Proximités discursives entre le discours de l'enseignant et les activités des élèves pendant les cours : l'exemple de l'introduction de la définition formalisée du sens de variation des fonctions

Aline ROBERT
CY Cergy Paris Université, Université Paris Cité, Université Paris-Est Créteil, Université de Lille, Université de Rouen, LDAR, F-95000 Cergy-Pontoise, France
robertaline.robertaline@orange.fr
Fabrice VANDEBROUCK
Université Paris Cité, Université Paris-Est Créteil, CY Cergy Paris Université, Université de Lille, Université de Rouen, LDAR, F-75013 Paris, France
vandebro@u-paris.fr

Résumé : Dans cet article nous développons la notion de « proximités discursives » pour analyser le déroulement d'une séance de cours visant à introduire auprès des élèves de la classe de seconde du lycée en France (grade 10) la définition formalisée de croissance d'une fonction numérique. Nous dressons un bilan à la fois sur la difficulté des analyses didactiques des moments de cours et sur les difficultés spécifiques d'enseignement de la définition du sens de variation. Nous illustrons également la pertinence théorique de notre approche, ancrée en théorie de l'activité, et spécifiquement en appui sur la notion de zone de proche développement.

Mots-clés : proximités discursives, cours, activité, ZPD, sens de variation, fonctions

Students' activities during lessons: An example for introducing the definition of the direction of growth of a numerical function

Abstract: In this article we develop the notion of "discursive proximities" as a way to analyze the progression of a lesson aiming to introduce to students in the second year of high school in France (grade 10) to the formal definition of growth of a numerical function. We report on both the difficulty of didactic analysis of the moments in the lesson and on the specific difficulties of teaching the definition of variation direction. We also illustrate the theoretical relevance of our approach, which is anchored in Activity Theory and more specifically the concept of Zone of Proximal Development.

Keywords: discursive proximities, lessons, activity, zone of proximal development, functions

Introduction

En didactique des mathématiques, plusieurs entrées théoriques sont proposées pour l'analyse des activités des élèves et des pratiques enseignantes dans la classe. Notre entrée est ancrée en théorie de l'activité. Nous cherchons à opérationnaliser des outils théoriques et méthodologiques proposée par la théorie de l'activité pour comprendre les pratiques et les activités dans le cadre de la classe ordinaire de mathématiques.

Dans cet article, nous développons la notion de « proximités discursives » pour analyser le déroulement d'une séance de cours visant à introduire auprès des élèves de la classe de seconde du lycée en France (grade 10) la définition formalisée de croissance d'une fonction numérique. Dans toute la suite le mot « cours » est utilisé dans le sens restrictif de « exposition des connaissances en classe ». Cette analyse donne à voir à la fois la démarche que nous adoptons pour étudier ces moments de classe particuliers et les difficultés spécifiques à introduire une telle notion, qui apporte essentiellement un nouveau formalisme, mettant en difficulté l'enseignant dans ses pratiques et les élèves dans leur compréhension.

Nous faisons le choix de préciser d'emblée dans la première partie notre positionnement théorique ainsi que notre méthodologie générale d'analyse des activités des élèves en cours, en relation avec le discours de l'enseignant, afin de donner à voir l'apport théorique de cet article : les proximités discursives, un détour pour apprécier les activités qui peuvent être développées par les élèves dans les moments d'exposition de connaissances. Dans la deuxième partie, nous nous focalisons sur le contenu mathématique et la question particulière en jeu, l'introduction en classe de la définition formalisée du sens de variation d'une fonction numérique. Nous développons dans cette partie ce que nous appelons le relief sur la notion à enseigner. En appui sur ces deux premières parties nous exposons la question problématisée dans la partie 3. La problématique croise à la fois la spécificité de l'enseignement de l'introduction d'une notion porteuse d'un formalisme difficile et celle de l'enseignement dans le cadre presque exclusif d'un cours, pendant lequel l'enseignant doit faire des apports explicites de connaissances nouvelles aux élèves. Nous développons ensuite en partie 4 l'analyse du déroulement de la séance de cours observée, intitulée « Surface agricole », ce qui est le titre de la tâche introductive proposée aux élèves. Nous dressons un bilan à la fois sur les difficultés spécifiques d'enseignement de la définition formalisée du sens de variation et sur la difficulté des analyses didactiques des moments de cours, avant de conclure plus généralement sur la problématique abordée.

1. Notre positionnement théorique et la notion de « proximité discursive »

Dans cette partie, nous présentons notre positionnement théorique, quelques considérations méthodologiques ainsi que le cas étudié.

1.1 Rappels sur la théorie de l'activité et sur notre positionnement

Nous nous plaçons en théorie de l'activité (Leontiev, 1984) dans la lignée de ses développements au sein de l'école française de psychologie cognitive (J. Rogalski, 2008). Cette acception en didactique des mathématiques de la théorie de l'activité implique que nous prenons comme entrée pour étudier les relations enseignement apprentissage d'un contenu mathématique donné, ce qui se fait en vrai dans la classe de mathématique ordinaire, dans son contexte institutionnel relatif aux savoirs en jeu, mais aussi son contexte temporel (l'inscription de la séance dans un scénario global), voire culturel et social (type d'établissement).

La théorie de l'activité prend sa source dans les travaux de Vygotski (1934/1997), développés ensuite par Leontiev. Ce dernier poursuit les travaux de Vygotski sur les processus d'apprentissages individuels et il introduit la dimension collective dans ces processus, utilisant à cet effet un terme russe traduit ensuite par « activité » – au sens de collectif historico-socio-culturel, comme dans « l'activité de classe ». Cette dimension collective de l'activité embarque les différents acteurs, en particulier pour nous l'enseignant et les élèves, dans leurs interactions. Mais Leontiev poursuit aussi l'œuvre de Vygotski sur l'importance des médiations dans les processus d'apprentissages individuels des sujets en action, notamment la question des médiations et de la zone de proche développement (ZPD). Le terme « activité » a donc deux sens qu'il convient de distinguer : l'activité au sens « système d'activité », qui est développé ensuite plus profondément par Engeström et al. (1999) - et l'activité avec une orientation individuelle et cognitive qui est développée dans l'école française en psychologie cognitive puis en didactique professionnelle. La classe est ainsi un système d'activité composé du professeur, des élèves et d'un ensemble de médiations de l'activité interdépendante du professeur et des élèves dans la classe. L'approche cognitive permet d'articuler les apports de Piaget sur les processus développementaux aux apports précédents, fournissant ce que Simon et al. (2018) notent, « un complément à la théorie socioculturelle » (p. 2). Une autre exploration des complémentarités entre Piaget et Vygotski peut être trouvée dans Cole et Wertsch (1996). C'est dans ces deux doubles orientations – collectif/individuel et socio culturelle/cognitive – que nous situons nos travaux. Les liens entre activité(s) des sujets et activité de classe (système) constituent cependant un chantier de recherche encore à investir.

1.2 Questions méthodologiques générales

Dans notre perspective théorique, les interactions dans la classe, et donc les déroulements de séances de mathématiques, sont aussi cruciaux que les choix des contenus en jeu, des scénarios et des tâches proposées aux élèves. Nos méthodologies d'analyses de scénarios, de tâches et de déroulements ont été largement présentées dans des écrits précédents (Vandebrouck, 2008, 2013, 2018).

Au centre de notre approche, nous plaçons les « activités mathématiques » des élèves (on dira juste « activités »), processus individuels qui embarquent des mises en fonctionnement de connaissances mathématiques, appréciés en tant que vecteurs des apprentissages mathématiques des élèves (J. Rogalski, 2008). Les activités pilotent et sont pilotées par des actions[1], souvent observables, et elles se caractérisent aussi par un motif et un but, aboutissant à une intériorisation mentale, inaccessible directement aux chercheur.e.s.

N'ayant accès qu'à des traces observables de ces activités, mais pas pour tous les élèves, nous distinguons et inférons les « activités attendues » et les « activités possibles » des élèves, issues respectivement des analyses de tâches et de celles des déroulements. Par activités possibles, nous incluons ce qui peut être pensé par les élèves, à partir de l'analyse des tâches en jeu et de ce qui est dit, écrit, fait (ou non) par les élèves et l'enseignant pendant les déroulements. L'analyse des tâches est rapportée au contexte, et notamment aux contenus travaillés. Les activités possibles sont, dans une certaine mesure, partagées, si ce n'est communes. C'est ce qui alimente notre recherche des proximités.

Nous identifions également, en relation avec les tâches à exécuter, des types d'activités correspondantes à des mises en fonctionnement différentes, complémentaires et que nous considérons comme fondamentales en mathématiques (Robert et Vandebrouck, 2014; Vandebrouck et Robert, 2017) : les activités cruciales de reconnaissance, d'organisation et d'applications de

[1] Leontiev distingue les actions des opérations qui les constituent, ce que nous n'avons pas retenu. C'est Galperine (1966) qui dégage l'orientation et le contrôle, en amont et en aval de l'exécution de l'action, ce que nous avons partiellement repris en introduisant le but précisant le motif.

connaissances[2]– reconnaissance des modalités d'application des connaissances à mettre en jeu, organisation des raisonnements et des traitements (étapes à concevoir, intermédiaires à introduire, interprétations à faire), réalisation des mises en fonctionnement identifiées dans les différents cadres ou registres impliqués. Les élèves peuvent développer plusieurs de ces activités pour réaliser une même tâche.

Nous dégageons aussi différents types d'aides de l'enseignant qui interviennent dans les activités des élèves, procédurales qui donnent des pistes et souvent réduisent la tâche, ou à visée constructives qui, au contraire, amènent les élèves un peu « plus loin » que ce qu'ils ont fait ou pensé. Nous repérons enfin les activités *a maxima*, développées d'emblée par des élèves et associées à la complexité des tâches prescrites, des activités développées *a minima*, sur des tâches redéfinies pour/par les élèves ou avec des aides procédurales proposées par l'enseignant pendant les déroulements (Vandebrouck, 2008).

Nos analyses se font à partir des énoncés d'exercices, voire de présentations de cours, et des transcriptions de vidéos tournées dans les classes, une caméra étant généralement placée au fond de la salle en l'absence de tout observateur. Elles sont référées à une analyse multidimensionnelle préalable des contenus en jeu : mathématique, épistémologique, curriculaire (à partir des programmes), didactique et cognitive, ce que nous appelons le relief sur l'enseignement de la notion en jeu.

Notre méthodologie ne nous donne donc pas directement accès aux « activités effectives » des élèves : leur partie « mentale » est bien sûr totalement inobservable, mais nous faisons des inférences à partir de ce qui est dit et fait. Nous n'avons pas davantage accès aux activités de chacun des élèves : le discours de l'enseignant, qui cherche souvent à homogénéiser l'état cognitif de la classe, peut cependant en donner quelques indices, particulièrement pour l'étude menée ici des moments d'exposition des connaissances.

1.3 La spécificité de l'étude des moments d'exposition des connaissances – le cas étudié

Dans cet article, nous analysons une séance de classe de seconde ordinaire pendant laquelle, après qu'un exercice d'introduction à la notion de variation des fonctions

---

[2] Dans d'autres publications, notamment Robert et Vandebrouck (2014) et Vandebrouck et Robert (2017), nous parlons de sous-activités de reconnaissance, d'organisation et de traitement, mais il s'agit bien de la même catégorisation des activités cruciales.

ait été travaillé par les élèves, l'enseignant expose le cours sur le sens de variations des fonctions numériques.

Nous illustrons comment nous complétons nos outils d'analyse pour étudier les moments d'exposition des connaissances, c'est-à-dire le déroulement du cours qui, dans notre cas, suit le travail sur une tâche d'introduction à la notion visée. Il y a en effet une difficulté spécifique à l'étude de ces moments que nous précisons plus loin. Ces moments sont à comprendre dans un sens assez large, qui dépasse notamment le sens d'institutionnalisation sur une connaissance nouvelle, au sens de la théorie des situations didactiques TSD (Brousseau, 1997), dans la mesure où le processus en jeu peut être moins complet que ce que recouvre le terme en TSD.

Dans les moments d'exposition de connaissances, qui suivent éventuellement des tâches d'introduction, les activités possibles des élèves sont très difficilement accessibles, car elles ont peu ou pas de traces à travers des actions observables (rendues en principe visibles sur nos vidéos). Il n'y a pas non plus de tâches mathématiques explicites à analyser, sauf exception. Les tâches des élèves sont ainsi en partie liées à l'écoute[3] de l'enseignant en train de présenter un bilan ou même une notion de façon générale (ou un théorème, une propriété ou une méthode…), avec souvent des réponses à des questions ciblées, limitées, intégrées au fil de la présentation. On ne peut étudier que ce que l'enseignant et les élèves disent ou montrent ou écrivent. Nous cherchons alors la manière dont l'enseignant peut « agir » (indirectement) sur les activités des élèves liées à cette exposition de connaissances, y compris en introduisant ces questions ciblées. Nous nous demandons ainsi comment, pendant ce cours, l'enseignant s'appuie sur, ou prolonge, des activités antérieures des élèves, notamment en évoquant lui-même ou faisant évoquer par les élèves des éléments contextualisés, déjà travaillés, pour repositionner ces éléments à un niveau plus général. Pour les élèves seuls, cette généralisation nécessaire peut rester vague, confuse, ou même trop éloignée de ce qu'ils peuvent produire, ce qui n'empêche pas qu'une explicitation adéquate puisse leur donner un premier accès, entendu, et préparer l'intériorisation qui doit avoir lieu ensuite, pour l'apprentissage. Nous interrogeons aussi la manière dont, pendant ce moment de cours, l'enseignant prépare ou accompagne des activités ultérieures des élèves en explicitant (ou faisant expliciter) le passage de connaissances présentées à un niveau général à leur mise en jeu contextualisée, à partir de questions ou de petites tâches qui peuvent être résolues pendant le cours, collectivement. En particulier, nous étudions toutes les occasions repérées dans le discours de l'enseignant (et des élèves entre eux) de s'appuyer sur ce qui vient des élèves. C'est ce que nous appelons des « proximités discursives ». Ce sont ces

[3] Voire à la recopie de ce que l'enseignant écrit.

apports spécifiques de l'enseignant, voire de certains élèves, éventuellement associés à des questions, obligeant les élèves à répondre en dépassant ce qui vient d'être dit ou fait, qui constituent le détour que nous avons choisi pour analyser ces moments spécifiques.

1.4 Un zoom sur les proximités discursives – la classification utilisée

Les proximités discursives[4] sont ainsi des rapprochements explicites, dans le discours de l'enseignant, entre ce qui est visé par l'enseignement et ce qui vient des élèves (Robert et Vandebrouck, 2014; Vandebrouck et Robert, 2017; Bridoux et al., 2016). Elles doivent être à la fois suffisamment proches de ce que les élèves savent, ont fait ou peuvent faire, et proches de ce qui est visé, pour qu'ils puissent en tirer parti. C'est cette double proximité, portée par le discours de l'enseignant, entre du nouveau mathématique et ce qui est déjà là ou déjà fait côté élèves, qui est en jeu.

Leur étude se fait à partir des transcriptions, permettant de pointer les éléments dans le discours de l'enseignant qui s'appuient sur des traces des activités effectives des élèves, observables, ou sur leurs connaissances supposées[5], tout en abordant les connaissances visées. Le relief sur l'enseignement de la notion et l'insertion de l'étude dans son contexte permettent, en grande partie, au chercheur, d'anticiper et d'identifier ces rapprochements dans le discours du professeur. Ce sont alors en réalité des candidats proximités. Cela ne présuppose pas que l'enseignant en soit conscient, ni que cela ait un effet sur les apprentissages, inappréciable de fait. C'est un construit théorique introduit pour mieux appréhender ce qui pourrait participer à la conceptualisation des élèves, supposée favorisée par un travail partagé, actuel et à venir, sur des connaissances non encore acquises, mais proches de l'acquisition.

Ce qui est précisément en jeu dans ces proximités, dans le cas du cours qui va nous intéresser, c'est notamment la possibilité de familiariser les élèves avec les mots généraux qui sont introduits (croissance, variation), sur lesquels ils ont été sollicités d'une manière ou d'une autre, dans les registres numériques et graphiques, et avec les formalisations nouvelles à présenter, qu'ils les aient ou non trouvées, mais auxquelles ils auront été au moins invités à réfléchir. Sont traqués, compte tenu de ce qui s'est passé avant et des difficultés qui seront signalées dans le relief, les connexions, les liens explicites, entre mots et symboles (formules…) visés, et activités mathématiques des élèves provoquées, y compris par des

4 Introduites de manière plus générale dans Robert et Vandebrouck (2014).

5 Cela peut être supposé par l'enseignant, par exemple s'il dit « vous vous souvenez.. » en évoquant une connaissance antérieurement travaillée.

questions. Pour mieux repérer, qualifier et interpréter ces rapprochements, on introduit une distinction entre les proximités ascendantes, descendantes et horizontales. Les premières (ascendantes) sont des rapprochements entre des activités contextualisées, souvent travaillées dans un énoncé, mettant en acte certaines connaissances, et une forme générale, décontextualisée, des éléments de savoir mathématique correspondant. Cela met en jeu une démarche inductive, souvent difficile pour les élèves peu habitués à généraliser eux-mêmes, à imaginer et à formuler une version hors contexte de ce qu'ils ont travaillé en contexte, numérique, géométrique ou graphique... Ce type de proximité peut intervenir pour éclairer, expliciter même cette démarche inductive. Les secondes (descendantes) sont des rapprochements qui vont dans le sens inverse, du général au contextualisé[6] : elles sont plus déductives, basées sur l'explicitation des reconnaissances et des substitutions à effectuer par exemple. C'est souvent dans des exercices après un cours sur ce qui est concerné que les élèves se posent des questions amenant à ces proximités, supposées éclairer les mises en fonctionnement des connaissances. Les dernières proximités (horizontales) rapprochent des éléments de même niveau de généralité, mais associés à des aspects différents, comme des changements de registres ou même de vocabulaire par exemple. Cela peut être le cas lorsque l'enseignant indique une autre façon d'exprimer un objet mathématique que celle donnée par un élève : ajoutant, après le cours, à la réponse « courbe qui monte » les mots « représentant une fonction croissante comme nous l'avons vu », par exemple. Il peut indiquer des alternatives (déjà rencontrées) à une méthode suggérée dans la classe. Le travail partagé sur des connaissances proches peut donc se faire par prolongement à partir du connu (l'enseignant met en évidence avec les élèves ce qui est généralisé : proximité ascendante), par insertion du nouveau dans du déjà-connu (l'enseignant met en évidence la manière d'appliquer à des contextes déjà travaillés les nouvelles connaissances : proximité descendante) ou par introduction de liens entre du déjà connu et du nouveau (proximités horizontales).

Cependant le rapprochement que signale l'étiquette « proximité » ne peut se décider, pour le chercheur, qu'en référence à la classe, localement; il y a un aspect conjoncturel, non reproductible dans ces procédés, pourtant utiles dans notre vision théorique. En outre, le label d'une proximité n'est pas toujours clair : il peut dépendre des élèves (et de l'état de leurs connaissances, différent dans une même classe), et une même intervention peut avoir le double statut descendant et ascendant.

---

[6] Certains auteurs évoquent l'instanciation du savoir au lieu de sa contextualisation.

1.5 Proximités discursives et zone proximale de développement

Revenons à notre positionnement théorique : la notion de « proximités discursives » correspond pour nous à une opérationnalisation en didactique des mathématiques de la notion de zone de proche développement (ZPD) de Vygotski. Le mot proche est ici attaché à des éléments mathématiques (connaissances ou activités) que les élèves ne peuvent mobiliser, formuler ou réaliser seuls, même après réflexion, parce qu'ils n'y ont pas pensé ou que cela reste trop vague ou trop éloigné de ce qui est disponible pour eux. Mais ce sont des éléments qu'ils peuvent reconnaître, reprendre ou comprendre, au moins en partie, si l'enseignant les partage avec eux – en explicitant ce qu'il fait. L'hypothèse admise, empruntée au modèle de Vygotski et adaptée, est que, lorsque les élèves ne sont pas très « loin » de la résolution ou de la compréhension visée, préparée par leur travail antérieur, ce type d'interventions de l'enseignant devient porteur d'éléments « appropriables », qui participent au développement des connaissances et des activités nouvelles en jeu. Ainsi les élèves peuvent être aidés dans certains de leurs apprentissages, notamment pendant le cours, en étant associés à ce que fait ou dit l'enseignant lors d'un travail qui se déroule.

Cette tentative de préciser ce que peut recouvrir dans ce cas le modèle de la ZPD est cependant adaptée de la notion originelle à deux titres au moins : d'une part, il ne s'agit pas de rechercher des rapprochements dans des interactions individuelles mais souvent collectives, d'autre part, il ne s'agit pas de partager des résolutions de problèmes (même au sens large) mais des présentations de connaissances. En fait, on pourrait suggérer qu'il y a, dans la classe, d'abord, l'émergence d'une sorte de ZPD collective, issue des interactions avec les différents élèves. Cela pourrait avoir lieu avant que chacun d'entre eux ne s'approprie suffisamment ce qui est en jeu pour que se mette en place l'intériorisation attendue à partir des ZPD individuelles (voir Vygotski). Cela se ferait sans doute grâce aux premières recontextualisations dans les premiers exercices proposés, dont la résolution serait facilitée par ce qui a eu lieu pendant le cours.

En résumé, notre objet d'étude est à la fois le contenu des discours des enseignants, en particulier pendant leurs interactions avec les élèves, et l'insertion effective de ce discours dans les activités possibles des élèves lors des déroulements. L'efficacité des moments d'exposition de connaissances dépendrait ainsi, en partie, à la fois des occasions et de la qualité des proximités discursives, comme nous allons l'illustrer maintenant dans notre exemple.

2. Relief sur l'introduction de la définition formalisée de fonction croissante (grade 10)

Dans cette partie, nous présentons l'intérêt de la notion de fonction croissante ainsi qu'une revue de littérature sur l'enseignement des fonctions. Puis, nous nous intéressons aux mathématiques en jeu, aux aspects curriculaires et cognitifs, pour finalement réfléchir aux introductions possibles de la définition formalisée.

2.1 Pourquoi s'intéresser à cette notion?

La définition formalisée de la croissance (resp. décroissance) d'une fonction, étudiée ici, est au programme de seconde générale en France (grade 10), même si l'acquisition n'est attendue que pour la fin de l'année scolaire. Il y a donc une première raison institutionnelle pour cette étude.

En fait, cette formalisation comporte un symbolisme logique élaboré, comportant une implication universelle : une fonction est dite croissante (resp. décroissante sur un intervalle si pour tous a, b de cet intervalle, si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$ (resp. $f(a) \geq f(b)$) ou encore : pour tous a, b de l'intervalle, $a < b$ => $f(a) \leq f(b)$ (resp. $f(a) \geq f(b)$) Il s'agit plus précisément d'une définition doublement quantifiée universellement, qui met en jeu deux points a, b de l'intervalle. C'est donc une traduction ponctuelle d'une propriété qui est par nature globale : la croissance (ou décroissance) d'une fonction sur un intervalle.

C'est la première fois qu'on enseigne aux élèves une formalisation d'une telle complexité logique, qui plus est non naturelle, non intuitive, comme nous allons le préciser, exprimée algébriquement et en utilisant la relation d'ordre sur |R. La notion de maximum d'une fonction peut avoir déjà été défini formellement en classe, avant la croissance, mais c'est une définition beaucoup plus facile, ne faisant intervenir qu'une expression algébrique, la relation d'ordre sur les réels et un seul quantificateur universel (symbolisé ou non).

La difficulté de la formalisation en jeu ici est renforcée par le fait qu'il y a peu d'exercices mettant en jeu la formalisation et qui sont accessibles aux élèves de seconde, vu leurs capacités algébriques. De plus, la notion de dérivée introduite ensuite en classe de première (grade 11) permettra aux élèves d'éviter le recours à la définition étudiée l'année d'avant pour établir une (dé)croissance, d'où la gageure de réussir cette introduction, dans la mesure où on peut tout de même faire l'hypothèse que cela contribue à familiariser les élèves avec des écritures dont ils vont avoir besoin en analyse ultérieurement (dès le début de l'université par exemple).

C'est pour ces raisons que nous nous intéressons à la question suivante : comment peut se faire, en seconde (grade 10), l'introduction de la définition (nouvelle) formalisée de la notion de fonction croissante (resp. décroissante)? Ce qui est en jeu est la traduction ponctuelle universelle doublement quantifiée d'une propriété globale sur les fonctions (M. Rogalski, 2008), que les élèves ont déjà rencontrée de façon graphique ou dans des contextes de courbes non nécessairement fonctionnelles (en physique par exemple). Quelles motivations l'enseignant peut-il trouver pendant son cours à cette introduction formelle algébrique? Quelles activités préalables – en termes notamment de reconnaissances, d'organisation ou d'applications – peut-il avoir fait développer aux élèves et comment peut-il s'appuyer sur les connaissances déjà-là et/ou les activités préalables des élèves pour introduire cette définition nouvelle? Avant d'aborder nos analyses de moments de cours pour répondre à ces questions, nous établissons ce que nous appelons le relief sur l'enseignement de cette notion (Robert et al., 2012). Ce relief nous sert de référence didactique pour toute la suite de notre étude.

Cette notion de relief permet de faire le lien entre la théorie de l'activité (qui n'est pas une théorie didactique) et la didactique des mathématiques, les contenus en jeu et les processus d'enseignement-apprentissage des mathématiques. Il s'agit d'une analyse croisée, préalable, mathématique, épistémologique, curriculaire didactique et cognitive sur la notion enjeu de l'apprentissage. Cette étude préalable aux analyses des tâches proposées et aux déroulements en classe permet de situer par rapport aux contenus visés les activités intriquées des élèves et du professeur. Nous passons en revue les programmes d'enseignement, qui permettent de préciser les mathématiques en jeu à ce niveau et avant. Cela permet en particulier de préciser si la notion en jeu est une extension de ce que les élèves connaissent déjà ou si elle peut apparaître dans un problème accessible aux élèves, mais qu'ils ne peuvent résoudre, ou encore si elle s'avère très éloignée de ce qu'ils savent déjà. Nous repérons aussi les exercices possibles sur la notion en jeu. Il s'agit également, compte tenu de nos analyses mathématiques et des programmes, de traquer des éléments cognitifs – en termes d'activités possibles – qui balisent le cheminement des élèves jusqu'à la notion visée [ici la définition formalisée de la (dé)croissance d'une fonction], en signalant en particulier les difficultés déjà repérées et prévisibles des élèves. Nous en déduisons à la fois des tâches d'introduction envisageables, avec les appuis possibles ou impossibles pour le premier cours qui suit et des scénarios plausibles, avec la variété des tâches importantes.

Avant de détailler notre démarche nous donnons des éléments tirés de la littérature sur le sujet, même si souvent le zoom fait par les auteur.e.s diffère du nôtre.

2.2 Une revue de littérature sur l'enseignement des variations des fonctions en fin de secondaire ou en début d'université

L'enseignement et l'apprentissage de la notion de variation des fonctions ont fait l'objet d'un ensemble large de travaux en didactique des mathématiques, soulignant tous la difficulté liée au sens de variation, mais se focalisant moins sur la difficulté supplémentaire liée à la formalisation du sens de variation.

Un aspect fondamental lié à l'enseignement et l'apprentissage des notions fonctionnelles est par exemple la nécessaire prise de conscience par les élèves de plusieurs perspectives (ou point de vue dans certains travaux) sur les fonctions : ponctuelle, globale, locale (Bloch, 2003; M. Rogalski, 2008; Chorlay, 2011; Vandebrouck, 2011) associées respectivement à la nature des propriétés des fonctions travaillées. La notion de croissance (décroissance) est l'une des premières propriétés globales vue par les élèves. Dans le registre graphique, la croissance (décroissance) se visualise globalement sur la courbe et ce registre favorise donc facilement l'adoption de la perspective globale par les élèves. C'est d'ailleurs souvent dans ce registre qu'est abordé la notion de croissance, décroissance des fonctions. La traduction par la définition formalisée est ensuite ponctuelle universelle (doublement quantifiée). Il y a donc une rupture cognitive entre la perspective associée à la variation et la traduction formelle ponctuelle universelle, dont on peut penser qu'elle constitue une difficulté majeure de la formalisation liée à ce changement de perspective. En complément, Bloch (2003) met en évidence comment le registre graphique sur les fonctions permet de travailler à la fois les perspectives ponctuelle et globale sur les fonctions. Il est donc un bon support pour soutenir ce jeu de perspectives.

Les travaux en didactique sur l'enseignement du concept de sens de variation des fonctions se situent cependant souvent en amont des problèmes liés à notre formalisation. Ils portent par exemple sur l'appréhension des fonctions comme covariations entre deux grandeurs en dépassant la seule appréhension comme correspondance ou dépendance (René de Cotret, 1998, Arzarello et Robutti, 2004). Mais le propos ne porte pas encore directement sur le concept de sens de variations au sens d'aspects croissant et décroissant des fonctions. Les travaux de Hitt et Gonzáles-Martín (2016), qui font une revue des articles sur le sujet, constituent plus globalement une source de références récentes pour l'étude de l'enseignement des fonctions.

Une recherche spécifique sur le sens de variation des fonctions est faite dans l'article de Valero Cázarez (2003) : elle identifie sept conceptions alternatives du sens de variation des fonctions chez les étudiants de première année d'université au Mexique. Les conceptions les plus courantes et résistantes au changement sont :

la conception qu'une fonction n'a d'image négative que si elle est décroissante, une fonction est croissante si son graphe monte, sans aucune coordination entre les changements d'abscisse et d'ordonnée, et une fonction est décroissante si son graphique descend[7].

Cabañas-Ramírez et al. (2020a et 2020b) ont plus récemment proposé une analyse préliminaire épistémologique, didactique et cognitive de la notion de sens de variation des fonctions, sous-jacente à la démonstration du théorème liant le signe de la dérivée d'une fonction et ses variations. Ils en ont déduit une ingénierie didactique destinée aux étudiants de dernière année avant l'université (notre classe terminale). Nous pouvons en retenir certains éléments, même si nous nous intéressons à des élèves plus jeunes : d'une part, dans le premier texte, les auteurs confirment la difficulté de notre formalisation. D'autre part, ils attribuent la persistance de cette difficulté à un manque de travail sur le lien entre les diverses présentations de la notion, en d'autres termes, le lien entre les registres de représentations (Duval, 1993). Voici leur phrase de conclusion : … « une ingénierie didactique qui favorise la transition entre le travail dynamique et statique lié aux concepts de fonctions croissantes et décroissantes comme faisant partie du traitement du sens de variation d'une fonction » (p. 12, traduction libre[8]). Ils identifient en particulier l'importance de la dialectique dynamique statique, qui est en jeu dans l'appréhension du sens de variation de façon dynamique par l'intermédiaire du graphique, et dans celle de la formalisation qui embarque des aspects statiques.

D'autres articles portant sur le sens de variation semblent escamoter le problème de la formalisation et se situent plutôt en aval de notre questionnement. Par exemple, dans Passaro (2020), les actions mentales associées au passage chez l'élève de « la courbe monte » à « la fonction croit » relèvent de ce que l'on va développer en termes d'activités des élèves. Mais l'article s'oriente rapidement sur les actions mentales qui concernent le taux de variation alors que nous restons centrés sur la caractérisation de la croissance/décroissance d'une fonction en toute généralité.

Si nous revenons maintenant à ce qui relève plus précisément de notre objet d'étude, la formalisation attendue a été établie, semble-t-il, par Osgood en 1912 (Chorlay, 2007). Elle n'est pas facile à comprendre, ni même à retenir pour les élèves. Un certain nombre d'articles insistent ainsi sur la difficulté de cette

---

7 On peut le lire de droite à gauche en fait…

8 « a didactical engineering that promotes the transition between the dynamical and static work related to the concepts of increasing and decreasing functions as part of the treatment of the sense of variation of a function » (Duval, 1993, p. 12).

formalisation, liée à la présence d'une implication universelle (il est quelque fois évoqué une double implication). Ainsi, Chorlay (2007) écrit-il :

> des études empiriques montreraient sans doute combien cette définition de la croissance est non seulement peu comprise par les élèves mais, de fait, ne devient que très rarement une connaissance ne serait-ce que mobilisable. La distinction par D. Tall et S. Vinner entre concept image et concept définition nous semble ici utile : … au lycée les élèves se forment un concept image de la croissance, articulant divers registres sémiotiques (allure de courbe, tableau de variation et ses flèches, intuition cinématique) …; malheureusement cette image du concept ne semble que rarement recouvrir, …, la définition donnée dans un cadre purement numérique et ponctuel. (p.28)

Dans leur texte, Cabañas-Ramírez et al. (2020b) proposent une ingénierie expérimentée (31 élèves), très bien documentée et très intéressante. Leur cadre est celui de l'ingénierie didactique, dans un contexte expérimental, selon lequel la situation didactique est anticipée au mieux, alors que nous nous situons dans le contexte d'une classe ordinaire où nous cherchons à analyser les activités des élèves et le discours du professeur. Mais l'objectif reste le même en terme d'apprentissage visé. Leur ingénierie se fonde non seulement sur la théorie des situations didactiques, mais aussi sur l'usage des contre-exemples et le débat scientifique dans la classe. Elle a comme objectif de faire comprendre *in fine* aux élèves la définition formalisée de la croissance avec tout son sens, à partir de la discussion sur différentes propositions obtenues dans la classe, et abandonnées suite à des contre-exemples (les fausses définitions). Les auteurs retrouvent l'importance des conceptions intuitives dynamiques, liées au graphique, qui jouent comme obstacle pour implanter la formalisation statique : dans leur ingénierie, c'est le recours au débat scientifique, alimenté par des contre-exemples, qui favorise le passage recherché, notamment dans la phase d'institutionnalisation. Une conclusion nous intéresse particulièrement : ils insistent beaucoup sur le rôle fondamental de l'enseignant dans le processus, à travers l'usage des contre-exemples et la tenue du débat. Cependant cette ingénierie ne saurait être utilisée en seconde en France, dans la mesure où les connaissances logiques des élèves nécessaires pour l'ingénierie, sont pratiquement inexistantes, tout au moins insuffisantes.

Nous pouvons donc confirmer la difficulté de cet enseignement par cette revue de littérature. Nous revenons maintenant à notre étude du relief.

2.3 Les mathématiques en jeu

Nous reprendrons ici l'expression utilisée par l'enseignant, qui évoque la recherche d'une traduction mathématique algébrique, reprenant une question d'élève : cela marque qu'on cherche à exprimer une propriété « sans référence à des valeurs…, sans référence à une courbe » dit-il. La formalisation de la définition du sens de variations correspond à ce que nous appelons une notion FUG(O)[9], compte tenu de ce que savent les élèves au moment où elle est introduite : elle formalise la notion de croissance (respectivement décroissance) d'une fonction sur un intervalle, mais de manière nouvelle, formelle, et hors de portée d'imagination des élèves; elle unifie cette notion pour toutes les fonctions déjà rencontrées (linéaires et affines, voire autres); elle contribue à unifier l'approche graphique et l'approche numérique grâce à l'expression formelle; elle permet la généralisation de la notion à d'autres fonctions qui ne sont pas nécessairement encore connues des élèves de seconde. Les approches numérique, graphique et formelle de la croissance sont ainsi reliées.

Mais le plus important tient au (O) pour opérationnaliser. En effet les descriptions dynamiques des variations d'une fonction en termes d'allures de courbes ou celles, numériques, mettant en jeu des augmentations simultanées de valeurs, ne se laissent pas traduire formellement directement dans le langage mathématique précis attendu, même si on dispose de l'expression algébrique de la fonction. C'est ce qu'ajoute la définition formelle étudiée. Le (O) signale ainsi qu'il s'agit d'opérationnaliser une propriété qui est facilement perçue de manière dynamique – graphique ou numérique – mais traduisible en une expression algébrique, statique, avec laquelle on peut travailler.

La difficulté spécifique de l'enseignement des notions de type FUG(O) a particulièrement été développée dans le cas de l'algèbre linéaire puisque ce domaine des mathématiques est une niche de telles notions (Dorier, 1997). Dans des travaux plus récents, on peut citer Corriveau et Tanguay (2007) qui développent comment l'algèbre linéaire est un indicateur des exigences que requiert le passage à la formalisation pour les étudiants, à travers les niveaux d'abstraction et de généralisation qu'il met en jeu.

2.4 Aspects curriculaires (les programmes)

Les séances que nous étudions ici relèvent du programme de seconde de 2009 en France, précédant le nouveau programme entré en vigueur en 2019. En réalité, en ce qui concerne le chapitre des variations des fonctions, il n'y a pas de réel changement à signaler entre les programmes de 2009 et de 2019 (ni d'ailleurs de changements après la parution en 2019).

---

[9] F comme Formalisatrice, U comme unificatrice, G comme généralisatrice et O comme opérationnelle. Certaines notions FUG sont plutôt Simplificatrices qu'opérationnelles, notamment en algèbre.

Les fonctions sont abordées dès le collège où les élèves ont découvert des premières généralités sur les fonctions à travers différents registres de représentations : algébrique, numérique, graphique notamment. Ils doivent connaître le vocabulaire de base (image, antécédent, courbe représentative). Ils ont étudié les fonctions linéaires, affines (sans aborder tous les aspects, ils ont les formules et les droites associées graphiquement, sans leurs équations). Ils ont rencontré depuis plusieurs années des courbes quelconques, associées à des phénomènes ou à des grandeurs, et ont été amenés à reconnaître et interpréter qu’une courbe « monte », « descend », est constante, a un maximum, en référence à l’augmentation, la diminution, la constance de ce qui est représenté en ordonnée, mais sans aucun formalisme algébrique.

En classe de seconde du lycée, les objectifs affichés dans les programmes sont de consolider les acquis, d’étendre la panoplie de fonctions de références – avec la fonction carré, racine carré, inverse, cube – d’étudier les notions (nouvelles) liées à la formalisation du sens de variation, des extremums et de la parité. Une nouvelle représentation apparaît avec les tableaux de variations.

Ainsi trouve-t-on cités dans le programme « la croissance, la décroissance, la monotonie d’une fonction définie sur un intervalle et son tableau de variations, ainsi que le maximum et le minimum d’une fonction sur un intervalle ».

Ces variations des fonctions peuvent donner lieu, lorsque la variable décrit l’intervalle considéré, à une perception graphique, globale, sur une courbe (« monte » ou « descend »), à une perception numérique, ponctuelle (les valeurs successives de la fonction augmentent ou diminuent) ou à une définition formelle mettant en jeu un quantificateur (portant sur les couples ordonnés de réels) et une implication portant sur la comparaison de l’ordre des images de ces réels. Mais il y a de grandes différences entre les traductions dans ces trois registres, la troisième, nouvelle, étant plus difficile à cause de l’introduction d’un symbolisme logique. Le seul cas où une formalisation du même type, mais plus simple, peut avoir été rencontrée concerne la formalisation des extremums d’une fonction, souvent donnée avant celle du sens de variation, et peu utilisée de fait.

Les capacités attendues sont les suivantes : décrire, avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variations, le comportement d’une fonction définie par une courbe; dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variations. Cependant pour ces capacités, il n’est nul besoin de la définition algébrique pour réussir les tâches correspondantes. Problématiser cette définition formelle, qu’il appelle algébrique, reste donc très difficile pour le professeur.

Des accents spécifiques sont mis sur la modélisation d’une part, et sur la résolution d’équations/inéquations fonctionnelles d’autre part, ainsi que sur l’usage des outils numériques (logiciels de géométrie dynamique, tableurs, calculateurs formels et calculatrices notamment). Ainsi dans le premier paragraphe « Fonctions » du programme de seconde (Ministère de l'Éducation nationale, 2009) l'utilisation des logiciels est largement encouragée, mais en même temps, l'élève doit s'interroger sur la façon dont les courbes sont obtenues : en effet, il doit apprendre « à distinguer la courbe représentative d'une fonction des dessins obtenus avec un traceur de courbe ou comme représentation de quelques données ». Plus loin, on indique « il s'agit de faire comprendre que des dessins peuvent suffire pour répondre de façon satisfaisante à un problème concret mais qu'ils ne suffisent pas à démontrer des propriétés de la fonction. » Il s'agit donc de faire comprendre les limites de ce qu'on peut en déduire des courbes obtenues sur un écran graphique comme avec Géogébra par exemple ou des tableaux de valeurs.

Enfin, les commentaires des deux programmes de 2009 et 2019 précisent à un moment donné « Les définitions formelles d'une fonction croissante, d'une fonction décroissante, sont progressivement dégagées. Leur maîtrise est un objectif de fin d'année ». Notre questionnement sur l'introduction de ces notions rencontre donc bien des pratiques de classes appelées par les programmes.

2.5 Aspects curriculaires (les exercices dans les manuels de seconde)

Les registres graphiques, numériques et algébriques, déjà en jeu en troisième, avec quelques incursions dans l'ordre sur les réels, sont renforcés et augmentés de la définition formelle des variations, et cela peut alimenter les exercices en classe de seconde, en incluant des éléments de logique. Rappelons que nous nous situons toujours du point de vue français pour ce qui relève de ces aspects curriculaires.

Cela dit, comprendre et maîtriser ces définitions formelles ne va pas de soi et les tâches qui peuvent y conduire, qui ne sont pas souvent évoquées, sont assez peu nombreuses et peu variées compte tenu des connaissances algébriques et sur l'ordre sur les réels des élèves. Si le professeur se contente de décliner les capacités indiquées dans le programme de 2009, on reste bien loin de la maîtrise de cette définition. En fait, les deux programmes permettent une certaine latitude, suivant le niveau des élèves et les intentions de l'enseignant, entre des tâches simples et isolées autour de la courbe et du tableau de variation et des exercices plus complexes combinant différents aspects dans de véritables problèmes, utilisant éventuellement la définition formelle, qui est difficile – on y reviendra plus bas –, mais il n'y a pas tellement d'exercices adaptés à faire manipuler cette dernière. *A minima*, les activités des élèves peuvent être seulement de constater qu'une courbe monte ou descend sur tel ou tel intervalle donné, ou que des valeurs augmentent ou diminuent, et les élèves peuvent en déduire les variations sans jamais utiliser la définition (travail sur une mise en fonctionnement réduite des connaissances visées). *A maxima*, les activités portent sur la reconnaissance qu'il s'agit de démontrer algébriquement une (dé)croissance, avec l'organisation et le traitement correspondant (travail pouvant contribuer à la disponibilité de la définition et à sa mise en œuvre grâce à des calculs sur des inégalités algébriques).

Mais, dans les exercices de seconde (voir manuels) il y a peu d'occasion d'utiliser la définition formelle de la croissance comme outil. Souvent on s'appuie sur un graphique pour étudier les variations et l'algébrique ne vient qu'en vérification éventuelle, voire pour apporter une précision ou déjouer une fausse perception, mais dans des cas rares. Vu les connaissances algébriques des élèves, qui ne savent pas encore étudier en toute généralité le signe d'un trinôme du second degré, il y a peu de fonctions données par leur expression algébrique pour lesquelles ils peuvent utiliser la définition pour trouver le sens de variation. La démonstration du fait qu'une fonction affine donnée par la formule $f(x) = ax + b$ est croissante si et seulement si a est positif, permettant l'utilisation « outil » de la définition formelle, n'a pas d'enjeu en classe de seconde et elle est rarement observée dans les manuels et les pratiques. Et le fait qu'il suffise, pour avoir le sens de variation d'une fonction affine sur un intervalle $[c; d]$, de comparer $f(c)$ et $f(d)$, peut perturber l'adoption de la formule dans le cas général; car dans le cas général on ne peut pas se contenter de comparer les images des extrémités de l'intervalle.

On peut aussi réserver l'usage de la formalisation aux exercices qui suivent l'introduction des nouvelles fonctions de référence du programme, comme les fonctions carré ou inverse, mais cela n'aidera pas plus à établir cette formalisation. En fait, c'est le passage au calcul algébrique à proprement parler qui s'avère délicat, vu les difficultés prévisibles des élèves de seconde dès qu'on a affaire à des fonctions un peu compliquées.

Enfin, la notion de dérivée permettra, en classe de première, d'éviter le recours à la définition algébrique, ce qui en minore l'intérêt, au moins pour les enseignants, et justifie de ne pas s'attarder sur ces exercices où la recherche du sens de variation se fait algébriquement.

On pourrait donc s'interroger sur l'utilité de l'introduction de cette formalisation, alors même qu'elle n'est pas très nécessaire dans l'enseignement à ce niveau : nous y voyons un intérêt étant donné que la conceptualisation (Vergnaud, 1990) est un processus long et que cette première rencontre joue un rôle certain de familiarisation.

2.6 Aspects cognitifs

Nous détaillons les activités mathématiques, associées aux différents registres des fonctions en jeu. Le travail sur les variations dans le registre graphique ne met en jeu que la courbe, ensemble de points, et la description correspondante en termes d'allure (montante ou descendante) fait travailler aux élèves la perspective globale sur les fonctions (Montoya et al., 2018). Elle ne fait pas intervenir les deux coordonnées de ces points, ni *a fortiori* leur dépendance et leur covariation, pourtant en jeu. De plus elle est dynamique, mettant en scène un mouvement qui est ajouté. Or, pour une courbe donnée, la fonction qu'elle représente n'est pas visible en tant qu'objet séparé. Il y aura donc à transporter, et ce n'est pas transparent, d'un registre à un autre, non congruent, les notions de croissance (la courbe monte), décroissance, variation. Le problème n'est pas qu'une question de vocabulaire : la courbe monte et la fonction croit. C'est une question d'interprétation d'une visualisation (Duval, 2005) dynamique et globale en dimension 2, en une connaissance sur les fonctions, pour laquelle il n'y a plus qu'une dimension, celle portée par la variable indépendante.

En outre, ce qui est interprété visuellement le plus immédiatement est la variation de y, en ordonnée, celle de x, en abscisse, étant « cachée » dans le sens du parcours, de gauche à droite. Il y a donc une inversion avec le fait que, en phrase ou dans le tableau, on commence par x (en première ligne du tableau). Il y a également une « traduction » souvent laissée implicite de « plus haut » ou « à droite » (on regarde la place sur un axe) en « plus grand » (on introduit un ordre sur les valeurs représentées sur l'axe). Enfin, les intervalles concernés peuvent ne pas être précis, les lectures graphiques ne pouvant être qu'approximatives – même si certaines conventions peuvent être adoptées à ce sujet.

Le travail dans le cadre numérique permet quant à lui de dissocier plus explicitement x et $f(x)$, tout en décrivant leur covariation, par exemple en faisant afficher les valeurs de x et $f(x)$ sur un tableur. La perspective ponctuelle sur la fonction en jeu est concernée, favorisant sans doute un lien avec la définition formalisée qui est ponctuelle universelle. Mais, encore une fois, comment traduire algébriquement que, comme on peut le constater, quand les valeurs de x augmentent, celles de $f(x)$ aussi (pour fixer les idées)? Et sur quels intervalles?

Il y a, pour aborder le troisième registre, un double travail mathématique, précisément une double « astuce » mathématique. En effet, pour traduire de manière statique la notion de (dé)croissance, sans faire appel à l'augmentation, ni au mouvement, il faut comparer les valeurs de $f(x)$ pour deux valeurs a et b de x – perspective ponctuelle dynamique, devenue statique – et, comme c'est évidemment insuffisant, il faut le faire pour tous les couples (a; b), ou, ce qui revient au même pour un couple « quelconque », c'est-à-dire tel que les valeurs particulières que pourraient prendre a ou b n'interviennent pas. Il y a ainsi un quantificateur sur les couples, et une implication pour un couple donné, qui doit être démontrée de manière générique, sans faire intervenir de valeurs spécifiques : c'est une implication universelle.

Ainsi, en anticipant sur ce qui suit, si une partie de la définition algébrique, en termes d'inégalités – $a < b$ implique $f(a) \leq f(b)$ – est facilement associée au tableau de valeur des couples $(x,f(x))$, voire à la représentation graphique de la fonction (qui « monte »), même si les élèves ne peuvent pas toujours y penser seuls, le fait qu'il est nécessaire que ce soit vérifié pour tous les couples $(a; b)$ tels que $a < b$ est nettement moins intuitif. Trouver la double astuce précédente nous semble inaccessible à la plupart des élèves de seconde. Mais la comprendre nous semble accessible après des explications suivant la donnée de la formule, notamment si le travail dans les cadres numérique et graphique a été bien avancé. Ainsi, une fois la formalisation établie, les élèves peuvent facilement en visualiser la signification sur la courbe ou le tableau de valeurs.

2.7 Les introductions possibles de la définition formalisée

Pour alimenter ces moments d'expositions de la connaissance nouvelle, nous avons trouvé deux grands types de tâches introductives (appelées souvent « activités d'introduction ») dans les manuels selon la façon dont on envisage ce lien courbes/fonctions.

Le premier type permet de faire travailler sur des graphiques directement fournis aux élèves, permettant de réviser les descriptions des courbes et les interprétations correspondantes sur la covariation – extrema, intervalles où la courbe monte ou descend. Ce sont souvent des situations non mathématiques qui sont en jeu, et on ne connaît pas les fonctions associées. Souvent la variable est le temps. Rien dans ce type de tâches n'amène au besoin d'une formulation plus précise, si ce n'est, éventuellement, une certaine approximation des lectures, mais qui ne peut pas être résolue au sein de la tâche. Les activités des élèves, même *a maxima*, peuvent donc n'embarquer que la perspective globale sur les fonctions, si tant est qu'elles soient bien développées dans le cadre fonctionnel. Elles peuvent rester dynamiques et rien ne favorise des proximités discursives vers la définition nouvelle visée.

Le deuxième type d'introduction permet d'aller un peu plus loin. Les élèves ont à modéliser (mathématiser) eux-mêmes une situation de départ et disposent donc d'une expression algébrique. Les activités des élèves sont développées dans le cadre fonctionnel. Cela permet d'aborder la traduction algébrique de la croissance (par exemple), soit en tant que telle, en l'appliquant à la fonction en jeu, soit pour gagner en précision – ce qui reste difficile au vu des connaissances algébriques à mobiliser – soit pour introduire une problématique plus générale où on ne disposerait ni d'une courbe ni des valeurs de la fonction étudiée. L'exemple étudié est du deuxième type et il est donc plus susceptible d'amener les élèves sur le chemin de la définition.

3. Une problématique « double »

La (nécessaire?) familiarisation et l'acquisition de la formalisation complexe du sens de variation d'une fonction (croissance, décroissance) sont donc particulières et font partie de la conceptualisation attendue à la fin du lycée. Dans ces conditions, notre problématique croise la spécificité de la notion à enseigner, porteuse d'un formalisme unificateur et généralisateur éloigné de ce que les élèves ont déjà rencontré (FUG), et le fait que cet enseignement comporte nécessairement un cours, pas entièrement préparable par des activités d'introduction, et où l'enseignant doit nécessairement exposer les connaissances nouvelles, ayant peu de liens avec ce qui est déjà connu des élèves. Cet enseignement est rendu plus difficile encore du fait du petit nombre d'exercices abordables à ce niveau et qui mettent en fonctionnement la définition, alors même que son intérêt est justement de permettre d'établir le sens de variation des fonctions, et de réaliser son opérationnalité (O). Autrement dit, nous abordons en même temps deux questionnements différents :

a) une question très générale de méthodologie de recherche, qui s'intéresse à l'étude des moments de cours où les activités[10] des élèves (au centre de nos analyses) sont particulièrement inobservables - comment alors y accéder? Nous illustrons, dans ce cas particulier (et délicat!) le fait que rechercher les proximités peut y contribuer, en permettant d'apprécier, dans une certaine mesure, la manière dont l'enseignant s'appuie ou non sur le déjà-là des élèves, au fur et à mesure que se développent ces activités;
b) une question plus particulière sur l'exposition d'une notion FUG(O) où il n'y a pas de tâche d'introduction « suffisante » au vu du relief sur l'enseignement de la notion, et où des éléments qui ne sont pas très proches des élèves a priori nécessitent d'être introduits dans un cours, sans beaucoup d'applications ultérieures qui plus est. Cette notion FUG(O) est une des premières où des éléments de logique interviennent en plus des quantificateurs, formalisme encore ignoré des élèves et surtout qui n'est pas dans la continuité des approches intermédiaires préliminaires.

Nous illustrons donc, avec cet outil « proximités », une pratique où l'enseignant, grâce à son choix de tâches « adaptées », joue sur des alternances de proximités

[10] En tenant compte du fait qu'activité ne se confond pas avec action...

ascendantes et descendantes pour rester au plus près de ce font ou disent les élèves de différentes manières, même s'il introduit lui-même *in fine* la connaissance nouvelle qui manque aux élèves.

4. L’exemple détaillé : une activité d’introduction (surfaces agricoles) suivi d’un cours

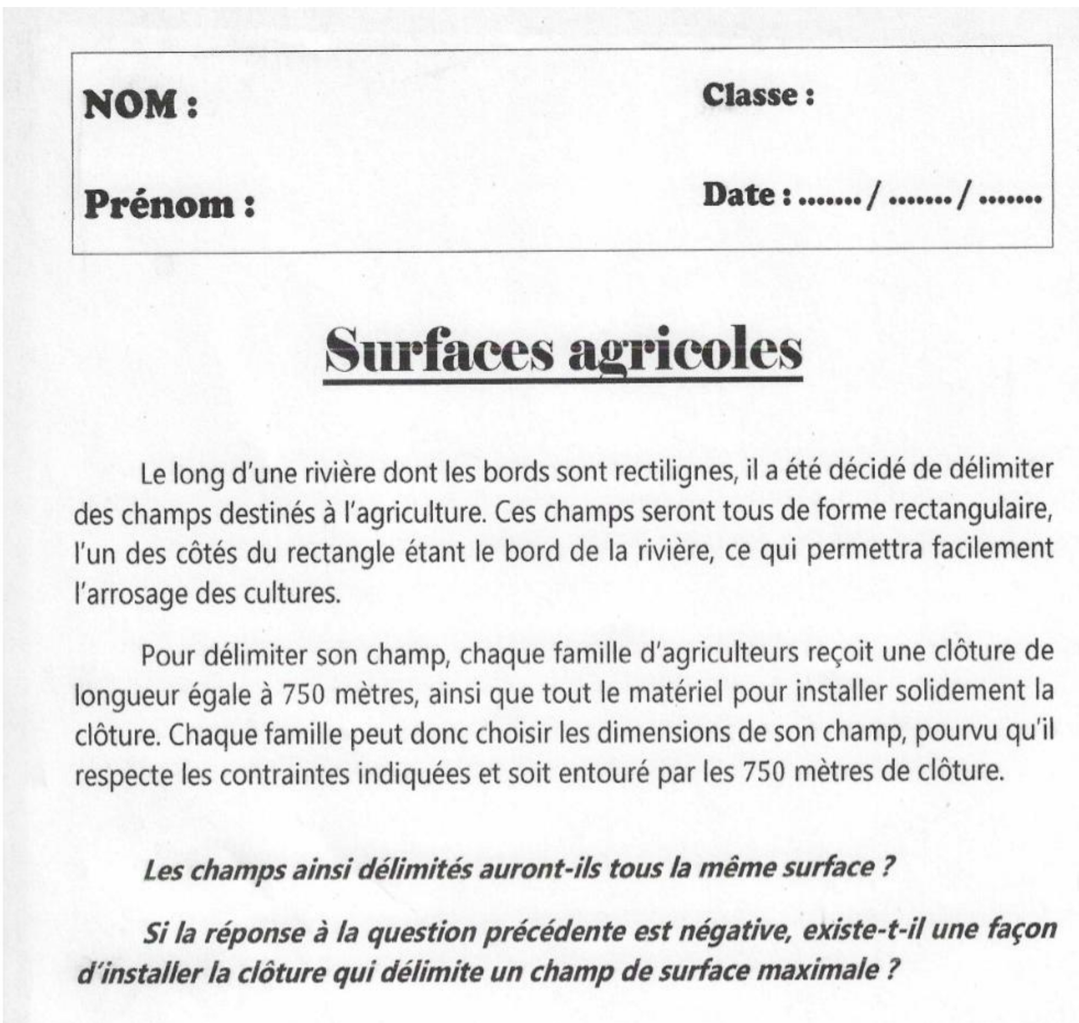
Dans cette tâche, l’étude de la variation d’une grandeur (la surface d’un champ[11]) en fonction d’une autre (la longueur du côté), liée à une figure géométrique (rectangle modélisant le champ), est introduite. On cherche s’il y a un maximum de cette surface. Nous n’analysons pas en détail le déroulement du travail des élèves sur la tâche introductive (figure 1) : il se déroule en deux demi-classes et ne permet d’aborder que le tout début du problème. Les déroulements sont assez proches dans les deux demi-groupes. La modélisation et l’exploration sont laissées aux élèves. Par exemple, dans le demi-groupe 1, les élèves cherchent pendant 8 min 30 s. Le professeur intervient à deux reprises collectivement pour signaler qu’il n’y a pas de clôture le long de la rivière et pour encourager à faire un dessin. Il propose des calculatrices aux élèves qui n’en auraient pas. Puis, quand tous les élèves ont fait un dessin, il rappelle les deux questions, celle d’abord de savoir si tous les champs ont la même aire, et, sinon, celle de trouver l’aire maximale. Les élèves travaillent donc d’abord sur la question 1 et se convainquent du fait que les aires diffèrent avec des exemples numériques. Le professeur insiste sur la justification de la réponse, il parle aussi d’argumentation.

Au bout de ces 8 min 30 s, les élèves se mettent en petits groupes et finissent la question 1. Le professeur continue de circuler et de discuter avec les petits groupes. Après 22 min 30 s tous les petits groupes sont passés à la deuxième question. Le professeur reprend la main sur la classe à 26 min. Cela aboutit, à la suite de la proposition d’un petit groupe d’élèves (« On va suivre ce qu’ils nous proposent » dit le professeur), à affecter une lettre à la longueur variable d’un côté et à l’établissement de la formule algébrique de la fonction « aire », appelée $f(x)$. L’enseignant argumente que c’est « pour passer au cas général et parce qu’on ne peut pas juste prendre des exemples, aussi nombreux soient-ils ». La lettre x est affectée à la longueur des côtés perpendiculaires à la rivière, après suggestion d’une élève dans un petit groupe et une discussion collective dans la classe. Ensuite, un certain temps est passé à évaluer le troisième côté (par exemple un élève propose $2x - 750$ au lieu de $750 - 2x$). La justification rapide de la bonne

11 Nous gardons le mot surface pour désigner le champ et son aire, comme l’enseignant. Plus généralement, nous ne modifions pas les mots de l’enseignant dans les citations que nous faisons.

expression est donnée par l'enseignant et la séance se termine par l'écriture par le professeur de la formule de l'aire [$f(x) = x(750 - 2x)$], dictée par plusieurs élèves. L'enseignant évoque, pour finir, un exercice où le même type de modélisation avait été fait. Les questions de variation ne sont donc finalement pas encore abordées, le travail ayant été essentiellement algébrique pour la question 2.

Cette première séance permet toutefois de rapprocher les élèves de questionnements et de réponses possibles sur les variations de l'aire quand la longueur x varie. Même avec leur formule algébrique, les élèves ne pourront répondre qu'en s'aidant du graphique ou d'un tableau de valeurs. Mais leurs réponses resteront nécessairement approchées (choix adéquat des variables didactiques). Cela peut donc être l'un des prétextes pour faire réfléchir les élèves à une formulation algébrique « exacte ».



NOM : **Classe :**

Prénom : **Date : .... / .... / ....**

Surfaces agricoles

Le long d'une rivière dont les bords sont rectilignes, il a été décidé de délimiter des champs destinés à l'agriculture. Ces champs seront tous de forme rectangulaire, l'un des côtés du rectangle étant le bord de la rivière, ce qui permettra facilement l'arrosage des cultures.

Pour délimiter son champ, chaque famille d'agriculteurs reçoit une clôture de longueur égale à 750 mètres, ainsi que tout le matériel pour installer solidement la clôture. Chaque famille peut donc choisir les dimensions de son champ, pourvu qu'il respecte les contraintes indiquées et soit entouré par les 750 mètres de clôture.

Les champs ainsi délimités auront-ils tous la même surface ?

Si la réponse à la question précédente est négative, existe-t-il une façon d'installer la clôture qui délimite un champ de surface maximale ?

Figure 1. Énoncé distribué aux élèves

4.1 À partir du tableur

Dans la deuxième séance (celle de cours), après avoir résumé ce qui a eu lieu dans la première séance et redonné l’expression algébrique de la fonction en jeu, l’enseignant propose d’abord aux élèves de percevoir et de décrire visuellement les variations grâce à une animation numérique sur le tableur (affiché au tableau). Les élèves peuvent répondre, en affinant leurs formulations. On obtient l’établissement de la covariation numérique, facilitée par les deux colonnes du tableur, qui amènent une perception numérique de la covariation. Voici la transcription[12] de cette phase pour identifier les proximités discursives à ce moment-là (E désigne un élève, pas nécessairement le même; entre parenthèse le minutage de la séance).

> **(15)** Donc ça, nous, c’est ce qu’on propose à l’ordinateur, au tableur et il nous calcule les surfaces. [On voit les deux colonnes du tableur avec x et f(x)]. […]
>
> Alors vous allez regarder ce qui se passe? Dans la colonne de droite évidemment, silence (7’’).
>
> Alors regardez bien parce que…
>
> E. Stop.
>
> Quoi stop ?
>
> Alors on peut peut-être s’arrêter là alors qu’est-ce que vous avez remarqué ?
>
> E. Le maximum…
>
> Alors il se trouve que dans la première partie du tableau qu’est-ce qu’on a constaté? … Donc j’espère que vous avez noté des choses.
>
> E. Ben oui.
>
> Alors vous avez noté que dans la première partie du tableau **on constate que la surface augmente [son doigt suit la colonne en descendant].**
>
> E. Puis diminue.
>
> Jusqu’à, alors, une valeur qui pour l’instant est maximale.
>
> E. en nombre entier.
>
> En nombre entier. En tout cas 190 on a 70300 et après on constate que, pour l’instant, on va aller au bout… Ça diminue. Alors est-ce que ça continue à diminuer tout le temps.
>
> E. Ouais.

[12] Nous transcrivons exactement les propos de l’enseignant.

On est à la 15e minute. Le professeur projette le tableur avec les deux colonnes intitulées x et $f(x)$ pour préparer la définition; comme les élèves ont travaillé sur la modélisation dans la première partie, on peut penser que les activités des élèves s'inscrivent déjà dans le cadre fonctionnel et donc qu'ils vont reconnaître ce codage. Mais ce sont des inférences. Le professeur pose des questions sur ce que les élèves constatent. D'abord, c'est le maximum qui est remarqué, mais ce n'est pas repris par le professeur car cela ne contribue pas à l'avancée vers la variation. Il en est de même un peu plus loin du « en nombre entier » qui n'est pas repris car il ne sert pas l'objectif du professeur. Celui-ci reformule la question et s'appuie sur des activités préalables et supposées des élèves : « on constate que la surface augmente ».

Nous constatons alors que les élèves continuent d'emblée la phrase en ajoutant « et diminue » quand le doigt du professeur continue sur la colonne du tableur. On peut donc considérer qu'il y là une proximité discursive car les élèves – ou du moins un élève – s'emparent du « augmente » et continuent avec « diminue ». Le « augmente », même s'il n'est pas prononcé en premier par les élèves, est bien mis en relation par les élèves avec les variations numériques de la surface et donc bien en appui sur les activités des élèves, constituant ainsi un appui pour l'activité suivante.

C'est une proximité horizontale car elle correspond à une lecture descriptive en langage courant du registre numérique, sans changement du niveau de généralité. Cette illustration de la notion de proximité montre que cette dernière est identifiée aussi bien par des activités élèves préalables que par des activités qui suivent (ici une reprise avec « diminue »). On identifie également le début du cheminement cognitif mis à jour dans le relief de l'enseignement de la notion visée. L'interaction continue.

> Alors dans la colonne de gauche est-ce que les valeurs augmentent tout le temps?
>
> E. Oui.
>
> Dans la colonne de gauche les valeurs augmentent de 10 en 10 régulièrement de 0 à 375.
>
> Dans la colonne de gauche x augmente tout le temps et du coup tandis que x augmente.
>
> E…

Dans cet épisode, le professeur provoque de la visualisation sur la colonne de la variable indépendante. L'inconnue « x » apparaît. Le discours n'est plus sur « ça augmente » mais « x augmente ». Comme on l'a déjà signalé, les élèves ont déjà eu des activités sur la modélisation fonctionnelle dans le début de la séance. En outre, dans le tableur affiché au tableau, les symboles « x » et « $f(x)$ » notés en haut des colonnes du tableur sont explicites et l'enseignant s'appuie sur cette projection. Comme dans l'épisode précédent, il faut continuer d'étudier la transcription pour savoir si l'introduction du « x » dans le discours relève bien d'une proximité discursive (ascendante dans ce cas puisqu'on introduit la formalisation nouvelle).

> Donc dans la colonne de droite (…) .
>
> Voilà à partir de 200 et jusqu'à la fin. J'ai mis 375 parce que ça tombe sur 375 où ça fait 0, bon. Donc **(18)** qu'est-ce qu'on peut déjà dire. Qu'est-ce que ça peut nous permettre de dire cette observation […].
>
> E. Plus x est grand.
>
> Plus x est grand.
>
> E. Plus la surface est petite.
>
> E. Non.
>
> Alors c'est pas ça. Alors corrigez, J, corrigez
>
> Chut, non vous vous écoutez sinon, comme c'est un peu compliqué il faut vraiment faire un effort.
>
> E. Ben ça augmente mais au bout d'un moment ça rediminue.
>
> Dans un premier, pour certaines valeurs de x ça augmente.
>
> E. Et après ça diminue.
>
> Et après ça diminue. Alors est-ce que c'est clair pour tout le monde ça?
>
> Alors qu'est-ce qu'on pourrait faire comme phrase? […]
>
> E : ben sur x à un certain moment (19).
>
> Alors sur x. Précisez sur x justement [avec un geste de gauche à droite].

Dans cet épisode, l'enseignant suscite à nouveau de la visualisation sur la colonne de droite pour relier les variations des deux variables. Un élève reprend effectivement « plus x est grand » ce qui nous confirme que le discours du professeur « plus x augmente » de l'épisode précédent est bien dans notre interprétation une proximité ascendante. Plus précisément, la notion d'augmentation des valeurs était déjà identifiée par les élèves dans le premier épisode et ici le « x » est repris par un élève. Donc ce passage au « x » peut bien être considéré comme une proximité ascendante des activités des élèves vers la connaissance nouvelle visée.

Toutefois, on remarque que le « augmente » a été perdu puisque l'élève dit « plus x est grand ». Le professeur reprend à son compte dans un premier temps, mais de suite fait corriger car « plus x est grand » ne sert pas son propos. Le caractère « grand » n'est pas un synonyme de « augmente ». Pour « grand », un seul « x » dynamique suffit, par rapport à une référence, tandis que pour traduire l'augmentation il faut deux « x » statiques, comparés via la relation d'ordre, et surtout il faut y lier explicitement les valeurs de f(x). Le professeur continue alors de développer son propos « pour certaines valeurs de x, ça augmente » et un élève continue « après ça rediminue ». L'interaction est longue et fastidieuse, mais on identifie que le « x » est bien intégré dans les propos des élèves et donc, pour nous, peut relever de la ZPD des élèves. A la minute 19, c'est ainsi bien un élève qui dit « bah sur x à un certain moment… »

> E. Sur x ça augmente, jusqu'à un nombre et après ça diminue.
>
> […]
>
> E. Ça augmente jusqu'à 190 et à partir de 200 ça diminue.
>
> D'accord donc on part de 0 jusqu'à 190. Quand on prend x entre 0 à 190 on constate que la surface semble augmenter et quand on se met entre 200 et 370 la surface.
>
> E. Diminue.
>
> Diminue. D'accord donc 0 190 c'est un premier **intervalle** [il montre le tableau déjà écrit à gauche] […]
>
> On constate que sur l'intervalle 0 190, quand on prend x entre 0 et 190, on constate on a une surface qui est en augmentation et puis sur l'intervalle 200 370 **(20)** on a des surfaces qui sont en diminution. Vous voyez ça?

La discussion se poursuit. Un élève dit « sur x ça augmente, jusqu'à un nombre et après ça diminue ». Et le professeur fait une nouvelle proximité ascendante en utilisant le mot « intervalle » en appui sur l'idée « jusqu'à un certain nombre et après ». Ce terme de « intervalle », que les élèves connaissent déjà, sera repris plus loin par les élèves.

Dans ces épisodes, l'enseignant provoque donc chez les élèves des activités associées à du « fait » ou du « dit », puis il pose des questions en appui sur ces activités (7 fois de suite : les constats sur le tableur, les valeurs qui augmentent puis diminuent, le passage à x, les intervalles, la formulation, et une question « est-on certain? » ci-dessous). L'établissement de la covariation numérique est facilité par les deux colonnes du tableur, qui amènent une perception numérique dynamique ponctuelle de la covariation. Les élèves peuvent relier l'observation sur la première colonne à « x augmente » et la deuxième colonne à « la surface augmente sur un intervalle puis diminue sur un autre intervalle ». Sont donc en jeu des activités sur la covariation (x, surface) qui font appel toujours à du dynamique et du ponctuel pour exprimer la variation mais avec l'utilisation de la dénotation x et une expression approchante de sa variation à l'aide du langage naturel. On est donc à mi-chemin de la covariation $(x,f(x))$ et de fait encore loin de la formalisation finale qui nécessite un point de vue statique.

Le professeur suscite alors une proximité descendante sur l'intérêt d'avoir des résultats exacts en lien avec la formalisation (il évoque l'algèbre[13] pour obtenir des résultats précis).

> Bon. Est-ce que ça veut dire que le maximum on l'a de façon certaine ici
>
> E. Ce n'est pas précis.
>
> Ça n'est pas précis Pourquoi? […]
>
> …
>
> E. On résout une inéquation.
>
> Ah On résout une inéquation. Donc, est-ce que c'est le tableur qui va nous la faire?
>
> E. Non.
>
> Voilà donc là qu'est-ce que vous pointez comme, comme heu, comment dire comme différences enfin comme options là? Avec le tableur est-ce qu'on peut avoir un résultat exact?
>
> E. Non, approximation.
>
> On va avoir une approximation alors de plus en plus précise J. a raison parce que plus le pas va être petit (**21**) plus on va peut-être arriver à donner une valeur précise. Mais M. elle voulait résoudre une inéquation donc revenir à de l'algébrique pur. C'est ça [il montre le tableau]. Voilà. **Alors effectivement, on avait vu ça que avec l'algèbre on peut peut-être essayer d'obtenir un résultat précis**.

Cet extrait illustre cette fois le fait que l'enseignant propose aussi une proximité descendante à partir de connaissances déjà là à propos de l'algèbre (qui permet d'avoir un résultat précis dans notre situation de surface agricole). Il suscite le questionnement sur la précision « de façon certaine » et ça lui permet de conclure « avec l'algèbre, on peut peut-être essayer d'obtenir un résultat précis ».

4.2 A partir du graphique

Dans une deuxième phase, en projetant cette fois le graphique proposé par GéoGébra, le professeur organise le même style de discussion avec des proximités

---

13 La formalisation visée ne relève pas de l'algèbre mais du point de vue du professeur c'est plus compréhensible par les élèves à ce niveau d'enseignement de l'inscrire dans le registre algébrique.

du même type. Nous donnons maintenant quelques extraits discontinus à titre d'illustration :

> À votre avis qu'est-ce qu'on peut choisir comme mot pour dire que la courbe monte ou que la fonction prend des [gestes vers le haut] valeurs qui augmentent. Alors on a été cherché un **synonyme d'augmenter**
>
> E : Ascendant.
>
> Un autre E : Croissant.
>
> Croissant
>
> […], donc là vous pouvez noter **qu'on est encore dans l'exploitation de l'exemple des surfaces agricoles** […].
>
> […]
>
> E : Ah ben intervalle 0, 187,5.
>
> Voilà, si on fait confiance à GéoGébra pour l'instant on n'a pas… [il écrit et dit] on va dire que sur l'intervalle [0, 187,5] la fonction f est, alors on va mettre en rouge, donc le mot hein **le mot qu'on a choisi**, on aurait pu en prendre d'autres, c'est croissante [écrit en rouge]. Bon alors après […]

Le professeur pose d'abord la question sur le « synonyme d'augmenter » pour provoquer la proximité ascendante avec le mot croissant. Cela fonctionne puisque le mot « croissant » est bien en appui sur les élèves. Une proximité descendante est proposée aussitôt pour ramener le « croissant » dans le contexte de la surface agricole. Le professeur instaure donc la connaissance nouvelle en appui sur les activités des élèves. Le mot « intervalle » est retrouvé dans les propos d'un élève et donc il y a bien une proximité ascendante à nouveau quand le professeur dit « sur l'intervalle [0, 187,5] la fonction *f* est croissante ». De façon parallèle, le professeur accompagne la caractérisation FUG de la définition qu'il cherche à installer par du discours métamathématique (c'est-à-dire sur les mathématiques) « c'est le mot qu'on a choisi ». Il rappelle aussi la covariation qui est en jeu et a été travaillée avant.

> le tableur par exemple, **dans le tableur on a vu que les valeurs augmentaient (32) et ça correspond à une courbe qui monte sur le graphique**. Ça c'est des choses aussi qu'il faut retenir. Ça c'est le mot précis et derrière ce mot c'est bien d'avoir des références. Donc, dans le tableur les valeurs augmentent, sur la, sur le dessin la courbe monte. Et la fonction on ne dira pas qu'elle augmente ou qu'elle monte, on dira qu'elle est croissante. Ça c'est le mot précis.

Dans cet autre extrait, il y a une proximité horizontale entre ce qui a été établi plus haut sur le tableur et ce qui est en jeu maintenant sur le graphique. Le processus est toujours très long. Nous en sommes à la minute 32 de la transcription et il y a eu jusque-là un jeu complexe de proximités horizontales, ascendantes, descendantes. Les activités des élèves, associées à ces proximités, embarquent toujours uniquement du dynamique – numérique et graphique – et rien de statique, qui préparerait la définition formalisée. Elle mettent toutefois en jeu la dialectique « ponctuel-global », en appui sur le tableur qui met l'accent sur le ponctuel (discret) puis sur le graphique qui met l'accent sur le global (et le continu), avec l'intervalle.

On n'a cependant toujours pas $f(x)$, même s'il est là en germe, car les activités des élèves sont inscrites dans le cadre fonctionnel grâce à la tâche d'introduction et son exploitation. Le vocabulaire et des commentaires métamathématiques pour justifier l'aspect FUG(O) sont présents, notamment « on décrit les phénomènes par des mots, des mots précis », de l'ordre de l'importance de la formalisation en fait.

4.3 L'apparition de la définition formalisée

On en vient à une troisième phase qui prépare la définition formalisée plus directement.

> (**34**) Alors maintenant on n'a pas répondu à sa question : comment ça se traduit ça. **Ça se visualise en courbe qui monte ou qui descend ou bien en tableau où des valeurs augmentent ou des valeurs diminuent**. Maintenant il faudrait qu'on soit capable de dire ça en termes algébriques…
>
> […] [il montre le mot « croissant » sur le tableau].
>
> E. … inférieur.
>
> Mais cette phrase-là **vous êtes d'accord qu'elle n'est pas très opérationnelle en termes de calcul**. C'est du constat, c'est une observation. On utilise le signe comme ça (<) c'est ça? **(36).**
>
> […]
>
> (**39)** Dans une fonction, il y a x et il y a y, il y a x et il y a f(x). Oui alors, mais là j'essaie de voir quelque chose qui serait général, c'est-à-dire sur cet exemple de donner une définition de fonction croissante qui soit une définition générale.
>
> E… sur l'intervalle 0, 187,5 plus x augmente plus y augmente aussi.
>
> **Alors plus x augmente plus y augmente**. Est-ce que ça ça vous parait une bonne description? Voilà. Alors ça c'est nouveau plus x augmente plus y augmente. Ça est-ce qu'on peut mettre ça en algèbre? C'est-à-dire écrire ça avec des symboles. Peut-être ce symbole-là [il montre <] il peut être utile.

L'enseignant propose d'abord une proximité horizontale pour relier les deux registres en jeu associé aux deux perspectives en jeu « On visualise en courbe qui monte ou qui descend (global dynamique), ou bien en tableau où des valeurs augmentent ou des valeurs diminuent » (ponctuel dynamique). Le professeur montre le mot « croissant » sur le tableau. C'est à nouveau une façon de relancer et provoquer de l'activité chez les élèves, en l'occurrence de l'activité sur le changement de registre. De fait, l'un des élèves propose « inférieur », ce qui permet à nouveau au professeur de proposer une proximité ascendante appuyée sur « inférieur ».

Il est plus incertain de dire si « $f(x)$ » dans « il y a $f(x)$ » arrive dans une proximité parce que même s'il a été rencontré dans la première phase avec la colonne du tableur, il n'est toujours pas repris par l'élève à ce moment-là. Ce qui est repris par un élève, c'est « sur l'intervalle 0, 187,5 plus x augmente, plus y augmente aussi ». C'est toutefois déjà un bon appui pour la formalisation. On observe que le professeur reprend la formulation avec le « y » de l'élève et non pas le « $f(x)$ ». Il juge peut-être que c'est encore trop tôt. C'est d'ailleurs là que les élèves décrochent et que le discours ne sera plus en proximité comme l'illustre les passages suivants dans lesquels les élèves ont disparu de l'interaction.

> […] (41) x augmente, ça veut dire quoi? **Ça veut dire que x est de plus en plus grand? [ponctuel dynamique]… Ça veut dire que quand x est de plus en plus grand, en même temps f(x) aussi [covariation (x,f(x))].** Alors le problème c'est que c'est ça qui est compliqué. Cet x augmente de plus en plus. Comment est-ce qu'on peut traduire ça avec ce symbole-là [montre <]?
>
> […]
>
> (45) Qu'est-ce que ça veut dire x augmente? Ça veut dire quand je prends **des valeurs de x de plus en plus grandes [ponctuel dynamique]**, <u>des</u> valeurs de x de plus en plus grandes. Là il y a combien de valeurs de x au tableau?
>
> E.
>
> Ben là on a écrit un x – si je dis je prends des valeurs de x de plus en plus grandes, il faut que j'en prenne au moins **[montre deux doigts] [vers le statique ponctuel].**
>
> E. deux.
>
> Deux, **sachant qu'il y en a une qui sera plus petite que l'autre [statique ponctuel ordonné]**. Alors deux valeurs de x sachant qu'il y en a une qui est plus petite que l'autre comment ça va s'écrire? Déjà deux valeurs de x, comment on les écrit deux valeurs de x : si j'ai deux valeurs de x différentes, si j'écris ça x, x est-ce que c'est deux valeurs de x différentes?

Le discours se fait beaucoup plus sans réel appui sur les élèves, ni en amont, ni en aval. Il semble que l'enseignant a été au bout des proximités possibles. Il introduit l'aspect covariation x-$f(x)$ à une dimension, mais surtout le passage du ponctuel dynamique au ponctuel statique, puis encore au ponctuel statique ordonné.

Un élève réapparaît dans l'interaction et dit « deux » quand le professeur montre deux doigts. À partir de là, on va retrouver des proximités ascendantes, c'est-à-dire des appuis sur les élèves pour continuer la formalisation. En effet, tout le matériel est présent (mais est-ce bien en résonnance avec la ZPD des élèves étant donné le passage sans proximités?), deux valeurs de x dans un intervalle, le signe < pour les ordonner, les $f(x)$ qui leur correspondent qui sont ordonnés aussi. La notation indicielle x_1 et x_2 ne semble pas gêner un élève qui l'introduit mais qu'en est-il des autres? Reste la quantification universelle à nouveau problématique (deuxième astuce), ci-dessous.

> Est-ce que ce que j'ai fait là, évidemment c'est des exemples, **est-ce que c'est valable quels que soient [vers la quantification] les nombres x1 x2 que je prends dans l'intervalle** à condition que x1 soit plus petit que x2? **(50)** Est-ce que si je prends n'importe quel x1 plus petit que n'importe quel x2 dans cet intervalle, j'aurais à chaque fois f(x1) plus petit que f(x2).
>
> E. oui, ben oui, ben oui.
>
> Donc ça pourrait être une bonne façon de traduire que **la courbe monte** par exemple et **c'est généralisable à n'importe quelle fonction** [méta sur l'aspect G**]. Autrement dit, une fonction est croissante sur un intervalle si quelque que soient les réels x1 x2 qu'on prend dans l'intervalle, à partir du moment où x1 est plus petit que x2, f(x1) est plus petit que f(x2).**

On est à la minute 50. Le professeur occasionne une proximité descendante, quand il rapproche ce qu'il vient d'établir, même si la formalisation est encore incomplète, de « la courbe monte » (et comme les élèves ont eu de l'activité graphique préalable, c'est un bien rapprochement entre le nouveau visé et les activités graphiques des élèves). On trouve enfin la quantification qui reste un nouveau coup de force sans appui sur les élèves – comme on s'y attendait vu le relief – car c'est le deuxième éclat de génie du mathématicien pour retrouver du global par la quantification universelle, qui est trop difficile pour pouvoir venir des élèves et s'y appuyer.

Au final, le professeur introduit l'étude de la variation d'une grandeur (la surface d'un champ) en fonction d'une autre (la longueur du côté), liée à une figure géométrique (rectangle modélisant le champ). Il s'agit de chercher si toutes les surfaces sont égales puis s'il y a un maximum. La modélisation algébrique est laissée aux élèves, même si elle est aidée par le professeur – d'où l'introduction dans leur activité mathématique d'une fonction du second degré explicite, qui va permettre une amorce algébrique. Mais, dans la première séance en demi-groupe, les élèves ne vont pas au bout de l'activité en ce qui concerne les variations, même pas évoquées dans la tâche d'introduction. Dans la deuxième séance, l'activité des élèves les conduit grâce aux questions de l'enseignant à une étude numérique puis graphique – avec alors une inévitable approximation des intervalles en jeu qui peut motiver l'introduction de l'algébrique, même si l'étude ne peut être menée jusqu'au bout. Cette reconnaissance de l'approximation, explicitée, joue comme prétexte pour faire réfléchir les élèves à une formalisation nouvelle « exacte ». L'autre prétexte avancé est de s'affranchir de la courbe ou des valeurs pour une étude « intrinsèque » algébrique (voir une élève qui a parlé d'inéquation). Mais les élèves n'arrivent pas jusqu'au bout… malgré les efforts du professeur qui ne se prive pas de nombreuses proximités ascendantes, descendantes et horizontales! Il tente de faire « sortir » la définition mais en vain. Mais dès que la piste de comparer deux valeurs de x est donnée (il lève deux doigts), c'est repris efficacement par les élèves et l'enseignant conclut en ajoutant « pour tout couple » et en s'appuyant sur la courbe pour « vérifier ».

Conclusion

Dans notre approche théorique, l'activité des élèves est étudiée en classe ordinaire, en relation étroite avec les pratiques du professeur, indissociables. Nous avons fait le choix pour cet article de développer la notion de « proximités discursives », adaptée ici pour rendre compte des liens que l'enseignant développe avec « ce qui vient des élèves » pendant les moments d'exposition de connaissances. Selon nos choix théoriques, l'efficacité de ces moments de cours dépendrait ainsi, au moins en partie, des occasions et de la qualité des proximités discursives, sous forme d'échanges avec les élèves et entre eux, les reprises, les explications ou explicitations. Sont en jeu les relations entre ce qui concerne le savoir visé, ou bien les activités nouvelles à développer, et les activités possibles – voire effectives – des élèves, en amont ou en aval, et leurs connaissances déjà-là liées à des activités préalables, sur une tâche d'introduction par exemple.

Bien sûr il conviendrait de développer davantage ce type d'étude avec d'autres contenus et d'autres contextes. Mais notre exemple met en jeu l'exposition de connaissances qui présentent un caractère FUG(O). Il permet de montrer qu'un déroulement truffé de proximités, en tous genres, semble faciliter le suivi des élèves (un certain nombre en tous cas) ainsi qu'un début de prise de sens, comme en témoignent les réponses des élèves aux questions de l'enseignant et leurs interventions spontanées. Mais cela dévoile aussi les limites de ces proximités lorsque le contenu visé est trop loin de ce que savent les élèves, dont nous pensons, compte tenu du relief sur la notion, qu'ils ne peuvent seuls retrouver le formalisme conventionnel : l'exemple montre que, comme prévu dans le relief sur l'enseignement de la notion visée, c'est un cas où seul l'enseignant peut donner *in fine* la formalisation attendue, quitte d'ailleurs à multiplier ensuite des proximités descendantes et horizontales.

Par ailleurs, on ne peut attendre des seuls moments de cours l’acquisition visée pour les élèves : il manque de nombreuses mises en fonctionnement suffisamment variées qui contribuent à développer des activités y menant. Deux enjeux se dessinent ainsi pour les déroulements des cours, outre le choix d’un contenu adapté au programme, à la progression de la classe et aux horaires : d’une part, faire un exposé que les élèves puissent suivre et investir en partie, et d’autre part, donner aux élèves les moyens d’appliquer ce cours, dans des tâches diverses, permettant de continuer le processus engagé, sans doute encore assez formel. On pourrait dire que quand un élève entend un cours, il n’a pas encore la possibilité de conceptualiser complètement ce qui est en jeu. Ce qu'il entend, c'est ce qu'on pourrait appeler en poursuivant selon Vygotski, des pseudo-concepts, plus proches de signifiants (étiquettes, mots et groupes de mots) que de signifiés. Ce sera grâce aux activités que le professeur lui fait faire ensuite, ou peut-être qu'il a déjà développées avant, grâce aux liens qu'on peut établir entre ces activités et le cours (toutes les proximités !), qu’on peut supposer que chaque élève va transformer ce début, ce pseudo-concept en concept.

L’hypothèse qui autorise l’emploi de cet indicateur « proximités discursives » est évidemment inspirée du modèle de la ZPD. Dès lors que l’enseignant s’appuie sur des connaissances déjà là ou bien des activités déjà développées (ou du moins supposées telles) pour présenter des connaissances nouvelles, le discours est supposé être entendu, mieux approprié et intériorisé. Toutefois, comme nous l’avons déjà signalé, le passage de l’individuel au collectif et vice versa est loin d’être résolu. Nos recherches doivent donc continuer, sur d’autres contenus, et en essayant de se donner des moyens pour apprécier certains effets de choix différents de l’enseignant.

Si on revient au niveau théorique et méthodologique, nous partageons notre ancrage vygotskien avec d’autres approches. C’est le cas spécifiquement de la théorie de la médiation sémiotique (Bartolini Bussi et Mariotti, 2008). La notion de chaine sémiotique, notamment, fait écho à ce que nous avons tenté d’identifier dans nos analyses des interactions, les proximités discursives pouvant être vues comme des moyens pour le professeur de prolonger les chaînes sémiotiques. La perspective est aussi la même, très locale et très contextualisée à une séance, voire à un moment d’interaction. De la TMS peuvent être importés des outils « micro » liés aux types de signes véhiculés par l’interaction et aux différents types d’actions que met en œuvre le professeur pour entretenir la chaîne sémiotique : faire faire des retours à la tâche, focaliser, demander une synthèse… qui sont autant de façons non encore distinguées dans nos travaux, de provoquer des activités élèves en vue d’un appui pour des proximités discursives du professeur. En replaçant enfin nos analyses dans le cadre plus vaste de la théorie de l’activité, nous tentons de nous donner les moyens d'articuler de telles analyses « micro » au niveau plus « macro » de la classe, de son contexte et de son histoire. Cela rejoint une démarche aussi développée par Jaworski et Potari (2009) et aussi inscrite en théorie de l'activité.

Références

Arzarello, F. et Robutti, O. (2004). Approaching functions through motion experiments. *Educational Studies in Mathematics*, *57*(3), 305-308.

Bartolini Bussi, M. G., et Mariotti, M. A. (2008). Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom: Artefacts and Signs after a Vygotskian Perspective. Dans L. D. English , M. Bartolini Bussi , G. A. Jones , R. A. Lesh , B. Sriraman et D. Tirosh (dir.), *Handbook of International research in Mathematics education* (2e éd., p. 746-783). Routledge Taylor & Francis Group.

Bloch I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu: what forms of knowledge enable students to conjecture and prove. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 3-28. https://doi.org/10.1023/A:1023696731950

Bridoux, S., Hache, C., Grenier-Boley, N. et Robert, A. (2016). Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques, analyse et exemples. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 21*, 187-233. https://doi.org/10.4000/adsc.813

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer Academic Publishers.

Cabañas Ramírez N. O., Locia Espinoza, E., Morales Carballo, A. et Merino Cruz, H. (2020a). Didactic engineering for the treatment of variation of functions in pre-university-level: the increasing and decreasing cases *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *5*(2). https://doi.org/10.29333/pr/7846

Cabañas Ramírez, N. O., Locia Espinoza, E. et Morales Carballo, A. (2020b). Didactic Engineering in the Study of the Sense of Variation of Functions: Preliminary Analysis. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *15*(2). https://doi.org/10.29333/iejme/6261

Chorlay R. (2007). La multiplicité des points de vue en analyse élémentaire comme construit historique. Dans E. Barbin et D. Bénard (dir.), *Histoire et enseignement des mathématiques : erreurs, rigueurs, raisonnements* (p. 203-227). Institut national de la recherche pédagogique.

Chorlay R. (2011). "Local-global": the first twenty years. *Archives for history for exact sciences*, *65*(1), 1-66. https://doi.org/10.1007/s00407-010-0070-1

Cole, M. et Wertsch J. (1996). Beyond the individual-social antinomy in discussions of Piaget and Vygotski. *Human Development*, *39*(5), 250-256. https://psycnet.apa.org/doi/10.1159/000278475

Corriveau, C. et Tanguay, D. (2007). Formalisme accru du secondaire au collégial : les cours d'algèbre linéaire comme indicateurs, *Bulletin AMQ*, *XLVII*(*1*), 6-25.

Dorier, J-L. (dir.). (1997). *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Éditions La Pensée Sauvage.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, *(5)*, 37-65.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *10*, 5-53.

Engeström, Y., Miettinen, R. et Punamäki, R. L. (dir.). (1999). *Perspective on activity theory*. Cambridge University Press.

Galperine, P. (1966). Essai sur la formation par étapes des actions et des concepts. Dans A. Leontiev, A. Luria et A. Smirnov (dir.), *Recherches psychologiques en URSS* (p. 114-132). Editions du Progrès.

Hitt, F. et González-Martín, A.S. (2016). Generalization, covariation, functions, and Calculus. Dans A. Gutiérrez, G. L. Leder et P. Boero (dir.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. The Journey Continues* (p. 3-38). Sense Publishers

Jaworski, B. et Potari, D. (2009). Bridging the macro- and micro-divide: using an activity theory model to capture sociocultural complexity in mathematics teaching and its development. *Educational Studies in Mathematics*, *72*, 219-236. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9190-4

Leontiev, A. (1984). *Activité, Conscience, Personnalité*. Éditions du Progrès (1re édition, 1975, en russe).

Ministère de l'Éducation nationale. (2009). *Bulletin officiel de l'éducation nationale, de la jeunesse et des sports. Bulletin officiel no 31 du 23 août 2009.*

Montoya Delgadillo, E., Páez Murillo, R., Vandebrouck, F. et Vivier, L. (2018). Deconstruction with localization perspective in the learning of analysis. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education,* 4, 139-160. https://doi.org/10.1007/s40753-017-0068-z

Passaro, V. (2020). Analyse du déploiement d'un raisonnement covariationnel en situation chez des élèves de 15 à 18 ans. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *20*(3), 462-484. http://doi.org/10.1007/s42330-020-00101-x

René de Cotret, S. (1998). Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendante. *Petit x, 17*, 5-27.

Robert, A., Penninckx, J. et Lattuati, M. (2012). *Une caméra au fond de la classe de mathématiques. (Se) former au métier d'enseignant du secondaire à partir d'analyses de vidéos*. Presses Universitaires de Franche-Comté.

Robert A. et Vandebrouck, F. (2014). Proximités en acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en didactique des mathématiques*, *34*(2/3), 239-285.

Rogalski, J. (2008). Le cadre général de la théorie de l'activité. Une perspective de psychologie ergonomique. Dans F. Vandebrouck (dir.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (p. 23-30). Octarès Editions.

Rogalski, M. (2008). Les rapports entre local et global : mathématiques, rôle en physique élémentaire, questions didactiques. Dans L. Viennot (dir.) *Didactique, épistémologie et histoire des sciences* (p. 61-87). Presses universitaires de France.

Simon, M. A., Kara, M., Placa, N. et Avitzur, A. (2018). Towards an integrated theory of mathematics conceptual learning and instructional design: The Learning Through Activity theoretical framework. *The Journal of Mathematical Behavior*, *52*, 95-112. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.04.002

Valero Cázarez, M. S. (2003). *Estabilidad y cambio de conceptciones alternativas acerca del análisis de funciones en situatión escolar* [thèse de doctorat, Instituto Politécnico Nacional]. Tesis. http://tesis.ipn.mx/handle/123456789/974

Vandebrouck, F. (dir.). (2008). *La classe de mathématique : activité des élèves et pratiques des enseignants*. Éditions Octarès.

Vandebrouck, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions, *Annales de didactique et de sciences cognitives de Strasbourg*, 16, 149-185.

Vandebrouck, F. (dir.). (2013). *Mathematics classrooms: students' activities and teachers'practices*. Sense Publishers.

Vandebrouck, F. et Robert, A. (2017). Activités mathématiques des élèves avec les technologies numériques. *Recherches en didactique des mathématiques 37*(2-3), 333-382.

Vandebrouck F. (2018). Activity theory in French didactic research. Dans G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt, B. Xu (dir.), *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education* (p. 679-698) ICME-13 Monographs. Springer.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques, 10* (2.3), 133-170.

Vygotski, L. (1997). *Pensée et langage*. Éditions La Dispute. (Ouvrage original publié en 1934)