéologiques avec un grain plus fin selon les analyses visées (Grugeon-Allys et al., 2012; Pilet, 2015; Sirejacob, 2017).

Nous nous situons dans le prolongement des travaux de Bronner et Larguier (2018) et de Bronner et Squalli (2021) sur la définition d'un modèle épistémologique de référence de la pensée algébrique (MERPA) et étendons les modèles praxéologiques de référence relatifs aux expressions algébriques (Pilet, 2015) et équations (Sirejacob, 2017) aux expressions numériques pour l'activité « numérico-algébrique ».

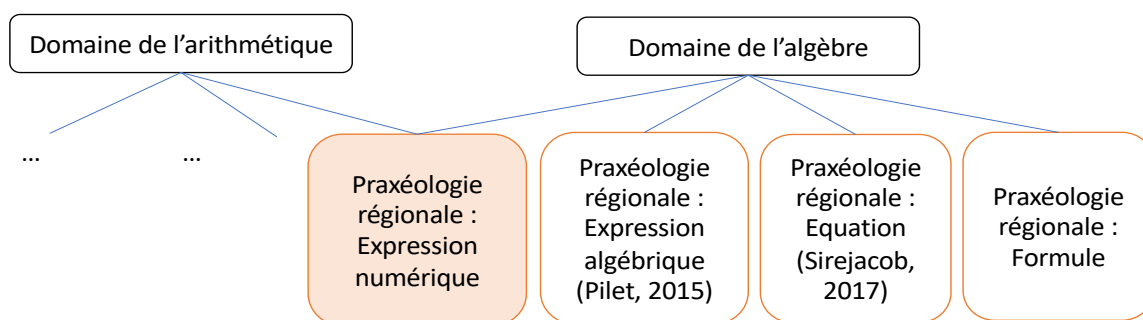


Figure 1. La praxéologie régionale sur les expressions numériques
(Pilet et Grugeon-Allys, 2021, p. 18)

Nous décrivons la praxéologie régionale relative aux expressions numériques en termes de trois praxéologies locales : modéliser des relations dans un problème de généralisation, modéliser des relations entre les quantités connues et inconnues d'un problème additif et/ou multiplicatif, calculer des expressions numériques.

L'enjeu de chaque praxéologie locale, décrit dans Pilet et Grugeon-Allys (2021), est de caractériser l'activité numérique-algébrique visée à partir des tâches relevant de types de tâches la caractérisant, des techniques pour les résoudre et des technologies les justifiant. La praxéologie locale « calculer des expressions numériques » est fondée sur les aspects épistémologiques de l'activité numérique-algébrique développés précédemment autour de l'équivalence de l'égalité dans ses dimensions opératoire et structurelle, les propriétés des nombres et des opérations pour décomposer, recomposer des expressions numériques. Nous nous centrons ici sur le type de tâches T3.2 : Effectuer un calcul réfléchi appuyé sur l'usage des propriétés des nombres et des opérations (par exemple, 11×8 , 12×99 , 32×25 , $405 : 5$). Nous distinguons les techniques et technologies visées par les tâches relevant de T3.2 de celles potentiellement réalisées par les élèves (par exemple, technique de calcul posé effectuée mentalement, technique en appui sur des décompositions canoniques additives des nombres alors qu'une décomposition multiplicative est plus pertinente), ce que nous précisons dans le paragraphe 2.

Dans la suite de l'article, nous caractérisons avec un grain plus fin le type de tâche T3.2 et l'opérationnalisons pour l'analyse de manuels français de fin de primaire (CM2).

2. Praxéologie relative au calcul réfléchi T3.2 et plus particulièrement multiplicatif

Pour analyser les manuels, nous avons eu besoin d'affiner le modèle praxéologique, le critère « type de tâche » correspondant à un grain trop gros pour l'analyse des exercices de type T3.2.

Pour ce faire, en ce qui concerne le type de tâche T3.2 : « Effectuer un calcul réfléchi appuyé sur l'usage des propriétés des nombres et des opérations », nous avons défini la méthode suivante en distinguant les types de calculs réfléchis selon l'opération en jeu, les variables de type de tâches et les variables de tâches.

2.1 Les types de calculs selon l'opération

Nous distinguons d'abord les types de calculs selon l'opération en jeu : T3.2.1 pour un calcul additif, T3.2.2 pour un calcul soustractif, T3.2.3 pour un calcul multiplicatif et T3.2.4 pour un calcul de division. Nous caractérisons ensuite plus finement le calcul multiplicatif T3.2.3.

Partons d'un exemple pour introduire nos choix à partir de questions sur les techniques et technologies utilisées pour faire un calcul réfléchi de même nature selon les décompositions – recompositions efficaces. Les deux calculs 16×25 ou 21×25 ne mettent pas en jeu les mêmes propriétés des nombres, de la numération décimale et des opérations pour décomposer – recomposer les expressions numériques afin de dégager un calcul s'appuyant sur des faits numériques³ connus :

$16 \times 25 = 4 \times 4 \times 25$; comme $4 \times 25 = 100$, l'application de l'associativité de la multiplication conduit à $16 \times 25 = 4 \times 100 = 400$. Ce calcul multiplicatif réfléchi 16×25 vise à utiliser le fait numérique « 4×25 », ce qui est possible car 16 est un multiple de 4. En revanche, 21 n'est pas un multiple de 4 et aucune décomposition multiplicative ne permet une recomposition s'appuyant sur d'autres faits numériques. Le calcul multiplicatif réfléchi 21×25 nécessite donc de s'appuyer sur la décomposition canonique de 21, $2 \times 10 + 1$, pour engager l'usage de la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. En effet, $21 \times 25 = 20 \times 25 + 25 = 250 + 25 = 275$. La technique qui consiste à effectuer

³ Les faits numériques sont des résultats de calculs automatisés afin d'être disponibles à l'élève au cours d'un calcul. Par exemple, les tables, les doubles, les multiples de 25, les décompositions multiplicatives de 100 sont des faits numériques. Dans l'institution scolaire française, ils sont explicitement répertoriés en fonction du niveau scolaire.

mentalement l'algorithme de calcul posé de 21 par 25 s'appuyant sur les principes de la numération décimale et la distributivité ne relève pas du calcul réfléchi.

Cet exemple met en évidence, pour un produit de deux nombres, l'utilisation de deux décompositions différentes (décomposition multiplicative ou décomposition additive) qui conduisent à des techniques différentes et reposant sur des technologies différentes. La technique s'appuyant sur la décomposition additive met en jeu huit étapes : la décomposition additive canonique de 21, l'application de la distributivité, le calcul de 20×25 , qui lui-même sollicite une technique de décomposition multiplicative $20 = 2 \times 10$, l'associativité de la multiplication, le fait numérique $2 \times 25 = 50$, la multiplication de 50 par 10 et l'addition de 250 et de 25. La technique s'appuyant sur la décomposition multiplicative met en jeu quatre étapes : la décomposition multiplicative de 16 en 4×4 , l'associativité de la multiplication, le fait numérique $4 \times 25 = 100$ et la multiplication par 100. La première technique est plus coûteuse en nombre de décompositions, d'opérations et d'application de propriétés que la deuxième.

2.2 Les variables de types de tâches pour catégoriser les calculs selon leur structure

Nous distinguons les variables de types de tâches des variables de tâches. Les variables de types de tâches (Chaachoua, 2018) ont pour rôle de catégoriser les calculs selon la structure mise en jeu dans une décomposition efficace du calcul en lien avec certaines propriétés des nombres et des opérations. Dans le calcul multiplicatif, nous définissons deux variables de types de tâches :

- VT1 : nombre de facteurs du produit; c'est un nombre entier appartenant à $\{2, 3, \dots\}$
- VT2 : structure du calcul {décomposition multiplicative (VT2.1), décomposition additive (VT2.2)}, chaque décomposition visant à organiser la décomposition-recomposition du calcul la moins coûteuse, selon les propriétés des nombres et des opérations en jeu, les répertoires multiplicatifs connus dans l'institution, à un niveau scolaire donné.

Pour chaque type de décomposition, nous dégageons des sous-structures (tableaux 1 et 2) pour affiner les critères d'analyse des exercices des manuels. Nos choix de sous-structures s'appuient sur les propriétés des nombres et des opérations. Ils visent à produire une catégorisation, non exhaustive et pas unique, permettant de distinguer des structures de calcul et d'y associer des calculs pertinents au regard des enjeux d'apprentissage de chaque structure. Aussi, si un produit se décompose de plusieurs façons, nous retenons la plus pertinente, au regard du coût en nombre de décompositions, d'opérations et d'application de propriétés, comme nous l'avons détaillé dans l'exemple du paragraphe 2.1. Par

exemple, la structure multiplicative VT2.1.5* (tableau 1) est pertinente pour le calcul 12×25 , car la décomposition de 12 en 3×4 permet une recombinaison mobilisant le fait numérique $4 \times 25 = 100$ (Butlen et Pézard, 1992). En revanche, la structure additive VT2.2.1 (tableau 2) conduisant à décomposer canoniquement 12 en $1 \times 10 + 2$ et appliquer la distributivité est plus coûteuse, car elle ne permet pas d'utiliser le fait numérique $4 \times 25 = 100$.

Pour VT2.1, la technique de décomposition multiplicative consiste à décomposer multiplicativement au moins un des facteurs pour se ramener à des recombinaisons portant sur des calculs multiplicatifs moins coûteux. La technologie repose sur les faits numériques multiplicatifs (tables, doubles, etc.), sur les propriétés de la multiplication (commutativité et d'associativité) et de la division, et sur les équivalences d'écritures d'un même nombre.

Pour VT2.2, la technique de décomposition additive consiste à décomposer additivement au moins un des facteurs en vue d'utiliser la distributivité de la multiplication sur l'addition et de se ramener à des recombinaisons portant sur des calculs moins coûteux, notamment la multiplication par une puissance de 10. La technologie repose sur la numération décimale, sur les faits numériques multiplicatifs et additifs (tables, compléments, etc.), sur la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition, sur les propriétés de la multiplication et de l'addition (commutativité et d'associativité) et sur les équivalences d'écritures d'un même nombre.

Dans le cas où VT1 a pour valeur plus de deux facteurs, la technique correspond à la réorganisation des facteurs par la commutativité et l'associativité de la multiplication pour se ramener à des faits numériques supposés connus en fonction du niveau scolaire ou à un des produits de deux facteurs ($VT1 = 2$).

Tableau 1 : Les sous-structures pour VT1 = 2 facteurs A et B et VT2.1 = décomposition multiplicative d'au moins un des facteurs du produit, non premier et différent de 2

Sous-structures de VT2.1	Commentaires et Exemples
VT2.1.1 A=3 et B se décompose	$24 \times 3 = 8 \times 3 \times 3 = 8 \times 9 = 72$
VT2.1.2 A appartient à {4, 6, 8} et B non divisible par 5	C'est la décomposition de 4, 6 et 8 en respectivement 2×2 , 2×3 , $2 \times 2 \times 2$ qui est visée. Le cas où B divisible par 5 est pris en compte dans VT2.1.5. $4 \times 16 = 2 \times (2 \times 16) = 2 \times 32 = 64$
VT2.1.3 B = $k \times 10^n$, avec k non nul de 1 et A×k connu ou se ramenant aux autres cas	Nous excluons les calculs portant sur « multiplier par 10, 100, 1000 ». $17 \times 20 = 17 \times 2 \times 10 = 34 \times 10 = 340$ $17 \times 40 = 17 \times$ $(4 \times 10) = (17 \times 2) \times 2 \times 10 = 34 \times 2 \times 10 = 680$
VT2.1.4 A= $k \times 10^n$ et B= $k' \times 10^m$, avec k et k' non nuls différents de 1, k×k' connu ou se ramenant aux autres cas	$800 \times 30 = (8 \times 3) \times 100 \times 10 = 24000$
VT2.1.5 A multiple de 5 et B pair	Ce cas vise des décompositions-recompositions utilisant le fait numérique $2 \times 5 = 10$ et ses équivalents comme $5 = 10 : 2$. $48 \times 5 = (24 \times 2) \times 5 = 24 \times (2 \times 5) = 24 \times 10 = 240$ $48 \times 5 = 48 \times (10 : 2) = (48 : 2) \times 10 = 24 \times 10 = 240$ $12 \times 15 = (2 \times 6) \times (5 \times 3) = (6 \times 3) \times 10 = 180$
VT2.1.5* Cas particulier : A multiple de 25 et B divisible 4	Ce cas particulier vise des décompositions-recompositions utilisant le fait numérique $4 \times 25 = 100$ et ses équivalents. $32 \times 25 = 8 \times 4 \times 25 = 8 \times 100 = 800$ $32 \times 25 = 32 \times (100 : 4) = (32 : 4) \times 100 = 8 \times 100 = 800$ $12 \times 25 = 3 \times 4 \times 25 = 3 \times 100 = 300$ $125 \times 8 = 5 \times 25 \times 4 \times 2 = 100 \times 10 = 1000$
VT2.1.6 A multiple de 5 et B impair	Ce cas particulier vise des décompositions-recompositions utilisant le fait numérique $5 = 10 : 2$. $13 \times 5 = 13 \times 5 = (13 \times 10) : 2 = 65$ $13 \times 50 = (13 \times 100) : 2 = 1300 : 2 = 650$

Tableau 2 : Les sous-structures pour VT1 = 2 facteurs A et B et VT2.2 = décomposition additive, pour au moins un des facteurs du produit permettant de se ramener à un résultat intermédiaire connu à partir de l'usage de la propriété de distributivité

Sous-structures de VT2.2	Commentaires et Exemples
VT2.2.1 Décomposition canonique	$12 \times 13 = 12 \times (10 + 3) = 12 \times 10 + 12 \times 3$ $12 \times 13 = (10 + 2) \times 13 = 10 \times 13 + 2 \times 13$
VT2.2.2 Décomposition non canonique	$12 \times 26 = 12 \times (25 + 1) = 12 \times 25 + 12 = 300 + 12 = 312$ Sachant que $37 \times 63 = 2331$, calculer 37×630 , 37×126 , 37×73
VT2.2.2* Cas particulier. Un des facteurs est multiple de $10^n + 1$, avec n entier naturel non nul : 11, 101, 1001, etc. L'autre facteur a au moins 2 chiffres	Technique du pivotement $13 \times 101 = 13 \times 100 + 13$ $13 \times 11 = 13 \times (10 + 1) = 13 \times 10 + 13 = 143$
VT2.2.2** Cas particulier. Un des facteurs est de la forme $10^n - 1$, avec n entier naturel non nul : 19, 29, 39, etc., 199, etc.	Technique du pivotement $13 \times 19 = 13 \times 20 - 13$ $13 \times 99 = 13 \times 100 - 13$

2.3 Les variables de tâches pour définir des familles de tâches sur une même structure de calcul

Les variables de tâches visent à définir des familles de tâches autour d'une même catégorie de type de tâches donné (Grugeon-Allys et al., 2022; Jolivet et al., 2021). Elles sont codées « Vt » pour les distinguer des variables de types de tâches codées « VT ». Les variables concernent les nombres impliqués dans le calcul (taille et nature des nombres, etc.) et le nombre de décompositions et de recompositions impliquées dans le calcul. Nous énumérons ci-dessous les variables et leurs valeurs potentielles :

- Vt1 : La taille des nombres : de l'ordre des unités, des dizaines, etc.
- Vt2 : La nature des nombres
 - Vt2.1 : Naturels, décimaux,
 - Vt2.2 : Nombres familiers : ceux présents dans les tables de multiplication jusqu'à 12, ceux avec plusieurs décompositions multiplicatives comme 8, 12, 16, 18, 24, 32, 36, 48 (et 72 et 81), ceux avec des recompositions multiplicatives connues de 5 et de 2, de 25 et de 4, etc. en puissances de 10,

- Vt3 : L'ordre des facteurs
 - Vt3.1 La position du facteur multiplicatif dans le produit, selon qu'il induise une décomposition à droite ou à gauche du signe opératoire (différence entre 19×53 et 53×19). Cette variable est en lien avec la commutativité de la multiplication,
 - Vt3.2 Pour un produit d'au moins trois facteurs, s'il y a nécessité d'une réorganisation ou pas (commutativité et associativité),
- Vt4 : La réécriture à la charge de l'élève ou pas (Oui/Non). Si oui, cela concerne le nombre d'étapes de réécritures, le nombre de propriétés mises en jeu dans les techniques, l'ancienneté des propriétés.

Dans la partie suivante, nous opérationnalisons l'analyse en variables de types de tâches et en variables de tâches pour étudier les potentialités de deux manuels scolaires français à favoriser l'activité numérique-algébrique dans les tâches relevant du calcul réfléchi multiplicatif T3.2.3., c'est-à-dire les dimensions structurelle et calculatoire de l'équivalence et la valeur monstrative des expressions numériques.

3. Analyse de manuels

Notre analyse des textes officiels français de cycle 3⁴ (9-12 ans) a révélé que, bien que limitées, des potentialités curriculaires existent pour développer l'activité numérique-algébrique sur le cycle 3 (Pilet et Grugeon-Allys, 2021). C'est en particulier le cas pour le calcul réfléchi où les propriétés des opérations, même si elles ne sont pas explicitées aux élèves, participent aux transformations (décomposition et recomposition) opérées sur les expressions numériques. La valeur des expressions numériques et le statut de l'équivalence sont pris en compte. Nous nous interrogeons sur la façon dont les auteurs de manuels de cycle 3 se sont emparés ou non de ces potentialités pour le calcul multiplicatif réfléchi.

L'analyse en variables de types de tâches et de tâches nous permet de préciser notre questionnement. Nous cherchons à analyser quelles sont les structures de calculs (VT2.1 et VT2.2) travaillées dans les tâches prescrites par les manuels et avec quels nombres, sans questionner leur exploitation par les enseignants. Nous

⁴ En France, l'enseignement est structuré en cycles d'apprentissage. Le cycle 3 s'étale des deux dernières années de l'école primaire (CM1-CM2, 9-11 ans) à la première année du secondaire (collège, 6^e, 11-12ans). C'est au début du cycle 4 (classe de 5e) que l'algèbre est officiellement introduite.

pourrons ainsi questionner, d'une part, une incomplétude éventuelle de la praxéologie T3.2.3 « Effectuer du calcul réfléchi multiplicatif » et, d'autre part, la pertinence des calculs proposés au regard du coût des techniques.

3.1 Présentation des manuels analysés

Le cycle 3 étant composé de trois niveaux scolaires, nous avons choisi de restreindre notre analyse au niveau intermédiaire du Cours Moyen deuxième année, (CM2, élèves de 10-11 ans) qui est la dernière année de l'école primaire. L'introduction du symbolisme alphanumérique a lieu deux années plus tard dans les textes officiels.

En France, il existe une grande diversité dans les manuels de l'école primaire (Mounier et Priolet, 2015), ce qui rend difficile une analyse exhaustive. Nous avons restreint notre analyse à deux manuels. En France, un manuel est souvent composé de plusieurs ouvrages comme le livre de l'élève avec tout ou une partie des tâches, et le guide de l'enseignant qui précise les choix réalisés, conseille l'enseignant pour la mise en œuvre des tâches et présente des tâches qui ne seraient pas visibles dans le livre de l'élève. Un fichier à destination de l'élève dans lequel il peut écrire ses réponses est souvent disponible en complément. Nous analysons ici le livre de l'élève et le guide de l'enseignant. Le premier manuel est Cap Maths, édition 2017, chez Hatier (Charnay et al., 2016a, 2016b). Le second manuel est Maths explicites, édition 2016, chez Hachette (Castioni et al., 2016a, 2016b). Nous les avons retenus parce qu'ils présentent des potentialités pour développer l'activité numérico-algébrique à travers le calcul réfléchi multiplicatif, mais avec des différences marquées comme nous le développons dans les paragraphes suivants. Toutefois, ces manuels ne sont pas représentatifs de l'ensemble, nous restons donc prudentes quant à une généralisation des résultats au niveau des praxéologies enseignées en CM2.

3.2 Méthodologie

Nous restreignons notre analyse aux entiers.

Nous analysons les tâches de calcul réfléchi multiplicatif présentes dans le livre de l'élève ou dans le guide de l'enseignant sans calculatrice. Nous analysons également la ou les techniques attendues par le manuel. Elles sont décrites soit dans l'énoncé donné à l'élève par l'intermédiaire de la consigne ou d'un exemple, soit dans les indications données à l'enseignant dans le guide de l'enseignant.

Nous dénombrons les calculs proposés et associons chacun à la structure de calcul (tableaux 1 et 2) qui lui correspond. Nous dégageons les principales valeurs de variables de tâches présentes en faisant référence à la numérotation des variables introduites dans la deuxième partie (Vt_i). Lorsqu'un manuel propose plusieurs

techniques pour un même calcul, sans les hiérarchiser, nous associons le calcul à la technique la moins coûteuse, selon nos analyses, tout en indiquant que ce n'est pas la seule attendue du manuel. De plus, lorsqu'un manuel propose de travailler une structure de calculs avec des nombres non pertinents (décomposition non adaptée, nombres ne faisant pas intervenir un fait numérique, etc.), nous l'indiquons dans nos analyses.

Enfin, en lien avec la technologie de la praxéologie travaillée, nous analyserons les ostensifs privilégiés, comme les arbres de calculs, les écritures numériques en ligne, les formulations orales pour accompagner les calculs en ligne (exemples de 5×16 , calculer 5 fois 16, c'est 5 fois 10 plus 5 fois 6), etc.

3.3 Le calcul réfléchi multiplicatif dans le manuel Maths explicites

Les thèmes de calcul réfléchi sont annoncés dans la programmation du livre de l'élève, mais les tâches figurent uniquement dans le livre de l'enseignant. Elles sont organisées en 77 « leçons » (par exemple « multiplier par 5 un nombre à deux chiffres ») autour des quatre opérations et réparties par période d'enseignement. Vingt-deux (22) leçons concernent la multiplication. Nous en retenons 14 pour le calcul réfléchi multiplicatif sur les entiers. Pour chaque leçon, comme celle présentée dans la figure 2, au-delà de la compétence à travailler, le guide de l'enseignant propose une technique et des tâches.

Compétence : « Multiplier par 25, 250 ».

Stratégie : 25 est le quart de 100, il y a 4×25 dans 100. Il est donc possible de multiplier par 100 et de diviser par 4. $12 \times 25 = (12 \times 100) : 4 = 1\ 200 : 4 = 300$

Items : 13×25 ; 8×25 ; 6×25 ; 11×25 ; 30×25 .

Figure 2. Extrait du guide de l'enseignant de Maths explicites pour la leçon numéro 15 (Castioni et al., 2016b)

L'analyse de l'ensemble des calculs est présentée dans les tableaux 3 et 4. Nous dénombrons un total de 111 calculs dont 36 pour les décompositions multiplicatives et 75 pour les décompositions additives. Les produits sont uniquement à deux facteurs ($VT1 = 2$). Les sous-structures absentes sont au nombre de deux pour les décompositions multiplicatives ($VT2.1.1$ et $VT2.1.2$) et d'une pour les décompositions additives ($VT2.2.2$) puisque les décompositions additives non canoniques ne sont pas traitées. La moitié des calculs ($57/111$) portent sur les décompositions additives canoniques ($VT2.2.1$). Les décompositions multiplicatives sont travaillées lorsqu'un facteur est divisible par une puissance de 10 ou est égal à 5 ou 25. Ainsi, les décompositions multiplicatives de nombres familiers du répertoire multiplicatif (comme 4, 12, 15) ne sont pas abordées ($Vt2.2$), le manuel renvoie à une décomposition canonique (leçons 50

et 59, figures 3 et 4). La technologie travaillée est donc majoritairement portée par la propriété de distributivité et la numération décimale.

De plus, la leçon 42 « Multiplier 2 nombres entiers à 2 chiffres » (tableau 4, VT2.2.1) repose sur des calculs avec décomposition additive canonique qui vont au-delà des faits numériques à mémoriser indiqués dans les programmes (Vt2.2). Nous les avons conservés dans nos analyses tout en les distinguant des autres, même s'ils ne sont pas de bons candidats pour travailler VT2.2.1.

Tableau 3 : Les produits de deux facteurs $A \times B$ dans le cas d'une décomposition multiplicative, dans Maths explicites (VT1 = 2 facteurs A et B et VT2.1 = décomposition multiplicative)

Sous-structures de VT2.1	Nombre de calculs, commentaires et exemples
VT2.1.1 $A = 3$ et B se décompose	0
VT2.1.2 A appartient à {4, 6, 8} et B non divisible par 5	0
VT2.1.3 $B = k \times 10^n$, avec k non nul différent de 1 et $A \times k$ connu ou se ramenant aux autres cas	6 calculs Leçons 9 et 11 : Multiplier par un multiple de 10, par 20, 200, 30, 300, par 40, 400, 50, 500 Exemples : 7×20 , 12×200
VT2.1.4 $A = k \times 10^n$ et $B = k' \times 10^m$, avec k et k' non nuls différents de 1, $k \times k'$ connu ou se ramenant aux autres cas	6 calculs et 10 dans le livre de l'élève ⁵ Leçons 9 et 11 : Multiplier par un multiple de 10, par 20, 200, 30, 300, par 40, 400, 50, 500 Exemples : 80×30 , 60×300
VT2.1.5 A multiple de 5 et B pair	7 calculs Leçon 28 : Multiplier par 5 un nombre à deux chiffres et Leçon 15 : Multiplier par 25, 250 Exemples : 5×24 ; 5×34 ; 5×18 ; 5×38 ; 5×82 ; 5×74 ; 6×25
VT2.1.5* Cas particulier : A multiple de 25 et B divisible 4	3 calculs Leçon 15 : Multiplier par 25, 250 Exemples : 12×25 ; 8×25 ; 30×25

⁵ Nous avons ajouté ces dix calculs figurant exceptionnellement dans le livre de l'élève.

VT2.1.6 A multiple de 5 et B impair	4 calculs Leçons 28 et 15 : Multiplier par 5 un nombre à deux chiffres et Multiplier par 25, 250 Exemples : 5×63 ; 5×25 ; 13×25 ; 11×25
--	---

Tableau 4 : Les produits de deux facteurs $A \times B$ dans le cas d'une décomposition additive, dans Maths explicites (VT1 = 2 facteurs A et B et VT2.2 = décomposition additive)

Sous-structures de VT2.2	Nombre de calculs, commentaires et exemples
VT2.2.1 Décomposition canonique	51 calculs + 6 calculs qui vont au-delà des faits numériques Leçons : 36 : Calculer le triple d'un nombre à 2 chiffres (avec retenue), 20 : Calculer le quadruple d'un nombre, 52 : Multiplier un nombre par un nombre à 1 chiffre sans retenue, 40 : Multiplier un nombre de 2 chiffres par un nombre d'un chiffre avec retenue, 42 : Multiplier 2 nombres entiers à 2 chiffres, 50 : Multiplier par 11, 12... 15 un nombre à un chiffre, 59 : Multiplier par 12 et 15 Exemples : triple de 47, quadruple de 86, 8×401 , 84×7 , 23×12 , 34×15
VT2.2.2 Décomposition non canonique	0
VT2.2.2* Cas particulier. Un des facteurs est multiple de $10^n + 1$, avec n entier naturel non nul : 11, 101, 1001, etc. L'autre facteur a au moins 2 chiffres	9 calculs Leçons 30 et 39 : Multiplier par 99, 101, Multiplier par 11 (nombres inférieurs à 100) Exemples : 11×24 ; 11×56 ; 101×24
VT2.2.2** Cas particulier. Un des facteurs est de la forme $10^n - 1$, avec n entier naturel non nul : 19, 29, 39, etc., 199, etc.	9 calculs Leçons 10 et 30 : Multiplier par 9, Multiplier par 99, 101, Exemples : 13×9 , 22×9 , 99×24

Compétence : « Multiplier par 11, 12... 15 un nombre à un chiffre » ($23 \times 12 = ?$).
Stratégie : On multiplie d'abord le nombre par 10 puis par le chiffre des unités et on additionne les 2 produits. $23 \times 12 = (23 \times 10) + (23 \times 2) = 230 + 46 = 276$
Items : 56×12 ; 86×13 ; 42×14 ; 28×15 ; 47×11 ; 51×13 .

Figure 3. Extrait du guide de l'enseignant de Maths explicites pour la leçon numéro 50 où les décompositions additives canoniques sont privilégiées par rapport aux décompositions multiplicatives (Castioni et al., 2016b)

Compétence : « Multiplier par 12 et 15 ».

Stratégie : $14 \times 12 = 14 \times (10 + 2) = (14 \times 10) + (14 \times 2) = 140 + 28 = 168$

Quand je multiplie un nombre par 12, j'additionne le produit du nombre par 10 et le produit du nombre par 2.

Stratégie : $14 \times 15 = (14 \times 10) + (14 \times 5) = (14 \times 10) + [(14 \times 10) : 2] = 140 + 70 = 210$

Quand je multiplie un nombre par 15, j'additionne le produit du nombre par 10 et la moitié du produit obtenu.

Items : 21×12 ; 21×15 ; 34×12 ; 34×15 ; 42×12 ; 42×15 .

Figure 4. Extrait du guide de l'enseignant de Maths explicites pour la leçon numéro 59 où les décompositions additives canoniques sont privilégiées par rapport aux décompositions multiplicatives (Castioni et al., 2016b)

Du côté des variables de tâches, les nombres (Vt1) sont majoritairement à 2 chiffres, parfois à 3 chiffres. Nous avons analysé les nombres entiers, mais des calculs portent sur les décimaux (Vt2.1). La position du facteur multiplicatif à décomposer dans le produit varie sur quelques cas (Vt3.1). Des calculs pourraient donner lieu à une comparaison des techniques proposées (Vt4), mais ce n'est pas là dans ce qui est suggéré à l'enseignant alors que cette comparaison pourrait être profitable à l'apprentissage futur de l'algèbre. Par exemple, dans la leçon 10, c'est la multiplication par 9 qui est présentée avec une technique de décomposition de type pivot où 9 est décomposé en 10-1. Plus tard, dans la leçon 40, c'est la multiplication d'un « Multiplier un nombre de 2 chiffres par un nombre d'un chiffre avec retenue » qui est traitée par une décomposition additive canonique du nombre à deux chiffres. Le calcul 62×9 est proposé avec une décomposition canonique de 62 sans qu'un retour sur la technique de la leçon 10 ne soit suggéré. La place du raisonnement laissé à la charge de l'élève est donc réduite (Vt4) puisque le manuel semble attendre que les élèves transposent la technique suggérée dans l'exemple sur les autres calculs de la leçon même s'ils ont appris une autre technique auparavant.

De plus, pour décrire et justifier les techniques, le manuel propose des discours technologiques de plusieurs natures. Un discours technologique appuyé par des écritures en ligne, dans lesquelles les décompositions et recompositions sont apparentes par l'intermédiaire de parenthèses, est toujours présent. Un discours technologique ostensif et mnémotechnique, non porté par les propriétés mathématiques, est également présent avec des formulations qui proposent des « astuces » (par exemple, leçon 39, pour multiplier par 11 un nombre à deux chiffres : « Une astuce consiste à placer entre les 2 chiffres du nombre leur somme : 1 (1 + 5) $\rightarrow$ 165 »). L'analyse du livre de l'élève autour de la multiplication dévoile également un discours technologique simplificateur de la multiplication par un multiple de 10, illustré par des flèches (figure 5).

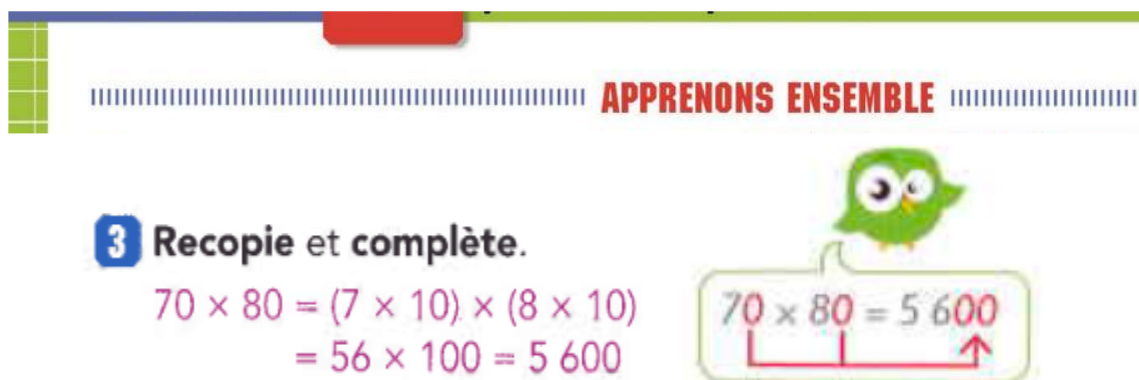


Figure 5 : Extrait du livre de l'élève de Maths explicites pour décrire une technique de multiplication par un multiple de 10 (Castioni et al., 2016a, p. 54-55)

3.4 Le calcul réfléchi multiplicatif dans le manuel Cap Maths

Une moitié des calculs réfléchis multiplicatifs apparaît dans le livre de l'élève dans les pages de calculs réfléchis intitulées « Fort en calcul mental » et réparties tout au long de l'année. Les calculs sont donnés avec la consigne « Calcule » ou « Calcule mentalement » parfois complétée de « Explique comment tu as trouvé les réponses ». Aucune autre consigne ou indication n'est donnée, notamment sur la structure du produit ou les propriétés des nombres. L'autre moitié des calculs est présente dans le guide du maître. C'est dans ce guide que les techniques sont décrites et justifiées et que des indications de gestion et de formulation sont données à l'enseignant. Par exemple, seul l'enseignant est informé du fait qu'un ensemble d'exercices regroupe des calculs autour d'une même thématique, comme l'un des facteurs est 25, 11, 12.

Le manuel Cap Maths traite des produits de deux facteurs uniquement (VT1 = 2) et toutes les sous-structures, multiplicatives et additives, sont traitées (VT2, tableaux 5 et 6). Au total, 173 calculs réfléchis multiplicatifs sont codés dont 110 pour les décompositions multiplicatives et 53 pour les décompositions additives. Cap Maths met l'accent sur les décompositions multiplicatives, notamment autour des nombres familiers divisibles par 15 et des nombres 12, 24, 48. Le jeu sur la variable de tâches Vt2.2 est important. Ajoutons, de plus, qu'en amont du calcul réfléchi multiplicatif, le manuel propose du calcul automatisé multiplicatif qui met l'accent sur des décompositions multiplicatives. Par exemple, il est demandé de trouver le plus possible de façons d'écrire des nombres des répertoires connus (28, 7, 40, 64, 72, etc.) sous la forme « ... x.... ».

Tableau 5 : Les produits de deux facteurs $A \times B$ dans le cas d'une décomposition multiplicative, dans Cap Maths CM2 (VT1 = 2 facteurs A et B et VT2.1 = décomposition multiplicative)

Sous-structures de VT2.1	Nombre de calculs, commentaires et exemples
VT2.1.1 $A = 3$ et B se décompose	1 calcul avec une décomposition additive Exemple : 24×3
VT2.1.2 A appartient à $\{4, 6, 8\}$ et B non divisible par 5	4 calculs avec une décomposition additive Exemples : $12 \times 8, 26 \times 4$
VT2.1.3 $B = k \times 10^n$, avec k non nul différent de 1 et $A \times k$ connu ou se ramenant aux autres cas,	54 calculs Exemples : $700 \times 4, 20 \times 13, 12 \times 20$
VT2.1.4 $A = k \times 10^n$ et $B = k' \times 10^m$, avec k et k' non nuls différents de 1, $k \times k'$ connu ou se ramenant aux autres cas	3 calculs Exemples : $40 \times 30, 60 \times 20$
VT2.1.5 A multiple de 5 et B pair	35 calculs dont 29 avec une décomposition additive Exemples : $24 \times 5, 35 \times 4, 22 \times 25$
VT2.1.5* Cas particulier : A multiple de 25 et B divisible 4	8 calculs dont 6 avec une décomposition additive Exemples : $25 \times 12, 8 \times 25, 24 \times 25$
VT2.1.6 A multiple de 5 et B impair	5 calculs avec une décomposition additive Exemples : $15 \times 5, 75 \times 5$

Tableau 6 : Les produits de deux facteurs $A \times B$ dans le cas d'une décomposition additive, dans Cap Maths CM2 (VT1 = 2 facteurs A et B et VT2.2 = décomposition additive)

Sous-structures de VT2.2	Nombre de calculs, commentaires et exemples
VT2.2.1 Décomposition canonique	17 calculs dont 5 avec une décomposition multiplicative Exemples : $23 \times 12, 14 \times 25, 104 \times 7$
VT2.2.2 Décomposition non canonique	5 calculs Exemple : 37×73 sachant $37 \times 63 = 2331$
VT2.2.2* Cas particulier. Un des facteurs est multiple de $10^n + 1$, avec n entier naturel non nul : 11, 101, 1001, etc. L'autre facteur a au moins 2 chiffres	21 calculs dont 1 avec une décomposition additive (61×5) Exemples : $29 \times 11, 18 \times 11, 25 \times 101$
VT2.2.2** Cas particulier. Un des facteurs est de la forme $10^n - 1$, avec n entier naturel non nul : 19, 29, 39, etc., 199, etc.	10 calculs Exemples : $15 \times 9, 12 \times 19, 49 \times 4$

Une spécificité de Cap Maths est de proposer, lorsque c'est possible, au moins deux décompositions, une additive et une multiplicative, mais en hiérarchisant rarement les techniques associées (cf. figures 6 et 7 sans hiérarchisation et figure 8 avec hiérarchisation). D'ailleurs, à ce propos, Butlen (2007) questionne l'apport d'une plus grande maîtrise de procédures de calcul diversifiées et d'une plus grande disponibilité de propriétés des nombres et des opérations sur l'automatisation de la reconnaissance d'opérations arithmétiques dans la résolution des problèmes arithmétiques. C'est pourquoi, pour dénombrer les calculs de chaque structure, nous avons fait le choix de comptabiliser chaque calcul pour la structure la plus pertinente qu'il peut faire intervenir, au regard des propriétés en jeu et du coût, par exemple une technique reposant sur une décomposition multiplicative de 12 pour 12×25 .

Cette spécificité de Cap Maths conduit à laisser à la charge de l'élève le choix d'une décomposition. Toutefois, sans indication supplémentaire de la part de Cap Maths, on peut se demander si ce choix ne risque pas de renforcer les techniques reposant sur des décompositions additives, connues des élèves depuis plusieurs années, souvent fréquemment rencontrées et avec un domaine d'application plus grand (tout nombre peut se décomposer additivement canoniquement), mais parfois plus coûteuses.

EXERCICES 1 2

Ces exercices sont l'occasion pour les élèves d'utiliser les procédures et propriétés mises en évidence lors de la recherche. Pour calculer ces produits, il est possible de décomposer un des facteurs sous forme de somme ou de produit.

Exemple : pour 25×12 on peut s'appuyer :

– soit sur la décomposition de 12 en $10 + 2$:

$$25 \times 12 = 25 \times (10 + 2) = (25 \times 10) + (25 \times 2) = 250 + 50 ;$$

– soit sur la décomposition de 12 en 4×3 :

$$25 \times 12 = 25 \times (4 \times 3) = (25 \times 4) \times 3 = 100 \times 3.$$

La décomposition de 12 en produit aurait aussi pu être : 2×6 .

Dans tous les cas, veiller à utiliser des formulations relevant de trois registres et à les mettre en relation :

Figure 6 : Extrait du guide du maître de Cap Maths pour 25×12 (Charnay et al., 2016b, p. 19)

Le fait de ne pas hiérarchiser les techniques ne permet pas de mettre en valeur une technique plutôt qu'une autre, avec un domaine d'application plus vaste. Nous interrogeons, par exemple, le choix du nombre 15 pour illustrer des techniques de

multiplication par 5. Les propriétés de 15 offrent plusieurs décompositions et recompositions dont certaines sont spécifiques à « multiplier par 15 » et non à « multiplier par 5 » (par exemple calculer 30×5 et diviser par 2, utiliser le fait que $15 \times 4 = 60$). Il nous semble que cela limite la portée de la technique consistant à multiplier par 10 et diviser par 2 pour multiplier par 5.

Il n'y a pas de stratégie générale pour multiplier par 5 ou 50.
 Pour 15×5 , différentes stratégies peuvent être utilisées :
 – calculer 10×5 , puis 5×5 et faire la somme des résultats ;
 – multiplier 15 par 10 puis diviser le résultat par 2 ;
 – calculer 30×5 puis diviser par 2 ;
 – s'appuyer sur le fait que $15 \times 4 = 60$ est connu et lui ajouter 15....

Figure 7 : Extrait de Cap Maths quand un des facteurs est 5 ou 50 (Charnay et al., 2016b, p. 73)

Dans les calculs proposés, la place du nombre à décomposer dans le produit varie (Vt3.1), par exemple dans la figure 8, ce qui peut donner lieu à des décompositions « à droite » ou « à gauche » et à travailler la commutativité de la multiplication. De plus, l'enchaînement des calculs proposés peut donner lieu à d'autres décompositions que celle attendue. Par exemple, dans la figure 8, utiliser le fait que 30 est le double de 15 pour calculer 11×30 connaissant 15×11 . Nous retrouvons ici une caractéristique de Cap Maths, les familles de nombres choisies ne permettent pas de travailler exclusivement la technique s'appuyant sur la décomposition canonique de 11 en $10 + 1$ pour multiplier un entier par 11. Elles permettent de réinvestir (ou de découvrir) d'autres techniques qui font appel à d'autres propriétés des opérations et des nombres. Cela n'est pas suggéré à l'enseignant et donc laissé potentiellement à la charge des élèves (Vt4).

6 Calculs dictés : un des facteurs est 11

a. 8×11 **b.** 12×11 **c.** 15×11 **d.** 11×30 **e.** 11×25
f. 10×11 **g.** 11×11 **h.** 20×11 **i.** 23×11 **j.** 29×11

GUIDE : **a.** 88 **b.** 132 **c.** 165 **d.** 330 **e.** 275 **f.** 110 **g.** 121
h. 220 **i.** 253 **j.** 319.

MANUEL : **a.** 77 **b.** 154 **c.** 385 **d.** 550 **e.** 242 **f.** 330 **g.** 231
h. 660 **i.** 198.

La stratégie qui consiste à multiplier le nombre par 10 et à ajouter ce nombre au résultat obtenu est souvent la plus efficace : cela revient à décomposer 11 en $10 + 1$. Mais cette procédure n'est pas toujours la plus simple, par exemple :
 – pour 11×30 , il est plus simple de multiplier 11 par 3, puis le résultat obtenu par 10 ;
 – pour 10×11 , le résultat peut être écrit directement.

Figure 8 : Extrait du guide du maître de Cap Maths quand un des facteurs est 11 (Charnay et al., 2016b, p. 73)

Cap Maths est sensible à la dimension ostensive de l'activité mathématique. En effet, le manuel insiste sur l'importance d'accompagner les décompositions et recompositions par différentes formulations (figures 9 et 10) et d'amener les élèves aux écritures en ligne (appelées « formulation symbolique » ou « langage mathématique ») dont nous avons souligné l'importance. Toutefois, notons que cette richesse n'est pas toujours exploitée. Les écritures en ligne ne sont que partielles dans beaucoup d'exemples où l'égalité ne figure pas (figures 7 et 8).

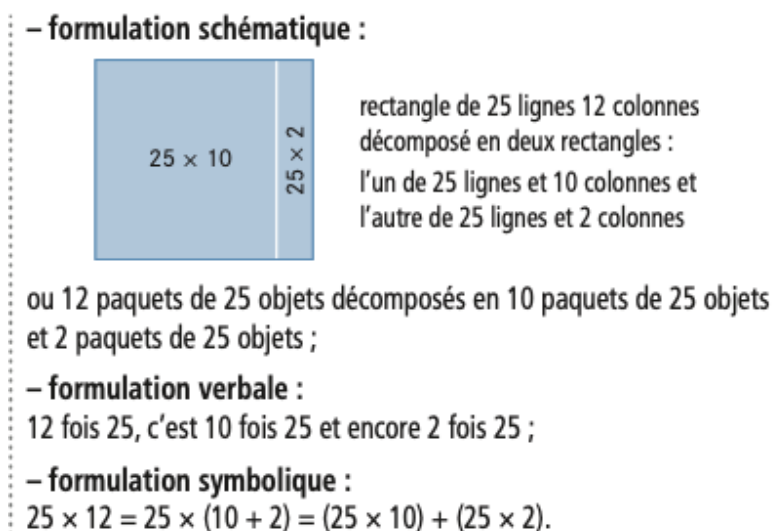


Figure 9 : Extrait du guide du maître de Cap Maths pour 25×12 (Charnay et al., 2016b, p. 19)

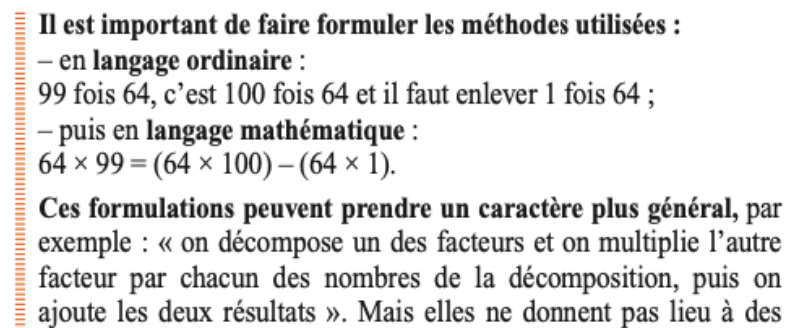


Figure 10 : Extrait du guide du maître de Cap Maths pour 64×99 (Charnay et al., 2016b, p. 19)

3.5 Comparaison des manuels et bilan

Les analyses de ceux manuels font ressortir des caractéristiques assez différentes. Cap Maths contient plus de calculs multiplicatifs réfléchis que Maths explicites et traite toutes les structures de deux facteurs même si certaines ont une faible occurrence. Les structures de décompositions multiplicatives (VT2.1) sont travaillées autant que celles de décompositions additives (VT2.2). Cap Maths ne

suggère à l'enseignant ni de systématiser une technique ni de hiérarchiser les techniques entre elles mais le guide de l'enseignant met en avant la diversité des techniques possibles pour un même calcul. Les nombres rencontrés favorisent ce choix et la réécriture est laissée à la charge des élèves.

Maths explicites traite la majorité des structures de deux facteurs (VT2), mais les décompositions multiplicatives (VT2.1) ne sont que partiellement travaillées, l'accent est mis sur les décompositions additives canoniques (VT2.2.1). Le manuel systématise le travail d'une technique en explicitant la sous-structure (multiplier par 11, par un nombre à deux chiffres). C'est l'application d'un modèle au sein d'un ensemble de calculs ayant la même structure qui est attendu, ce qui limite la responsabilité laissée aux élèves pour reconnaître différentes structures. Seuls quelques exercices pourraient être propices à un réinvestissement des techniques rencontrées et à laisser à l'élève le choix d'une technique appropriée, mais cela n'est pas suggéré.

Enfin, du côté des ostensifs utilisés pour décrire les techniques et les justifier, Cap Maths en propose une diversité, mais sans que les écritures en ligne ne soient systématiquement écrites. Le manuel Maths explicites s'appuie également sur des formulations verbales et des écritures en ligne, ces dernières étant toujours présentes. Mais certaines formulations sont orientées sur l'application de recettes ou de règles peu appuyées par des justifications mathématiques (comme dans la figure 5).

Ainsi, la praxéologie T3.2.3 sur le calcul réfléchi multiplicatif est complète dans Cap Maths et relativement complète dans Maths explicites, ce dernier manuel insistant sur les décompositions additives canoniques. Ces deux manuels offrent donc des potentialités pour travailler les aspects épistémologiques des expressions numériques et favoriser l'activité numérique-algébrique. Toutefois, les analyses font ressortir des faiblesses dans chaque manuel comme la limitation à l'application d'un « modèle » de calcul à partir d'un exemple pour Maths explicites et un faible nombre de calculs visant à systématiser une technique reposant sur une décomposition multiplicative (choix de valeurs de variables de tâches (Vti), notamment Vt2.2, faible) pour Cap Maths.

Conclusion

En conclusion, l'activité numérique-algébrique repose sur plusieurs aspects épistémologiques des expressions algébriques communs à ceux des expressions numériques : les dimensions structurelle et calculatoire de l'équivalence, la valeur monstrative des expressions numériques et algébriques, l'analyticité dans la résolution de problèmes, notamment de généralisation, la mise en relation des données connues et des inconnues dans les problèmes numériques des champs

additifs et multiplicatifs. Notre caractérisation des praxéologies mathématiques relevant de l'activité numérique-algébrique met à jour trois organisations mathématiques locales, et celle sur le calcul sur les expressions numériques a fait l'objet d'un développement plus fin dans ce texte. Nous avons centré l'étude sur le calcul réfléchi (T3.2) et caractérisé les variables de types de tâches et les variables de tâches pour le type de tâche relatif au calcul réfléchi multiplicatif (T3.2.3). Cette caractérisation permet de distinguer des structures de calculs en fonction des propriétés des nombres et des opérations mises en jeu. Pour le calcul multiplicatif, deux structures principales ressortent : celles favorisant une décomposition multiplicative et celles favorisant une décomposition additive. Elles reposent sur des techniques et des technologies différentes.

L'analyse de deux manuels scolaires de CM2 met en évidence des potentialités dans les deux manuels pour travailler des aspects épistémologiques de l'activité numérique-algébrique comme la valeur monstrative d'une expression numérique, les propriétés des nombres et des opérations. Mais l'analyse dévoile aussi des faiblesses et disparités importantes qui seraient certainement à examiner par l'analyse d'une plus grande diversité de manuels de cycle 3, notamment la place des décompositions multiplicatives et des écritures numériques. Ces disparités peuvent affaiblir les potentialités repérées et limiter le travail sur les aspects épistémologiques des expressions numériques qui seront communs avec ceux des expressions algébriques rencontrées dans l'enseignement secondaire par les élèves.

La méthodologie d'analyse de manuels consistant à caractériser les tâches en termes de variables de types de tâches et de variables de tâches s'avère opératoire pour décrire finement les calculs réfléchis multiplicatifs travaillés et les aspects épistémologiques présents. Toutefois, elle serait à compléter par une étude plus systématique de la chronologie des calculs et de leur répartition. De plus, la caractérisation par des variables de types de tâches et des variables de tâches reste à faire pour les calculs réfléchis additifs (T3.2.1), soustractifs (T3.2.2) et de division (T3.2.4). Elle pourrait également être une référence pour définir des supports d'enseignement avec les enseignants.

Références

Adihou, A., Squalli, H., Saboya M., Tremblay, M. et Lapointe, A. (2015). Analyse des raisonnements d'élèves à travers des résolutions de problèmes de comparaison. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes du colloque EMF2015* (p. 206-219). Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene.

Bosch, M. et Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. Dans A. Mercier et C. Margolinas (dir.), *Balises pour la didactique des mathématiques. Actes de la 12^e école d'été de didactique de mathématiques* (p. 107-122). Éditions la Pensée sauvage.

Bronner, A. et Larguier, M., (2018). Éléments d'analyse du curriculum officiel à propos de la pensée algébrique. Dans M. Abboud (dir.), *Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines. Actes du colloque EMF2018* (p. 236-245). Université de Paris.

Bronner, A. et Squalli, H. (2020). Le développement de la pensée algébrique avant l'introduction du langage algébrique conventionnel (vol. 2). *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 22(1), 1-10. <https://doi.org/10.7202/1070022ar>

Bronner, A., et Squalli, H. (2021). La généralisation dans la pensée algébrique. *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, 3, 3-38. <https://rqdm.recherche.usherbrooke.ca/ojs/ojs-3.1.1-4/index.php/rqdm/article/view/32>

Butlen, D. (2007). *Le calcul mental entre sens et technique : recherches sur l'enseignement des mathématiques aux élèves en difficulté, du calcul mental à la résolution de problèmes numériques*. Presses Université de Franche-Comté.

Butlen, D. et Pézard, M. (1992). Calcul mental et résolution de problèmes multiplicatifs, une expérimentation du C.P. au CM2, *Recherches en didactique de mathématiques*, 12(2.3), 319-368.

Butlen, D. et Pézard, M. (2000). Le rôle du calcul mental dans la connaissance des nombres, des opérations et dans la résolution de problèmes. *Repères-IREM*, 41, 5-24.

Castioni L., Budon Dubarry, H., Flament-Taillez, S. et Aboukrat, Y. (2016a). *Maths explicites*. Hachette.

Castioni L., Budon Dubarry, H., Flament-Taillez, S. et Aboukrat, Y. (2016b). *Maths explicites, Guide de l'enseignant*. Hachette.

Charnay, R., Anselmo, B., Combier, G., Dussuc, M.-P. et Madier, D. (2016a). *Cap Maths*. Hatier.

Charnay, R., Anselmo, B., Combier, G., Dussuc, M.-P. et Madier, D. (2016b). *Cap Maths, Guide de l'enseignant*. Hatier.

Chaachoua, H. (2018). T4TEL, un cadre de référence didactique pour la conception des EIAH. Dans J. Pilet et C. Vendeira (dir.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques 2018* (p. 8-25). IREM de Paris - Université Paris Diderot.

Chevallard, Y. (1984). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, 5, 51-94.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, 19, 43-75.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-266.

Chevallard, Y. et Bosch, M. (2012). L'algèbre entre effacement et réaffirmation. Aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. Dans L. Coulanges, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier et A. Robert (dir.), *Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire : bilan et perspectives* (p. 19-39). Éditions La Pensée sauvage.

Grugeon-Allys B., Pilet J., Chenevotot-Quentin F. et Delozanne E. (2012). Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. Dans L. Coulanges, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier et A. Robert (dir.), *Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire : bilan et perspectives* (p. 137-162). Éditions La Pensée sauvage.

Grugeon-Allys, B., Chenevotot-Quentin, F. et Pilet, J. (2022) Using didactic models to design adaptive pathways to meet students' learning needs in an on-line learning environment. Dans P. R. Richard (dir.), *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence. How Artificial Intelligence can serve mathematical human learning?* (p. 157-188). Springer.

Jolivet, S, Lesnes-Cuisiniez, E. et Grugeon-Allys, B. (2021). Conception d'une plateforme d'apprentissage en ligne en algèbre et en géométrie : prise en compte et apports de modèles didactiques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 26, 117-156.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? Dans J. J. Kaput, D. W. Carraher et M. Blanton (dir.), *Algebra in the early grades* (p. 5-18). Routledge.

Kieran, C. (2007) Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: building meaning for symbols and their manipulation. Dans F. K. Lester (dir.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 707-762). Information Age.

Kieran, C. (2018). *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*. Springer.

- Kieran, C. et Martínez-Hernández, C. (2022). Structure sense at early ages: The case of equivalence of numerical expressions and equalities. Dans T. Rojano (dir.), *Algebra Structure Sense Development amongst Diverse Learners* (p. 35-66). Routledge.
- Lee, L. (1997). *Algebraic understanding: The search for a model in the mathematics education community* [thèse de doctorat inédite]. Université du Québec à Montréal.
- Linchevski, L. et Livneh, D. (1999). Structure sense: the relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 40, 173-196.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. Dans N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), *Approaches to algebra* (p. 65-86). Kluwer.
- Mounier, E. et Priolet, M. (2015). *Les manuels scolaires de mathématiques à l'école primaire. De l'analyse descriptive de l'offre éditoriale à son utilisation en classe élémentaire*. Rapport présenté lors de la conférence de consensus. Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire. IFÉ-ENS.
- Pilet, J. (2015). Réguler l'enseignement en algèbre élémentaire par des parcours d'enseignement différencié. *Recherches en didactique des mathématiques*, 35(3), 273-312.
- Pilet, J. et Grugeon-Allys, B., (2020) Quelles potentialités du calcul en ligne dans l'enseignement primaire en France pour favoriser une entrée précoce dans l'algèbre? Dans H. Squalli, I. Oliveira, A. Bronner et M. Larguier (dir.), *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires*. Livres en ligne du CRIRES. <https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches>
- Pilet, J. et Grugeon-Allys, B. (2021). L'activité numérique-algébrique à la transition entre l'arithmétique et l'algèbre. *Éducation et didactique*, 15(2), 9-26. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.8580>
- Piolti-Lamorthé, C. et Roubin, S. (2010). Le calcul réfléchi : entre sens et technique. *Bulletin APMEP*, 488, 272-280.
- Radford, L. (2013). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Group of Australia*, 26, 257-277. <https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2>
- Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. et Gascón, J. (2020). Un modèle épistémologique de référence pour la recherche sur l'algèbre élémentaire. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 22(1), 123-144.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Sirejacob, S. (2017). *Le rôle de l'enseignant dans l'organisation de l'étude personnelle hors la classe de collégiens : le cas des équations du premier degré à une inconnue* [thèse de doctorat, Université Paris-Diderot]. TEL. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01686587>

Squalli, H. et Bronner, A. (2017). Le développement de la pensée algébrique avant l'introduction du langage algébrique conventionnel (vol. 1). *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 20(3), 18. <https://doi.org/10.7202/1055725ar>

Squalli, H., Oliveira, I., Bronner, A. et Larguier, M. (2020). *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires*. Livres en ligne du CRIRES. <https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches>

Vlassis, J., Demonty, I. et Squalli, H. (2017). Développer la pensée algébrique à travers une activité de généralisation basée sur des motifs (patterns) figuratifs. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 20(3), 131-155. <https://doi.org/10.7202/1055731ar>