Étude des correspondances entre les activités mathématiques des élèves placés en résolution de problèmes et celles des mathématiciens

Rox-Anne L'ITALIEN-BRUNEAU
University of Auckland
r-a.litalien-bruneau@auckland.ac.nz

Résumé : La résolution de problèmes est parfois décrite comme une façon de faire vivre les mathématiques aux élèves. Pour la promouvoir, certains avancent que les élèves en résolution de problèmes mettraient en route des activités similaires à celles des mathématiciens. Cette similitude est étudiée dans cet article à travers une conceptualisation du travail des mathématiciens développée pour l'analyse des activités des élèves placés en résolution de problèmes. Ce travail met en lumière les correspondances entre le travail des mathématiciens et celui des élèves et illustre comment le contexte de résolution de problèmes favorise ces correspondances.

Mots-clés : résolution de problèmes, activités mathématiques, activités des élèves, mathématiciens

Investigation of students' mathematical activities in problem-solving contexts

Abstract: Researchers have sometimes referred to mathematicians and their daily activities to promote problem solving in mathematics classrooms. For many, problem-solving environments allow students to experience what mathematicians do in their daily tasks for their research. This hypothesis is at the heart of this paper. One way to examine students' work in problem-solving contexts is to describe the work of mathematicians, as an analysis tool. This paper illustrates the correspondences between mathematicians' and students' activities and offers insights into how problem-solving contexts frame these correspondences.

Keywords: problem solving, mathematical activities, activities of students, mathematicians

Revue québécoise de didactique des mathématiques, 2023, *Numéro thématique 1* (Tome 2), p. 38-65. https://doi.org/10.71403/8x88qm81

Introduction

Les mathématiciens ont une posture importante en didactique des mathématiques alors qu'ils sont souvent utilisés pour informer le travail qui pourrait être fait dans la classe, avec les élèves. Cette référence aux mathématiciens, lorsqu'utilisée pour faire la promotion de la résolution de problèmes, se trouve au cœur du travail présenté dans cet article. En particulier, je cherche à étudier les correspondances entre le travail des mathématiciens et celui des élèves en contexte de résolution de problèmes. Pour ce faire, j'illustre d'abord de quelle façon certains travaux en didactique des mathématiques assument ces correspondances pour supporter la place de la résolution de problèmes en classe de mathématiques. J'offre ensuite une conceptualisation possible du travail des mathématiciens, axée ici sur la dimension de production de mathématiques, avant de détailler le processus d'analyse appuyé par cette conceptualisation. Par la suite, je présente, avec différents exemples d'activités d'élèves, le genre d'analyse menée dans le cadre du projet. Tout ceci permet finalement de tirer certaines conclusions quant à l'impact du contexte de résolution de problèmes sur les activités des élèves placés dans un tel contexte.

1. Origine du questionnement

La résolution de problèmes est parfois présentée comme une occasion de « faire vivre » les mathématiques aux élèves. Dans cette perspective particulière de la résolution de problèmes, celle-ci ne sert pas nécessairement à l'enseignement de concepts précis, ou encore, à entrainer les élèves à résoudre des problèmes, mais plutôt à faire faire des mathématiques aux élèves (Stanic et Kilpatrick, 1989). Pour supporter cette façon de travailler avec les élèves en classe, certains auteurs se réfèrent explicitement aux mathématiciens et expliquent que la résolution de problèmes offrirait aux élèves de « vivre » les mathématiques à travers la mise en route des activités des mathématiciens.

Un premier exemple de référence aux mathématiciens pour appuyer la résolution de problèmes provient de Lampert (1990a, 1990b). Selon elle, le travail non linéaire des mathématiciens, axé sur les déductions, les conjectures, la réflexion et le développement d'arguments, doit être vécu par les élèves. Pour Lampert (1990a), la résolution de problèmes permettrait ce rapprochement alors que, comme les mathématiciens, les élèves :

- feraient des mathématiques en s'impliquant dans un travail collaboratif qui porte sur des questions sincères et qui demande humilité, curiosité et honnêteté.
- exploiteraient leurs connaissances mathématiques en appuyant leurs idées sur des observations et arguments de nature mathématique.

- établiraient les vérités mathématiques de la classe à travers des discussions mathématiques supportées par une argumentation logique.

Un autre exemple de référence aux mathématiciens pour appuyer la résolution de problèmes en classe provient des travaux de Richards (1991). Ce dernier s'intéresse aux différents types de discours associés aux mathématiques. Il avance que le « discours de recherche », un discours appartenant aux mathématiciens et axé sur l'exploration, les conjectures et la réfutation et validation de ces conjectures, pourrait inspirer la classe de mathématiques. Principalement, il propose d'y introduire le « discours investigateur », un discours basé sur celui des mathématiciens qui permet d'agir de façon mathématique. Selon lui, ce discours permettrait de mettre en avant la culture mathématique singulière des mathématiciens :

> Le comportement mathématique est l'activité des mathématiciens. Le discours de recherche, comme activité humaine socialement construite, a une culture et tradition unique […] Je regarde la nature de cette culture dans le but d'étudier son unicité et son potentiel comme assises du discours investigateur. (Richards, 1991, p. 22, traduction libre[1])

Richards ne réfère donc aux mathématiciens, et à leur discours, qu'afin de promouvoir le discours investigateur en classe. Ce discours s'aligne sur la résolution de problèmes, car il place les élèves au cœur du travail mathématique et est centré sur les questionnements, les conjectures et l'argumentation.

Un dernier exemple de références aux mathématiciens pour inspirer le travail des élèves provient de Schoenfeld (1991, 1994). Afin de promouvoir la résolution de problèmes en classe, l'auteur s'appuie sur ce que font quotidiennement les mathématiciens :

> Si on croit que la communauté mathématique se heurte à des problèmes mathématiques sérieux en collaborant, en faisant des tentatives d'explications aux phénomènes qu'elle étudie et en revenant constamment sur ces explications, alors les pratiques dans nos classes devraient refléter ces croyances. (Schoenfeld, 1994, p. 60-61, traduction libre[2])

---

[1] « Mathematical behavior is the activity of mathematicians. Research mathematics, as a socially constructed human activity, has a unique culture and tradition. […] I look at the nature of this culture in order to examine how it is unique and how this culture provides a basis for inquiry maths. » (Richards, 1991, p. 22)

[2] « If we believe that mathematical community grapples with serious mathematical problems collaboratively, making tentative explanations of these phenomena, and the cycling back through those explanations […], then our classroom practices must reflect these beliefs. » (Schoenfeld, 1994, p. 60-61)

En se référant ainsi aux mathématiciens, Schoenfeld souligne la nécessité d'offrir aux élèves l'occasion de se poser des questions, de tenter d'y répondre, de donner du sens aux concepts avec lesquels ils travaillent et d'échanger avec leurs pairs pour déterminer la validité de leurs idées mathématiques. Pour plonger les élèves dans un tel travail, Schoenfeld propose la résolution de problèmes qui, selon lui, amènerait les élèves à mettre en route des activités similaires à celles des mathématiciens.

En somme, les travaux présentés ci-haut illustrent la façon avec laquelle les mathématiciens et leur travail sont utilisés pour appuyer un enseignement axé sur la résolution de problèmes. Bien que le rôle des mathématiciens comme modèle pour la classe de mathématiques puisse être remis en doute (Maheux et al., 2019), il demeure que pour plusieurs auteurs, la résolution de problèmes alignerait le travail des élèves sur celui des mathématiciens. Toutefois, ces correspondances entre le travail des mathématiciens et celui des élèves en contexte de résolution de problèmes demeurent une hypothèse qui mérite d'être explorée plus en détail. Le projet de recherche présenté ici porte principalement sur ces correspondances et cherche à répondre à la question suivante : De quelles façons sont mobilisées les activités des mathématiciens chez les élèves placés en résolution de problèmes?

2. Cadre de référence

Pour donner un sens plus précis à cette question de recherche, deux conceptualisations ont été développées. La première concerne le contexte de résolution de problèmes et la deuxième aborde les activités des mathématiciens. Ces deux conceptualisations sont détaillées dans ce qui suit puis la question de recherche est ensuite précisée.

2.1 Le contexte de résolution de problèmes

Le contexte de résolution de problèmes au cœur du travail présenté ici correspond à celui abordé par les travaux qui sous-entendent que la résolution de problèmes permet de rapprocher le travail des élèves à celui des mathématiciens. Dans cette perspective de la résolution de problèmes, appelée résolution de problème comme « art » par Stanic et Kilpatrick (1989), l'objectif est d'amener les élèves à vivre une activité mathématique dite authentique sans viser l'apprentissage de concepts mathématiques ou de méthodes de résolution de problèmes en particulier. Des exemples de ceci, comme les « problèmes ouverts » d'Arsac et al. (1988), les « situations-problèmes » de Brousseau (1998) ou encore les « tableaux verticaux » (Liljedahl, 2016), ont permis de dégager certaines caractéristiques du contexte de la résolution de problèmes comme art (L'Italien-Bruneau, 2020) :

1) Les interactions entre les élèves, problèmes et solutions : les élèves ont accès aux idées et solutions de leurs pairs, et peuvent intervenir sur ces propositions.
2) La liberté mathématique : les élèves ont l'occasion d'explorer les idées, questions et stratégies qui leur semblent intéressantes tout en ayant la responsabilité de rendre ces explorations importantes pour l'avancement de la résolution de problèmes.
3) L'incertitude : les élèves sont confrontés à l'incertitude et doivent trouver des façons de déterminer la validité des propositions ainsi que démêler ce qui fonctionne et ne fonctionne pas.
4) L'autorité mathématique à la classe : les élèves sont responsables de déterminer la validité des propositions offertes et de convaincre les autres élèves ainsi que l'enseignant de cette validité ou invalidité.

Tel que l'illustrent les exemples de contexte de résolution de problèmes mentionnés ci-haut, les façons d'instaurer la résolution de problèmes comme « art » et ses quatre caractéristiques sont nombreuses et variées, certaines appelant davantage à une gestion particulière de la classe par l'enseignant, et d'autres nécessitant la formulation d'un certain type de problème. Toutefois, peu importe la façon avec laquelle l'environnement de résolution de problèmes est instauré en classe, l'hypothèse au cœur de ce travail demeure : cet environnement permettrait de rapprocher le travail des élèves à celui des mathématiciens.

2.2 Les activités des mathématiciens

La deuxième conceptualisation au cœur de la question de recherche concerne ce que font quotidiennement les mathématiciens dans le cadre de leurs travaux de recherche. Cette conceptualisation s'accorde avec les différents travaux présentés dans la section précédente alors qu'elle vise à mettre en avant ce qui est entendu par « activités des mathématiciens » dans ma question de recherche, soit le « comportement mathématique » comme l'appelle Richards (1991, p. 2). L'objectif de cette conceptualisation est de dégager les différentes activités mobilisées par les mathématiciens pour ensuite s'y référer lors de l'analyse du travail des élèves en résolution de problèmes.[3]

En particulier, cette conceptualisation a été développée à partir de la recension de différents travaux s'intéressant au travail des mathématiciens : 1) des études qui rapportent des entrevues menées auprès de mathématiciens (p. ex. Burton, 2004; Burton et Morgan, 2000), 2) des livres écrits par des mathématiciens sur leurs propres expériences (p. ex. Davis et Hersh, 1981) et 3) des travaux empiriques

[3] Voir L'Italien-Bruneau (2020) pour plus de détails sur la construction de cette conceptualisation.

portant sur les façons de faire des mathématiciens (p. ex. Lockwood et al., 2016; Silver, 1994; Heinze, 2010).

À travers ces différents travaux, trois dimensions ont été dégagées dans le travail des mathématiciens et concordent avec les différentes motivations qui alimentent ce que font les mathématiciens. Ces trois dimensions sont les suivantes :

- La « production des mathématiques » regroupe des activités qui ont pour but de développer des résultats mathématiques et contribuer de manière significative aux connaissances mathématiques de leurs communautés.
- La « communication des mathématiques » correspond aux activités qui visent à partager et à rendre publics des résultats mathématiques, autant sous forme d'articles, de livres, que de conférences ou de séminaires.
- La « validation des mathématiques » englobe les activités liées à la validation et à l'évaluation des résultats de leurs communautés. Les mathématiciens s'assurent ici que les résultats correspondent aux attentes des communautés mathématiques.

Ces dimensions interdépendantes et non linéaires sont un premier niveau de conceptualisation du travail des mathématiciens. Elles offrent une première entrée dans la compréhension de ce que font les mathématiciens dans leurs travaux et permettent aussi d'organiser la conceptualisation développée. Comme elles ne sont qu'une première entrée, il est ainsi possible qu'une même action puisse être associée à plus d'une dimension, selon le contexte. Notamment, dans L'Italien-Bruneau (2020), le travail avec des exemples se retrouve dans chacune des trois dimensions et est mobilisé différemment, selon la dimension décrite.

2.2.1 La production des mathématiques

Dans un but de concision, seulement la dimension de « production » sera abordée dans la suite de l'article. Celle-ci regroupe des activités qui contribuent à l'exploration et l'élaboration de résultats mathématiques. Entre autres, les mathématiciens cherchent à produire des mathématiques en généralisant des résultats et en déduisant des structures et des propriétés d'objets mathématiques (Burton, 2004; Davis et Hersh, 1981). En ce sens, les résultats sur lesquelles travaillent les mathématiciens peuvent être aussi vastes que des définitions, des conjectures, des théorèmes, des preuves, des arguments et des méthodes. Dans ce qui suit, six composantes sont décrites et exemplifiées pour illustrer ce que mettent en route les mathématiciens pour progresser dans leurs travaux de recherche et ainsi, contribuer à leurs communautés.

Formuler des problèmes. Selon plusieurs mathématiciens rencontrés par Misfeldt et Johansen (2015), la formulation de problèmes permet de cadrer et d'orienter leur travail d'exploration. Ces problèmes sont souvent choisis pour que leurs résolutions contribuent à la communauté tout en concordant avec les expériences et intérêts des mathématiciens qui les formulent (Silver, 1994). Les problèmes sont donc souvent issus d'autres résultats qui sont explorés davantage (Burton, 2004). De plus, comme le mentionne un mathématicien dans Misfeldt et Johansen (2015), la résolution d'un problème est une façon de générer des idées et de trouver de nouvelles questions à explorer.

Un exemple de formulation de problèmes chez les mathématiciens provient de la résolution du problème du théorème des quatre couleurs énonçant que quatre couleurs suffisent pour colorier n'importe quelle carte géographique sans que deux régions partageant une limite aient la même couleur (Walters, 2004). En bref, la conjecture de ce théorème a d'abord été formulée par Guthrie puis explorée sous l'angle des régions. Kempe, un autre mathématicien, l'a reprise en transposant la conjecture à la théorie des graphes et a tenté de résoudre la preuve en réduisant les configurations possibles à quatre cas. Sa preuve fut acceptée pendant quelques années avant d'être invalidée. D'autres mathématiciens, Appel et Haken, se sont ensuite réapproprié le problème et ont utilisé des ordinateurs pour tester les nombreux cas réduits possibles. Ici, le travail d'une « même » preuve est donc approché de diverses façons, selon les intérêts et les expériences des mathématiciens qui se penchent sur la question.

Concevoir des liens. La production de résultats mathématiques passe souvent par la mise en relation d'idées et de concepts mathématiques chez les mathématiciens (Davis et Hersh, 1981). Les mathématiciens établissent ces liens entre des idées afin de mettre en lumière certaines propriétés des objets avec lesquels ils travaillent. Ceci leur permet de mieux comprendre, ou de comprendre différemment, certains résultats mathématiques et ainsi alimenter le développement de résultats mathématiques.

Un exemple de production des mathématiques liée à la conception de liens est issu du travail de Klein (Struik, 2012). En réponse au manque de connexions entre différents domaines mathématiques, Klein a établi des relations entre deux champs de recherche en conceptualisant le domaine de la géométrie à travers la théorie des groupes. Appuyé par cette façon de comprendre les géométries, Klein a ainsi développé certaines propriétés et théorèmes géométriques qui l'ont éventuellement amené à créer la bouteille de Klein :

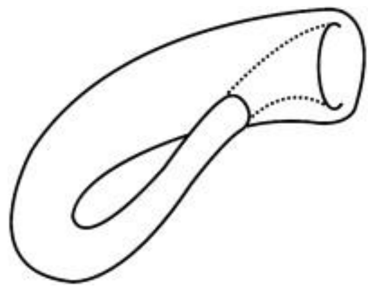

Figure 1. Bouteille de Klein (Gay, 2014, p. 148)

Générer et étudier des exemples. Les mathématiciens travaillent avec des exemples et des contre-exemples pour définir des objets mathématiques, identifier et étudier des propriétés, mieux comprendre un résultat mathématique (Lynch et Lockwood, 2017). Les mathématiciens trouvent, choisissent et étudient des exemples qui leurs permettent donc de progresser dans le développement de leurs résultats mathématiques. Dans certains cas, l'étude de contre-exemples permet de préciser un résultat mathématique parce qu'il met en lumière des éléments à retravailler.

C'est entre autres ce qui est illustré dans le livre de Lakatos (1976), où le récit de quelques résultats mathématiques est présenté. L'auteur raconte qu'un cube creux qui contredisait une version antérieure de la formule d'Euler a été étudié et a permis de restreindre le domaine d'application de la formule. Ceci montre que les contre-exemples trouvés ne sont pas la fin d'un résultat mathématique, mais sont plutôt, comme les exemples, la source d'un important travail mathématique.[4]

Créer et exploiter le symbolisme La représentation symbolique prend une place importante dans le travail des mathématiciens lorsqu'ils développent des résultats mathématiques. Cette composante est si vaste qu'elle est déclinée sous trois sous-composantes :

***Représentation et manipulation symboliques*.** Lors de la production de mathématiques, les mathématiciens se servent de symboles pour représenter des objets, relations, opérations et ainsi rendre possible ou faciliter l'avancement des idées. Un exemple de ceci est la notation fonctionnelle ci-dessous :

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

[4] Cet exemple de la composante **Générer et étudier des exemples** montrent bien qu'il est possible d'associer deux dimensions à un même travail mathématique. Ici, le travail sur le contre-exemple a d'abord permis d'invalider une idée mathématique, ce qui peut être associé à la dimension de « validation », avant de supporter un travail de « production » axé sur le changement du domaine d'application.

La fonction f est ici définie en utilisant des symboles mathématiques qui ont des sens précis et qui permettent de faire appel de façon simplifiée à différentes idées telles que : les nombres naturels, les relations, la puissance deux. Le travail mathématique pouvant être fait avec la fonction f est ensuite simplifié : il suffit d'employer le symbole pour faire appel à la fonction et sa signification, sans toutefois la définir de nouveau. Le travail avec les représentations symboliques implique aussi l'association, la transformation, l'ajout ou le retrait de symboles. Toutes ces manipulations se font en fonction du sens que représentent les symboles, mais aussi de l'objectif de ces manipulations (Davis et Hersh, 1981). La manipulation symbolique implique donc des allers-retours constants entre les symboles, les idées qu'ils représentent et le but de ces manipulations.

Élaboration de symbolisations nouvelles. Dans certains cas, les mathématiciens ont besoin de mettre en place des notations qui représentent des nouveaux concepts. Par exemple, la symbolisation $n!$ pour la factorielle d'un nombre, correspondant au produit des n premiers nombres naturels positifs (Struik, 2012). D'une certaine façon, lorsque les mathématiciens travaillent avec de nouveaux objets, ils ont besoin de les représenter pour rendre possible un certain travail sur ces objets. Par la suite, l'utilisation des nouveaux symboles par la communauté dépend de ce qu'en fait cette communauté. Les symboles mathématiques connus aujourd'hui ont gagné leur signification à travers l'utilisation fréquente et cohérente qu'en ont faite les mathématiciens au fil du temps.

Explorations permises par la symbolisation. L'exploitation du symbolisme chez les mathématiciens se caractérise aussi par l'exploration d'idées mises en lumière par la symbolisation. Comme le symbole n'est pas exactement et uniquement l'objet qu'il représente ni sa définition, il arrive que les mathématiciens se servent d'une notation particulière pour rendre évidentes des idées laissées implicites par la définition, mais rendues claires par la notation employée (Davis et Hersh, 1981). À titre d'exemple, Davis et Hersh abordent la notation de Leibnitz pour les dérivées d'ordres supérieurs : Df pour la dérivée première, , D^2f pour la dérivée seconde, D^3f pour la dérivée troisième, etc. De façon plus générale, la notation D^af a permis de s'intéresser aux différentes valeurs de a et à la signification de la différenciation lorsque a prend des valeurs rationnelles ou négatives. Cette symbolisation a donc permis de générer de nouvelles explorations mathématiques.

Appliquer des méthodes. Chez les mathématiciens, des méthodes sont fréquemment utilisées pour faire avancer efficacement la production des mathématiques (Burton, 2004). Ces méthodes, comme des algorithmes, des techniques ou des opérations, sont souvent présentées comme une suite d'étape à appliquer pour obtenir un résultat qui sera considéré comme valide. En ce sens, lorsque les mathématiciens appliquent des méthodes, ils ne considèrent pas les raisons et arguments derrière chaque étape et assument que le résultat obtenu sera valide.

Un exemple de ceci provient de Davis et Hersh (1981) alors que les auteurs discutent d'un mathématicien qui a recours aux séries de Taylor afin de trouver la limite d'une équation donnée en 0. En bref, les séries de Taylor permettent d'approximer une fonction à l'aide d'une somme infinie, construites à partir des dérivées successives de la fonction. Ceci permet de simplifier le travail nécessaire à l'aide d'une méthode considérée comme valide sans avoir besoin de questionner et d'expliquer chaque étape de la méthode. En d'autres mots, c'est une méthode établie, reconnue par la communauté de mathématiciens.

Créer des mathématiques. Les composantes précédentes (concevoir des liens, exploiter le symbolisme, appliquer des méthodes, formuler des problèmes, étudier des exemples) contribuent à progresser dans la production de mathématiques. À partir des idées travaillées au travers ces autres composantes, les mathématiciens vont aussi parfois innover : ils identifient des structures et des propriétés ou développent des définitions, des méthodes et des conjectures. Ces innovations peuvent servir à progresser dans leur production de mathématiques ou encore, contribuer significativement à la communauté mathématique.

Un exemple de création mathématique est la conjecture du théorème des quatre couleurs abordé plus tôt. Guthrie a formulé sa conjecture en 1852 après avoir colorié une carte des régions d'Angleterre puis remarqué qu'il était possible de le faire avec seulement quatre couleurs sans que deux régions limitrophes n'aient la même couleur (Walters, 2004). C'est alors qu'il a voulu savoir si sa conjecture était vraie pour n'importe quelle carte et s'il était possible de la prouver. La bouteille de Klein abordée plus tôt est aussi un exemple de création mathématique et cet objet est encore utilisé aujourd'hui en topologie comme exemple de surface avec des propriétés particulières.

Pour conclure cette section à propos des activités des mathématiciens, cette conceptualisation se distingue d'autres conceptualisations du travail des mathématiciens puisqu'elle met en lumière ce que mettent en route quotidiennement les mathématiciens pour produire des mathématiques. D'autres conceptualisations, axées par exemple sur l'intuition (Dieudonné, 1975), la créativité (Sriraman, 2009) ou le travail de la preuve (Balacheff, 1987), entrent de façon très précise sur ces aspects et dans leurs rôles dans le travail des mathématiciens. Ces éléments sont essentiels dans le travail des mathématiciens, mais ils ne permettent pas d'illustrer ce que *font* les mathématiciens. Dans le cadre du travail proposé ici, la conceptualisation offerte permet de détailler ce qui se retrouverait dans le travail des élèves placés en résolution de problèmes selon les divers arguments présentés à la section 1. En ce sens, les composantes abordées ci-haut sont reprises dans le travail d'analyse présenté à la section 4.

2.3 Précision de la question de recherche

À la lumière des conceptualisations du contexte de résolution de problèmes et du travail des mathématiciens sous la dimension production des mathématiques, il est possible de préciser la question de recherche et de la décliner en quelques sous-questions : Est-ce que les composantes du travail des mathématiciens se retrouvent dans le travail des élèves placés en résolution de problèmes? Comment se manifestent ces composantes? Comment la résolution de problèmes et ses caractéristiques suscitent-elles et encouragent-elles la mise en oeuvre des activités des mathématiciens chez les élèves?

3. Méthodologie

L'environnement de résolution de problèmes, tel que décrit à la section 2.1, est au cœur du projet présenté ici. Dans le but de tenir compte de ce contexte pour l'étude des activités des élèves, la méthodologie qualitative/interprétative est employée car elle « permet au chercheur de comprendre, de l'intérieur, la nature et la complexité des interactions d'un environnement déterminé » (Savoie-Zajc, 2018, p. 193). D'une certaine façon, cette méthodologie propose de considérer les particularités du contexte et des interactions qui y ont lieu pour l'étude des activités des élèves.

Ensuite, les données de recherche analysées pour étudier les activités des élèves en contexte de résolution de problèmes proviennent d'un autre projet de recherche mené par le professeur Jérôme Proulx (Proulx, 2020). L'objectif principal de ce projet était d'étudier les raisonnements et stratégies des élèves en calcul mental. Des séances de travail en groupe-classe ont été organisées dans le but de faire émerger ces raisonnements et avaient, de manière générale, la structure suivante :

- Un problème est proposé aux élèves qui doivent d'abord tenter de le résoudre individuellement.
- Le chercheur-enseignant demande aux élèves de partager leurs réponses et les écrit au tableau, ou invite les élèves à partager leurs résolutions.
- En plénière, les stratégies et solutions sont alors remises en question, reformulées, expliquées, comparées, mises à l'épreuve et exemplifiées par les élèves et le chercheur-enseignant.
- Tout ce travail est non linéaire alors qu'en cours de résolution, il arrive que de nouveaux problèmes émergent et soient explorés par la classe.

En cherchant à faire émerger les raisonnements et stratégies mathématiques des élèves, le chercheur-enseignant organise leur travail de façon à instaurer un environnement de résolution de problèmes comme entendu dans cet article (voir section 2.1). Il favorise d'abord les interactions entre élèves, problèmes et solutions en invitant les élèves à partager leurs questions, solutions et stratégies. Il met ensuite à profit les idées partagées en invitant les élèves à s'y intéresser à travers des questionnements supplémentaires. Il travaille donc avec les idées proposées pour alimenter l'émergence de raisonnements et des stratégies supplémentaires. Ensuite, le chercheur-enseignant laisse place aux propositions des élèves, car celles-ci sont centrales dans son travail de recherche. Cette « liberté » offerte aux élèves vient, en contrepartie, avec des demandes d'explications et justifications nécessaires pour le travail de recherche du chercheur-enseignant. De plus, « l'incertitude » est un outil important du chercheur-enseignant lui permettant de creuser et de faire émerger certains détails et limites des raisonnements d'élèves et se retrouve donc au cœur du travail fait en classe. Cette incertitude devient aussi parfois un moteur pour le développement de stratégies et raisonnements supplémentaires par les élèves. Finalement, en laissant l'autorité à la classe, le chercheur-enseignant alimente le partage de raisonnements et stratégies axé sur l'argumentation et la justification. Tout ceci montre que l'environnement particulier qu'instaure le chercheur-enseignant à travers ses propres objectifs de recherche s'aligne sur le contexte de résolution de problèmes abordé ici. Ce qui est décrit ici met l'accent sur la gestion du chercheur-enseignant qui crée un environnement de résolution de problème en classe. Bien que l'on aurait pu se concentrer sur d'autres aspects de cet environnement, tels que le problème lui-même, le cas étudié met plutôt en avant la gestion de l'activité par l'enseignant.

Les 13 séances ont été organisées dans une classe de 5^{e} année (10-11 ans) regroupant 27 élèves. En général, elles étaient d'une durée de 35 à 40 minutes et ont été enregistrées sur vidéo. Les traces laissées au tableau blanc interactif à chaque séance ont aussi été sauvegardées et analysées. Le processus d'analyse mené est inspiré du modèle de Powell et al. (2003) développé particulièrement pour l'analyse de données dans un contexte de travail mathématique ancré dans la résolution de problèmes. Ce modèle permet donc d'étudier ce que font les élèves mathématiquement à travers les étapes suivantes :

1) Visionnements répétés : les séances ont été visionnées plusieurs fois dans le but de développer une certaine familiarité avec leur déroulement.
2) Identification et transcription des moments clés : dans les séances, un moment clé correspond à une parole, un geste ou un écrit d'élèves qui contribuent à l'avancement des mathématiques de la classe.

3) Codage des moments clés : chaque moment clé est associé à une ou des composantes du travail des mathématiciens. Cette étape est effectuée à l'aide de grilles d'analyse inspirées de la conceptualisation du travail des mathématiciens présentés à la section 2. Ces grilles ont été développées en adaptant le travail des mathématiciens à la classe en résolution de problèmes afin d'anticiper certains observables qui permettent de reconnaître le travail des mathématiciens dans ce que font les élèves.
4) Construction de sens : les moments clés associés à une même composante ont été étudiés pour en dégager des tendances sur la façon avec laquelle les élèves mettent en route chaque composante du travail des mathématiciens.

4. Analyse des données et interprétations

Pour illustrer le type d'analyses menées dans la recherche abordée ici, des extraits d'une même séance de résolution de problèmes sont présentés de façon chronologique. Ces extraits, représentatifs du genre de travail fait par les élèves dans les séances analysées, sont ici mis en relation avec une composante du travail des mathématiciens. Bien que plusieurs composantes du travail des mathématiciens puissent être associées à un même extrait, une seule composante est abordée pour chaque extrait dans le but de rendre claire et précise l'analyse menée pour chaque composante. De plus, le travail d'analyse sur les extraits est ici orienté sur ce que font les élèves pour étudier si ceci correspond au travail des mathématiciens. En ce sens, les gestes, paroles et écrits des élèves sont considérés même s'ils conduisent parfois à des erreurs ou des idées invalides. Finalement, pour chaque composante présentée, des exemples supplémentaires d'activités d'élèves provenant d'autres séances sont aussi présentés puis brièvement étudiés afin d'offrir un portrait plus clair des résultats obtenus.

4.1 Début de la séance

La séance était orientée autour du problème suivant :

> 46, 70, 81, 106 - Parmi ces nombres, lesquels sont divisibles par 2 ?

Le problème a été affiché au tableau de la classe et les élèves ont eu quelques secondes pour réfléchir à une réponse. Ils ont ensuite été invités à lever la main pour répondre à la question.

4.2 Appliquer des méthodes

Chez les mathématiciens, l'application de méthodes passe par l'utilisation d'une suite d'étapes qui permettent d'obtenir des résultats sans remettre en doute la validité des étapes et de la réponse trouvée. C'est ce que fait ici Simon pour déterminer que le nombre 46 est pair.

Extrait 1

Un premier élève, Guillaume, répond que 46 est un nombre pair et explique:

Guillaume : 4, on peut le… le 4… on peut le séparer et le 6 aussi.

Ch.-ens. : qu'est-ce que vous en pensez?

Vincent : Je le divise par deux, ça fait 23.

Le chercheur-enseignant dit vouloir revenir plus tard sur cette réponse et demande aux élèves ce qu'ils pensent de la stratégie de Guillaume. Simon lève sa main et explique :

Simon : C'est comme si tu regardes le 4 et le 6 pour savoir si c'est un nombre pair ou impair. Les deux, ce sont des nombres pairs, à cause de 0-2-4-6-8, et les nombres pairs se divisent par deux

Le travail de Simon et Guillaume dans cet extrait est caractérisé par l'efficacité de leur raisonnement. Dans leurs explications, les deux élèves ne s'intéressent pas aux détails de la méthode et appliquent la suite d'étapes : regarder chacun des chiffres qui composent un nombre et s'il se divise par deux, alors le nombre est divisible par deux. Lorsque le chercheur-enseignant demande aux élèves ce qu'ils pensent de la stratégie de Guillaume, Simon décortique la méthode, mais dans ses explications, il insiste de nouveau sur les étapes, et non sur la signification mathématique de ces étapes. Bien que la méthode ne soit pas valide avec n'importe quel nombre, elle est traitée comme une méthode connue des élèves, qui ne nécessite pas d'explication ou de justification des étapes. Ceci rappelle la façon avec laquelle les mathématiciens utilisent des méthodes qui ont gagné une certaine reconnaissance avec le temps, et qui peuvent être employées sans considérer leur validité (Davis et Hersh, 1981).

Un autre exemple d'**application de méthodes** chez les élèves provient d'une séance dans laquelle, au cours de la résolution du problème initial, un élève souhaitait faire la soustraction $132 - 125$. Après avoir plutôt écrit $125 - 132$ et obtenu 143, un autre élève lève sa main et explique : « Si tu avais fait 132 moins 125, tu aurais barré ton 3, tu aurais mis un 2 avec le 1 à côté du 2, ça donne 7. 2 moins 2, zéro, et 1 moins 1 c'est zéro. » Il est possible de reconnaître ici l'algorithme de soustraction qui a été appliqué, sans toutefois aucune mention explicite d'emprunts, de retenues ou de valeur de position. Alors que ces détails auraient permis de comprendre le fonctionnement de l'algorithme, ils ont été omis pour laisser place à l'efficacité de la méthode.

4.3 Concevoir des liens

Pour produire des résultats mathématiques, les mathématiciens mobilisent des idées pour les mettre en relation avec d'autres. Ceci leur permet d'alimenter leurs compréhensions mathématiques. C'est ce que fait ici Vincent avec sa réponse au problème initial :

> Extrait 2
>
> Simon : C'est comme si tu regardes le 4 et le 6 pour savoir si c'est un nombre pair ou impair. Les deux, ce sont des nombres pairs, à cause de 0-2-4-6-8, et les nombres pairs se divisent par deux
>
> Le chercheur-enseignant demande ensuite aux élèves de tenter de comprendre la méthode de Guillaume. Vincent lève sa main et explique
>
> Vincent : 4 divisé en deux donne 2, et que 6 divisé en deux donne 3, donc 23.

Ici, Vincent met en relation sa propre résolution du problème avec celle de Guillaume. Entre autres, il considère le 4 et le 6 séparément, comme le fait Guillaume, et il montre que ces deux nombres sont pairs puisque la division par deux donne respectivement 2 et 3. Il ajoute que ce 2 et ce 3 deviennent 23, c'est-à-dire sa réponse donnée précédemment. D'une certaine façon, Vincent donne un sens à la méthode de Guillaume en s'appuyant sur sa propre réponse au problème posé, mais donne aussi un sens à sa réponse avec la méthode de Guillaume. Ceci rappelle les mathématiciens qui développent des compréhensions en établissant des liens.

Un exemple supplémentaire de **liens établis** par les élèves provient d'une séance où il est demandé aux élèves de trouver différentes façons d'écrire la fraction cinq dixièmes. Les élèves soulèvent rapidement le concept de « fraction équivalente » en expliquant devoir multiplier le numérateur et le dénominateur par un même nombre pour générer des fractions équivalentes. Pour expliquer cette méthode au chercheur-enseignant, Simon explique :

> C'est comme si tu faisais une suite. Si tu multiplies par un nombre différent les deux [numérateur et dénominateur], ça donnera pas une suite. Mais si tu fais fois deux, fois deux, fois deux, fois deux, ça donne toujours des fractions équivalentes à cinq dixièmes.

Ainsi, Simon établit un lien entre les fractions équivalentes et les suites de nombres et appuie sa compréhension des fractions équivalentes sur ce lien avec les suites.

4.4 Formuler des problèmes

Lorsque les mathématiciens formulent des problèmes, ils soulèvent des interrogations à propos des résultats mathématiques qu'ils rencontrent. Ces problèmes s'alignent sur leurs intérêts et alimentent la production des mathématiques. C'est ce qu'on retrouve dans l'intervention d'Océanne à propos d'une proposition de Nico.

Extrait 3

Après un travail sur le nombre 106, Nico, un élève, lève sa main et dit :

Nico: Il y a un autre nombre qui se divise aussi, c'est 70.

Le chercheur-enseignant demande ensuite aux élèves en accord avec ceci de lever la main. Il fait la même chose avec ceux en désaccord et questionne Océanne sur son désaccord. Elle répond :

Océanne : Parce que 7, c'est un nombre impair…

Ch.-ens. : Ok, donc ce que tu dis, c'est que 70, on n'est pas certains que c'est pair parce que la méthode de Guillaume, de regarder le 7 et le 0, marche pas tout à fait hein? 7 est impair…

Un élève se propose ensuite pour résoudre ce problème au tableau.

Dans cet extrait, Océanne souligne à la classe qu'il y a une incompatibilité entre la réponse de Nico et la méthode de Guillaume. En insistant que le 7 de 70 est un nombre impair, elle insinue que la décomposition du nombre 70 ne peut être faite comme sur le nombre 46 et qu'il n'est alors pas possible de conclure que le nombre 70 est pair. Toutefois, une nuance est à faire ici puisqu'Océanne ne rend pas son questionnement clair à la classe. C'est plutôt le chercheur-enseignant, instrumental dans la formulation de problèmes que fait Océanne, qui fait de l'interrogation d'Océanne un « problème » aux yeux de la classe. Ceci distingue le travail des élèves de celui des mathématiciens qui prennent la pleine responsabilité de se questionner, mais aussi de formuler clairement les questions qu'ils se posent.

Une autre **formulation de problèmes** est effectuée chez les élèves lors d'une séance portant encore une fois sur les fractions équivalentes. En particulier, Lily, une élève de la classe, affirme que la fraction représentée dans la croix de gauche est deux cinquièmes. Pour justifier cette affirmation, Lily déplace certains ronds et montre qu'on peut y voir deux carrés verts coloriés sur cinq.

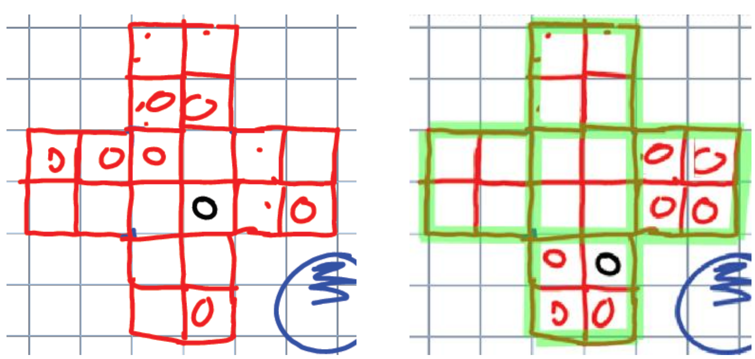

Figure 2. Dessins de Lily pour montrer la fraction deux cinquièmes

Toutefois, un autre élève a questionné cette méthode en disant : « Je ne comprends pas la croix à Lily, avant qu'elle les bouge, pourquoi c'était deux cinquièmes? ». À travers cette question est formulé un problème portant sur la validité de la transformation de figure effectuée par Lily. L'élève soulève une question qui vise à clarifier et s'assurer du lien entre les deux figures de Lily.

4.5 Créer et exploiter le symbolisme

Les mathématiciens exploitent entre autres le symbolisme de deux façons différentes : D'abord, les mathématiciens font des allers-retours entre les manipulations des symboles, le sens des symboles et l'objectif de ces manipulations pour progresser dans leur travail. Ensuite, les mathématiciens remarquent de nouvelles pistes d'explorations mises en lumière par une symbolisation particulière. Vu la nature du problème proposé en début de séance, ces façons de faire des mathématiciens se retrouvent dans plusieurs activités des élèves. Toutefois, elles sont particulièrement saillantes dans le travail de Francis présenté ici :

Extrait 4

Après le problème posé sur le nombre 70 et la méthode de Guillaume, Nico se propose pour aller au tableau et répondre à la question :

Francis : On sait que 30 plus 30, c'est égal à 60 et que 60, c'est 10 de moins que 70. [Francis écrit alors ceci au tableau et poursuit]

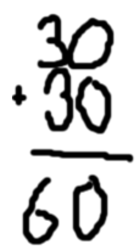

Figure 3. Première étape du calcul effectué par Francis au tableau

Ch.-ens. : Donc 60, c'est pair hein? Deux groupes pareils.

Francis : Ouais, donc déjà là, 60, c'est divisible par deux, pis là, je viens de me rendre compte que 70, c'est 10 de plus, donc…

Ch.-ens. : …70, c'est 10 de plus que 60, qui est déjà divisible par 2.

Francis: Faque là, je me dis, je vais effacer les zéros, et je vais venir les remplacer par les 5 [figure 4]. Faque là, ça me donne 10, donc je mets 1 en haut, et ça fait 6 + 1, donc 70.

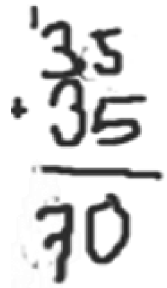

Figure 4. Remplacement des 30 par des 35 par Francis dans son calcul

Le travail est ensuite redirigé vers le nombre 81, issu du problème initial.

Ici, Francis travaille symboliquement la différence de 10 entre 60 et 70 et transforme les 0 de 30 en 5 pour obtenir la somme $35 + 35 = 70$. Ainsi, Francis exploite les symboles de chiffres, mais aussi le positionnement de l'algorithme d'addition pour arriver à montrer, à partir de 60, que 70 est un nombre pair. Toutefois, ce jeu de nombre est implicite, car la symbolisation permet à Francis de simplifier son travail sans faire référence au positionnement des nombres dans l'algorithme, par exemple. De plus, comme c'est le cas chez les mathématiciens, le symbolisme employé par Francis semble avoir permis un certain travail mathématique. Lorsque Francis écrit la somme $30 + 30 = 60$, il dit se rendre compte, à l'instant même, que 60 est « à 10 de moins que 70 ». C'est donc à travers sa première représentation symbolique que Francis trouve une façon de montrer que 70 est pair.[5]

Un exemple supplémentaire de **création et d'exploitation de symbolisme** provient d'une séance où le problème était de déterminer le nombre de sandwichs représentant le $\frac{5}{4}$ d'une collection de 30. Alors que les élèves n'avaient jamais rencontré de fraction plus grande que 1, trois d'entre eux ont cherché à élaborer une façon de représenter symboliquement cette fraction. À travers différents dessins, arguments et discussions, ils ont fini par établir une représentation symbolique qui a été acceptée par le groupe. Ceci rappelle la façon avec laquelle un symbole mathématique est établi par et pour la communauté de mathématiciens.

---

[5] Il aurait aussi été possible de regarder cet extrait sous l'angle de la dimension « communication des mathématiques » et ainsi analyser comment Francis se sert du symbolisme pour rendre public son travail mathématique. Ceci illustre encore une fois que les dimensions abordées dans la conceptualisation du travail des mathématiciens ne sont qu'une première entrée sur leur travail.

4.6 Générer et étudier des contre-exemples

Les mathématiciens travaillent avec des exemples et des contre-exemples de différentes façons. Dans les cas de contre-exemples à un résultat, ceux-ci provoquent un travail supplémentaire car les mathématiciens étudient ces contre-exemples et précisent le résultat pour le rendre valide. C'est ce que fait Simon dans l'extrait suivant :

> Extrait 5
>
> Après le travail de Francis au tableau, le chercheur-enseignant rappelle une partie du travail déjà effectué sur le problème initial. Le chercheur-enseignant souligne les différentes décompositions trouvées pour chacun des nombres et demande aux élèves d'en trouver d'autres pour 106. Il écrit les réponses $53 + 53, 50 + 50, 50 + 56, 86 + 20, 46 + 60$ et $36 + 70$ au tableau et discute, avec les élèves, de ces différentes réponses. Jeanne lève sa main et dit :
>
> Jeanne : On voit qu'il y a beaucoup de 3 et de 6
>
> Ch.-ens. : Ben oui, et c'est drôle, 106, c'est un nombre pair et on l'a découpé en plein de nombres pairs.
>
> Vincent : J'ai remarqué quelque chose, à chaque fois que tu divises par deux, ça donne un nombre impair.
>
> Simon : Ok, mais 100 divisé par deux, ça fait 50, c'est pair

Comme les mathématiciens, Simon identifie un contre-exemple à une proposition mathématique. En particulier, il trouve le nombre 100 qui, divisé par deux, donne un nombre pair. Ce contre-exemple lui permet de montrer que la proposition de Vincent n'est pas valide : ce n'est pas toutes les divisions par deux qui donnent un nombre impair. De plus, comme chez les mathématiciens, ce contre-exemple a permis de générer des explorations supplémentaires pour déterminer ce qui est valide dans la proposition de Vincent. C'est grâce à ce travail qu'une deuxième proposition est étudiée dans la suite de la séance (voir section 4.7).

Un second exemple **d'étude de contre-exemple** provient d'une autre séance durant laquelle, au cours de la résolution du problème proposé, les élèves s'intéressent à la relation entre un rectangle et un carré. C'est de nouveau Simon qui utilise un contre-exemple pour raffiner les idées de la classe. Après que Jessie ait proposé que deux carrés forment un rectangle, Simon affirme qu'un rectangle n'est pas toujours deux carrés puisqu'en prenant un « rectangle vraiment plus long », il n'est pas possible de le couper en deux carrés. Bien que ce contre-exemple ne corresponde pas tout à fait à la proposition de Jessie, il a tout de même amené les élèves à explorer et retravailler l'énoncé.

4.7 Créer des mathématiques

Lorsque des mathématiciens créent des mathématiques, ils établissent de nouvelles méthodes, conjectures, théories et définitions. À partir d'exemples, symboles, liens et méthodes, les mathématiciens remarquent des structures et propriétés et en font des idées innovantes. Dans l'extrait suivant, c'est ce que fait Sabine alors qu'elle offre une nouvelle conjecture à la classe.

<u>Extrait 6</u>

Afin de tester la proposition de Vincent qui est contredite par Simon (voir extrait 5), le chercheur-enseignant propose aux élèves de travailler en équipe de deux sur l'énoncé et de mieux comprendre pour quels nombres il fonctionne ou non. Durant le travail en équipe, il remarque ce que fait Sabine puis, après quelques minutes, le chercheur-enseignant demande aux élèves de lui donner les nombres pour lesquels la division par deux donne un nombre pair, et les nombres pour lesquels la division par deux donne un nombre impair [voir figure 5]. Il invite ensuite Sabine à partager son travail.

Sabine : Quand l'unité d'un nombre est 2 ou 6, je pense alors que la division par 2 donnera un nombre impair.

Ch.-ens. : Qu'est-ce que ça veut dire ça, quand ton unité est 2 ou 6, donne-moi un exemple?

Sabine [en pointant au tableau] : Exemple, 82.

Ch.-ens. : Ah oui, ça fonctionne. Et 6 aussi tu as dit, et on a 106 ici [pointe 106 du côté des réponses impaires] Et après, c'est quoi la suite?

Sabine : Quand 0, 4 ou 8 est à la position des unités, la division par 2 donne un nombre pair.

Ch.-ens. : La même chose, si on regarde au tableau, on a des exemples qui fonctionnent. Mais attend un peu, on a un zéro du côté impair [en pointant la division 10 ÷ 2 = 5].

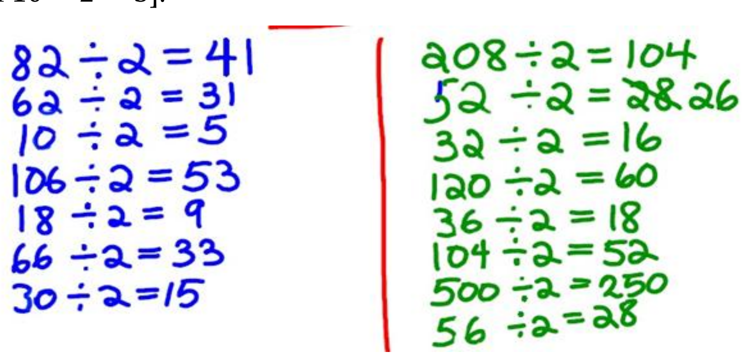

Figure 5. Listes des nombres dont la division par deux donne une réponse paire ou impaire

Comme les mathématiciens, Sabine développe ici une conjecture à propos d'une structure, d'une récurrence. Sabine contribue ainsi activement à l'avancement des idées de la classe alors que sa conjecture présente un potentiel intéressant pour une méthode permettant de déterminer si la division par deux de n'importe quel nombre pair donne un résultat pair ou impair. Plus encore, la conjecture proposée par Sabine se rapproche aussi du travail des mathématiciens puisqu'elle est issue du regard particulier que porte Sabine à la tâche du chercheur-enseignant. Alors que de nombreux élèves répondent en donnant des exemples de nombres pour lesquels la proposition de Vincent fonctionne ou pour lesquels elle ne fonctionne pas, de son côté, Sabine donne une conjecture plus générale. Comme chez les mathématiciens, c'est le regard singulier que porte Sabine au travail demandé qui est porteur pour le développement de résultats mathématiques.

Un autre exemple de **création mathématique** provient d'une séance où le problème est d'estimer le résultat de la division $918 \div 4$. Dans une première solution offerte, l'élève dessine quatre paquets dans lesquels elle distribue les centaines et les unités pour obtenir $200 + 25 + 2$. Un élève reprend ce calcul et propose de décomposer la dizaine restante de la manière suivante : 2 dans chaque paquet, puis, pour les deux unités restantes, 0,5 dans chaque paquet. Les élèves ont été plutôt surpris de cette façon de faire, alors que selon l'un d'eux, il aurait plutôt fallu traiter les deux unités restant comme des « restes de la division ». D'une certaine façon, l'élève s'est servi des nombres décimaux d'une façon nouvelle et a pu trouver une manière innovante pour la classe de traiter les restes d'une division.

4.8 Générer et étudier des exemples

Les mathématiciens se servent d'exemples pour étudier certaines propriétés et en tirent des conjectures ou des définitions. En ce sens, les exemples étudiés sont choisis avec soin. Aussi, les mathématiciens se servent de ces exemples pour mettre en image un résultat mathématique et mieux le comprendre. C'est ce que raconte avoir fait Sabine dans l'extrait suivant :

> <u>Extrait 7</u>
>
> Après avoir discuté de la validité de la conjecture de Sabine, le chercheur-enseignant lui demande :
>
> Ch.-ens. : Qu'est-ce que tu essayais de faire ici? Tu voulais trouver comment ça fonctionne?
>
> Sabine : J'ai pris 100, 102, 104, 106, 108, et ainsi de suite avec les 200 et 300 aussi.

> Le chercheur-enseignant insiste que la conjecture de Sabine est intéressante, malgré qu'elle ne fonctionne pas « tout à fait comme Sabine le voudrait ». La séance se termine ensuite.

Comme les mathématiciens, Sabine se sert d'exemples afin de mieux comprendre le résultat mathématique proposé par Vincent. L'élève génère 15 exemples de nombre qui lui permettent d'explorer la division par deux, la parité de la division par deux de ces nombres, et finalement, trouver une certaine structure dans ces divisions par deux. De plus, le choix des exemples choisis par Sabine rappelle aussi la façon contrôlée avec laquelle les mathématiciens travaillent avec des exemples. Dans le cas de Sabine, les nombres étudiés ne semblent pas être générés au hasard, mais plutôt sélectionnés systématiquement : elle prend les 5 premiers nombres divisibles par deux après 100, puis fait ensuite varier le nombre de centaines à deux reprises pour obtenir 200, 202,… 208, 300, … ,308. D'une certaine façon, cette variété d'exemples témoigne d'une certaine sensibilité de Sabine par rapport aux nombres choisis.

Un exemple supplémentaire de **l'étude d'exemples** provient d'une séance lors de laquelle les élèves offrent des représentations de la fraction deux cinquièmes. Au final, c'est plus d'une douzaine de dessins qui sont faits au tableau et qui sont ensuite discutés, vérifiés et expliqués avec les élèves. Ce travail a permis aux élèves de mettre en lumière certains liens entre les exemples de représentations en plus d'explorer les fractions équivalentes à deux cinquièmes qui étaient illustrées.

5. Discussion

Les analyses menées à propos de la mise en route des activités des mathématiciens chez les élèves en résolution de problèmes montrent que de nombreux gestes, paroles et écrits d'élèves peuvent être associés au travail des mathématiciens. Plus encore, étudier le travail des élèves à travers la conceptualisation du travail des mathématiciens met en lumière le genre d'impact que peut avoir l'environnement de résolution de problèmes sur le travail des élèves. Dans ce qui suit, les caractéristiques de la résolution de problèmes dégagées dans la section 2 sont reprises pour détailler l'impact de ce contexte sur la façon avec laquelle les élèves y déploient les activités des mathématiciens. Le rôle essentiel de l'enseignant dans le travail des élèves est aussi mis en lumière à travers certaines nuances à faire dans les correspondances entre les activités des élèves et celles des mathématiciens.

5.1. Interaction entre élèves, problèmes et solutions

Comme les élèves sont constamment en contact avec les réponses, stratégies, questions, explications et arguments de leurs pairs, ils ont continuellement l'occasion de produire des mathématiques à partir des idées de la classe. Par exemple, Océanne questionne une réponse de Nico et « formule un problème » (section 4.4), problème qui sera résolu à travers « l'exploitation de symbolisme » (section 4.5) que fait Francis. C'est donc dire que la réponse de Nico, dans un contexte où il y a interactions entre les élèves et leurs idées, a permis à des élèves de s'impliquer dans les mathématiques de la classe et de mettre en oeuvre des activités des mathématiciens.

De plus, la collaboration des élèves qui travaillent ensemble pour résoudre un problème rappelle la collaboration entre mathématiciens. Par exemple, le travail de différents élèves a contribué à la « création mathématique » de Sabine : la décomposition des nombres de Guillaume, les questionnements de l'enseignant, la proposition de Vincent à propos de la division par deux qui donne toujours un nombre impair, le contre-exemple de Simon (section 4.6). Ceci rappelle la façon avec laquelle les mathématiciens, lors de séminaires ou de groupes de travail, entre autres, reprennent des idées de leurs collègues, les questionnent, les creusent et les développent davantage pour en faire de nouveaux résultats.

5.2 Liberté mathématique

En résolution de problèmes, les élèves ont l'occasion d'explorer diverses pistes, stratégies et solutions sans indications précises. Par exemple, lorsque Sabine, à la fin de la séance, élabore une conjecture et « crée des mathématiques », elle détermine elle-même la façon avec laquelle elle entre dans l'exploration demandée par l'enseignant : l'élève sélectionne des exemples, les étudie et en dégage une structure qu'elle formule ensuite sous forme de conjecture (section 4.7). La liberté mathématique rapproche donc le travail des élèves à celui des mathématiciens puisque les élèves ont eux aussi l'occasion de questionner, tester et fouiller des pistes de résolution de problèmes qui leur semblent intéressantes pour l'avancement des mathématiques.

Toutefois, comme mentionné par Lampert (1990b), cette liberté vient aussi avec la responsabilité d'argumenter la pertinence et la validité des pistes explorées. Par exemple, lorsque des élèves s'investissent à « établir une symbolisation » pour représenter la fraction $\frac{5}{4}$, ceux-ci sont devenus responsables de leurs propositions qu'ils ont dû présenter et expliquer aux autres élèves de la classe. En ce sens, les élèves rendaient claire la façon avec laquelle la fraction recherchée était visible à travers les nouvelles symbolisations en identifiant ce qui était le tout, et ce qui était le cinquième quart à y ajouter.

5.3 Incertitude

En résolution de problèmes, l'incertitude agit comme moteur du travail des élèves. C'est souvent pour résoudre les incertitudes que les élèves s'investissent dans les mathématiques de la classe et déploient les activités des mathématiciens. Par exemple, lorsque Vincent « conçoit des liens » entre sa réponse et celle de Guillaume (section 4.3), il répond à un doute soulevé par l'enseignant qui cherche à mieux comprendre comment fonctionne la méthode de Guillaume. Cette façon de réagir à l'incertitude rappelle le travail des mathématiciens, qui, de leur côté, travaillent constamment à résoudre des incertitudes et des doutes.

D'un autre côté, le travail des élèves est aussi une source d'incertitude alors qu'il est questionné par l'enseignant ou d'autres élèves. Entre autres, Océanne, en « posant un problème » soulève une question à propos d'une affirmation de Nico (section 4.4). De la même façon, les incertitudes qui alimentent le travail des mathématiciens proviennent aussi souvent de curiosités qui ont été formulées à propos de résultats ou propositions développés par des pairs. Ainsi, chez les élèves comme chez les mathématiciens, le travail mathématique est une source d'incertitude qui engendre, à son tour, un travail mathématique supplémentaire.

5.4 Autorité mathématique à la classe

Comme il est attendu des élèves en résolution de problèmes qu'ils agissent comme autorité mathématique de la classe (Lampert, 1990b), il arrive que les élèves produisent des mathématiques pour s'assurer que les idées proposées soient justes. Ceci est illustré dans les liens qu'établit Vincent entre sa réponse et la méthode de Guillaume (section 4.3). D'une certaine façon, Vincent met en lien les deux réponses et contribue à vérifier la validité de chacune d'elle. En ce sens, l'autorité mathématique prise en charge par la classe amène les élèves à reprendre des idées et à les retravailler pour s'assurer qu'elles sont valides.

Tout ceci montre que l'environnement de résolution de problèmes joue un rôle important dans la mise en route des activités des mathématiciens chez les élèves. Le cadre qu'offre la résolution de problèmes amène les élèves à s'engager dans les mathématiques, mais surtout, à le faire selon certaines balises. Ce sont ces balises, telles que le besoin de justifier et d'expliquer ses raisonnements, ou encore, la possibilité de travailler sur les idées des autres élèves, qui favorisent le rapprochement des activités des élèves à celles des mathématiciens.

5.5 Rôle de l'enseignant dans les activités des élèves

Le contexte de résolution de problèmes étudié ici, permettant d'illustrer le rapprochement du travail des élèves à celui des mathématiciens, met à la fois en lumière une nuance à apporter à ce rapprochement. Tel que mentionné dans la section 3, le chercheur-enseignant s'implique activement dans le travail des élèves afin de faire émerger les raisonnements et stratégies et instaure du même coup, l'environnement de résolution de problèmes. Le genre de travail que mène le chercheur-enseignant le place dans une posture particulière dans le travail des élèves alors qu'il organise et alimente la résolution de problèmes. Par exemple, dans l'extrait 6, le chercheur-enseignant a orienté et déclenché un travail d'explorations chez les élèves en leur demandant de trouver pour quels nombres fonctionne, ou pas, la proposition de Vincent contredite par Simon. Cette demande du chercheur-enseignant a mené Sabine à « créer des mathématiques » et à « étudier des exemples » pour l'élaboration de sa conjecture. À travers les autres extraits, le chercheur-enseignant dirige aussi parfois l'attention des élèves sur certaines idées, reformule et souligne certaines propositions et contribue à l'avancement de la résolution de problèmes. Ces exemples montrent que le chercheur-enseignant participe de différentes façons à la mise en route d'activités des mathématiciens chez les élèves. Cette posture particulière n'a pas d'équivalent chez les mathématiciens qui, sauf lors d'un travail en collaboration, ont le plein contrôle des activités qu'ils déploient pour avancer dans leurs travaux de recherche. En ce sens, le rôle de l'enseignant dans le travail des élèves soulève une nuance importante quant au rapprochement du travail des élèves en résolution de problèmes à celui des mathématiciens.

Ceci montre que dans certains contextes de résolution de problèmes, et particulièrement ceux où l'enseignant joue un rôle actif pour mettre en place ce contexte, ce rôle devient délicat, voire contradictoire. Tel qu'illustré dans les sections précédentes, l'environnement de résolution de problèmes rapproche effectivement le travail des élèves à celui des mathématiciens. Toutefois, en voulant établir cet environnement, l'enseignant a un impact important sur le travail des élèves, et par cette action éloigne l'activité des élèves de ce que font les mathématiciens. En ce sens, la posture que prend l'enseignant pour installer la résolution de problèmes en classe a un double-impact sur le travail des élèves : il rapproche le travail des élèves à celui des mathématiciens mais les distingue du même coup.

Conclusion

Le travail présenté dans cet article offre des pistes de réponses à la question de recherche à propos de la mise en route des activités des mathématiciens par les élèves en contexte de résolution de problèmes. L'élaboration d'une conceptualisation possible du travail des mathématiciens a permis de mettre en lumière de nombreuses correspondances entre les activités des élèves et celles des mathématiciens. Il est ainsi possible de conclure que les élèves placés en contexte de résolution de problèmes s'investissent dans les mathématiques de la classe de manière similaire aux mathématiciens. Entre autres, l'environnement de résolution de problèmes amène les élèves à développer des résultats mathématiques, à se servir d'exemples, de symboles et de méthodes pour produire ces résultats, à formuler des problèmes et à établir des liens pour explorer différentes idées. En ce sens, la nature particulière des activités mathématiques des élèves en résolution de problèmes invite à repenser la façon d'aborder les activités des mathématiciens alors qu'au final, elles sont partagées avec les élèves en résolution de problèmes, et n'appartiennent plus uniquement aux mathématiciens. D'une certaine façon, les activités des mathématiciens deviennent, dans le cadre de ce travail, les activités mathématiques des mathématiciens et des élèves.

D'un autre côté, les analyses mettent en lumière le double impact qu'a l'enseignant sur le déploiement des activités mathématiques chez les élèves. Pour amener les élèves à s'impliquer dans l'avancement de la résolution de problèmes, l'enseignant prend certaines décisions et pose certains gestes qui plongent les élèves dans la résolution de problèmes. À travers ses interventions, l'enseignant transforme, oriente et influence le travail des élèves qui n'est alors pas tout à fait comme celui des mathématiciens.

Tout ceci soulève des questions supplémentaires quant à la posture de l'enseignant qui cherche à instaurer un environnement de résolution de problèmes. Entre autres, il serait intéressant d'étudier les activités mathématiques des élèves placés dans des contextes de résolution de problèmes où l'enseignant est plus effacé, comme les tableaux verticaux (Liljedhal, 2016). Plus encore, dans le cadre du projet présenté ici, les séances analysées n'étaient pas situées dans le temps les unes par rapport aux autres. Toutefois, comme le mentionnent Lampert (1990b) et Liljedhal (2016), l'environnement de résolution de problèmes se transforme et s'installe à long terme, entre autres, grâce au travail constant de l'enseignant et l'implication des élèves. En ce sens, il est possible de se questionner sur l'évolution, dans le temps, de la mise en route des activités mathématiques par les élèves placés en résolution de problèmes. De quelle façon se transforment les activités mathématiques des élèves placés en résolution de problème à long terme? Comment l'implication de l'enseignant dans ces activités se transforme-t-elle lors d'un travail à long terme en résolution de problèmes? Ces questions sont importantes pour continuer d'étudier l'impact du contexte de résolution de problèmes sur les activités mathématiques des élèves, mais aussi pour explorer le double impact de l'enseignant sur le travail des élèves en résolution de problèmes.

Références

Arsac, G., Germain, G. et Mante, M. (1988). *Problème ouvert et situation-problème.* Université de Lyon, Institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situation de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(2) 147-176. https://doi.org/10.1007/BF00314724

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Éditions la Pensée sauvage.

Burton, L. (2004). *Mathematicians as Enquirers. Learning about Learning Mathematics*. Springer.

Burton, L. et Morgan, C. (2000). Mathematicians writing. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 429-453. https://doi.org/10.2307/749652

Davis, P. et Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience.* Mariner Books.

Dieudonné, J. (1975). L'abstraction et l'intuition mathématique. *Dialectica, 29*(1), 39-54.

Gay, D. A. (2014). *Explorations in Topology: Map Coloring, Surfaces and Knots*. Elesevier. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-416648-6.00009-8

Heinze, A. (2010). Mathematicians' individual criteria for accepting theorems and proofs: an empirical approach. Dans G. Hanna, H. N. Jahnke et H. Pulte (dir.), *Explanation and Proof in Mathematics* (p. 101-111). Springer.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge Philosophy Classics.

Lampert, M. (1990a). Connecting inventions with conventions. Dans L. Steffe (dir.), *Transforming children's mathematics education* (p. 253-265). Lawrence Erlbaum Associates.

Lampert, M. (1990b). When the Problem Is Not the Question and the Solution Is Not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching. *American Educational Research Journal, 27*(1), 29-63. https://doi.org/10.3102/00028312027001029

L'Italien-Bruneau, R.-A. (2020). *Étude des activités mathématiques des élèves en contexte de résolution de problèmes* [mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal]. Archipel. http://archipel.uqam.ca/id/eprint/14362

Liljedahl, P. (2016). Building Thinking Classrooms: Conditions for Problem-Solving. Dans P. Felmer, E. Pehkonen et J. Kilpatrick (dir.), *Posing and Solving Mathematical Problems* (p. 361-386). Springer.

Lockwood, E., Ellis, A. et Lynch, A. G. (2016). Mathematicians' example-related activity when exploring and proving conjectures. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 2*(2), 165-196. https://doi.org/10.1007/s40753-016-0025-2

Lynch, A. G. et Lockwood, E. (2017). A comparison between mathematicians' and students' use of examples for conjecturing and proving. *The Journal of Mathematical Behavior, 53.* 323-338. doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.07.004

Maheux, J.-F., Proulx, J., L'Italien-Bruneau, R.-A., et Lavallée-Lamarche, M.-L. (2019). Referring and proffering: An unusual take on what school mathematics is about. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* https://hal.science/hal-02421395

Misfeldt, M. et Johansen, M. W. (2015). Research mathematicians' practices in selecting mathematical problems. *Education Studies in Mathematics, 89(3),* 357-373.

Powell, A. B., Francisco, J. M. et Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *The Journal of Mathematical Behavior*, *22*(4), 405-435. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2003.09.002

Proulx, J. (2020). Institutionnalisation et enseignement en contexte de résolution de problèmes. *Revue québécoise de didactique des mathématiques, 1*, 70-109.

Richards, J. (1991). Mathematical discussions. Dans E. Glasersfeld (dir.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (p. 13-51). Springer.

Savoie-Zajc, L. (2018). La recherche qualitative/interprétative en éducation. Dans T. Karsenti et L. Savoie-Zajc (dir.*), Introduction à la recherche en éducation* (p. 191-217). Presses de l'Université de Montréal.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the learning of mathematics*, *14*(1), 19-28.

Schoenfeld, A. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. Dans A. Schoenfeld (dir.) *Mathematical thinking and problem solving* (p. 53-70). Lawrence Erlbaum

Sriraman, B. (2009). The characteristics of mathematical creativity. *ZDM, 41,* 13-27.

Stanic, G. et Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. Dans R. I. Charles and E. A. Silver (dir.), *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving* (vol. 3) (p. 1-22). National Council of Teachers of Mathematics.

Struik, D. J. (2012). *A concise history of mathematics* (4e éd.). Courier Corporation.

Schoenfeld, A. (1991). On mathematics as sense making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. Dans D. N. Perkins, J. Segal, et J. Voss (dir.), *Informal reasoning and education* (p. 311-343). Routledge.

Walters, M. (2004). It Appears that Four Colors Suffice: A Historical Overview of the Four-Color Theorem. *American Mathematical Association.*