



La dialectique du générique et du singulier dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique

Corine CASTELA

LDAR, Université de Rouen, Université de Paris, Université Paris-Est Créteil, CY Cergy
Paris Université, Université de Lille, France

Corine.castela@univ-rouen.fr

Résumé : Cet article restitue les principaux jalons d'un parcours d'étude suscité par la question : comment la théorie anthropologique du didactique prend-elle en compte la dialectique généricité-singularité au sein des mathématiques? Cette question étant née d'une rencontre avec la modélisation des mathématiques proposée par Sensevy, on en donne une présentation détaillée. Le reste du texte présente d'abord les éléments de réponse à la question, connus de l'auteur avant son enquête, puis ceux qu'elle y a rencontrés. Aux côtés des contributions centrales de Chevallard que sont les organisations praxéologiques et la pédagogie de l'enquête sont introduits des travaux moins connus sur la mémoire didactique et sur l'utilisation du modèle praxéologique dans les environnements informatiques pour l'apprentissage humain (EIAH). Un exemple de résolution d'une tâche géométrique nourrit les réflexions sur la dialectique singularité/généricité.

Mots-clés : Théorie anthropologique du didactique, modélisation des mathématiques, organisation praxéologique, résolution de problèmes

Taking into account the dialectic of the generic and the singular in the framework of the Anthropological Theory of Didactics

Abstract: This article presents the main milestones of a study aiming to answer the question: How does the Anthropological Theory of Didactics take into account the singularity/genericity dialectic within mathematics? To respond to this question, born of an encounter with the modeling of mathematics proposed by Sensevy, we begin with a detailed presentation of this modeling. The remainder of the text presents avenues for answering the question asked by the author before beginning her investigation, as well as new ones encountered along the way. Alongside the central contributions of Chevallard, namely praxeological organizations and the pedagogy of inquiry, we introduce lesser-

known works on didactic memory and the use of the praxeological model in the TEL. An example of solving a geometric task paves the way for further reflection on the singularity/genericity dialectic.

Keywords: Anthropological Theory of Didactics, mathematical modeling, praxeological organization, problem solving

Introduction

Cet article a été initié par une invitation à participer au numéro spécial de la revue consacré à l'étude et à la modélisation de l'activité mathématique de la personne apprenante. Or, la nature même de la didactique conduit à devoir d'abord modéliser les mathématiques. Une telle réflexion sur les mathématiques a été au cœur de mes premiers travaux, elle a fondé les recherches sur la résolution de problèmes et le travail personnel des élèves qui, sans doute, m'ont valu cette invitation à participer au numéro spécial (Castela, 2008b, 2009, 2011). Dans ces travaux, l'approche épistémologique adoptée privilégie les dimensions génériques de l'activité mathématique. Ceci m'a conduite à adopter, à partir de 2007, le cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD), en la considérant comme particulièrement bien outillée avec les concepts d'institution et d'organisation praxéologique pour modéliser les phénomènes génériques. Ces objets et le rapport que j'ai entretenu avec eux au fil de ma biographie de chercheure sont l'objet de la première partie. Mais j'ai saisi l'occasion offerte par la revue pour me confronter à des travaux plus récents, en comptant sur les perturbations induites pour avancer. Certains éléments de la théorie de l'action conjointe en didactique (TACD) ont joué ce rôle. La modélisation proposée par Sensevy (2011), présentée dans la partie 2, prend en compte à la fois les dimensions génériques et les dimensions singulières des activités mathématiques considérées comme jeux de savoir. Ceci me conduit à porter un regard nouveau sur la résolution de problèmes comme sur la TAD, avec le questionnement suivant : comment analyser les relations entre généricité et singularité au sein de la TAD? Suscitée par le besoin d'étudier la notion d'affordance utilisée par Sensevy, la partie 3 revient sur la dimension « généricité » des tâches mathématiques et sur les constructions cognitives qu'elle permet en introduisant le travail de Matheron et Araya-Chacón consacré à la mémoire didactique. La partie 4 s'intéresse à la prise en compte de la singularité, plus précisément des éléments qui distinguent les tâches entre elles en sollicitant les recherches de Chaachoua et Jolivet dans le cadre de la théorie T4TEL¹. Puis l'analyse du traitement d'une tâche d'alignement permet de mesurer les conséquences sur l'activité mathématique du caractère non algorithmique de

¹ T4TEL : T4 renvoie au quadruplet praxéologique (Type de tâches, Technique, Technologie, Théorie) et TEL pour *Technology Enhanced Learning*.

nombreuses techniques. Nous terminons en présentant la pédagogie de l'enquête développée par la TAD en tant que modélisation des activités mathématiques comme processus de production de réponses à des questions. C'est l'occasion de formaliser le travail réalisé dans les sections 4.3 et 4.4 sous la forme d'une grille d'analyse permettant l'étude de textes de démonstration de théorèmes ou de solution de problèmes. Cet article est donc aussi un retour sur mes travaux sur la résolution de problèmes en mathématiques et le travail personnel.

1. Premières prises en compte des dimensions génériques des activités mathématiques par la TAD

Cette partie s'intéresse succinctement aux principaux éléments de l'univers cognitif personnel² relatif à la TAD (Chevallard, 2003) depuis lequel j'ai abordé l'enquête présentée dans ce texte. Autrement dit, quels objets de cette théorie ont été au cœur de mes recherches et quels rapports personnels j'ai construits avec eux, du moins la partie d'entre eux soumise à l'examen de la communauté didactique par la publication d'articles? Cette partie précisera également le sens attribué aux termes « singularité » et « généricité ».

1.1 Institution et rapport institutionnel

Le concept d'institution est l'un des concepts primitifs de la TAD (Chevallard, 1992). Une institution I est une organisation sociale stable au sein de laquelle sont réalisées diverses activités pour lesquelles I fournit des ressources matérielles, organisationnelles et cognitives. Les personnes qui entrent dans I pour y occuper une certaine position³ et accomplir certaines activités sont soumises à un système de contraintes institutionnelles. Ceci est conceptualisé en termes de rapports institutionnels des différentes positions aux objets présents dans I et de sujet de l'institution : une personne qui souhaite opérer durablement dans I en position p doit se soumettre aux attentes définies par l'ensemble des rapports institutionnels pour cette position, elle s'assujettit à I . C'est en tant que sujet, et non à partir des rapports personnels construits au cours de sa biographie, qu'elle agit dans l'institution. Ceci suppose en général une phase d'apprentissage institutionnel.

Cette approche privilégie la généricité des modes d'agir et de penser des sujets d'une institution dans une position donnée, laissant en arrière-plan la singularité des personnes assujetties. Autrement dit, elle fait l'hypothèse que les aspects

² Pour la TAD, l'univers cognitif d'une personne X est l'ensemble des objets connus de X associés aux rapports personnels que X entretient avec ces objets.

³ Exemple, dans l'institution scolaire, se distinguent les positions d'élève, de professeur, de directeur, etc.

invariants qui découlent des ressources et contraintes institutionnelles l'emportent sur les variations nées des différences interpersonnelles.

1.2 Organisations praxéologiques

Dans le cadre de l'approche institutionnelle définie précédemment, la TAD postule que toute activité humaine procède d'une praxéologie.

En toute institution⁴, l'activité des personnes occupant une position donnée se décline en différents *types de tâches* T^5 , accomplis au moyen d'une certaine *manière de faire*, ou *technique*, τ . Le couple $[T, \tau]$ constitue par définition, un savoir-faire. Mais un tel savoir-faire ne saurait vivre à l'état isolé : il appelle un *environnement technologico-théorique* $[\theta/\Theta]$, θ , « discours » rationnel (*logos*) censé justifier et rendre intelligible la technique (*tekhnê*), et à son tour justifié et éclairé par une théorie, Θ , généralement évanouissante. Le système de ces quatre composantes, noté $[T, \tau, \theta, \Theta]$, constitue alors une *organisation praxéologique* ou *praxéologie*. (Chevallard, 1997, p. 38)

À propos de la notion de technique, ajoutons deux précisions sur lesquelles nous reviendrons dans la suite (4.4) :

une technique – une « manière de faire » – ne réussit que sur une partie $P(\tau)$ des tâches du type T auquel elle est relative, partie qu'on nomme portée de la technique. (Chevallard, 1999, p. 225)

Il faut entendre le terme de technique en un sens très large, comme une « manière de faire » particulière, et non selon l'acception courante de procédé structuré et méthodique, voire algorithmique. (Bosch et Chevallard, 1999, p. 84)

1.2.1 Type de tâches, singularité et genericité

Ce premier niveau d'organisation praxéologique souligne donc le rôle joué dans le développement humain par la recherche de relations dans l'ensemble des tâches problématiques rencontrées, déjà traitées ou à traiter. Parmi des tâches singulières, c'est-à-dire distinguées deux à deux en au moins une dimension, il s'agit de repérer un sous-ensemble de tâches dotées de points communs qui rendent envisageable le transfert d'une technique de résolution de tâches déjà traitées à d'autres.

Le couple singularité-genericité est donc sous-jacent à la notion de type de tâches puisque l'intérêt d'un type réside : a) dans le fait qu'il contient plus d'une tâche, b) dans l'hypothétique transférabilité des modes de traitement de certaines tâches

⁴ Le modèle praxéologique est également considéré comme pertinent pour rendre compte de la science d'une pratique qu'une personne porte en elle (Chevallard, 2007, p. 714)

⁵ Dans cet article, les passages en italique dans une citation sont de l'auteur de la citation.

à d'autres distinctes, ce dont rend compte la composante « technique » du modèle. Mais les éléments qui singularisent les tâches ont des effets sur leur traitement qui ne peuvent être tenus pour négligeables, comme l'attestent les deux précisions relatives à la notion de technique.

Comme le montrent les exemples suivants, ces éléments et leur caractère différenciateur dépendent de l'institution de référence. Considérons les types de tâches suivants : T « Vérifier que la somme des mesures des angles intérieurs d'un terrain plat de forme triangulaire est égale à $180^\circ \pm 1' \cdot \sqrt{3}$ »; T^* « Vérifier que la somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle du plan est égale à 180° ». Dans l'institution de la profession de géomètre – topographe dont relève T , la technique consiste à relever les mesures d'angles, puis à en faire la somme. Plusieurs éléments ont des effets considérés par la profession comme non négligeables : le terrain et son environnement (taille, présence d'obstacles, etc.), l'instrument (type, ancienneté de son passage au contrôle métrologique), les opérateurs (formation, niveau de fatigue au moment de l'intervention). Il en résulte qu'à chaque triplet (terrain, instrument, opérateurs) correspond une tâche dont le traitement passe par l'implémentation effective de la technique⁶. Inversement, dans une institution mathématique académique ou dans l'enseignement secondaire français de mathématiques, T^* est réduit à une seule tâche « Démontrer le résultat en toute généralité ». Ceci est permis par la nature idéalisée des objets de la géométrie considérée⁷, dont les mesures d'angles supposées connues exactement, et par l'existence de savoirs traitant de classes d'objets. Ces exemples illustrent un phénomène sur lequel insiste la TAD (Chevallard, 1991, 2007) : toute praxéologie reconnue dans une institution en porte la marque. C'est, selon l'expression empruntée par Chevallard (2006, p. 23) à l'anthropologue Mauss, une idiosyncrasie sociale, ce que je précise en parlant d'idiosyncrasie institutionnelle (Castela, 2020).

1.2.2 Niveaux supérieurs d'organisations praxéologiques

La citation de Chevallard (1997) rappelée au début de cette section définit une praxéologie ponctuelle, associée à un seul savoir-faire $[T, \tau]$. « L'amalgamation de plusieurs praxéologies ponctuelles créera une praxéologie « locale », « régionale » ou « globale », selon que l'élément amalgamant est, respectivement, la technologie, la théorie ou la position institutionnelle considérée » (Bosch et Chevallard, 1999, p. 86). Dans le cas des mathématiques, un usage répandu est de

⁶ Voir (Castela et Romo Vázquez, 2023) pour l'analyse d'une situation plus complexe de topographie et une extension de la réflexion sur la variabilité au contexte industriel.

⁷ Ce serait différent à l'école primaire dans le cadre de la géométrie instrumentée.

parler d'Organisation Mathématique et d'utiliser la notation OM, déclinée en OMP, OML, etc.

En résumé, cette première modélisation des mathématiques en termes d'organisations praxéologiques globales confère aux savoir-faire $[T, \tau]$ qui y figurent une présence équivalente à celle qui est attribuée aux savoirs $[\theta/\Theta]$. Elle rend compte des ressources mathématiques mises à disposition dans une institution⁸ donnée pour traiter des problèmes nouveaux, mais en dit généralement peu du processus de résolution lui-même.

1.3 Institutions et praxéologies dans les travaux de l'auteur

Presque toutes mes recherches s'intéressent à l'utilisation des mathématiques dans des activités qui peuvent être internes aux mathématiques (résolution de problèmes nouveaux) ou relever d'autres domaines scientifiques ou professionnels.

J'ai d'abord travaillé sur le premier cas. Mon expérience d'étudiante puis de chercheuse en mathématiques m'a conduite à accorder un rôle primordial aux aspects génériques de la résolution de problèmes en mathématiques. Cette approche n'est pas unanime en Éducation Mathématique (voir Castela, 2011, chapitre 1 pour une analyse des différentes conceptions du *Problem Solving*). Elle attribue une importance cruciale à un corpus de savoirs pratiques dont le savoir théorique ne rend que très incomplètement compte (Castela, 2000, 2008a). L'identification de types de tâches et le repérage de techniques associées en font partie, ce qui explique qu'absente de l'article de 2000, la modélisation praxéologique soit au cœur de celui de 2008. Mais les usages majoritaires de ce modèle ne laissaient pas de place à la totalité des savoirs pratiques que je voulais considérer, j'ai donc introduit plusieurs développements.

1.3.1 Organisations mathématiques complexes (OMPC)

Castela (2008a) propose un amalgame des OMP qui prend en compte une réalité déjà présente dans le contexte scolaire du lycée français, a fortiori au sein des mathématiques académiques : plusieurs techniques τ_i peuvent être disponibles pour un type de tâches T . Les OMP $[T, \tau_i, \theta_i, \Theta_i]$, dites simples associées à chaque τ_i sont regroupées, formant une OMP dite complexe $[T, (\tau_i, \theta_i, \Theta_i)_i, \theta^T]$ où θ^T , la

⁸ Ces institutions sont de trois types : institutions de recherche mathématique, c'est-à-dire, socialement reconnues comme productrices de mathématiques; institutions d'enseignement; institutions utilisatrices de mathématiques. La circulation des OM produites par les premières vers les autres se traduit par des phénomènes transpositifs, que les limites de cet article ne permettent pas de développer davantage. Voir la postface de Chevallard (1991) et Castela et Romo Vázquez (2011).

technologie associée à T , situe les techniques les unes par rapport aux autres et cerne leurs domaines d'efficacité. La disponibilité d'une telle organisation permet d'envisager, face à une tâche nouvelle relevant de T , la diversité des techniques possibles et de sélectionner les mieux adaptées à la singularité de la tâche (voir 4.3-4.4 pour un exemple)

1.3.2 Composante pratique de la technologie

Par ailleurs, les recherches utilisant le modèle praxéologique en mathématiques privilégiaient dans leur description de la technologie d'une *praxis* $[T, \tau]$, la fonction validation, autrement dit les savoirs théoriques en jeu dans les démonstrations qui prouvent que la technique produit bien ce qu'on attend d'elle. J'ai donc distingué, au sein des praxéologies personnelles autant qu'institutionnelles, une composante pratique de la technologie, développée par les utilisateurs de la technique et visant à en favoriser l'emploi (Castela, 2008a). Quels savoirs contient cette composante? Quelles fonctions peuvent-ils remplir? L'exemple suivant (Castela, 2008a, p. 147) relatif à la technique d'intégration par parties pour le type de tâches « Calculer une intégrale $\int_a^b u(t).dt$ » en donne une idée et illustre les six fonctions distinguées par Castela et Romo Vázquez (2011) : décrire, valider, faciliter, expliquer, motiver et évaluer.

- Décrire : choisir deux fonctions f et g , dont les dérivées sont continues, telles que $u = f.g'$ et appliquer la formule

$$\int_a^b f g'(t) dt = [f(t).g(t)]_a^b - \int_a^b f' g(t) dt$$

- Valider : théorème d'intégrations par parties
- Faciliter : une présentation invariante des calculs telle que $\frac{f(x)}{g'(x)} \frac{f'(x)}{g(x)}$ peut aider à se souvenir de la formule et éviter les erreurs
- Motiver le choix des fonctions : f et g sont choisies de façon à ce que dériver f élimine le problème qui empêche de calculer une primitive de u
- Expliquer l'efficacité : cette technique peut être efficace car, dans certains cas, dériver change la nature de la fonction (ex. $\ln$)⁹
- Évaluer : Cette technique est adaptée quand la fonction à intégrer est un produit, mais elle ne fonctionne pas toujours, il y a d'autres techniques (ex. $u = f'.f^n$).

⁹ Motiver et expliquer sont deux dimensions complémentaires de la fonction « rendre intelligible » présente dans la citation de Chevallard (1997, p. 38) alors que « valider » est un autre terme pour « justifier ».

Cet exemple est interne aux mathématiques. Cependant, la recherche qui a débouché sur l'introduction des six fonctions d'une technologie concerne l'utilisation de la transformation de Lagrange en automatique. Plusieurs institutions sont impliquées : institution de production de mathématiques, sciences de l'ingénieur utilisatrices de mathématiques et institutions de formation d'ingénieurs. La circulation des OM produites par les premières vers les autres se traduit par des phénomènes transpositifs, dont la production d'une composante technologique pratique spécifique des utilisateurs. C'est un thème que les limites de cet article empêchent de développer (voir (Chevallard, 1991) et (Castela et Romo Vázquez, 2011, 2023)).

Pour ce qui concerne les activités mathématiques, à la suite d'autres chercheurs, tels ceux qui autour de Robert ont prôné l'introduction d'une composante « méta » dans l'enseignement des mathématiques (Dorier et al., 1997), je considère que des savoirs pratiques émergent explicitement dans la communauté mathématique. Ils ont donc toute légitimité à être intégrés aux organisations praxéologiques des mathématiques savantes, même si, issus de la pratique, ils ne sont pas régis par le même régime de vérité et de validation que les savoirs théoriques. En tant que tels, ils peuvent être reconnus par les institutions d'enseignement, au moins à partir du secondaire et donc y apparaître comme enjeux explicites d'apprentissage. Cette position a donné lieu à de vifs débats opposant dans les années 1980, Brousseau à Robert et au groupe « méta » (Brousseau, 1986, p. 60-64). On retrouve une expression des objections de Brousseau plus récemment dans une intervention de Perrin-Glorian (2021) sur la TACD. Selon elle, les connaissances liées à la pratique ne sont pas des savoirs mathématiques, elles doivent demeurer au niveau personnel, c'est-à-dire ne peuvent être reconnues, décontextualisées et encore moins institutionnalisées dans la classe. Dans ce cas, revient à l'élève la responsabilité de percevoir dans des situations vécues les aspects potentiellement génériques de certaines actions, de les convertir en connaissances méritant d'être provisoirement retenues jusqu'à ce que des emplois efficaces ultérieurs rendent légitime de les instituer à titre personnel; de même, cette responsabilité est à la charge du mathématicien qui tire les leçons de ses expériences. Il s'agit alors du développement de la praxéologie personnelle du mathématicien ou de l'élève. Notons que ce développement suppose que la personne dont il est question regarde son activité passée comme source de ressources pour des activités futures. Or, de nombreux travaux sociologiques et didactiques (de Certeau, 1980; Bautier et Rochex, 1998, 2004; Butlen et Charles-Pézar, 2003; Perrin-Glorian, 1993; Castela, 2008b) ont montré que cette posture dite de « secondarisation » de l'activité n'est pas spontanément adoptée par tous les élèves, ce qui contribue à l'échec scolaire des enfants d'origine populaire. Avec l'objectif de réaliser la

dévolution à tous les élèves de cette posture réflexive, j'ai plaidé pour la présence explicite dans l'enseignement des mathématiques de moments de construction de certains savoirs pratiques en m'appuyant sur l'hypothèse de la légitimité académique d'une composante pratique des technologies.

En résumé, j'ai abordé la lecture de Sensevy (2011) depuis un univers cognitif centré sur le rôle de la généricité dans les activités mathématiques.

2. La notion de savoir au sein de la TACD : jeux épistémiques

L'objectif de cette partie est de présenter la modélisation des mathématiques proposée par la TACD; j'y citerai donc longuement le livre *Le sens du savoir* de Sensevy (2011).

Pour cette théorie, « un savoir est une puissance d'agir, en situation » (Sensevy, 2011, p. 60), « "le savoir (que le professeur fait apprendre)" est modélisé en termes de jeu épistémique » (Sensevy, 2011, p. 123).

Décrire un savoir en termes de jeu (épistémique), c'est nécessairement le penser comme une pratique, certes non réductible à toutes les autres, mais partageant avec toutes les autres des caractéristiques spécifiques de la praxis. Au sein du paradigme didactique, le savoir peut ainsi être systématiquement décrit comme une praxéologie, qui tient dans une solidarité fondamentale, même si elle est empiriquement diversifiée, la pratique et le discours sur la pratique. [...]

Avec la notion de jeu épistémique, qui modélise une pratique de savoir, la TACD [...] va donc entreprendre de voir tout savoir d'abord comme une pratique de savoir (premier mouvement praxéologique), puis comme un jeu (second mouvement praxéologique), avec ses enjeux, ses règles définitoires, ses règles stratégiques, ses stratégies, le gain qu'il permet d'atteindre, les profits symboliques qu'il permet d'obtenir, etc. (Sensevy, 2011, p. 123- 124)

On retrouve donc la modélisation en termes de praxéologie proposée par la TAD. Voyons ce qu'apporte la modélisation en termes de jeu.

L'étude des travaux de Wittgenstein et de Hintikka conduit Sensevy à postuler qu'il existe trois types d'entités permettant de décrire un jeu donné :

- 1) Des règles définitoires (constitutives). Par exemple, aux échecs le fait que le fou joue en diagonale. [...]
- 2) Des règles stratégiques qui peuvent s'exprimer, au moins jusqu'à un certain point, sous une forme propositionnelle, indépendamment du jeu effectivement joué. Par exemple, aux échecs, le fait qu'il est souvent judicieux de placer des tours sur des colonnes ouvertes [...]
- 3) Des stratégies, qui correspondent au fait que dans l'hic et nunc d'une situation, une ou plusieurs règles stratégiques vont être activées pour

jouer – d’une manière qui peut d’ailleurs reconfigurer pour le futur la ou les règle(s) stratégique(s) utilisées ou donner naissance à une nouvelle règle stratégique. (Sensevy, 2011, p. 41)

Pour éclairer les possibilités offertes par cette modélisation quant à la dialectique singularité-généricité, il est important de noter que le terme de « jeu » est ici utilisé pour désigner une partie (voir la formulation « indépendamment du jeu effectivement joué »). Ceci n’est pas le sens utilisé quand on parle du « jeu d’échec », sens que j’utiliserai dans la suite en opposition au terme « partie ». Ceci étant précisé, on voit que les entités de type 1 et 2 se situent au niveau générique du jeu alors que celles de type 3 réfèrent à la singularité de la partie jouée. Disant cela, j’interprète métaphoriquement l’expression *hic et nunc* en considérant qu’elle renvoie à tout ce qui potentiellement peut distinguer deux parties, non seulement le lieu et le moment où elles se déroulent. Le terme « stratégie » semble utilisé pour désigner la coordination de règles stratégiques adaptées à cette singularité.

J’ai distingué des règles définitoires, qui disent comment jouer au jeu, des règles stratégiques, qui disent comment gagner au jeu, et des stratégies, qui résultent de l’actualisation, de la concrétisation, des règles stratégiques dans un milieu donné. (Sensevy, 2011, p. 202)

La distinction règles stratégiques/stratégies rend compte du fait que les premières sont

déformables, reconstruites en situation par les joueurs en analogie avec les situations précédemment rencontrées, dont on repère la forme/le modèle/le pattern/le motif dans la situation actuelle, modèle auquel on *s’accroche* pour agir au sein d’un jeu auquel on est *attaché*. (Sensevy, 2011, p. 39)

Parmi ces stratégies, il y en a de deux sortes :

- des techniques qui permettent de résoudre d’habitude des problèmes précis [en note : On peut penser ces techniques comme s’étageant sur un gradient qui va d’un pôle « algorithme » à un pôle « technique ouverte »];
- des heuristiques, qui sont des manières d’avancer vers la solution d’un problème pour lequel on ignore la ou les techniques précises qui permettent de le régler. (Sensevy, 2011, p. 109)

Je m’interroge sur l’utilisation du terme « technique » pour désigner certaines stratégies telles qu’envisagées par Sensevy. Au sens du modèle praxéologique de la TAD, auquel Sensevy fait lui-même référence, les techniques relèvent plutôt des règles stratégiques. Selon moi, il en est de même des heuristiques (voir par exemple, Schoenfeld, 1985). Les techniques mentionnées par Sensevy ci-dessus seraient donc l’instanciation dans une partie donnée de techniques au sens de la TAD, sens que je conserverai dans la suite, de même que pour les heuristiques

que je considèrerai toujours au niveau générique. Les stratégies peuvent être un mixte technique et heuristique, notamment du fait que la plupart des techniques ne sont pas des algorithmes (voir section 4.4) et que leur portée reste non caractérisée; leur mise en œuvre pour une partie donnée (une tâche pour la TAD) conserve donc une part d'incertitude. Sensevy (2011) souligne d'ailleurs :

Les jeux institutionnels, *au sein* des institutions, et eux-mêmes *en tant* qu'institutions, confrontent les joueurs à des *situations*¹⁰ – c'est-à-dire à des problèmes- caractérisées par l'incertitude sur l'action (là où l'institution est une machine à prévision, une machine à éliminer l'incertitude) et par la rupture de l'équilibre institutionnel. (p. 97)

On voit que la trilogie règles définitoires/règles stratégiques/stratégies introduite enrichit la modélisation praxéologique proposée par la TAD, car elle prend en compte la question de l'adaptation des techniques génériques à la singularité des tâches. Une approche sémiotique permet de préciser les choses.

On peut *jouer une situation adéquatement* lorsqu'on est capable de participer adéquatement à la production et à la reconnaissance de signes que ce jeu (cette pratique en tant que *situation agie*) demande, lorsqu'on entre adéquatement dans un processus de sémiose spécifique. [...]

Un jeu de langage/forme de vie, lorsqu'il est pratiquement maîtrisé, constitue un système de signes directement perçu, qui certes peut être très souvent rationnellement explicité du dehors, voire par l'agent lui-même, mais dont une caractéristique foncière est qu'il est perçu [...] comme un icône¹¹. [...]

Savoir jouer le jeu, c'est donc, dans une situation donnée, reconnaître les signes pertinents à partir desquels on oriente sa conduite. On sait jouer (dans une situation donnée) parce qu'on reconnaît dans cette situation des complexes de signes qu'on pense avoir déjà rencontrés dans la fréquentation de situations qu'on va considérer comme analogues à celle dans laquelle on se trouve plongée. (Sensevy, 2011, p. 45-46)

Parmi les éléments qui orientent la conduite, sont mises en avant les affordances et saillances¹² présentes dans la partie.

¹⁰ Une note (Sensevy, p. 97) précise qu'« il faut entendre 'situation' en anglais, langue pour laquelle un des sens du mot est celui-ci : "*a critical, problematic, or striking set of circumstances*" ».

¹¹ Ceci renvoie au triplet icône-indice-symbole de la sémiotique de Peirce.

¹² La saillance (de l'anglais *salience*, construit sur *salient*, du français saillant, lui-même du latin *saliens*, « qui saute ») d'une chose quelconque est le fait qu'elle attire l'attention; plus précisément, la mesure dans laquelle elle retient l'attention par rapport aux autres choses présentes dans son environnement.

Quelle que soit leur nature, les stratégies (dont le système peut être mixte – techniques et heuristiques) sont des réponses à des saillances du milieu, des manières articulées de traiter les affordances de ce milieu, de l'état du monde auquel on se trouve confronté dans le jeu. (Sensevy, 2011, p. 109)

Le lecteur aura compris que l'étude du modèle des mathématiques proposé par Sensevy aura perturbé mon rapport à la résolution de problèmes en y introduisant le point de vue de la singularité, me conduisant à me poser la question Q_0 suivante : Quels outils la TAD propose-t-elle pour prendre en compte la dialectique généricité-singularité dans l'activité mathématique ?

3. Affordances, mathématiques et ostensifs

L'étude du texte de Sensevy (2011) a été pour moi l'occasion d'une première rencontre avec le concept d'affordance. Je l'ai pris comme objet d'une étude, qui, sans que je l'aie anticipé, a fourni un premier élément de réponse à la question posée sur la TAD en mobilisant les travaux effectués dans ce cadre par Matheron (2010) sur la mémoire didactique.

3.1 Affordance, de quoi s'agit-il ?

Le concept d'affordance est issu du champ de la psychologie. Il est aujourd'hui utilisé en ergonomie cognitive et psychologie du travail et dans le domaine du design, pour élaborer des modèles de l'usager. Ce néologisme a été proposé par Gibson dans le cadre de sa théorie écologique de la perception.

Gibson propose ainsi d'étudier la perception en tant que moyen d'adaptation pour l'animal. La perception [...] s'inscrit avant tout dans l'interaction entre l'organisme et sa niche écologique et dans les apports mutuels entre la perception et l'action. (Luyat et Regia-Corte, 2009, p. 301)

Dans ce cadre, la notion d'affordance rend compte de la faculté qu'ont les animaux à adapter leurs comportements à ce qu'ils perçoivent de leur environnement.

L'affordance peut se définir comme une opportunité d'action. Par rapport aux propres dimensions corporelles et par rapport aussi aux buts, aux intentions de l'agent, l'affordance est une opportunité pour l'action pour un animal donné. Cette opportunité d'action ne peut être perçue que si l'agent par son expérience, par son exploration, a sélectionné les actions opportunes de celles qui ne le sont pas ou moins. (Luyat et Regia-Corte, 2009, p. 310)

Ces affordances sont-elles des propriétés de l'environnement ? Cette question fait débat parmi les utilisateurs de la notion. Pour Stoffregen (2003), l'affordance n'est une propriété d'aucune des deux composantes prise isolément mais du système agent-environnement. C'est la conception que je retiendrai ici. L'affordance lie certaines ressources matérielles présentes dans l'environnement et certaines

capacités de l'agent. Cette mise en relation est construite par l'agent dans un processus d'exploration lui permettant de déterminer progressivement quelles actions sont opportunes ou inopportunes pour lui dans un environnement donné¹³. On peut considérer que le processus de constitution d'une affordance s'accompagne d'une dynamique sémiotique, et donc cognitive, puisque certains systèmes d'objets perçus dans l'environnement se voient dotés d'une signification en termes de potentialité d'action.

3.2 À quoi ce concept issu de la psychologie peut-il renvoyer en TAD quand il s'agit de didactique des mathématiques?

Cette section relie le concept d'affordance aux travaux de Matheron (2010) sur la mémoire didactique, elle trouvera son aboutissement dans la section 4.3.

Comme l'ont montré les citations de Luyat et Regia-Corte, le concept d'affordance a pour objectif de rendre compte de phénomènes intrinsèquement liés au corps, associant perception et action opportune en situation. Il ne fait pas de différence entre animal et humain et désigne des constructions individuelles. L'usage qu'en fait Sensevy l'étend aux mathématiques, c'est-à-dire à un monde de savoirs et pratiques de savoir socialement construit auxquels les individus n'ont pas d'accès qui ne soit médié par des institutions. Apprentissage, enseignement, production ou utilisation des mathématiques, toutes ces pratiques sont encadrées par un contrat institutionnel, qui constitue donc une composante sociale de leur environnement. La constitution d'une affordance par et pour un individu correspond donc au repérage par celui-ci d'un système de conditions (ou ressources) lui offrant une opportunité d'action dans le cadre d'une institution dont il est le sujet dans une position donnée, ce qui assujettit ses actions aux contraintes du contrat institutionnel. Conditions et contraintes, ces termes sont utilisés ici à dessein, en référence à l'approche écologique développée au sein de la TAD. Une affordance en mathématiques est une construction sous un contrat donné.

Par ailleurs, les objets du monde mathématique ne sont qu'indirectement accessibles aux sens par l'intermédiaire des systèmes d'ostensifs auxquels ils sont associés par des relations sémiotiques. La sémiose de l'environnement qui accompagne la constitution d'affordance porte sur des instruments (de tracé, de calcul, etc.), mais aussi sur des ostensifs qui sont également des instruments de la partie perceptible des actions mathématiques. En reprenant un concept introduit

¹³ Citons un exemple relevant d'un domaine de recherche très actuel : une icône de l'interface d'un Smartphone peut être constituée en affordances par certains usagers et pas par d'autres (voir Morgagni, 2011).

par Matheron (2010) et Araya-Chacón et Matheron (2015) dans le cadre de recherches sur le travail de la mémoire en didactique, le système de signes ainsi constitué fonctionne comme un ostensif déclencheur :

L'ostensif désigné peut réactiver, avec un certain degré d'« automaticité », un non-ostensif. [...] De tels ostensifs jouent en quelque sorte le rôle du parfum de la madeleine de Proust. (Araya-Chacón et Matheron, 2015, p. 59-60)

Dans le cas de l'affordance, la perception de l'ostensif replace l'agent dans la position et sous le contrat institutionnel de construction de l'affordance. Elle déclenche la remémoration de situations antérieurement vécues par l'agent et d'actions déjà réalisées, en même temps qu'elle mobilise les non-ostensifs qu'il associe à ces différents éléments, ostensifs, situations et techniques. On peut supposer qu'au niveau individuel, l'existence d'affordances est sous-jacente à ce que l'on décrit souvent comme l'intuition d'un résolveur de problèmes, du moins dans ce qui le conduit à mobiliser ses expériences antérieures au service d'un problème nouveau perçu comme proche.

Jusqu'à présent, les affordances relèvent des connaissances construites individuellement dans la pratique. Pour rejoindre totalement le travail de Matheron (2010), qui repose sur les concepts de « mémoire collective » et de « cadres sociaux de la mémoire » empruntés au sociologue Halbwachs (1994)¹⁴, il nous faut envisager que des affordances puissent être aussi des construits collectifs, collectifs des chercheurs d'un laboratoire, des spécialistes d'un domaine de mathématiques, d'un professeur et de ses élèves, etc. Nous revenons sur ce point dans la section 4.3.

4. Comment analyser les relations entre généricité et singularité à partir du modèle praxéologique?

Cette partie s'appuie sur les travaux de l'équipe MeTAH (Modèles et technologies pour l'apprentissage humain) qui associe didacticiens et informaticiens dans des recherches consacrées aux environnements informatiques pour l'apprentissage humain (EIAH).

Il en découle nécessairement un travail de modélisation informatique des objets de savoir à enseigner, des connaissances d'un sujet, et des propositions pour doter les

¹⁴ « Du point de vue de l'auteur [Halbwachs], la mémoire est à la fois un fait et un processus collectif, aussi bien au niveau du stockage – d'expériences, de connaissances, etc. – qu'au niveau de l'évocation des événements du passé. Ainsi existe-t-il des ensembles de points de référence, les cadres, de nature sociale et qui forment un système global de repérage du passé, en permettant la remémoration individuelle et collective » (Araya-Chacón et Matheron, 2015, p. 46).

environnements informatiques d'outils de calcul afin de produire des diagnostics, des rétroactions vers l'élève ou le professeur... (Chaachoua et Bessot, 2019 p. 235)

4.1 Types, variables et sous-types de tâches

Dans la perspective définie ci-dessus, Chaachoua a développé au sein de l'approche praxéologique de la TAD, un cadre de référence spécifique, désigné par l'acronyme T4TEL¹⁵ (voir Chaachoua, 2020). Une attention toute particulière y est prêtée à la définition de la notion de type de tâches :

Un type de tâches T est décrit par un verbe d'action et un complément que nous représentons par $T = (\text{Verbe d'action}, \text{Complément})$. Le verbe d'action caractérise le genre de tâches, comme « Calculer » ou « Intégrer ». Le complément peut être défini selon différents niveaux de granularité, du spécifique au générique et, pour prendre en compte ces relations entre le générique et le spécifique, nous avons introduit les notions de système de variables et de générateur de types de tâches. (Chaachoua et Bessot, 2019, p. 238)

Les notions évoquées ne visent pas à décrire la singularité des tâches relevant d'un même type T ; néanmoins, elles permettent de distinguer au sein de T des sous-types de tâches différenciés par les valeurs qu'y prennent certaines variables. Dans la dualité générique-singulier, elles introduisent le niveau intermédiaire du spécifique. Ainsi pour le type « Ajouter deux entiers naturels », les deux variables correspondant au nombre de chiffres de chacun des entiers différencient des sous-types dont on sait bien la pertinence didactique au début du primaire. Dans la section 4.3, nous analysons un exemple lié à l'OMPC (1.3) associée au type de tâches T_{al} « Montrer que trois points distincts sont alignés » qui illustrera l'intérêt mathématique du repérage de sous-types de tâches spécifiques.

4.2 Tâche, contexte définitoire

Les outils précédents ne nous permettent pas de prendre en compte la singularité d'une tâche, ce qui la distingue de toute autre tâche d'un même type. Pour cela, il nous faut explorer plus avant les travaux de MeTAH. La thèse de Jolivet (2018) vise à indexer les énoncés de tâches prescrites en vue d'automatiser l'analyse des énoncés proposés par des manuels. Il propose la définition suivante :

Une tâche est définie par un triplet :

{Action à réaliser; compléments définitoires; compléments facultatifs}

Action à réaliser : elle est le plus souvent définie par un verbe d'action mais peut aussi être matérialisée par d'autres objets ostensifs, soit pour des raisons de langue (par exemple « donner un développement de » relève du même objet non ostensif

¹⁵ Voir note 1.

que « développer ») soit parce que des effets de contrat didactique amènent à l'interprétation d'un objet ostensif (symbole du type « ? » par exemple) comme associé à une action à réaliser.

Compléments définitoires : il s'agit du ou des objets sur lesquels l'action porte. En leur absence la tâche n'existe plus. Ils sont matérialisés par des objets ostensifs.

Compléments facultatifs : il s'agit d'objets ostensifs complémentaires dont la présence n'est pas nécessaire à l'existence de la tâche. En leur absence, une tâche est toujours définie. Ils ont diverses fonctions possibles (orienter vers le choix d'une technique; ingrédient d'une technique; répondre à une attente institutionnelle...). (Jolivet, 2018, p. 119)

On notera que, l'objectif étant d'analyser des énoncés d'origine scolaire, la définition proposée intègre dans les compléments facultatifs des éléments à visée didactique. Chaachoua (2010, p. 8) propose d'associer

à une tâche prescrite dans [une institution] *I* une tâche mathématique. Elle correspond au problème mathématique sans aucune indication sur la technique possible ou attendue et avec une formulation qui reste la plus neutre possible vis-à-vis de la technique. L'énoncé est une mise en texte de la tâche mathématique en ajoutant éventuellement des indications ou des questions qui prennent en charge partiellement ou complètement les étapes de la technique attendue. (Chaachoua, 2010, p. 8)

Mon but étant de travailler sur les pratiques de savoir des mathématiciens ou sur ce qui s'en approche le plus dans un cadre didactique, je me restreindrai dans ce qui suit à des tâches mathématiques au sens défini ci-dessus par Chaachoua, c'est-à-dire, épurées de toute indication destinée à en aider l'étude. Je retiendrai de la définition de Jolivet l'idée que pour définir une tâche relevant d'un type de tâches défini par un couple (verbe d'action, complément), il faut définir tous les objets figurant dans le complément. Dans le cas de la somme de deux entiers, il suffira de choisir les deux entiers à sommer. Qu'en est-il du type de tâches T_{al} ? Pour définir une tâche de ce type, il faut définir les trois points, ce qui ne peut se faire sans introduire un ensemble d'objets initiaux (les données) et un processus de construction des trois points, lequel sera balisé par la production d'objets intermédiaires.

Exemple : Une tâche *t* d'alignement.

- A, B et C sont trois points alignés distincts. Par ces trois points, on mène trois droites distinctes D, D' et D'' parallèles entre elles. Soit M un point de D', distinct de B. La parallèle à (MC), resp. (MA), passant par B coupe D, resp. D'', en I (resp. J). Montrer que M, I et J sont alignés.

Ces objets mathématiques, nécessairement définis par un ensemble d'ostensifs et généralement intégrés dans un texte permettent de définir, dans une institution donnée, une tâche à partir du type de tâches. Il s'agit de ce que je nommerai « le contexte définitoire de la tâche ». Pourquoi indexer le contexte définitoire par une institution? Cette décision, provoquée par les objections d'un relecteur, prend en compte la variabilité institutionnelle des relations entre ostensifs et non ostensifs, même dans le cadre des mathématiques académiques. Il suffit de changer de cadre théorique pour que le même ostensif puisse désigner un objet différent. Ainsi, l'analyse développée à la suite se réfère à la géométrie affine. Ajoutons que l'environnement de la tâche peut contenir des objets complémentaires, non impliqués dans la définition des objets de l'action, par exemple, lorsque la tâche est insérée dans un problème plus vaste.

Le contexte définitoire et les savoirs mathématiques relatifs aux objets qui y figurent caractérisent la singularité mathématique de la tâche, ils conditionnent la mise en œuvre et le succès d'une technique associée au type de tâches, c'est-à-dire le fait que la tâche appartienne ou non à la portée de la technique. La diversité des contextes définitoires possibles explique qu'en mathématiques, la portée d'une technique non algorithmique est rarement caractérisée.

4.3 Retour sur les notions de sous-types de tâches et d'affordances

Cette section est illustrée par la tâche t et le type de tâches T_{al} définis ci-dessus.

T_{al} s'inscrit dans le cadre théorique de la géométrie affine puisque les objets du complément du verbe d'action qui définit le type sont de nature affine. Relèvent de l'organisation praxéologique associée à cette théorie plusieurs techniques. Par exemple, les techniques suivantes sont efficaces pour la tâche t :

- τ_1 : technique analytique dans un repère affine;
- τ_2 : montrer que l'un des points est l'image d'un deuxième par une homothétie de centre le troisième point.
- τ_3 : montrer que deux des droites formées en associant deux des trois points sont parallèles à une même droite.

Mais, parmi toutes les techniques possibles pour traiter T_{al} , il en existe qui sont développées dans le cadre moins général, mais plus riche de la géométrie affine euclidienne, nous les désignerons sous l'expression « techniques euclidiennes »¹⁶.

¹⁶ Je considérerai ici la géométrie affine comme un domaine dont un secteur est la géométrie affine euclidienne, de même qu'en sont la géométrie barycentrique et l'étude des transformations affines. L'étude des homothéties-translations est un thème de ce dernier secteur. Au sein de la géométrie euclidienne, l'étude des angles orientés est un thème. Pour les notions de thème, secteur, domaine, voir Chevallard (2002, p. 42).

Par exemple, c'est le cas d'une technique analytique τ_4 en repère orthonormé avec ou sans nombres complexes, une technique angulaire τ_5 : avec les trois points, définir deux vecteurs non nuls et montrer que la mesure de l'angle orienté qu'ils forment est nulle modulo π . C'est une OMPC $[T, (\tau_i, \theta_i, \Theta_i)_i, \theta^T]$ particulièrement foisonnante qui est associée à T_{al} . Définir des critères permettant, pour une tâche donnée, d'effectuer un tri raisonné repérant parmi les techniques disponibles celles qui semblent les mieux adaptées au contexte définitoire est un savoir utile pour la pratique géométrique. Ces critères satisfont un besoin pratique d'évaluation relative des différentes techniques associées à T , ils relèvent de la composante θ^T et de la composante pratique évoquées dans la section 1.3.

La mise en œuvre des techniques euclidiennes fait intervenir des objets spécifiques de la géométrie euclidienne, leur validation repose sur des théorèmes impliquant des objets et des hypothèses de nature euclidienne. Il est donc vraisemblable qu'elles ne puissent être efficaces pour des tâches dont le contexte définitoire ne contient aucun objet spécifique de cette géométrie comme c'est le cas de t . Ceci suggère l'introduction d'une variable binaire dont le questionnement se situe au niveau théorique des organisations mathématiques : V_{SE} ¹⁷ Le contexte définitoire contient-il des objets de nature euclidienne?

Si non (cas de t), les techniques euclidiennes sont a priori repoussées. Si oui, elles sont privilégiées. La tâche t' suivante (pour laquelle τ_5 est efficace) en est un exemple :

- Soient C et C' deux cercles du plan, sécants en deux points distincts A et B . Soit S la similitude directe de centre A transformant C en C' . Montrer que pour tout point M de C , M , B et $S(M)$ sont alignés.

Notons cependant que, pour $V_{SE} = \text{Oui}$, les techniques affines ne sont pas à exclure totalement, particulièrement si le contexte contient aussi des objets purement affines, par exemple, des droites parallèles dans un contexte contenant un rectangle inscrit dans un triangle. Inversement, pour $V_{SE} = \text{Non}$, pour des raisons que je ne détaillerai pas ici, on ne peut totalement exclure les techniques euclidiennes.

Cette variable permet de définir deux sous-types de tâches, auxquels sont associées des hiérarchisations différentes de l'ensemble des techniques associées à T_{al} . Elle a donc des effets heuristiques, mais l'ensemble des techniques possibles reste large. Continuons donc ce travail de différenciation des contextes définitoires. Un second niveau de variable V_{Th} ¹⁸, plus précis car centré sur chaque

¹⁷ SE est mis pour secteur euclidien.

¹⁸ Th est mis pour thème.

technique disponible, pourrait concerner la présence, dans le contexte définitoire de la tâche, d'instanciation des objets spécifiques du thème dont relève la technologie d'une technique. Pour une tâche donnée, une réponse négative conduit à rejeter (au moins provisoirement) la technique, une réponse positive à la considérer comme envisageable. Par exemple, dans le thème « angles orientés », figure le théorème de l'angle inscrit et de l'angle au centre dont il découle que la présence de cercles dans le contexte définitoire, comme c'est le cas de t' , est un pourvoyeur d'égalités angulaires qui encourage à tenter d'utiliser τ_5 . Dans le thème « homothéties-translations », les configurations de Thalès et les trapèzes permettent de définir des homothéties à partir de l'image de deux points. Or, comme on le voit dans la figure ci-dessous, plusieurs configurations de Thalès croisées sont présentes dans le contexte de t . Ceci conduit à préjuger que cette tâche appartient au sous-type de T_{al} pour lequel il est raisonnable de tenter d'utiliser une technique d'alignement figurant dans le thème. Le sous-type n'est toutefois pas associé à une OMP Simple, car trois techniques d'alignement font intervenir une ou des homothéties.

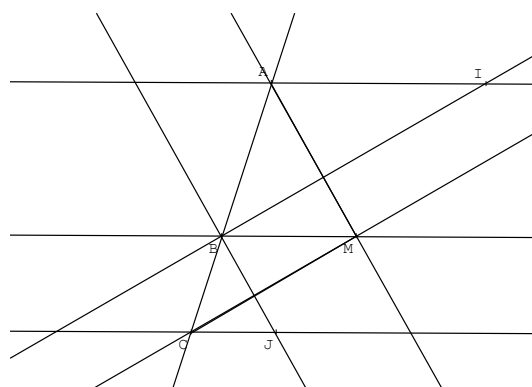


Figure 1. Configuration correspondant au contexte définitoire de t

On entrevoit la possibilité d'introduire, ici dans le cas de la géométrie, deux niveaux de variables portant sur les objets du contexte définitoire de la tâche, permettant d'aller vers la caractérisation de contextes favorables ou défavorables à l'emploi d'une technique donnée, ce que font les variables de Chaachoua pour des types de tâches numériques ou algébriques. Ces variables ne permettent pas de générer des tâches, elles fournissent des outils d'analyse du contexte de la tâche¹⁹, particulièrement utiles dans le cas des OMPC en hiérarchisant les techniques disponibles relativement au contexte définitoire : certaines sont (vraisemblablement) non pertinentes, les autres peuvent être essayées,

¹⁹ En cela, la réflexion proposée ici se rapproche du travail de Jolivet (2018) et de celui de Lesnes-Cuisiniez (2021).

généralement sans qu'on puisse garantir qu'elles soient efficaces, c'est-à-dire que la tâche soit à la portée de la technique. On peut résumer le processus présenté ici de la façon suivante : considérant une description de l'OMPC associée à un type de tâches, indexée à partir des théories $[T, (\tau_{i,j,k}, \theta_{i,j}, \Theta_i)_{i,j,k}, \theta^T]$ ²⁰, le processus définit à partir des blocs $[\theta_{i,j}, \Theta_i]_{i,j}$, des sous-types $T_{i,j}$ pour lesquels les techniques $\tau_{i,j,k}$ sont envisageables alors qu'elles sont à rejeter, au moins dans un premier temps, pour les autres tâches du type. On pourrait dire que $T_{i,j}$ est la trace sur l'OML définie par $[\theta_{i,j}, \Theta_i]$ du type T . Si le thème ne propose qu'une seule technique $\tau_{i,j}$ pour $T_{i,j}$, on a donc produit un sous-type de tâches, caractérisé par des propriétés du contexte définitoire, pour lequel il est opportun de tenter la mise en œuvre de $\tau_{i,j}$: ce n'est rien d'autre que la construction explicite et raisonnée d'une affordance.

On peut s'étonner d'une telle affirmation dans la mesure où le processus décrit précédemment repose sur une analyse du contexte définitoire basée sur la composante technologico-théorique des praxéologies; la pratique ne semble y jouer aucun rôle, ce qui est contraire à ce qui a été dit sur la notion d'affordance. C'est qu'il faudrait affiner la définition des variables de thèmes de façon à préciser quels sont parmi tous les objets qui figurent dans un thème ceux dont la présence favorise l'emploi d'une technique. Or, un tel savoir se développe à l'usage, dans les démonstrations qui établissent les théorèmes du thème et dans la résolution de problèmes. C'est ainsi, par exemple, qu'on peut repérer l'importance des cercles dans un travail utilisant les angles orientés. Nous illustrons cette même idée dans le cas du thème des homothéties-translations dans la section 4.4.

Notons que nous avons retrouvé la dimension sémiotique des affordances et le caractère déclencheur de certains ostensifs dans les exemples précédents. Ce sont certaines configurations spécifiques d'ostensifs qui orientent vers telle ou telle technique, à condition de les extraire de l'ensemble du contexte définitoire.

On pourrait penser que le travail présenté dans cette section débouche sur la détermination de la portée d'une technique. Les lectrices et lecteurs de cette revue savent qu'on en est loin car en mathématique, nombre de techniques ne sont pas algorithmiques. Nous en explorons maintenant les conséquences.

²⁰ Cette description est une description « descendante », allant des théories vers les techniques qu'elles produisent pour T , alors que la description $[T, (\tau_i, \theta_i, \Theta_i)_i, \theta^T]$ est « ascendante » en partant des différentes techniques connues pour T .

4.4 D'une technique non algorithmique à sa mise en œuvre dans un contexte singulier, analyse d'un exemple

Modeste (2012) donne la définition suivante d'un algorithme :

Un algorithme est une procédure de résolution de problème, s'appliquant à une famille d'instances du problème et produisant en un nombre fini d'étapes constructives, effectives, non ambiguës et organisées, la réponse au problème pour toute instance de cette famille. (p. 19)

Ainsi on peut dire qu'un algorithme est une technique dont on connaît (une partie de) la portée, formée d'un nombre fini d'étapes telles qu'à chaque étape, on sait exactement ce qu'il faut faire, avec la certitude que toutes les conditions du succès sont présentes. L'implémentation d'un algorithme exclut donc : 1) d'avoir à effectuer, à une étape donnée, un choix non anticipé (parmi plusieurs techniques ou parmi les objets auxquels appliquer la technique), 2) de rencontrer un obstacle à la mise en œuvre de la technique. Inversement, pour de très nombreuses techniques mathématiques, leur emploi efficace sur une tâche donnée aura confronté le résolveur²¹ à l'embarras du choix et/ou à l'embarras de l'obstacle. Illustrons ce phénomène en analysant une solution possible de la tâche t introduite ci-dessus.

La solution présentée dans l'annexe 1 est basée sur la mise en œuvre de la technique τ_2 qui relève du thème « homothéties-translations » auquel nous a conduits la présence de configurations de Thalès

« Pour démontrer que 3 points sont alignés, démontrer que l'un des points est l'image d'un deuxième point par une homothétie de centre le dernier point ».

Analysons maintenant cette solution en termes de choix et d'obstacles.

Première étape t_1

- Premier obstacle, un manque : le contexte définitoire ne contient aucune homothétie, ainsi l'instanciation de la technique à t introduit une première étape t_1 qui est une instanciation du type de tâches T_1 : définir une homothétie.
- Premier choix : il existe quatre techniques pour T_1 : définir l'homothétie 1) par son centre et son rapport ($\tau_{1,1}$); 2) par son centre et l'image d'un point distinct du centre ($\tau_{1,2}$, portée : les trois points doivent être alignés); 3) par l'image de deux points A et B ($\tau_{1,3}$, portée : si A', resp. B', est le point image de A, resp. B, le quadrilatère ABB'A' doit être un trapèze, croisé ou pas,

²¹ Le résolveur ici considéré est sujet d'une institution académique (ou épistémique). L'analyse ne prend pas en compte ses singularités personnelles.

mais pas un parallélogramme; autrement dit, une configuration de Thalès est présente); 4) par composition de deux homothéties ou d'une homothétie et d'une translation ($\tau_{1,4}$).

L'existence d'une telle OMPC crée un embarras de choix. Par exemple, les trapèzes croisés AIBM et BMCJ permettent de définir deux homothéties transformant A en M et I en B pour l'une, B en J et C en M pour l'autre. Par composition, on obtient sous condition à préciser une homothétie transformant I en J. Cette piste est une impasse car le centre de la composée ne peut être M. La solution choisit d'introduire une homothétie de centre I.

- Deuxième obstacle : dans les données n'existe aucun triplet de points alignés impliquant I, J ou M. Il faut en introduire un.
- Deuxième choix : soit A' le point d'intersection de D et (BJ).

Soit H l'homothétie de centre I, transformant A en A'. Il faut déterminer H(M).

Deuxième étape t_2

t_2 relève donc du type de tâches T_2 : déterminer l'image d'un point par une homothétie que l'on peut restreindre à un sous-type en précisant que l'homothétie est définie par son centre I et l'image A' d'un point A.

- Troisième choix : il existe trois techniques pour T_2 : 1) déterminer le point M' tel que $\overrightarrow{IM'} = \frac{IA'}{IA} \cdot \overrightarrow{IM}$ ($\tau_{2,1}$); 2) déterminer l'image d'une droite passant par M et distincte de (IM), H(M) est le point d'intersection de cette droite image avec (IM) ($\tau_{2,2}$); 3) déterminer l'image de deux droites sécantes en M, ne passant pas par I, H(M) est le point d'intersection des deux droites images ($\tau_{2,3}$).

Le contexte contient trois droites passant par M autres que (IM). Il faut déterminer au moins l'image de l'une.

Troisième étape t_3

t_3 relève donc du type de tâches T_3 : déterminer l'image d'une droite d par une homothétie dans le cas où la droite ne passe pas par le centre.

- Quatrième choix : il existe deux techniques pour T_3 : 1) déterminer l'image de deux points distincts de d ($\tau_{3,1}$); 2) déterminer l'image d'un point et considérer la parallèle à d passant le point image ($\tau_{3,2}$).

$\tau_{3,2}$ s'applique facilement à (AM) puisqu'on connaît l'image de A et que (AM) // (A'B) par définition de A'.

- Troisième obstacle : on ne connaît pas le point commun à (A'B) et (IM). On change donc de droite et on détermine l'image de (BM) = D'.

- Quatrième obstacle : on ne connaît pas $H(B)$.

Quatrième étape t_4

t_4 relève à nouveau de T_2 .

- Quatrième choix : utiliser $\tau_{2,1}$ en introduisant le point B' commun à (IB) et D'' pour lequel on cherche à montrer que $\overrightarrow{IB'} = \frac{\overrightarrow{IA'}}{\overrightarrow{IA}} \cdot \overrightarrow{IB}$.

Puisque les points I , B et B' sont alignés, la relation vectorielle à justifier peut se reformuler de la façon suivante : $\frac{\overrightarrow{IB'}}{\overrightarrow{IB}} = \frac{\overrightarrow{IA'}}{\overrightarrow{IA}}$

Cinquième étape t_5

t_5 relève d'un quatrième type de tâches T_4 : Montrer une égalité de rapports de mesures algébriques.

- Cinquième choix : il existe deux techniques pour T_4 . L'une est une application directe du théorème de Thalès, il faudrait toutefois démontrer que $(AB) \parallel (A'B')$; l'autre repose sur des égalités successives, obtenues notamment grâce à des configurations de Thalès présentes, en association avec des transformations algébriques

On constatera en revenant à la solution donnée en annexe que la suite d'égalités introduites est marquée de plusieurs choix (choix des configurations de Thalès extraites de l'ensemble, choix de l'égalité de rapports déduite) et de deux initiatives (introduction du point O , transformation algébrique du rapport) permettant de faire face à deux obstacles que nous laissons au lecteur le soin de décrire.

La fin de la démonstration ne comporte ni choix ni obstacle et ceci, notamment du fait du choix du point B' : l'image de (BM) est la parallèle à (BM) qui passe par B' , c'est donc D'' par définition de B' . Si l'on avait défini B' comme le projeté de A' sur (IB) parallèlement à (BA) , l'application de $\tau_{2,1}$ aurait été immédiate. Mais il aurait fallu pour terminer la démonstration établir que B' est un point de (CJ) .

La technique d'alignement choisie ainsi que toutes les autres techniques mobilisées pour traiter les tâches intermédiaires qui sont apparues se sont révélées efficaces pour la tâche t . À quels objets du contexte définitoire de t doit-on cette efficacité? À la présence de points et droites vérifiant respectivement des relations d'alignement et de parallélisme, formant des configurations de Thalès et des parallélogrammes, particulièrement repérables par les ostensifs associés dans la figure. Ces objets ont permis qu'à chaque étape, au moins une des techniques disponibles dans l'OML associée au thème des homothéties-translations se révèle efficace.

Mais la technique ayant été choisie, son succès pour la tâche t n'était pas assuré, il a été permis par les choix du producteur de la solution : choix de technique puisqu'à chaque étape est intervenue une OMPC, choix d'objets ajoutés au contexte définitoire pour surmonter les obstacles rencontrés (points A' , B' et O), choix d'un cheminement parmi les multiples configurations de Thalès disponibles, etc. Ces choix apparaissent comme des actions adaptées au contexte singulier de la tâche.

Dans l'espoir de repérer des façons de faire transférables, c'est-à-dire possiblement génériques, peut-on discerner sur quoi repose cette adéquation? Considérons le choix du point A' : il est défini à partir d'objets figurant dans le contexte définitoire, objets dont les propriétés vont pouvoir être utilisées dans les démonstrations impliquant A' (t_3 , t_5). On peut aussi raisonner à partir de la propriété à démontrer : si pour une homothétie de centre I , $H(M) = J$, alors nécessairement $H(A)$ est le point commun à D et à la parallèle à (MA) passant par J . Ceci est une phase d'analyse à finalité heuristique, technique d'une grande généralité; ici, elle conduit à la caractérisation choisie du point B' .

Quant à la transformation $\frac{AM}{AO} = \frac{AO+OM}{AO} = 1 - \frac{OM}{OA}$, elle donne accès au rapport impliquant les deux côtés parallèles d'une configuration de Thalès, c'est un possible élément de la technologie pratique associée à T_4 .

Pour cet exemple, nous avons fait fonctionner ce que nous considérons comme un outil pour l'étude de l'œuvre, formée par un énoncé décrivant une tâche et une solution ou bien un théorème et sa démonstration. Nous pensons avoir ainsi illustré les conséquences sur l'activité mathématique du caractère non algorithmique de nombreuses techniques : l'implémentation d'une technique pour une tâche singulière est un cheminement qui joue dialectiquement du singulier et du générique, des objets d'un contexte évolutif et des praxéologies disponibles.

5. Que propose la TAD pour modéliser la dynamique des processus de recherche?

Par le modèle praxéologique, la TAD met en avant la généralité des activités humaines, condensée dans des praxéologies stabilisées. Mais un second modèle, introduit plus tardivement, est à même de rendre compte des processus de traitement de problèmes nouveaux : il s'agit du schéma herbartien de l'étude d'une question.

5.1 Dialectique de la recherche et de l'étude, schéma herbartien

La présentation que nous ferons ici des développements proposés par la TAD dans le cadre de la pédagogie des PER (parcours d'étude et de recherche) restera très limitée.

Depuis une dizaine d'années (voir par exemple, Chevallard, 2007; Chevallard et Ladage, 2010), la TAD propose de substituer au paradigme dominant de l'étude scolaire, dit de la « visite des œuvres », un paradigme nouveau, dit du « questionnement du monde ». Celui-ci place, à la racine de l'étude scolaire, l'étude de questions qui se posent sur le monde et auxquelles les étudiants cherchent à répondre. L'étude à mener est un processus dont le moteur est une dialectique des questions et des œuvres : il n'est en effet aucune question humaine qui puisse être résolue grâce aux seules ressources intrinsèques des individus qui l'étudient, la solution utilisera des œuvres déjà produites, qui à leur tour devront être interrogées. Le déroulement d'une telle enquête se concrétise en un certain « Parcours d'Étude et de Recherche » ou PER.

L'état initial d'une enquête correspond au système didactique suivant :

$$S(X, Y, Q_0, M_0)$$

où X désigne l'ensemble des personnes engagées dans l'étude d'une question initiale Q_0 , Y l'ensemble des personnes qui aident ou dirigent l'étude; M_0 est l'ensemble des ressources, y compris cognitives (les connaissances et savoirs), disponibles pour X , c'est-à-dire que X connaît suffisamment, au début de l'enquête pour les utiliser; cet ensemble est nommé milieu, dans un sens emprunté à l'écologie. Le but de l'enquête est d'élaborer une réponse, notée $R^\heartsuit$ qui convienne à X .

X peut s'attaquer à la question qui lui est posée en cherchant à élaborer tout ou partie de la réponse à partir des ressources du collectif d'étude qu'il constitue, en s'appuyant sur le milieu initial de l'enquête. Dans certains cas, ce processus sera couronné de succès grâce à certaines innovations produites par X . Ce postulat est à la base de la notion de situation a-didactique au sein de la théorie des situations didactiques. Les ressources du milieu sont sollicitées en particulier pour écarter des réponses erronées. Plus largement, X peut organiser un dispositif d'expérimentation ou de recueil de données sur le terrain. On peut y reconnaître certaines démarches des chercheurs de métier. Mais, à l'instar de ces mêmes chercheurs, X peut aussi supposer qu'existent dans la culture des savoirs pertinents pour l'étude de la question posée, savoirs qu'il ignore et gagnerait à s'approprier. Il se met donc à la recherche dans tous les médias accessibles

d'éléments susceptibles de lui être utiles²² : des éléments de savoir éclairant la question, des réponses $R^\diamond$ à la question Q_0 déjà produites dans des institutions qui les ont légitimées (d'où le poinçon). X réunit ainsi un ensemble d'oeuvres qu'il devra étudier, c'est-à-dire 1) soumettre à une analyse critique, 2) s'approprier suffisamment pour les utiliser comme nouvelles ressources, autrement dit pour les intégrer au milieu de l'enquête.

Le schéma suivant, dit herbartien (Chevallard et Ladage, 2010, p. 3) représente le processus de l'enquête dont nous venons d'esquisser une description très sommaire, mettant en avant par la première flèche la dynamique de développement du milieu.

$$[S(X; Y; Q) \rightarrow M] \rightarrow R^\diamond$$

Figure 2. Le schéma herbartien de l'enquête

On remarquera que dans ce schéma, la notation initiale Q_0 a été remplacée par Q . C'est que, partant de la question initiale, le processus d'enquête fait vivre une dialectique des questions et des réponses dont la richesse va conditionner la qualité de la réponse finale. Pour un exemple très éclairant, on pourra se reporter à Bosch et Winslow (2015, p. 380-389).

J'avais toujours, jusqu'à présent, envisagé ce modèle dans le cadre d'une pédagogie et les PER mathématiques comme des processus visant à faire apprendre des savoirs et praxéologies mathématiques. Or, l'enquête sur la TAD dont je rends compte dans cet article m'a fait prendre conscience que la modélisation herbartienne est d'abord une modélisation de l'activité des chercheurs en commençant à la racine que constitue l'affrontement à des tâches singulières nouvelles. Les enquêtes réalisées dans différents cadres, scolaires ou non, ont produit des outils permettant d'analyser la dynamique du processus de recherche d'une réponse. Je me contenterai de citer les dialectiques médias/milieus, individuel/collectif, boîte noire/boîte grise, diffusion/réception. Pour une liste exhaustive, voir les rubriques « *Dialectic* » du glossaire proposé dans le livre *Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education* (Bosch et al. (2020)

Comment la modélisation herbartienne prend-elle en compte l'objectif scientifique de passage de la singularité à la généricité, c'est-à-dire de production de savoirs génériques et de praxéologies stabilisées? Dans les éléments très succincts que j'ai donnés, on ne le voit pas. Il faudrait pour cela regarder de plus près les différentes

²² Cette dimension distingue clairement la pédagogie ainsi développée de celle qui est proposée par la théorie des situations didactiques.

dialectiques évoquées ci-dessus, notamment celle des questions et des réponses. Notons que l'organisation didactique des moments de l'étude (Chevallard, 2002) propose une modélisation du processus que doit organiser un professeur pour que des élèves apprennent une praxéologie, c'est-à-dire la reconstruisent pour eux-mêmes. Même s'il est peu regardé comme tel, ce modèle vaut également pour l'activité des chercheurs.

5.1.1 L'exemple de l'enquête présentée dans cet article

Dans le cas de l'enquête dont je rends compte ici, X est réduit à moi-même, M_0 est partiellement présenté dans la partie 1 pour sa composante préalable à la lecture de Sensevy (2011). Les extraits de Sensevy (2011) analysés dans la partie 2, qui a donné naissance à la question Q_0 , appartient également à M_0 , ainsi que, une fois étudiés, les textes relatifs au concept d'affordance cités dans 3.1. Il faut enfin au moins y adjoindre un riche milieu mathématique dont la sollicitation est particulièrement illustrée dans les sections 4.3 et 4.4.

Y rassemble les collègues dont les écrits m'aident à comprendre leurs travaux au point de les intégrer au milieu au fil de l'enquête et d'en déduire des éléments de la réponse $R^\heartsuit$. Les deux relecteurs les rejoignent dont les commentaires ont, sur plusieurs points, relancé ma réflexion, notamment sur la dimension institutionnelle de la généricité.

En ce qui concerne le processus d'enquête, dont la chronologie est respectée par la structure de l'article, je ne peux reformuler ici la suite des questions soulevées. Les questions de premier niveau apparaissent dans les titres (3.2, 4 et 5), celles de deuxième niveau sont formulées dans les sections des parties 4 et 5, mais pas toujours sous forme interrogative. Quant au développement du milieu, il se traduit par l'introduction de plusieurs textes de recherche en didactique et d'un exemple de résolution d'une tâche géométrique.

5.2 Cas où la question est relative à la production d'une démonstration

En mathématique, toute question Q_0 conduit à une ou des questions du genre « Comment démontrer que telle affirmation est vraie? ». Ce genre de tâches occupe largement les mathématiciens, mais aussi les étudiants en mathématiques de l'enseignement supérieur et les lycéens français de spécialité mathématique. La spécification de ce qui est à démontrer conduit à un type de tâches T_0 dont relève la question Q_0 vue comme une tâche singulière, associée à un contexte définitoire donné. Le milieu M_0 pour X peut contenir une organisation praxéologique, éventuellement complexe, relative à T_0 . La partie 4 a amplement montré que, dans de nombreux cas, cela ne réduit pas à zéro le travail à accomplir pour produire une réponse à Q_0 . Même dans cette situation, la plus fréquente dans le cas de

l'enseignement classique des mathématiques où il s'agit d'adapter du générique à une singularité, X peut gagner à disposer d'un exemple de mise en œuvre de la ou des techniques connues pour T_0 . C'est, a fortiori, le cas si M_0 ne contient aucune technique pour T_0 , c'est-à-dire si X n'en connaît pas. X pourra alors se mettre à la recherche dans les médias auxquels il a accès de praxéologies relatives à T_0 ou, a minima, de réponses $R'^\diamond$ à une question Q'_0 , relevant de T_0 mais de contexte définitoire différent de celui de Q_0 . Ainsi, un chercheur pourra entreprendre de transférer à un contexte différent le travail présenté par des collègues à un séminaire ou publié dans une revue. Un étudiant cherchera la solution, donnée par le professeur ou par un recueil d'exercices corrigés, à un problème voisin de celui qu'il doit traiter. Il s'agit alors d'un transfert d'une tâche singulière à une autre tâche singulière. X peut s'en satisfaire ou chercher ensuite à repérer et expliciter des éléments de genericité, c'est-à-dire à construire une praxéologie.

Dans les deux cas, l'étude de l'œuvre, formée par un énoncé décrivant une tâche et une solution ou bien un théorème et sa démonstration, apparaît comme une dimension inévitable du processus de recherche symbolisé par le schéma herbartien. Trouver une telle œuvre dans un média ne suffit pas à l'intégrer au milieu : il faut 1) la valider, activité mathématique tout à fait classique et 2) en faire un outil pour la production de $R^\heartsuit$. Par un jeu de questions, X doit faire dire au texte de solution ce qu'il peut lui apprendre (Voir la dialectique inscription/excription (Chevallard et Bosch, 2020, p. xxiii). L'analyse présentée dans la section 4.4 fournit un outil pour cela, nous en donnons ici une description décontextualisée.

5.3 Outil pour l'analyse de la solution apportée à une tâche singulière

Cet outil comporte plusieurs niveaux.

Le premier est inspiré de Chaachoua (2010, p. 49) qui propose de définir une technique τ comme une suite de types de tâches $(T_i)_i$ et son instantiation pour une tâche comme une suite de tâches $(t_i)_i$, chaque t_i relevant de T_i . Notre analyse de la solution étudiée construit effectivement une première suite $(t_i)_i$ de tâches à accomplir, dont découle une suite de questions $(Q_i)_i$ (Comment accomplir t_i ?), puis une suite de types de tâches $(T_i)_i$ pour lesquels sont connues une ou plusieurs techniques $\tau_{i,j}$ (réponses $R_{i,j}^\diamond$ à Q_i). C'est ici l'analyse de la solution pour t qui produit la suite des types, non l'inverse comme chez Chaachoua. La suite des types n'est donc qu'une description potentielle de la technique, à mettre à l'épreuve d'autres tâches. Dans le cas étudié, l'expérience poussera plutôt à considérer les T_i comme des ingrédients possibles : toute instantiation de la technique fera intervenir certains T_i , pas forcément tous et pas nécessairement dans le même ordre que pour la solution analysée. Complété par une description succincte de la

ou des techniques associées à chaque T_i , ce premier niveau ouvre la voie à la production de savoirs technologiques décrivant la technique τ (voir 1.3).

Le deuxième niveau met en évidence pour chaque t_i les choix auxquels donne lieu la solution : le choix des techniques lors des étapes intermédiaires dans le cas d'OMPC, les obstacles rencontrés et les initiatives prises pour les surmonter. Si l'obstacle est un manque lui est associé le choix d'objets nouveaux qui viennent enrichir le contexte définitoire.

La mise en œuvre de ces deux premiers niveaux produit une modélisation de la solution en termes de choix stratégiques face à la singularité de la tâche. Pour évaluer la possibilité d'un transfert et plus largement y repérer des germes de généralité, situés au niveau des règles stratégiques (Sensevy, 2011, p. 41) et des complexes de signes susceptibles d'orienter l'action future (Sensevy, 2011, p. 46), deux questionnements complètent l'étude :

- À quels objets, non-ostensifs et ostensifs du contexte définitoire de la tâche doit-on le succès de la suite des techniques utilisées?
- Une fois la technique choisie, à quoi peut-on attribuer l'efficacité des choix et initiatives opérés par le résolveur?

Comme on l'a vu dans l'exemple étudié, la première question participe du processus qui peut aboutir à la construction de ce que l'on pourrait nommer une variable d'opportunité d'une technique, associée au thème dont relève cette technique. Il s'agit de déterminer, à partir de l'implication d'une technique τ dans la résolution de plusieurs tâches, des conditions sur le contexte définitoire susceptibles de favoriser l'efficacité de τ et orientant donc vers son emploi dans des tâches ultérieures. Cette affordance, son explicitation en termes de variable relève de la composante pratique de la technologie des techniques produites par le thème.

La deuxième question débouche sur un grain plus fin de l'analyse, elle peut permettre de repérer des éléments spécifiques de la technique. Par exemple, pour l'emploi de τ_5 dans la tâche t' , il sera plus efficace de travailler avec l'angle orienté $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BS(M)})$, plutôt qu'avec l'angle $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MS(M)})$, car B étant commun aux deux cercles, la décomposition $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BS(M)}) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BS(M)})$ introduit deux angles inscrits qu'il est alors possible d'égaliser avec deux angles au centre. Inversement, cette deuxième question peut conduire à des éléments d'une plus grande généralité (les heuristiques évoquées par Sensevy) comme c'est le cas dans notre exemple de la prise en compte des buts à atteindre par un processus informel d'analyse pour choisir un objet nouveau.

Terminons cette section par une observation. L'outil proposé néglige totalement la question de la validité de la démonstration construite et donc des théorèmes impliqués. C'est qu'il se veut complémentaire de l'approche usuelle des œuvres mathématiques, orientée vers la validation et la composante théorique des praxéologies. Mon hypothèse est qu'une telle approche est notoirement insuffisante pour développer la capacité à jouer le jeu mathématique. Si un mathématicien étudie la démonstration d'un théorème, il ne le fait pas seulement pour être certain que le théorème est valide et pour en comprendre et mémoriser le contenu, il le fait aussi pour apprendre de la démonstration des façons de jouer avec les nouveaux objets introduits dans le cadre théorique dont relève l'œuvre : la preuve du théorème « La somme de deux fonctions continues en a est continue en a' est l'occasion d'apprendre à faire fonctionner la définition en (ε, η) de la continuité ».

Étudier la démonstration d'un théorème dans une perspective pratique est une dimension de l'étude du cours de mathématiques extrêmement peu encouragée par les professeurs du secondaire. Mais combien d'entre eux l'ont-ils pratiquée pendant leurs études universitaires, compte tenu de la répartition encore très répandue du topos, la théorie aux professeurs, la résolution de problèmes aux étudiants? Il est plus probable qu'ils aient eu l'occasion, au moins pendant leur travail personnel, d'analyser des corrigés de problèmes pour y dégager des idées pratiques à retenir (Castela, 2004). À supposer qu'ils aient le projet de faire une place explicite dans leurs classes à un tel travail, ce qui n'a rien de certain, se pose la question des techniques didactiques pour y parvenir. L'outil présenté ici peut constituer une ressource utile dans cette perspective.

Conclusion

J'espère avoir montré par cet article l'intérêt qu'il peut y avoir pour un chercheur à ne pas cantonner sa réflexion dans un seul cadre théorique. En l'espèce, je me suis appuyée sur quelques éléments du travail de Sensevy (2011) au sein de la TAD pour aborder avec un regard nouveau la théorie qui a constitué la référence dominante de mes travaux, à savoir la TAD. Chez Sensevy, la notion de jeux de savoir associe dans une même unité les dimensions génériques d'un jeu et les dimensions singulières de chaque partie. Comment la TAD prend-elle en compte cette dualité et les dialectiques auxquelles elle donne lieu? Telle est la question Q_0 qui a enclenché le parcours d'étude que j'ai réalisé au sein de la TAD,

pour produire, sans prétention d'exhaustivité, ma réponse $R^\heartsuit$, présentée dans cet article.

Prise en compte de la généricité

Outillée par les concepts d'objet, de rapport, de sujet et d'institution qui constituent ses fondements, la TAD s'est rapidement intéressée aux aspects génériques des activités humaines et plus particulièrement des mathématiques à travers le modèle des organisations praxéologiques. J'ai personnellement étendu la notion d'Organisation Mathématique Ponctuelle (une technique pour un type de tâches) de façon à prendre en compte les cas où plusieurs techniques sont disponibles pour un même type (OMP Complexe). J'ai également contribué au développement du modèle en défendant la nécessité d'intégrer dans la technologie d'une technique des savoirs pratiques relatifs aux aspects dotés d'une certaine invariance de sa mise en œuvre. Parmi ces savoirs, des critères génériques permettent d'approcher la portée de la ou des techniques au sein du type de tâches, autrement dit, de définir des sous-types spécifiques pour lesquels il est raisonnable d'essayer telle ou telle technique. Une telle démarche de spécification est aujourd'hui théorisée, notamment grâce à la notion de variable empruntée à la théorie des situations didactiques, par Chaachoua et Bessot (2019). Leurs travaux, qui proposent des définitions formalisées des notions de type et sous-type de tâches, relèvent de la théorie T4TEL, développée en référence explicite à la TAD pour répondre aux besoins spécifiques de recherches consacrées aux environnements informatiques pour l'apprentissage humain. Prenant appui sur un milieu M_0 contenant de solides connaissances du domaine géométrique, j'ai pu dans mon enquête concrétiser le lien entre OMPC, savoirs pratiques, variables et spécificité en travaillant sur le type de tâches « Démontrer que trois points sont alignés ». Relativement à une technique donnée de l'OMPC, sont introduites deux variables associées respectivement à la théorie et à la technologie de la technique.

Toujours sur le plan de la généricité, l'enquête que j'ai menée pour en savoir plus sur le concept d'affordance empruntée par Sensevy au champ de la psychologie m'a conduite à intégrer dans ma réponse à la question Q_0 la contribution de Araya-Chacón et Matheron (2015). Dans le cadre de leurs recherches sur la mémoire didactique, ceux-ci ont introduit la notion d'ostensif déclencheur, résultat d'une construction sémiotique prenant en charge, à partir d'expériences singulières une certaine généricité des contextes d'utilisation opportune d'une technique. C'est la dimension ostensive des sous-types spécifiques évoqués plus haut.

Du générique au singulier

Les textes de Chevallard autour du modèle praxéologique reconnaissent le caractère problématique de la mise en œuvre d'une technique dans le traitement

d'une tâche singulière : explicitation du caractère non algorithmique de nombreuses techniques, introduction d'un moment du travail de la technique dans le modèle des moments de l'étude. Mais dans ces textes et les travaux auxquels ils donnent lieu ce passage au singulier de la tâche n'est pas théorisé. Dans le prolongement du travail théorique de Chaachoua, la thèse de Jolivet précise la notion de tâche. Adoptant leur point de vue, j'ai introduit dans cet article la notion de contexte définitoire d'une tâche qui, partant d'un type de tâches, me permet de caractériser la singularité d'une tâche. Les variables évoquées précédemment permettent d'analyser le contexte définitoire, elles guident le choix d'une technique, sans garantie de succès si la technique n'est pas un algorithme du fait de la singularité du contexte définitoire. N'ayant pas rencontré dans mon enquête sur la TAD d'outils permettant d'analyser l'activité réalisée (ou à réaliser) pour actualiser une technique dans un contexte donné (voir Sensevy, 2011, p. 202), j'ai travaillé à partir de la définition du concept d'algorithme de Modeste (2012). Ceci m'a conduit par contraposition à distinguer deux dimensions dialectiquement liées dans la confrontation d'une technique à la singularité : l'embarras du choix et l'obstacle à la concrétisation du choix. J'ai utilisé ces propositions pour analyser une solution à une tâche d'alignement.

Du singulier au générique

Au sein de la TAD, le modèle des moments de l'étude, généralement considéré dans une perspective d'enseignement, peut également modéliser le processus de construction de praxéologies à partir de la confrontation à plusieurs tâches singulières. De même, l'analyse de solution évoquée ci-dessus, si elle est d'abord descriptive (quels choix ont été réalisés? comment ont été surmontés les obstacles?), se poursuit par la recherche des raisons de l'adéquation des initiatives au contexte, dans le but de repérer des éléments transférables à d'autres tâches et de construire du générique à partir du singulier. C'est d'ailleurs ce que je fais en décontextualisant l'outil d'analyse de solution/démonstration illustré dans l'exemple.

Modéliser la dynamique de la résolution de problèmes nouveaux

Je terminerai par ce qui constitue pour moi un changement de point de vue inattendu sur ce qui est désigné par la TAD comme pédagogie de l'enquête. J'ai pris conscience que plusieurs des outils introduits dans cette perspective pédagogique, schéma herbartien de l'étude, milieu de l'étude, différentes dialectiques à l'œuvre dans les PER, permettent l'analyse du processus de résolution de problèmes nouveaux.

Le présent article rend compte de mon enquête au sein de la TAD. Il est clairement un reflet de mon rapport personnel à cette théorie, le lecteur doit bien l'envisager comme

tel, et ce, d'autant qu'il n'a fait l'objet d'aucune présentation institutionnelle à la communauté de recherche développant la TAD²³. J'espère que, par les balises ainsi mises à disposition, il aidera le lecteur à réaliser un parcours analogue.

Références

- Araya-Chacón, A. et Matheron, Y. (2015). Un modèle pour l'évocation des connaissances en classe de mathématiques. Micro-cadre institutionnel de la mémoire didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 35(1), 37-68.
- Bautier, E. et Rochex, J.-Y. (1998). *L'expérience scolaire des nouveaux lycéens. Démocratisation ou massification?* Armand Colin
- Bautier, E. et Rochex, J.-Y. (2004). Activité conjointe ne signifie pas significations partagées. Dans Moro, C. et Rickenman, R. (dir.), *Situation éducative et significations* (p. 197-220). De Boeck.
- Bosch, M., Chevallard, Y., García, F. et Monaghan, J. (2020). *Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education. A Comprehensive Casebook*. Routledge.
- Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1), 77-124.
- Bosch, M. et Winslow, C. (2015). Linking problem solving and learning contents: the challenge of self-sustained study and research processes. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 35(3), 357-399.
- Brousseau, G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 7(2), 33-115.
- Butlen, D. et Charles-Pézard, M. (2003). Étapes intermédiaires dans le processus de conceptualisation en mathématiques. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 23(3), 41-78.
- Castela, C. (2000). Un objet de savoir spécifique en jeu dans la résolution de problèmes : le fonctionnement mathématique. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 20(3), 331-380.
- Castela, C. (2004). Institutional influencing mathematics students' private work: a factor of academic achievement. A comparative study of two French higher education institutions. *Educational Studies in Mathematics*, 57(1), 33-63.
<https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000047050.70008.59>

²³ Je remercie le relecteur connaisseur de la TAD dont le rapport a apporté une première évaluation de mon travail du point de vue des chercheurs développant cette théorie.

Castela, C. (2008a). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 28(2), 135-182.

Castela, C. (2008b). Approche didactique des processus différenciateurs dans l'enseignement des mathématiques : l'exemple des apprentissages relatifs à la résolution de problèmes. Dans A. Rouchier et I. Bloch (dir.), *Perspectives en didactique des mathématiques. Actes de la 13^e école d'été de didactique des mathématiques* (p. 89-114). Éditions La Pensée Sauvage.

Castela, C. (2009). An anthropological approach to a transitional issue: analysis of the autonomy required from mathematics students in the French Lycée. *NOMAD (Nordisk Matematikk Didaktikk)*, 14(2), 5-27.

Castela, C. (2011). *Des mathématiques à leurs utilisations, contribution à l'étude de la productivité praxéologique des institutions et de leurs sujets / Le travail personnel au cœur du développement praxéologique des élèves en tant qu'utilisateurs de mathématiques* [note de synthèse pour une habilitation à diriger des recherches, Université Paris Diderot]. TEL. <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00683613>

Castela, C. (2020). Les praxéologies comme idiosyncrasies institutionnelles. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática*, 22(4), 86-102. <http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i4p086-102>

Castela, C. et Romo Vázquez, A. (2011). Des mathématiques à l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 31(1), 79-130.

Castela, C. et Romo Vázquez, A. (2023). Towards an institutional epistemology. Dans R. Biehler, G. Gueudet, M. Liebendörfer, C. Rasmussen et C. Winsløw (dir.), *Practice-Oriented Research in Tertiary Mathematics Education: New Directions* (p. 621-648). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-14175-1>

Chaachoua, H. (2010). *La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique des EIAH. Études de cas : la modélisation des connaissances des élèves* [note de synthèse pour une habilitation à diriger des recherches, Université Joseph Fourier]. TEL. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00922383>

Chaachoua, H. (2020). T4TEL : Un cadre de référence pour la formalisation et l'extension du modèle praxéologique. *Revista do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática*, 22(4), 103-118.

Chaachoua, H. et Bessot, A. (2019). La notion de variable dans le modèle praxéologique. *Revista do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática*, 21(4), 234-247. <http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i4p234-247>

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné* (2^e éd.). Éditions la Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12(1), 73-112.

Chevallard, Y. (1997). Familère et problématique, la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques*, 17(3), 15-54.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 1. Structures et fonctions. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot et R. Floris (dir.), *Actes de la 11^e école d'été de didactique des mathématiques* (p. 3-22). Éditions La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. Dans S. Maury et M. Caillot (dir.), *Rapport au savoir et didactiques* (p. 81-104). Éditions Fabert.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. Dans M. Bosch (dir.), *Proceedings of the IV Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 21-30). FUNDEMI-IQS.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. Dans L. Ruiz-Higueras, A. Estepa et F. J. Garcia (dir.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría antropológica de lo didáctico (TAD)* (p. 705-746). Universidad de Jaen.

Chevallard, Y. et Bosch, M. (2020). A short (and somewhat subjective) glossary of the ATD. Dans M. Bosch, Y. Chevallard, F. J. García et J. Monaghan (dir.), *Working with the anthropological theory of the didactic. A comprehensive casebook*, (p. xviii-xxxvii). Routledge.

Chevallard, Y. et Ladage, C. (2010). *Enquêter pour connaître. L'émergence d'un nouveau paradigme scolaire et culturel à l'âge de l'Internet [communication orale]*. Journée de réflexion sur « Une approche anthropologique du didactique », Université de Liège.

de Certeau, M. (1980). *L'invention du quotidien. 1. Arts de faire*. Gallimard.

Dorier, J-L, Robert, A., Robinet, J., et Rogalski, M. (1997). À propos du levier "méta". Dans J.-L. Dorier (dir.), *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question* (p. 185-213). Éditions La Pensée Sauvage.

Halbwachs, M. (1925, 1994). *Les cadres sociaux de la mémoire*. Presses universitaires de France.

Jolivet, S. (2018). *Modèle de description didactique de ressources d'apprentissage en mathématiques, pour l'indexation et des services EIAH* [thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes]. TEL. <https://theses.hal.science/tel-02079412>

Lesnes-Cuisiniez, E. (2021). *Modélisation didactique de parcours d'apprentissage dans un EIAH pour l'entrée dans le raisonnement géométrique au cycle 4, en appui sur les problèmes de construction de figures planes* [thèse de doctorat, Université Paris Sorbonne]. TEL. <https://hal.science/tel-03404996/>

Luyat, M. et Regia-Corte, T. (2009). Les affordances : de James Jérôme Gibson aux formalisations récentes du concept. *NecPlus « L'Année psychologique »* 109(2), 297-332. <https://doi.org/10.4074/S000350330900205X>

Matheron, Y. (2010). *Contribution à l'étude du travail de la mémoire dans les processus d'enseignement et d'éducation* [note de synthèse pour une habilitation à diriger des recherches, Université de Provence - Aix-Marseille]. TEL. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00586293>

Modeste, S. (2012). *Enseigner l'algorithmique pour quoi? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve?* [thèse de doctorat, Université de Grenoble]. TEL. <https://theses.hal.science/tel-00783294>

Morgagni, S. (2011). Repenser la notion d'affordance dans ses dynamiques sémiotiques. *Intellectica*, 55, 55(1), 241-267. <https://doi.org/10.3406/intel.2011.1170>

Perrin-Glorian, M.-J. (1993). Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans les « classes faibles », *Recherches en Didactique des Mathématiques* 13(1-2), 95-118.

Perrin-Glorian, M.-J. (2021). Dialectique contrat/milieu. Quelle complémentarité entre TACD et théorie des situations? Dans M.-J. Gremmo (dir.), *Actes du 2^e congrès de la TACD. Pour une reconstruction de la forme scolaire* (p. 190-207). Université de Lorraine.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press.

Sensevy, G. (2011). *Le sens du savoir. Éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. De Boeck Supérieur.

Stoffregen, T. A. (2003). Affordances as properties of the animal-environment system. *Ecological Psychology*, 15, 115-134.

Annexe 1 : Une solution de la tâche t

A, B et C sont trois points alignés distincts. Par ces trois points, on mène trois droites distinctes D, D' et D'' parallèles entre elles. Soit M un point de D', distinct de B. La parallèle à (MC), resp. (MA), passant par B coupe D, resp. D'', en I (resp. J). Montrer que M, I et J sont alignés.

Tableau 1. Solution de la tâche t avec la technique τ_2

	Soit A' le point d'intersection de D et (BJ). Soit H l'homothétie de centre I, transformant A en A'. Déterminons l'image de M. H((AM)) est la droite parallèle à (AM) passant par H(A), c-à-d (BJ). H((BM)) est la droite parallèle à (BM) passant par H(B). Il faut donc déterminer H(B). Soit B' le point commun à (IB) et D''. Montrons que H(B) = B'
--	---

O étant le point d'intersection de (BI) et (AM), on a

$$\frac{IB'}{IB} = \frac{AC}{AB} = \frac{AM}{AO} = 1 - \frac{OM}{OA} = 1 - \frac{MB}{AI} = 1 - \frac{AA'}{AI} = 1 + \frac{AA'}{IA} = \frac{IA'}{IA}$$

Donc on a bien $H(B) = B'$. Il s'en suit que $H((BM)) = D''$ et que $H(M)$ est le point commun à (BJ) et D'', c-à-d J. Ceci prouve que I, M et J sont alignés.