Un modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique élémentaire

Hassane SQUALLI
Université de Sherbrooke
Hassane.squalli@usherbrooke.ca
Doris JEANNOTTE
Université du Québec à Montréal
Jeannotte.doris@uqam.ca

Résumé : Ce travail s'inscrit dans les travaux de recherche en didactique des mathématiques portant sur le développement précoce de la pensée algébrique, c'est-à-dire depuis les premières classes du primaire. Utilisant les outils de la théorie anthropologique du didactique de Chevallard (1999), nous présentons un modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique (PA), vue comme une praxéologie globale. Ce modèle est basé sur un cadre conceptuel original de l'algèbre et de la pensée algébrique. Dans ce modèle, la PA se décline en trois praxéologies algébriques régionales, chacune d'elles se structure hiérarchiquement autour de praxéologies locales et de genres de tâches. Ces différents niveaux de praxéologies sont présentés, et les genres de tâches sont expliqués par des exemples de tâches lorsque nécessaire.

Mots-clés : pensée algébrique, algèbre, théorie anthropologique du didactique, modèle praxéologique, primaire

A praxeological reference model for early algebraic thinking

Abstract: This article focuses on part of our ongoing research into the development of algebraic thinking in early elementary students. Using the tools from Chevallard's Anthropological Theory of the Didactic (1999), we propose a praxeological reference model for algebraic thinking (AT), seen as a global praxeology. This model is based on an original conceptual framework of algebra and algebraic thinking. In this model, AT is broken down into three regional algebraic praxeologies, each of which is structured hierarchically around local praxeologies and task types. The different praxeological levels and task types, along with examples of tasks where necessary, are discussed.

Keywords: algebra, algebraic thinking, anthropological theory of the didactic, praxeological model, elementary school

Revue québécoise de didactique des mathématiques, 2022, *Numéro thématique 2* (Tome 2), p. 66-101. https://doi.org/10.71403/wwwy4e62

Introduction

Cet article se situe dans le cadre des travaux de recherches menées à l'Observatoire international de la pensée algébrique (OIPA). L'un des objectifs de ces travaux est de construire une méthodologie d'analyse et de comparaison des curricula officiels de différents pays relativement au développement de la pensée algébrique. Pour mener à bien ces études comparatives internationales, notre méthodologie d'analyse s'appuie sur le cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD) introduite par Chevallard (1999). Rappelons que dans le cadre de la TAD, une praxéologie est un quadruplet de quatre éléments articulés : type de tâches (T), technique (τ), technologie (θ), théorie (Θ). Selon ce modèle, toute tâche t est accomplie au moyen d'une technique τ (une manière de réaliser t). Chaque technique est justifiée par une technologie θ (un discours rationnel qui permet d'expliquer et de justifier la technique). Finalement, toute technologie repose elle-même sur les fondements d'une théorie Θ (Chevallard, 1999). Selon Bosch et Gascon (2005), la praxéologie est une unité d'analyse du savoir à enseigner. L'analyse du savoir à enseigner ou du savoir enseigné suppose de s'appuyer sur un modèle de référence issue des recherches réalisées (Larguier, 2015). Il s'agit de décrire, d'après les résultats de la recherche, un modèle épistémologique (MER) ou praxéologique (MPR) de référence de la pensée algébrique élémentaire, c'est-à-dire de la pensée algébrique pouvant être développée chez des élèves des écoles primaire et secondaire. Ils ajoutent :

> Ainsi, l'analyse du savoir à enseigner relative à certains objets d'enseignement ne peut avoir d'intérêt pour la recherche que si elle peut être mise en parallèle avec un MER [ou MPR] qui donne à voir les éléments essentiels de l'enseignement d'un domaine donné au regard des résultats des recherches. C'est donc la première tâche de l'étude du curriculum officiel, à savoir la description de cette référence. (Larguier, 2015, p. 3)

Par ailleurs, un modèle épistémologique ou praxéologique de référence relativement à un objet d'enseignement doit être basé sur un cadre conceptuel de cet objet. La TAD nous fournit un outil d'analyse du savoir à enseigner relatif à un savoir mathématique particulier (le développement de la pensée algébrique élémentaire dans notre cas), mais la TAD n'a pas de point de vue sur l'algèbre et la pensée algébrique élémentaires. Aussi, le modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique que nous proposons dans cet article s'appuie sur un cadre conceptuel de l'algèbre et de la pensée algébrique développé dans nos propres travaux (Squalli, 2000, 2015, 2020) et qui prend en compte des travaux de recherche de tradition anglo-saxonne dans le domaine *Early Algebra* (EA), ceux de Radford tout particulièrement. EA réfère à la fois à un domaine de recherche, une perspective curriculaire et un domaine de formation des enseignants (Carraher et

Schliemann, 2007). EA est basé sur l'idée de favoriser le développement précoce de la pensée algébrique, c'est-à-dire depuis les premières années du primaire. Nous renvoyons le lecteur au texte de Squalli (2020) pour une présentation synthétique de la genèse de ce mouvement et des questions qui font débat chez les chercheurs. Pour notre part, nous considérons l'idée du développement précoce de la pensée algébrique comme une stratégie d'algébrisation des mathématiques du primaire (Kaput, 1995). Cette stratégie favorise l'enrichissement des mathématiques du primaire sur les plans de la conceptualisation, des raisonnements ainsi que des modes de représentation et d'opération sur ces représentations. L'accent est mis sur le développement, sur une longue période, de la pensée algébrique en concomitance, non en opposition, avec d'autres formes de la pensée mathématique. En outre, selon Kaput (1995), cette stratégie apporte une cohérence et une profondeur au curriculum. Nous nous distinguons dans ce sens des approches dites transitionnelles (Carraher et Schliemann, 2007) qui voient dans le développement de la pensée algébrique une stratégie pour assurer la transition entre l'arithmétique et l'algèbre, soit une stratégie d'entrée dans l'algèbre du début du secondaire. L'originalité de notre modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique [MPRPA] repose en partie sur l'originalité de ce cadre conceptuel.

Ce texte est structuré de la manière suivante. La section 1 présente quelques éléments de contexte et de problématique des travaux ayant la pensée algébrique comme objet de recherche. Nous y présentons certains enjeux actuels de la recherche portant sur la pensée algébrique. La section 2 aborde les éléments essentiels de notre cadre conceptuel de la pensée algébrique. La section 3 détaille la méthodologie suivie pour construire notre MPRPA. Ce dernier sera présenté dans la section 4. Dans la discussion, le MPRPA sera contrasté avec d'autres propositions émanant de la TAD.

1. Éléments de contexte et de problématique

Au cours des deux dernières décennies, des développements importants en recherche ont permis l'émergence de nouvelles perspectives curriculaires, perspectives implantées par de nombreux pays et régions du monde (Cai et Howson, 2012). Ce courant, reconnu sous l'appellation « *Early Algebra* » ou « algèbre avant la lettre » vise à orienter les activités mathématiques vers le développement précoce de la pensée algébrique, c'est-à-dire dès le début du primaire. Cependant, cette perspective pose des questions et des défis sur différents plans. Sur le plan épistémologique, comme le rappelle Radford (2018), la notion de pensée (mathématique) n'est pas encore bien conceptualisée en didactique des mathématiques. Comment définir la pensée mathématique d'un point de vue opératoire? Sur le plan curriculaire, cette perspective ouvre la voie à des programmes d'étude d'une nouvelle génération, organisés selon des trajectoires coordonnées de différentes formes de la pensée mathématique de manière continue du primaire à la fin du secondaire, ce qui constitue un défi important.

Dès la formulation de l'idée du développement de la pensée algébrique avant l'introduction du langage littéral de l'algèbre, sur une longue période débutant dès les premières années du primaire, plusieurs questions importantes se posent naturellement : Qu'entend-on par algèbre? Qu'entend-on par pensée algébrique? Quelle est la relation entre l'arithmétique et l'algèbre? Quel est le rôle des signes alphanumériques dans le développement de la pensée algébrique? (Squalli, 2020).

2. Cadre conceptuel de la pensée algébrique

Pour répondre à ces questions, nous présentons un cadre conceptuel de l'algèbre et de la pensée algébrique ainsi qu'une caractérisation opératoire de la pensée algébrique. Mais avant, nous devons clarifier la notion de pensée.

2.1 La notion de pensée selon Radford

Radford (2011, 2015) explique que la psychologie traditionnelle conçoit la pensée du sujet comme une « activité mentale », c'est-à-dire comme quelque chose « en nous », une activité qui « émane purement du sujet » et qui a lieu à l'intérieur de la boîte crânienne. Or, ajoute-t-il, comme suggérait l'épistémologue dialecticien Evald Ilyenkov (1977), on pourrait décortiquer n'importe quelle boîte crânienne en morceaux chaque fois plus petits sans pour autant y trouver une seule pensée. (Radford, 2011). S'appuyant sur Wartofsky (1979), Radford (2011) nous invite plutôt à approcher la pensée comme une « pratique réflexive » (praxis cogitans) et à distinguer la pensée au sens anthropologique de la pensée subjective, celle du sujet singulier. Selon lui, le concept de pensée dans son sens anthropologique apparaît comme une synthèse culturellement codifiée du travail humain (Radford, 2015). Cette synthèse résulte de la pratique sociale, les singularités des actions se voient « reflétées » dans ce qui devient reconnu comme une même manière d'agir et de réfléchir, se constituant ainsi en un prototype d'actions et de réflexions (Radford, 2015). La pensée est dès lors une capacité toujours latente d'agir ou de réfléchir d'une certaine manière. La pensée subjective, celle du sujet, est l'«actualisation» ou «concrétisation» ou «matérialisation» de la pensée au sens anthropologique, d'une potentialité culturelle (Radford, 2015).

2.2 Qu'est-ce que l'algèbre, qu'est-ce que la pensée algébrique?

Avant de définir ce que sont pour nous l'algèbre et la pensée algébrique, il nous faut d'abord préciser notre approche des mathématiques. En effet, les mathématiques peuvent être considérées comme une science toute faite, c'est-à-dire un ensemble de connaissances déjà bien organisées, ou encore comme une science en train de se faire, c'est-à-dire comme une activité humaine. Selon cette seconde perspective, qui est celle que nous adoptons, l'algèbre, l'arithmétique et la géométrie, par exemple, sont des types particuliers d'activités mathématiques. Ces types d'activités sont marqués par des manières de penser. Dès lors, la pensée algébrique est une manière d'agir et de réfléchir dans des activités algébriques, que nous allons définir ultérieurement. Ainsi définie, la pensée algébrique se déploie en activités algébriques. Pour la caractériser de manière opératoire, il nous faut identifier ces manières d'agir et de réfléchir dans des activités algébriques. Il faut donc commencer par définir ce qu'on entend par algèbre, vue comme un type particulier d'activités mathématiques, soit un ensemble d'activités algébriques.

Une analyse de l'évolution historique de l'algèbre (Squalli, 2000) a mis en évidence le caractère essentiel que joue l'opération[1], dans le développement et l'appréhension de l'algèbre. Dans leur analyse de l'évolution historique de l'algèbre, Piaget et Garcia (1983) arrivent à la même conclusion. Reprenant à leur compte une analyse de Boutros (1920), ils caractérisent cette évolution en trois grandes étapes, nommées respectivement étape intraopérationnelle, étape interopérationnelle et étape transopérationnelle, dont les frontières sont marquées par les prises de conscience des opérations d'abord et des structures ensuite. Pour sa part, van Reeuwijk (1998) définit l'algèbre comme l'étude des structures engendrées par les opérations :

> D'un point de vue mathématique, l'algèbre traite de systèmes dans lesquels les opérations jouent un rôle : l'addition (de nombres ou d'autres "choses"), la multiplication (de nombres, d'autres "choses"), et les relations avec les inverses. En d'autres termes, l'algèbre traite de la structure. L'algèbre est l'étude des structures d'opérations. (p. 83, traduction libre[2])

Si l'arithmétique peut être définie comme la science des nombres, des quantités et des grandeurs (Carraher et Schliemann, 2007), l'algèbre peut être définie comme la science des opérations, c'est-à-dire des lois de composition, internes ou externes, binaires ou n-aires, pouvant être de nature quelconque (addition, multiplication,

---

1 La notion d'opération est précisée quelques lignes plus loin.

2 « From a mathematical point of view, algebra deals with systems in which operations play a role: addition (of numbers or other ''thing''), multiplication (numbers, other ''thing''), and the relations with the inverses. In other words, algebra deals with structure. Algebra is the study of operation structures » (van Reeuwijk, 1998, p. 83).

rotation, composition, etc.), mais répétées un nombre fini de fois (Squalli, 2000, 2020).

Cette vision de l'algèbre élémentaire est large. Toutefois, elle a le mérite de circonscrire les significations de l'algèbre et de la pensée algébrique et de permettre de les distinguer de celles de l'arithmétique et de la pensée arithmétique.

Ainsi, le nombre en arithmétique modélise une quantité, une grandeur ou un rang. C'est un nombre nombrant, ce qui fait que la pensée arithmétique est de nature empirique : les significations des concepts (nombre, égalité, inconnue, etc.) ainsi que les modes de raisonnement s'appuient sur les observables et s'en tiennent à eux pour vérifier la validité des relations observées, pour établir leur degré de généralité et en tirer des prévisions ultérieures. Ainsi, l'expression numérique $(100 \times 98 + 1) \div 99$ sera interprétée comme un calcul à exécuter. Les symboles des opérations $+$; $\times$ et $\div$ sont vus comme des signes d'exécution de calculs en vue de trouver la valeur nombrante de l'expression numérique sous forme d'un nombre simple : $(100 \times 98 + 1) \div 99 = (9800 + 1) \div 99 = 9801 \div 99 = 99$.

Par ailleurs, mobilisant une pensée arithmétique, un élève du primaire arrive à se convaincre que, dans la somme de deux entiers naturels, l'ordre des termes n'est pas important (autrement dit en langage algébrique, que l'addition est commutative : $n + m = m + n$ pour n et m entiers naturels). Cette conviction est basée sur son expérience de calcul et sur un argument empirique : par calcul, l'élève a observé que chaque calcul de la somme de deux nombres déterminés n et m, les valeurs nombrantes de $n + m$ et de $m + n$ sont identiques. Cette observation (la constance du résultat des comparaisons) peut alors être étendue à toutes les valeurs des variables m et n. Nous parlons dans ce cas d'une « généralisation arithmétique ».

En revanche, en algèbre, un nombre est un élément d'un système algébrique, c'est-à-dire d'un ensemble d'objets sur lequel est définie, au moins, une opération[3]. Ainsi, le nombre de l'algèbre élémentaire tient sa qualité de nombre non pas de ses caractéristiques propres, mais de son appartenance à un système algébrique dont la structure est déterminée par la nature de l'opération (ou des opérations). Cela fait en sorte que la pensée algébrique est de nature théorique : les significations des concepts (nombre, égalité, inconnue, etc.) ainsi que les modes de raisonnement s'appuient sur des caractéristiques structurales induites par les opérations et la situation en jeu ainsi que sur des arguments intellectuels construits par le sujet.

---

[3] Par opération on entend une loi de composition interne ou externe, une-aire ou n-aire, qui peut être de nature quelconque (addition, rotation, par exemple). Voir aussi plus loin.

Ainsi, l'expression numérique $(100 \times 98 + 1) \div 99$ sera interprétée comme un objet en soi avec une structure propre. En se basant sur les propriétés des opérations, le sujet peut faire un « calcul réfléchi » en laissant les opérations momentanément en suspens et en produisant des expressions numériques équivalentes :

$$(100 \times 98 + 1) \div 99 = \big((99 + 1)(99 - 1) + 1\big) \div 99 = (99^2 - 1 + 1) \div 99 = 99$$

Le signe = prend la signification d'une relation d'équivalence et l'opération + n'est plus systématiquement exécutée, mais laissée en suspens. Le nombre n'est pas abordé uniquement par sa qualité nombrante, mais à travers le tissu de relations, générées par les opérations qu'il entretient avec les autres nombres : $100 = 99 + 1$ et $98 = 99 - 1$. Ces deux relations sont mises en avant, car elles permettent de mettre en évidence une structure syntaxique de l'expression qui autorise l'application de la règle de calcul : $n^2 - 1 = (n + 1)(n - 1)$. Le nombre 99 est alors perçu non comme un nombre nombrant, mais comme l'instanciation de la variable n impliquée dans cette dernière égalité universelle (Squalli, 2000).

De surcroit, mobilisant une pensée algébrique, un sujet établit la commutativité de l'addition comme résultat d'une généralisation théorique (Dörfler, 1991). Par exemple, étant données deux collections d'objets A et B de cardinal n et m, respectivement, calculer $n + m$ revient à ajouter les m objets de la collection B aux n objets de la collection A et à dénombrer le tout. Calculer $m + n$ revient à ajouter les n objets de la collection A aux m objets de la collection B et à dénombrer le tout. On s'aperçoit que les deux opérations de réunion des deux collections forment le même tout. Une réflexion sur ces opérations – sans effectuation des dénombrements – conduirait à comprendre que ces opérations ne dépendent pas des cardinaux des deux collections. Le cas de ces deux collections devient alors « prototypique » de toutes les paires de collections possibles. La généralisation s'appuie alors sur les opérations du sujet et non uniquement sur les observables. Nous parlerons dans ce cas d'une « généralisation algébrique ».

La différence entre la pensée algébrique et la pensée arithmétique se répercute aussi sur le plan des modes de raisonnement. À titre d'exemple, examinons comment la pensée algébrique se distingue de la pensée arithmétique dans le cas d'activité de résolution de problèmes se ramenant à la résolution d'une équation à une inconnue du premier degré. La principale distinction entre ces deux modes de pensée réside dans la nature analytique ou non des raisonnements (Squalli et al., 2020). En effet, dans un mode de raisonnement arithmétique de résolution de problème, la valeur de l'inconnue est déterminée en opérant sur des données et des relations connues. Ce mode de raisonnement est ainsi de caractère non analytique (Squalli et al., 2020). En revanche, un mode de raisonnement algébrique est de caractère analytique : pour trouver la valeur de l'inconnue, on la considère comme objet de la pensée et on opère sur elle comme on opère sur les données connues (Squalli et al., 2020).

> Comme le font remarquer Mason et Binns (1993), dans une démarche arithmétique de résolution, on fait simplement une suite de calculs sur des quantités connues, on n'opère jamais sur des inconnues. La distinction entre un mode de raisonnement arithmétique et un mode de raisonnement algébrique réside précisément dans le caractère analytique de ce dernier, non dans l'absence ou la présence de lettres pour représenter les inconnues**.** (Squalli et al., 2020)

Plusieurs chercheurs soulignent le caractère analytique de la pensée algébrique (Bednarz et al., 1996; Lins, 1992; Radford, 2010; Squalli, 2000; Squalli et al., 2020).

En outre, la présence ou l'absence des lettres n'est pas un signe de la mobilisation ou non d'une pensée algébrique. On pourra trouver des exemples dans Squalli et al. (2020) de raisonnements analytiques d'élèves dans un registre purement numérique ainsi que de raisonnements non analytiques, bien que des lettres soient utilisées comme dénotation des inconnues – mais sans opérations sur ces dénotations. Dans le cas d'activités de généralisation de *patterns* figuratifs, plusieurs recherches montrent que les élèves du primaire et du début du secondaire peuvent produire des généralités algébriques sans recourir aux lettres (Mary et al., 2014; Radford, 2014; Squalli, 2015; Vlassis et al., 2017). Pour leur part, Bednarz et al. (1992) soulignent que les quelques recherches conduites auprès d'élèves montrent que plusieurs d'entre eux, de l'école secondaire jusqu'à l'université, résolvent davantage les problèmes algébriques dans un style « abrégé » (langage naturel « syncopé ») que symbolique.

2.3 Une caractérisation opératoire de la pensée algébrique

Une caractérisation opératoire de la pensée algébrique nécessite de prendre en compte les éléments soulevés dans la section précédente et d'aller plus loin. Ainsi, en nous appuyant sur une analyse du développement historique de l'algèbre élémentaire, nous avons d'abord identifié les principales activités algébriques (modélisation, étude de structures, manipulation de symboles (Squalli, 2000). Ensuite nous avons caractérisé de manière opératoire les manières d'agir et de réfléchir dans ces types d'activité en identifiant les raisonnements, les concepts et leurs significations ainsi que les symbolisations qui y sont mobilisés. Dans ce sens, nous prenons en compte à la fois les ostensifs et les non-ostensifs en jeu dans les activités algébriques.

Sur le plan opératoire, la pensée algébrique se déploie au moyen de trois composantes interreliées formant une totalité dynamique :

- un ensemble de raisonnements particuliers (comme généraliser, raisonner de manière analytique, symboliser et opérer sur des symboles; exprimer, interpréter, raisonner sur des relations entre variables, en particulier des relations fonctionnelles, raisonner en termes de structures, etc.);
- des manières d'approcher des concepts en jeu dans les activités algébriques (comme voir l'égalité comme une relation d'équivalence, laisser les opérations en suspens; voir une expression numérique comme un objet en soi et non uniquement comme une chaîne de calcul, etc.);
- des modes de représentation et des manières d'opérer sur ces représentations (Squalli, 2015, Squalli et al., 2020).

En lien avec cette dernière composante, nous retenons trois types de registres de représentation sémiotiques au sens de Duval (1995) et de Hitt et Passaro (2007) : le registre purement numérique, le registre algébrique conventionnel et le registre intermédiaire. Comme Hitt (2004) et Hitt et Passaro (2007), nous considérons non seulement les représentations sémiotiques institutionnalisées, mais aussi les registres personnels que l'élève peut utiliser; par exemple représenter une inconnue par un mot, par le dessin d'une ligne, ou par un carré vide, ou recourir au langage oral naturel. L'un des enjeux du développement précoce de la pensée algébrique est d'amener l'élève à perfectionner les modes de représentation personnels pour dénoter et opérer sur des nombres non déterminés et des équations impliquant des inconnues ou des variables. Nous ne nions pas le rôle du symbolisme alphanumérique, qui a une force supérieure à d'autres ostensifs, et qui sera privilégié ensuite dans l'enseignement secondaire. Mais dans la perspective du développement précoce de la pensée algébrique, son introduction se fera par nécessité pour soutenir les développements du raisonnement analytique et du processus de généralisation de l'élève et non pour les faire émerger.

3. Un modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique (MPRPA)

Dans cette section, nous présentons le modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique.

3.1 Présentation générale

Dans le cadre de la TAD et à l'instar des travaux de recherches exploitant des analyses praxéologiques, un modèle praxéologique de référence se présente comme la déclinaison d'une praxéologie globale à l'étude (la pensée algébrique en ce qui nous concerne) en un petit nombre de praxéologies régionales relatives à une même théorie, chacune d'elles se décline à son tour en un petit nombre de praxéologies locales relatives à une même technologie et, à son tour, chacune d'elles se décline en un petit nombre de praxéologies ponctuelles.

La figure 1 offre une vue synthétique de notre modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique (MPRPA).

Ce modèle est structuré autour de trois praxéologies mathématiques régionales (PMR) : 1) Généralisation; 2) Modélisation et 3) Calcul.

Dans tout le texte, pour une économie du langage, nous parlerons de généralisation (modélisation, calcul, respectivement) bien qu'il s'agisse de généralisation algébrique (modélisation algébrique, calcul algébrique, respectivement).

La PMR « Généralisation » se décline en deux praxéologies mathématiques locales (G1); PML : Généralisation de régularités et Généralisation de règles, de formules, de lois et d'algorithmes (G2).

G1 regroupe les genres de tâches de généralisation de suites numériques ou non numériques. Une suite est dite régulière si elle admet une régularité. Cette régularité peut être exprimée par une règle exprimant n'importe quel terme de la suite en fonction de son rang.

G2 regroupe les tâches de généralisation de règles, de formules, de lois, d'algorithmes.

La PMR « Modélisation » se décline en trois PML : Modélisation de situations intra ou extra-mathématiques par des expressions numériques (M1); Modélisation de situations intra ou extra-mathématiques par des équations impliquant des inconnues (M2) et Modélisation de situations intra ou extra-mathématiques par des relations fonctionnelles (M3).

La PMR « Calcul » se décline quant à elle en deux PML : Calcul sur des expressions numériques et Calcul sur des expressions algébriques.

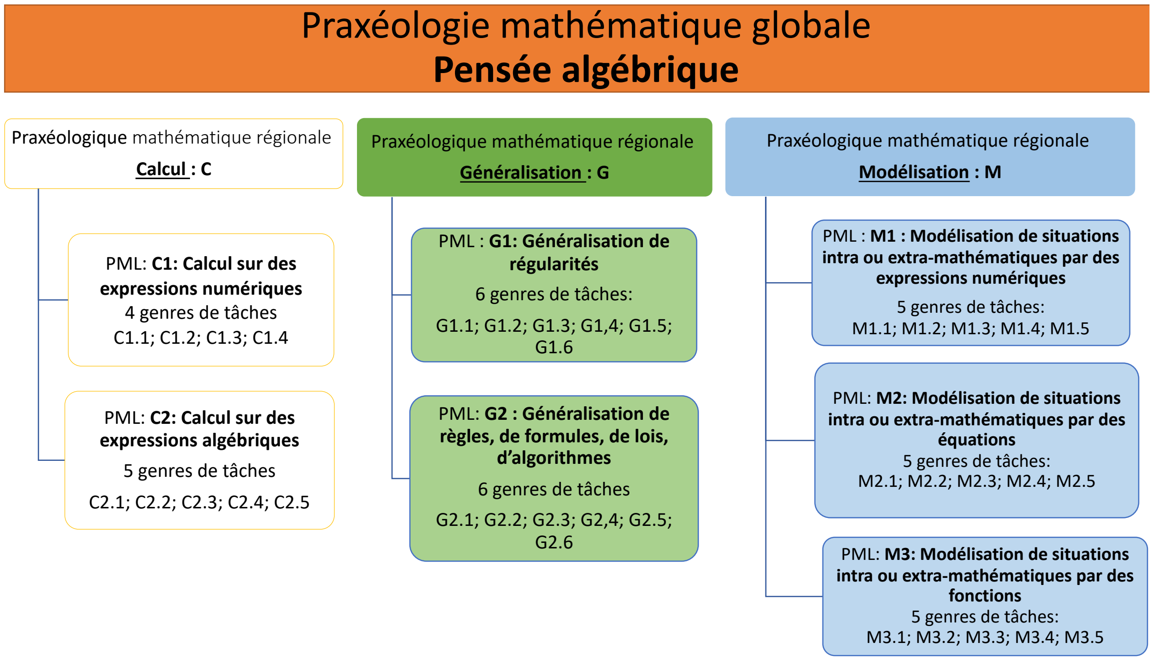


Figure 1 : Modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique

Chacune de ces PML se décline en genre de tâches.

Dans ce qui suit, nous présentons chacune de ces trois praxéologies mathématiques régionales : calcul, généralisation et modélisation.

3.2 PMR : Calcul

Dans cette section, nous présentons les éléments technologico-théoriques de la praxéologie régionale Calcul.

Dès sa naissance avec al-Khawarizmi, l'algèbre se présente comme un calcul : un calcul sur les expressions et les équations algébriques. Pour présenter le sens de ce calcul, nous commençons par définir les notions d'espace de calcul algébrique, d'expression et d'équation algébriques.

Soit E un système algébrique dans lequel sont définies une ou plusieurs opérations. L'existence d'opérations dans l'ensemble E donne la possibilité de combiner des éléments de E, de combiner les produits obtenus et ainsi de suite. Il peut arriver que deux combinaisons différentes produisent le même élément de E. Effectuer et comparer de telles opérations sont des tâches qui peuvent s'avérer fastidieuses à réaliser mentalement. Il est nécessaire de les rendre « observables ». Pour cela, nous allons définir un « espace de calcul algébrique » associé au système algébrique E nous permettant 1) de désigner par des signes les éléments de E, les opérations et les relations définies sur E ainsi que la forme des opérations que l'on peut effectuer sur ces signes, 2) d'opérer sur ces signes à l'aide des opérations et des relations définies sur E, et 3) de déterminer des relations (spécialement les relations d'équivalences) entre ces signes suivant les règles des opérations et des relations définies sur E[4]. Il n'est pas absolument nécessaire que les signes utilisés soient des caractères alphanumériques; ils peuvent être des mots du langage naturel ou n'importe quelle représentation verbale ou iconique.

Expliquons de manière plus détaillée ce qu'est un espace de calcul algébrique. Pour cela, donnons-nous un système algébrique familier tel l'ensemble des nombres entiers relatifs, noté Z, dans lequel nous ne considérons pour l'instant que les opérations usuelles d'addition et de multiplication. L'espace de calcul algébrique qui lui est associé, que nous notons Z′, contiendra, en vertu de la première condition, les signes pour représenter les nombres entiers relatifs, par exemple l'écriture décimale des nombres à l'aide des chiffres arabes, les symboles + et × pour désigner les opérations d'addition et de multiplication, respectivement. Également, Z′ contiendra toutes les combinaisons permises de signes représentant les nombres et des opérations ainsi que leurs produits, comme $2 + 3$; $2 \times (3 + 4)$; $2 \times 3 + 3 \times 4$; $4^3 - 3^4$. Une « expression algébrique » désigne ainsi la représentation d'une opération ou d'une chaîne finie d'opérations que l'on peut effectuer sur des éléments de Z à l'aide de l'addition et de la multiplication. Par exemple, l'expression algébrique $2 \times (3 + 4)$ peut être interprétée comme l'application de la chaîne d'opérations : "multiplier un premier nombre par la valeur de la somme d'un deuxième et d'un troisième, aux nombres 2, 3 et 4 pris dans cet ordre[5]. Pour représenter la forme de cette chaîne d'opérations, nous devons utiliser des signes désignant les éléments de Z, que nous appellerons des constantes, ainsi que d'autres signes qui n'ont aucune signification en eux-mêmes, par exemple des lettres, qu'on utilise en mathématiques pour construire des formules ou énoncer des théorèmes. Nous obtenons dans notre exemple la forme $a \times (b + c)$, où a, b et c sont des variables de domaine Z; c'est-à-dire que si nous remplaçons ces lettres par des constantes dénotant des éléments définis de Z, nous obtiendrons la description d'un certain nombre de Z. Nous appellerons $a \times (b + c)$ aussi une expression algébrique de domaine Z et nous élargissons cette définition aux variables x de domaine Z.

Pour satisfaire la deuxième condition, notre espace de calcul algébrique Z′ doit nous permettre d'opérer un nombre fini de fois sur des expressions algébriques à l'aide des opérations définies sur Z obtenant ainsi d'autres expressions

---

[4] Dans cette caractérisation, nous nous sommes inspirés de la définition que donne Kaput (1992) à la notion de système de représentation.

[5] Autrement dit, c'est une application de $\mathbb{N}^3 \dashrightarrow \mathbb{N}, (a, b, c) \mapsto a(b + c)$. La forme de l'opération est la règle de cette application.

algébriques. Par exemple, à partir des expressions $x+2$ et $2x+1$, on peut former des expressions algébriques comme $(x+2)^3$, $(x+2)(2x+1)$, $(x+2)^2 - (2x+1)^3$, etc.

Jusqu'à présent, dans l'espace de calcul algébrique Z', nous pouvons décrire et former au moyen des expressions algébriques des représentations d'opérations que l'on peut effectuer sur les éléments déterminés ou non de Z au moyen des opérations d'addition et de multiplication. La troisième condition que doit vérifier un système de représentation (déterminer des relations, spécialement celles d'équivalences, entre les signes suivant les règles des opérations et des relations définies sur E) est tout à fait essentielle, car il nous faut pouvoir comparer des expressions algébriques, par exemple savoir quand deux d'entre elles, bien que de formes différentes, désignent les mêmes éléments de Z quand on remplace les variables par des constantes.

Étant donné un système algébrique E, nous entendons par « équation algébrique de domaine E » toute forme propositionnelle constituée par deux expressions algébriques de domaine E reliées par le symbole « = ». Une équation peut alors avoir quatre significations différentes : 1) exprimer que deux expressions algébriques désignent le même élément de E, comme $2 + 3 = 5$, ou $\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$, ou une proposition $2x+1 = 2x+1$, 2) désigner une identité formelle comme $2x+1 = 2x+1$, ou une proposition universelle[6] comme $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ justifiée par une propriété de l'opération; 3) désigner une égalité conditionnelle où intervient une inconnue que l'on doit rendre connue, comme $2x+1 = 3$, ou finalement 4) désigner une égalité conditionnelle faisant intervenir des variables de domaine E, comme $y = 2x+1$.

Les règles des opérations, les propriétés de la relation d'égalité ainsi que les règles d'inférence logique nous permettent de transformer des équations en d'autres et d'identifier les relations entre elles. Par exemple, les deux équations $(x-1)(x+1) - 3 = 0$ et $x^2 - 4 = 0$ sont équivalentes, car en vertu des propriétés de l'addition et de la multiplication dans Z, on a $(x-1)(x+1) - 3 = x^2 - 4$. Cette dernière équation est équivalente à $(x-1)(x+1) - 3 = (x-2)(x+2)$, puisque $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ et que la relation = est transitive.

Par ailleurs, dans le système algébrique Z, on peut considérer d'autres types de relations, par exemple, la relation d'ordre et la relation de divisibilité $|$. Avec ces relations, il est possible de former « d'autres formes propositionnelles algébriques » différentes des équations, comme $2ab \leq a^2 + b^2$ ou

6 Dans le sens où si l'on remplace les variables par des constantes, on trouve toujours une proposition vraie.

$ab|(a+b)^2-(a-b)^2$, a et b étant des variables de domaine Z. Dans ce cas aussi, les règles des opérations d'addition et de multiplication et des relations $\leq$ et $|$ ainsi que les règles d'inférence logique permettent de transformer des formes propositionnelles algébriques en d'autres et d'identifier les relations entre elles. Par exemple, $2ab \leq a^2+b^2$est équivalente à $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, ou encore $(x|a \ et \ x|b)$ implique $x|(pa + qb)$, p et q étant des nombres entiers non nuls.

Finalement, dans Z', on peut « calculer algébriquement », c'est-à-dire transformer des expressions algébriques, des équations ou des formes propositionnelles algébriques en d'autres en utilisant les propriétés des opérations et des relations définies sur Z ainsi que les règles de la relation d'égalité et d'inférence logique. Calculer algébriquement revient à établir des liens logiques (d'équivalence, de nécessité ou de causalité) entre deux expressions algébriques ou équations ou formes propositionnelles algébriques.

Dans cette conceptualisation, la distinction entre le calcul arithmétique et le calcul algébrique est claire. Le premier avance par exécution des opérations et calcul des valeurs nombrantes pour arriver à un résultat sous forme d'un nombre simple. Le second avance par des transformations en laissant les opérations en suspens et en utilisant les propriétés des opérations et des relations. Il est orienté vers l'obtention d'une nouvelle forme du calcul initial qui permet de rendre visible la connaissance visée ou trouver facilement la valeur nombrante du calcul.

Dans les sections suivantes, nous illustrons par des exemples des tâches relevant des genres de tâches de la PMR (figure 2).

Genres de tâches de la PMR : Calcul

PML C1 : Calcul sur des expressions numériques

- **C1.1** Transformer une expression numérique pour arriver à un nombre unique en utilisant un calcul réfléchi.
- **C1.2** Sans calculer sa valeur, transformer une expression numérique pour obtenir une expression numérique équivalente, dans une optique donnée
- **C1.3** Établir l'équivalence d'expressions numériques données, sans calculer leurs valeurs.
- **C1.4** Transformer une égalité en une autre équivalente, sans calculer les valeurs des expressions en jeu, dans une optique donnée

PML C2 : Calcul sur des expressions algébriques

- **C2.1** Résoudre une équation algébrique représentée dans un registre donné.
- **C2.2** Transformer une expression algébrique en une autre équivalente dans un même registre ou dans un registre différent, dans une optique donnée.
- **C2.3** Établir l'équivalence d'expressions algébriques dans un même registre ou dans un registre différent.
- **C2.4** Transformer une équation en une autre équivalente dans un même registre ou dans un registre différent, dans une optique donnée.
- **C2.5** Additionner-soustraire-multiplier-diviser des expressions polynômiales
- **C2.6** Calculer la valeur numérique que prend une expression algébrique en un ou des nombres déterminés.

Figure 2 : Genres de tâches de la PMR – Calcul

3.2.1 Exemples de tâches relevant des genres de tâches de la PML C1 : Calcul sur des expressions numériques (voir figure 2)

C1.1 Transformer une expression numérique pour arriver à un nombre unique en utilisant un calcul réfléchi. Une tâche relevant de ce genre de tâches consiste à trouver la valeur d'une expression numérique en utilisant une technique de calcul réfléchi.

Exemple : Nous renvoyons le lecteur à l'exemple présenté dans la section 2.2 :

$$(100 \times 98 + 1) \div 99 = \big((99+1)(99-1)+1\big) \div 99 = (99^2 - 1 + 1) \div 99 = 99$$

C1.2 Sans calculer sa valeur, transformer une expression numérique pour obtenir une expression numérique équivalente, dans une optique donnée.

Exemple :

> Sans calculer sa valeur, montrer que 1 + 3 + 5 + 7 + 9 est un carré.
>
> Réponse : 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = (5 - 4) + (5 - 2) + 5 + (5 + 2) + (5 + 4) = 5 x 5.

La technique repose sur la mise en évidence d'un facteur commun (5) motivée par l'observation de la régularité suivante : l'écart entre deux nombres impairs consécutifs est constant (vaut 2) et de l'observation du fait suivant : les 5 nombres sont symétriquement placés par rapport à 5. Les éléments technologiques justifiant cette technique sont basés sur des propriétés des progressions arithmétiques ainsi que sur des éléments technologiques du calcul en ligne : une expression numérique comme une entité en soi avec une structure propre, les opérations sont laissées momentanément en suspens et l'égalité prend le sens d'une relation d'équivalence, propriétés des opérations émanant de la structure algébrique du système des nombres entiers naturels.

C1.3 Établir l'équivalence d'expressions numériques données, sans calculer leurs valeurs. Une tâche relevant de ce genre peut consister :

- à reconnaître parmi des expressions numériques données, celles qui sont équivalentes, ou
- à reconnaître parmi des expressions numériques données, celles qui sont équivalentes à une expression numérique donnée, ou
- à justifier l'équivalence d'expressions numériques données

Exemple :

> Sans calcul, trouver parmi ces expressions celles qui sont équivalentes :
>
> 99 x 101; 99 x 100 + 100; 100 x 101 − 99; 99 x 100 – 99; 100 x 100 − 99 − 101; 100 x 100 + 99 – 101; 100 x 100 + 99 – 101 − 1.

C1.4 Transformer une égalité en une autre équivalente, sans calculer les valeurs des expressions en jeu, dans une optique donnée. Une tâche de ce genre peut consister à opérer sur une égalité numérique, sans calculer sa valeur, et obtenir une autre égalité numérique pour en tirer une conclusion dans une optique donnée.

Exemple :

> Sachant que $1 + 2 + 2^2 + 2^3 = 2^4 - 1$, montrer sans calculer sa valeur que $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 2^5 - 1$
>
> Réponse : $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 2^4 - 1 + 2^4 = 2 \times 2^4 - 1 = 2^5 - 1$.

Cette technique repose simplement sur une mise en facteur et sur l'utilisation de la notation : $a \text{ x } a^n = a^{n+1}$.

3.2.3 Exemples de tâches relevant des genres de tâches de la PML C2 : Calcul sur des expressions algébriques

C2.1 Résoudre une équation algébrique, impliquant des inconnues, représentée dans un registre donné. Une tâche relevant de ce genre de tâches consiste en la résolution d'une équation algébrique à une ou plusieurs inconnues dans un registre donné.

Exemple :

> Dans chaque enveloppe il y a un même nombre de jetons (figure 3). Il y a autant de jetons à droite qu'à gauche. Combien de jetons se trouvent dans une enveloppe?

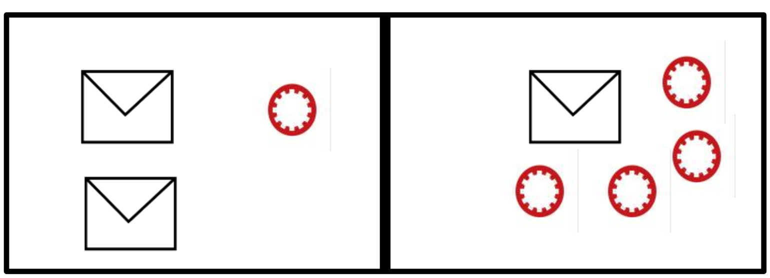


Figure 3 : Dessin accompagnant l'exemple C2.1

Une technique possible consiste à retirer un jeton des deux côtés ainsi qu'une enveloppe des deux côtés, pour obtenir du côté gauche une enveloppe et du côté droit 3 jetons. Chaque enveloppe contient ainsi 3 jetons. Cette technique est justifiée par la transformation algébrique d'al-muqabala (Squalli, 2000).

C2.2 Transformer une expression algébrique en une autre équivalente dans un même registre ou dans un registre différent, dans une optique donnée

Exemple :

Montrer que tout multiple de 4 est une différence de deux carrés.

$$4n = 2n + 2n$$
$$4n = (n+1)^2 - n^2 - 1 - (n-1)^2 + n^2 + 1$$
$$4n = (n+1)^2 - (n-1)^2$$

La technique repose sur la connaissance des identités remarquables et des techniques du calcul en ligne.

C2.3 Établir l'équivalence d'expressions algébriques dans un même registre ou dans un registre différent. On peut proposer des tâches analogues à celles illustrant le genre de tâche C1.3 en remplaçant des expressions numériques par des expressions algébriques.

C2.4 Transformer une équation en une autre équivalente dans un même registre ou dans un registre différent, dans une optique donnée. Une tâche relevant de ce genre de tâches peut consister à transformer une équation initiale en vue d'établir une ou des équations équivalentes dans un même registre ou dans un registre quelconque, dans le but de dégager une conclusion, dans une optique donnée (la valeur d'une inconnue, une mise en facteurs, etc.).

Exemple :

$x > 2$. Comparer $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ et $x^5 - 1$

Soit S = $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$, alors $xS - S = x^5 - 1$. D'où $S = \frac{x^5-1}{x-1}$. Etc.

C2.5 Additionner-soustraire-multiplier-diviser des expressions polynomiales. Tâches classiques de calcul algébrique, incluant des tâches de factorisation.

3.3 PMR : Généralisation

Commençons par présenter quelques éléments technologico-théoriques de la praxéologie régionale Généralisation.

La généralisation est, comme l'abstraction, un processus essentiel dans l'activité mathématique (Mason, 1996) et en particulier en algèbre (Kaput, 1998; Squalli, 2000; 2015, 2017). Mason (1996) y voit même le cœur des mathématiques : « la généralisation est le moteur de la vie, le cœur des mathématiques » (p. 74, traduction libre[7]). Selon cet auteur « généraliser c'est tirer des conclusions valables

---

[7] « generalization is the life blood, the heart of mathematics » (Mason, 1996, p. 74).

pour tous les cas à partir de quelques exemples » (Mason, 1994, p. 7). La généralisation est à la fois un processus et un produit. Pour une question de clarté, nous parlerons de généralisation pour désigner le processus, et de généralité pour désigner le produit (Squalli, 2015). Dans la section 2.2, nous avons expliqué ce qu'est une généralisation algébrique[8]. Ajoutons que la formulation de la généralité nécessite le recours à un nombre généralisé, c'est-à-dire un symbole représentant toutes les valeurs d'un certain domaine de nombres, soit un ensemble de nombres, généralement en nombre infini, ayant certaines qualités, comme l'ensemble des nombres pairs, impairs, entiers naturels, nombres positifs, etc.

Comme l'explique Mason (1996), généraliser implique de repérer la régularité de la situation, la formuler et la justifier. L'identification de la régularité doit reposer sur l'analyse du ou des cas particuliers présentés ainsi que sur le contexte de la situation. La donnée de quelques termes dans le registre purement numérique ne peut permettre d'induire une régularité. En effet, il existe une infinité de suites numériques ayant les mêmes premiers termes.

À titre d'exemple, nous présentons une tâche scolaire prototypique :

> Voici les 5 premiers termes d'une suite numérique. Trouver le terme suivant, ensuite le terme de rang n?
>
> 5, 9, 13, 17, 21, …

On s'attend à ce que l'élève trouve comme réponse la suite dont le terme de rang n est : $4n + 1$. Or les deux suites suivantes sont aussi de bonnes réponses :

$$u_n = 4n + 1 \; pour \; n = 1, 2, 3 ,4 \; et \; 5 \; et \; u_n = 0 \; pour \; n = 6, 7, 8, ...$$

$$v_n = 4n + 1 + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5), n = 1, 2, 3 ...$$

Plusieurs techniques de généralisation sont décrites dans Squalli (2017). Pour les illustrer, considérons la tâche suivante :

> Quels sont les nombres possédant un nombre impair de diviseurs?

Généralisation par répétition. La répétition peut souvent conduire à pressentir une régularité. En répétant un grand nombre d'exemples spécifiques, on peut voir surgir un *pattern*. L'examen d'une liste de nombres, disons de 1 à 25, permet d'arriver à l'observation suivante : les nombres de cette liste ayant un nombre impair de diviseurs sont 1, 4, 9, 16 et 25. Ce sont tous des nombres carrés. Un raisonnement inductif nous conduit à conjecturer que les nombres ayant un nombre impair de diviseurs sont les carrés parfaits. Le nombre d'exemples générés

---

[8] Une analyse détaillée du processus de généralisation est présentée dans Squalli (2015). Une analyse phénoménologique de ce processus est présentée dans Squalli (2017).

avant de voir une régularité dépend de l'expérience des élèves dans ce type d'activités. Certains auront besoin d'un grand nombre d'exemples avant de pressentir une régularité. Puisque la généralité est inférée à partir d'un nombre restreint d'exemples, cette généralisation est arithmétique, elle ne permet pas encore de comprendre pourquoi les nombres carrés, et uniquement cette catégorie de nombres, possèdent un nombre impair de diviseurs.

Une version sophistiquée de cette technique est la technique de généralisation par répétition guidée. Elle se distingue de la précédente par le fait que la personne qui réalise l'activité tente, à partir de l'examen des exemples générés, de trouver un cheminement qui le conduirait à voir la régularité. Elle apprend de ses exemples par l'étude de leur structure et s'approche de plus en plus de la découverte de la généralité. Par exemple, cette personne peut s'apercevoir que les nombres premiers ne figurent pas parmi les nombres recherchés, car ils possèdent un nombre pair (2) de diviseurs. En revanche, les nombres de la forme p^2 avec p premier font partie des nombres recherchés, car ils possèdent 3 diviseurs (1, p et p^2).

Généralisation à l'aide d'un exemple générique. Cette technique de généralisation algébrique ressemble à la précédente, mais au lieu de procéder à l'examen de plusieurs exemples, elle procède à partir d'un seul exemple. Cet exemple ne doit pas être trop particulier comme le nombre 1; il peut être spécifique comme 9 ou 36 dans le cas où on connaisse un tel nombre; il peut aussi être un nombre anonyme.

Supposons que tel est le cas, et considérons un nombre n possédant un nombre impair de diviseurs, par exemple 5 diviseurs. Le nombre n possède donc les deux diviseurs triviaux *1* et n et trois autres diviseurs différents que nous noterons a, b et c selon un ordre croissant. On a donc $1 < a < b < c < n$ et $1 \times n = n$; $a \times c = n$ et donc forcément $b \times b = n$. Il s'ensuit que b = $\sqrt{n}$ et donc que $\sqrt{n}$ est un entier. Le nombre n est donc un carré parfait.

Ce raisonnement ne dépend pas du nombre 5; il est valable pour n'importe quel nombre impair de diviseurs.

Au lieu de raisonner à partir du nombre n ayant 5 diviseurs, nous aurions pu bâtir notre raisonnement à partir d'un nombre spécifique ayant un nombre impair de diviseurs comme 16. Le raisonnement aurait été similaire. Notre raisonnement nous a permis de transformer l'exemple particulier d'un nombre ayant 5 diviseurs en un exemple générique, c'est-à-dire pouvant engendrer tous les cas possibles. À cet effet, soulignons un fait important pour l'enseignement, le caractère générique d'un exemple est une propriété émergente chez le sujet, elle n'est pas donnée dans l'exemple particulier.

3.3.1 Genres de tâche G1 : Généralisation de régularités

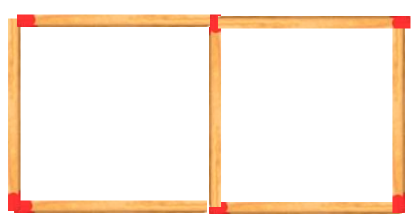
G1.1 Repérer une régularité dans une suite. La tâche consiste à décrire la régularité de la suite à partir des informations de l'énoncé, et ce, dans un registre dont le choix est laissé à l'élève.

> Observe ces calculs :
>
> $1 = 1^2$
>
> $1 + 3 = 4 = 2^2$
>
> $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$
>
> $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$
>
> Sans calcul, trouve le résultat de ce calcul : $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$

G1.2 Prolonger une suite régulière. La tâche consiste à trouver un terme d'un rang donné d'une suite à partir de quelques-uns de ses termes précisés dans l'énoncé.

Le degré d'éloignement du rang du terme recherché de ceux donnés dans l'énoncé est une variable didactique importante. Si le rang est proche, une technique non algébrique est viable (par exemple, dans les cas de *patterns* figuratifs, dénombrement après reproduction de tous les termes). Ce n'est pas le cas si le rang est suffisamment loin. L'extension des premiers termes observables au terme lointain, nécessite la formulation d'une régularité et son extension au cas lointain en se basant sur des arguments intellectuels (Squalli, 2015).

Exemple : chaîne de carrés



> Voici une chaîne formée de 2 carrés d'allumettes. On compte 7 allumettes.
>
> Combien d'allumettes a-t-on dans une chaîne formée de 10 carrés?
>
> Combien d'allumettes a-t-on dans une chaîne formée de 1001 carrés?

G1. 3. Représenter une suite régulière dans un registre donné. Ce genre de tâche se distingue de G1. 1, du fait que le registre de représentation est indiqué dans la tâche.

Exemple : Chaîne de carrés

> Explique dans tes mots comment tu peux trouver le nombre d'allumettes pour n'importe quelle chaîne de carrés.

G1.4 Créer une suite régulière. La tâche consiste à créer une suite régulière, répondant à des caractéristiques précisées dans la tâche. La suite peut être définie par extension en précisant ses premiers termes consécutifs; ou par compréhension, en expliquant comment est formé un terme quelconque de la suite (de manière récursive : comment former un terme à partir du terme précédent, ou non, par exemple, la suite des nombres pairs).

Exemple :

> Crée une suite régulière dont les deux premiers termes sont 1 et 3, et le 25e terme est 49.

G1.5 Justifier/prouver une régularité. Noter que la justification et/ou la preuve ne renvoient pas nécessairement à donner une démonstration mathématique. Elle pourrait consister à donner des arguments (dans un registre donné) qui expliquent la validité de la régularité.

Exemple : Chaînes de carrés

> Jean dit : Le nombre d'allumettes dans une chaîne de carrés d'allumettes est trois fois le nombre de carrés plus une allumette.
>
> Sans faire de calcul, explique pourquoi Jean a raison.

G1.6 Comparer des suites régulières dans un sens donné. Le sens dans lequel doit se faire la comparaison est précisé dans la tâche. Il peut s'agir, par exemple, de comparer les régularités de deux suites; de comparer les termes des deux suites à un rang donné; etc.

Exemple :

> Si le nombre d'allumettes dans une chaîne de carrés d'allumettes est trois fois le nombre de carrés plus une allumette quel serait le nombre d'allumettes dans une chaîne de triangles d'allumettes?

3.3.2 Genres de tâches G2 : Généralisation de règles, de formules, de lois, d'algorithmes

L'exemple d'une règle est le suivant : la somme de deux nombres impairs est un nombre pair.

L'exemple d'une formule et la formule d'aire de rectangles.

L'exemple d'une loi est une propriété sur les opérations ou des catégories de nombres (commutativité de l'addition; critère de divisibilité par 3, etc.).

L'exemple d'un algorithme est l'algorithme conventionnel d'une opération arithmétique, ou la méthode de résolution d'une équation du second degré.

G2.1 Repérer une règle, une loi, un algorithme. Il s'agit d'identifier une règle, une loi, un algorithme, et de le décrire dans un registre quelconque. Le repérage de la règle, de la loi ou de l'algorithme est au centre de la tâche.

Exemple :

> Un triangle rectangle est un demi-rectangle. Comment peut-on calculer la mesure de son aire?

G2.2 Étendre le domaine de validité d'une règle, d'une loi, d'un algorithme. Exemple :

> Un triangle rectangle est un demi-rectangle. La mesure de son aire est donc la moitié du produit de sa hauteur par sa base. Qu'en est-il d'un triangle non rectangle?

Les exemples de tâches relevant des genres de tâches G2.3, G2.4, G2.5 et G2.6 sont les mêmes que celles des tâches analogues pour les suites régulières.

4.4 PMR : Modélisation

Comme dans le cas de la présentation des praxéologies régionales Calculer et Généraliser nous commençons par présenter quelques éléments technologico-théoriques de la praxéologie régionale Modéliser.

À l'instar de Squalli (2000) nous dirons qu'une situation mathématique ou extra-mathématique est algébrisable si elle peut être modélisée algébriquement, c'est-à-dire si le modèle est algébrique (expression faisant intervenir des opérations, des nombres déterminés et non déterminés). Nous dirons que deux situations algébrisables sont isomorphes si elles peuvent être représentées par un même modèle algébrique.

Nous présentons ci-après une description du processus de modélisation algébrique inspiré du modèle de la modélisation mathématique proposé par Pollak (1997) :

1. Le processus commence par quelque chose en dehors des mathématiques que vous aimeriez connaître ou comprendre.
   - Le résultat est une question du monde réel, suffisamment définie pour que vous ayez progressé.
2. Vous sélectionnez ensuite des objets importants dans cette situation algébrisable en dehors des mathématiques et des relations entre eux.
   - Le résultat est l'identification de certains concepts clés dans les situations que vous souhaitez étudier.

3. Vous décidez quoi garder et quoi ignorer dans votre connaissance des objets et de leurs interrelations.
   - Le résultat est une version idéalisée de la question
4. Vous traduisez la version idéalisée de la question en termes algébriques.
   - Le résultat est une version algébrique de la question idéalisée.
5. Vous faites de l'algèbre.
   - Le résultat est solutions, théorèmes, cas spéciaux, algorithmes, estimations, problèmes ouverts.
6. Vous traduisez maintenant dans le cadre du problème initial.
   - Vous avez maintenant une théorie de la version idéalisée de la question que vous trouvez dans (3) ci-dessus.
7. Vous confrontez la réalité sous la forme de la situation d'origine représentée par (1). Croyez-vous ce qui se dit en (7)? En d'autres termes, vos résultats, une fois rendus à la situation d'origine, correspondent-ils au monde réel?
   - Si oui, vous avez réussi.
   - Si non, retournez au début. Avez-vous choisi les bons objets et les bonnes relations entre eux? Est-ce que vos choix de ce qu'il faut garder et de ce qu'il faut ignorer doivent être revisités? La façon dont votre théorie du problème idéalisé échoue à vous satisfaire devrait fournir quelques indices sur les points difficiles.

Cette description montre les trois moments du travail de modélisation algébrique. Le premier est couvert par les phases (1), (2), (3) et (4) au terme desquels on arrive à une situation mathématique obtenue à partir de la traduction en termes mathématiques de la situation idéalisée. Les étapes (5) et (6) constituent le deuxième moment où le travail est purement mathématique. Le résultat de ce travail est investi dans la construction de nouvelles connaissances de la situation idéalisée (étape 7) et, par la suite, de la situation du monde réel initiale (étape 8). Ces deux dernières étapes forment le troisième moment du processus de la modélisation.

La figure 4 illustre, de manière simplifiée, le processus de modélisation mathématique

Lorsque le modèle mathématique M est un élément d'un espace de calcul algébrique E′ associé à un certain système algébrique E, nous dirons que M est un

« modèle algébrique[9] ». M peut ainsi être une expression algébrique de domaine E, par exemple une équation ou un système d'équations ou une forme propositionnelle ou un système de formes propositionnelles. En outre, nous parlerons de « modélisation algébrique » quand le modèle mathématique est un modèle algébrique.

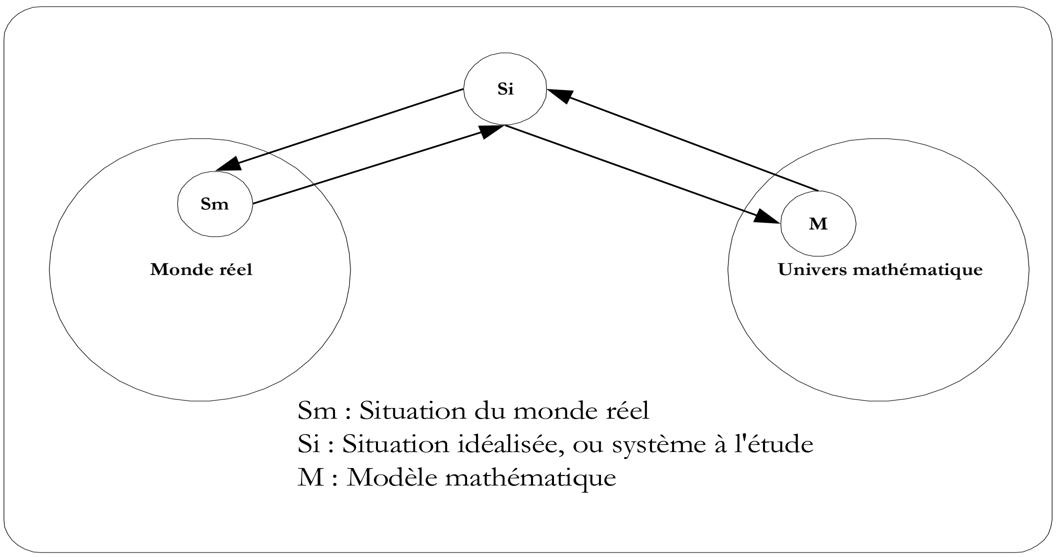


Figure 4 : Modélisation mathématique

À l'aide de ce schéma général, expliquons les grandes lignes de la modélisation algébrique. Notons d'abord que la construction du modèle algébrique, à partir de la situation idéalisée, nécessite la mise en évidence d'opérations (au moins une), de relations, des variables pertinentes ainsi que de relations existant entre elles. C'est la manière dont les variables pertinentes sont reliées entre elles, soit la structure de la situation idéalisée, qui constitue l'objet de l'étude. En choisissant les variables et les opérations pertinentes, et peut-être des relations, on est amené implicitement à choisir un système algébrique E qui est le domaine des variables et qui est muni de ces opérations et relations. Ainsi, on dispose d'un espace de calcul algébrique[10] associé à E (Squalli, 2000), dans lequel le modèle algébrique de la situation idéalisée est exprimé, et le travail algébrique de transformation de la forme du modèle est conduit, jusqu'à arriver à une forme à partir de laquelle on peut tirer les connaissances espérées de la situation idéalisée et, par la suite, de la situation initiale du monde réel. Notons que le premier et le second moment du processus de modélisation mathématique nécessitent des connaissances propres au système étudié.

---

9 Nous ne considérons pas le cas où le modèle M est lui-même un système algébrique.

10 La notion d'espace de calcul algébrique est définie dans la section 3.2

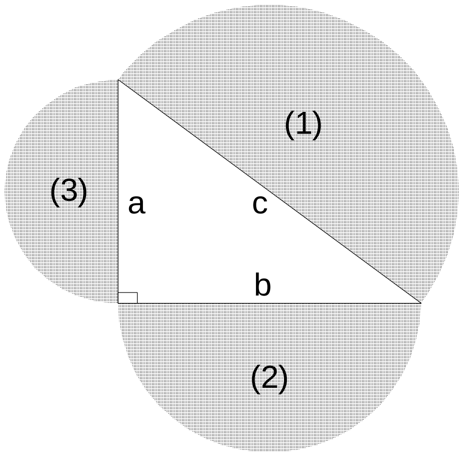
Prenons comme exemple le cas d'une situation en sciences physiques, comme le mouvement rectiligne uniforme d'un mobile. En se référant à la description du processus de modélisation de Pollak, le parcours des trois premières étapes nécessite des connaissances de la physique : à la suite de diverses observations d'un mobile en mouvement rectiligne uniforme, on arrive à se convaincre que si les frottements sont négligeables, les seules grandeurs caractéristiques de la situation sont la vitesse, le temps et la distance parcourue. Le domaine des variables doit pouvoir représenter des grandeurs continues sur lesquelles on puisse opérer à l'aide des opérations classiques d'addition et de multiplication. Dans un cas pareil, on opte généralement pour le système des nombres réels. Le modèle algébrique du système que l'on entend étudier appartient à l'espace de calcul algébrique associé au système des nombres réels. En se basant sur des expérimentations, on arrive à la conclusion que ces grandeurs caractéristiques sont liées par une relation linéaire de la forme : $x = v\ t$ où la variable v désigne la vitesse du mobile, x désigne la distance parcourue et t le temps écoulé. Cette équation, qui se présente comme une relation fonctionnelle, est le modèle algébrique de la situation et elle se trouve construite dans la quatrième étape du processus de la modélisation. Il apparaît ici que dans la construction du modèle, on a besoin de connaître la signification des variables, des opérations ainsi que des relations entre elles. Un travail algébrique simple montre que la relation fonctionnelle précédente est équivalente aux deux relations fonctionnelles : $2x = 2v\,t$ et $x = 2v\,t/2$, lesquelles sont deux formes différentes du modèle. De la première, on peut interpréter par exemple, que pour que le mobile puisse parcourir le double de la distance durant une même période de temps, il faut doubler la vitesse; la seconde montre par exemple qu'en doublant la vitesse on peut parcourir la même distance durant la moitié de la période de temps.

Le terme « modélisation mathématique » est habituellement réservé au cas où la situation à modéliser appartient à un univers non mathématique. Si, comme le fait Chevallard (1989), on accepte que ce terme englobe aussi les cas où le système à modéliser est mathématique, les explications précédentes de ce processus restent encore valables. Chevallard (1989) désigne par « mathématisé » le registre du système à modéliser et par « mathématique » celui où est conduite la modélisation. Toutes les étapes décrites par Pollak peuvent être reformulées en conséquence.

Considérons, par exemple, la résolution algébrique du problème suivant (figure 5)[11].

---

11 Cet exemple est emprunté à Chevallard (1989, p. 56).



Calculer l'aire du demi-cercle (1) en fonction des aires des demi-cercles (2) et (3).

Figure 5 : Résolution algébrique d'un problème géométrique

Dans cette situation, le triangle fait partie de la classe des triangles rectangles connus par la théorie géométrique. Si on désigne par a et b les mesures des côtés et c la mesure de l'hypoténuse, le théorème de Pythagore nous permet de construire le modèle algébrique[12] : $c^2 = a^2 + b^2$. Dans un tel cas, le modèle se distingue bien du système modélisé. Un travail algébrique simple sur le modèle permet de répondre au problème. En effet, en multipliant l'égalité de Pythagore par $\frac{\pi}{8}$ on obtient : $\frac{\pi}{8}c^2 = \frac{\pi}{8}a^2 + \frac{\pi}{8}b^2$; dans le contexte du problème, cela peut s'interpréter : l'aire du demi-cercle (1) est la somme des aires des demi-cercles (2) et (3).

Dans ce travail, nous utilisons la notion de modélisation de manière large, incluant les tâches de mathématisation, par exemple la résolution de problèmes mathématiques à contextes. En outre, nous distinguons les praxéologies mathématiques locales selon la nature du modèle algébrique, soit, comme le montre la figure 6, M1 : Modélisation de situations par des expressions numériques; M2 : Modélisation de situations par des équations et M3 : Modélisation de situations par des relations fonctionnelles.

M1 implique des nombres nombrants uniquement; le modèle est une expression numérique. M2 implique la notion d'inconnue et d'équation, le modèle se présente comme une équation impliquant une ou plusieurs inconnues dont il faut déterminer les valeurs. M3 implique la notion de variable et de relation fonctionnelle, le modèle est une expression algébrique décrivant la règle d'une relation fonctionnelle entre des variables

[12] Dans un espace de calcul associé au système des nombres réels.

Genres de tâches de la PMR: Modélisation

M1 : Modélisation de situations par des expressions numériques

- **M1.1** Résoudre une situation se modélisant par une expression numérique
- **M1.2** Reconnaître une expression numérique modélisant une situation donnée
- **M1.3.** Déterminer et représenter une expression numérique modélisant une situation donnée
- **M1.4** Opérer sur une expression numérique modélisant une situation en vue de dégager des résultats ou des conclusions en lien avec la situation
- **M1.5** Créer une situation se modélisant par une expression numérique donnée

M1 : Modélisation de situations par des équations

- **M2.1** Résoudre une situation se modélisant par une équation faisant intervenir une ou des inconnues
- **M2.2** Reconnaître une équation modélisant une situation donnée
- **M2.3** Déterminer et représenter dans un registre donné une équation modélisant une situation donnée
- **M2.4** Opérer sur une équation modélisant une situation en vue de dégager des résultats ou des conclusions en lien avec la situation
- **M2.5** Créer une situation se modélisant par une équation donnée

M3 : Modélisation de situations par des relations fonctionnelles

- **M3.1** Résoudre un problème associé à une situation se modélisant par une relation fonctionnelle
- **M3.2** Reconnaître une relation fonctionnelle modélisant une situation donnée
- **M3.3** Déterminer et représenter dans un registre quelconque une relation fonctionnelle modélisant une situation donnée
- **M3.4** Opérer sur le modèle fonctionnel d'une situation en vue de dégager des résultats ou des conclusions en lien avec la situation
- **M3.5** Créer une situation se modélisant par une relation fonctionnelle donnée

Figure 6 : Genres de tâches de la PMR – Modélisation

3.4.1 Exemples de tâches relevant des genres de tâches de la PML M2 : modélisation de situations par une expression numérique

M1.1 Résoudre une situation se modélisant par une expression numérique. Ici, la résolution pourrait demander à mettre en œuvre des sous-tâches qui relèvent des genres de tâches M.1.2, M.1.3 et/ou M.1.4.

L'exemple de la résolution d'un problème à contexte en est un bon exemple :

> Michel a 11 ans. Dans cinq ans il aura le double de l'âge de son frère Jean. De combien d'années Michel est-il plus âgé que son frère?

M1.2 Reconnaître une expression numérique modélisant une situation donnée. Une tâche de ce genre pourrait consister à reconnaître, parmi plusieurs, une expression numérique modélisant une situation donnée ou à compléter les informations manquantes dans une situation pour que la situation soit modélisée par une expression numérique donnée.

Voir les exemples analogues dans le cas de la modélisation par une équation impliquant une inconnue.

M1.3 : Déterminer et représenter une expression numérique modélisant une situation donnée. La tâche doit consister à trouver une expression numérique modélisant une situation associée à la tâche.

Par exemple, formuler l'expression $2 \times 12 - 5$ pour répondre à la question du problème suivant :

> Jean a cinq ans de moins que le double de l'âge de sa sœur Sabrina.
>
> Quel âge a-t-il si Sabrina a 12 ans?

M1.4 Opérer sur une expression numérique modélisant une situation en vue de dégager des résultats ou des conclusions en lien avec la situation. La tâche, ici, consiste à transformer une expression numérique (déterminée par l'élève ou donnée dans l'énoncé de la tâche) pour en dégager des résultats et des conclusions en lien avec la situation.

Exemple :

> Jean et Sabrina ont chacun 46 timbres. Est-ce possible de faire des paquets de quatre timbres sans qu'il n'en reste? Réponds sans exécuter l'opération 2 x 46.

M1.5 Créer une situation se modélisant par une expression numérique. Ici, l'expression numérique (ou l'équation M.2.5, la relation fonctionnelle M.3.5) est supposée donnée et la tâche doit consister à s'appuyer sur cette donnée pour créer la situation.

3.4.2 Exemples de tâches relevant des genres de tâches de la PML M2 : Modélisation de situations par des équations

M.2.1 : Résoudre une situation se modélisant par une équation faisant intervenir une ou des inconnues. Idem que pour M1.1 et M.3.1

M.2.2 Reconnaître l'équation modélisant une situation donnée. Une tâche de ce genre peut consister à reconnaître, parmi plusieurs, l'équation modélisant une situation donnée ou à compléter les informations manquantes dans une situation pour que la situation soit modélisée par une équation donnée.

Exemple :

> Il y a 576 passagers à transporter entre deux villes. On dispose de deux trains pour le faire. L'un des trains a uniquement des wagons à 12 places et l'autre uniquement des wagons à 16 places. En sachant que le train formé de wagon à 16 places possède 8 wagons de plus que l'autre, quelle ou quelles équation(s) permet(tent) de trouver le nombre de wagons disponibles?
>
> - 12x + 16(x+ 8) = 576
> - w1 + w2 = 576
> - 12x + 16x = 576
> - 12(x +8) + 16x = 576

M.2.3 Déterminer et représenter une expression algébrique modélisant une situation donnée.

Exemple :

> Jean a cinq ans de moins que le double de l'âge de sa sœur Sabrina. Exprime l'âge de Jean à l'aide de l'âge de Sabrina.

M2.4 Opérer sur une équation modélisant une situation en vue de dégager des résultats ou des conclusions en lien avec la situation.

Exemple :

> Jean et Sabrina ont le même nombre pair de timbres. Est-ce possible de faire des paquets de quatre timbres sans qu'il n'en reste?

M2.5 Créer une situation se modélisant par une équation donnée. Idem que pour M.1.5

3.4.3 Exemples de tâches relevant des genres et types de tâches de la PML M3 : Modélisation de situations par des relations fonctionnelles

Dans ce genre de tâches, la situation est fonctionnelle, elle contient de manière explicite ou implicite l'idée de covariation (ou de correspondance entre des variables). Le modèle de la situation est alors une relation fonctionnelle, autrement dit une relation entre des variables. Notons qu'une donnée dans un problème, même non déterminée, ne peut être considérée comme variable que si elle varie dans un certain domaine.

M3.1 Résoudre un problème associé à une situation se modélisant par une relation fonctionnelle. Un exemple de tâche est la résolution du problème suivant :

> Pierre travaille au dépanneur du coin. Il gagne 15,25 $ de l'heure. Combien d'heures doit-il travailler pour acheter une console de jeux vidéo qui coûte 488 $?

M3.2 Reconnaître une relation fonctionnelle modélisant une situation. La tâche consiste à reconnaître une relation fonctionnelle (parmi plusieurs données, représentées dans un même registre ou dans des registres différents) modélisant une situation associée à la tâche.

Exemple :

> Pierre travaille au dépanneur du coin. Il gagne 15,25 $ de l'heure. Laquelle de ces relations exprime le montant gagné par Pierre (représenté par y) selon le nombre d'heures travaillées (représenté par x).
>
> - y = 15,25 * x
> - x = 15,25 *y
> - y = 15,25 + x

M3.3. Déterminer et représenter dans un registre donné une relation fonctionnelle modélisant une situation. La tâche consiste à trouver et à décrire, dans un registre donné (graphique, verbal, algébrique, tableau, schéma, …), une relation fonctionnelle modélisant la situation associée à la tâche.

Dans ce genre de tâches, la nature du registre de représentation de la relation fonctionnelle doit être formulée dans l'énoncé de la tâche. Ce genre de tâches inclut les tâches nécessitant un changement de registres.

M3.4 Opérer sur le modèle fonctionnel d'une situation en vue de dégager des résultats ou des conclusions en lien avec la situation. Idem que pour M.1.4. Dans ce cas, on peut également penser aux opérations d'interpolation et d'extrapolation

> Pierre travaille au dépanneur du coin. Il gagne 15,25 $ de l'heure. La relation exprime le montant gagné par Pierre (représenté par y) selon le nombre d'heures travaillées (représenté par x) est y = 15,25 * x.
>
> Quel taux horaire Pierre doit-il avoir pour un nouveau travail s'il veut gagner le même salaire tout en travaillant la moitié du temps?

M3.5 Créer une situation se modélisant par une relation fonctionnelle donnée. Idem que pour M1.5.

5. Quelques remarques conclusives

Le MPRPA que nous venons de présenter nous semble original par rapport à d'autres propositions. Comme le précisent Bronner et Larguier (2018), peu de recherches s'inscrivant dans le cadre de la TAD proposent des modèles épistémologiques de référence de la pensée algébrique.

> La plupart présentent des modèles globaux d'algèbre quasi finalisée. On peut notamment citer la recherche de Pilet (2012) qui propose un MER vu comme une OM globale du domaine algébrique, organisée en trois secteurs (niveau d'OM régionales) relatives aux thèmes suivants : les expressions algébriques, les équations et les formules. Ces OM se structurent autour d'OM plus locales où on peut retrouver les types de tâches formelles classiques : simplifier des expressions algébriques, développer des expressions algébriques, factoriser des expressions algébriques, résoudre des équations, étudier une fonction. (p. 238)

Une autre proposition est celle de Ruiz-Munzon et al. (2020) qui présente un MER de l'algèbre élémentaire comme un processus d'algébrisation en quatre étapes autour de la notion de programme de calcul. À l'étape 0, le programme de calcul est vu comme un processus, à l'étape 1 il est considéré comme une expression algébrique impliquant des variables, à l'étape 2 le programme de calcul est vu comme une expression algébrique impliquant des inconnues et enfin, à l'étape 3, avant l'avènement de l'algèbre supérieur, il est vu comme une formule.

Notre proposition se distingue de ces deux propositions pour au moins deux raisons. La première est que, à l'opposé de ces deux propositions, le cadre conceptuel de l'algèbre sur lequel est basée notre proposition s'inscrit dans les travaux de recherche anglo-saxons d'Early Algebra. La seconde est que notre modèle praxéologique de référence est développé pour étudier le développement précoce de la pensée algébrique, c'est-à-dire depuis les premières classes du primaire jusqu'à la fin du secondaire, alors que les autres propositions s'intéressent à la fin du primaire et au début du collège, moment de la préparation de l'entrée dans l'algèbre du collège. La proposition la plus proche de la nôtre est celle de Bronner et Larguier (2018). Elle propose un MER de l'entrée dans l'algèbre organisé autour d'une classification des activités de résolution de problèmes structurée en trois grandes catégories : 1) Étude des structures numériques; 2) Modélisation de situations intra ou extra-mathématiques par des équations; et 3) Modélisation de situations intra ou extra-mathématiques par des fonctions.

Les tâches de généralisation sont incluses dans cette dernière catégorie, contrairement à notre proposition où nous avons présenté la généralisation comme une organisation praxéologique régionale à part entière pour souligner le rôle important que joue la généralisation dans le développement de la pensée algébrique.

Dans le modèle praxéologique de référence que nous avons présenté, les composantes de la pensée algébrique relativement aux dimensions de conceptualisation, de raisonnement et de symbolisation ne sont pas explicites dans la formulation des genres de tâches. Elles y sont implicitement reliées par les techniques et les technologies qui y sont associées. La mise en évidence à partir des tâches des composantes du bloc technologico-théorique est donc nécessaire pour rendre compte du potentiel de la tâche à la mobilisation de la pensée algébrique.

Dans notre cadre conceptuel de l'algèbre et de la pensée algébrique, le caractère algébrique de la tâche ou de la pensée qui pourrait être mobilisée pour la résoudre, ne dépend pas de la nature des ostensifs (Chevallard, 1994) impliqués, mais dépend de la nature des non-ostensifs (signification des concepts impliqués et nature des raisonnements, en particulier). Aussi, l'analyse du potentiel d'un programme d'étude ou d'une pratique d'enseignement à développer la pensée algébrique requiert de prendre en compte l'ensemble des tâches faisant intervenir un nombre fini d'opérations, de quelque nature que ce soit.

Par ailleurs, notre modèle peut servir à analyser des programmes d'études qui visent explicitement le développement de la pensée algébrique. C'est le cas par exemple de l'étude de Jeannotte et Squalli (2022) concernant l'analyse du programme de l'Ontario qui vise de manière explicite à développer la pensée algébrique depuis la première année du primaire. Notre modèle peut aussi servir à analyser un manuel scolaire ou un programme d'étude ne visant pas explicitement le développement de la pensée algébrique. En effet, dans ce type de programme ou manuel, le développement de la pensée algébrique n'est pas absent, puisque plusieurs genres de tâches de notre modèle peuvent s'y retrouver. Ainsi, contrairement au programme de l'Ontario, le programme du Québec est construit selon une approche transitionnelle de l'arithmétique enseignée au primaire à l'algèbre introduite au premier cycle du secondaire. Cependant, les concepteurs du programme du premier cycle du secondaire tiennent à préciser :

> Au primaire, par ses diverses activités mathématiques, l'élève a été initié, à son insu, à des préalables à l'algèbre. Mentionnons notamment la recherche de termes manquants par l'utilisation des propriétés des opérations et des relations entre elles, l'appropriation du sens des relations d'égalité et d'équivalence, l'utilisation des priorités des opérations et la recherche de régularités dans différents contextes. (Gouvernement du Québec, 2006, p. 253)

Dans ce sens, notre modèle a été utilisé dans une recherche comparative de la transition arithmétique - algèbre dans les programmes du Bénin, du Maroc et de la Tunisie (Ben Nejma et al., 2022). L'analyse des praxéologies mathématiques développées dans les manuels scolaires de ces pays (6e année primaire) a permis d'identifier le potentiel des tâches proposées aux élèves à développer la pensée algébrique avant même l'introduction du symbolisme algébrique. De ce fait, cette analyse a permis de rendre compte des manières dont ces manuels préparent les élèves à l'algèbre du secondaire.

Références

Bednarz, N., Janvier, B., Mary, C. et Lepage, A. (1992). L'algèbre comme outil de résolution de problèmes : une réflexion sur les changements nécessaires dans le passage d'un mode de traitement arithmétique à un mode de traitement algébrique. *Actes du colloque portant sur l'émergence de l'algèbre,* 17-31.

Bednarz, N., Kieran, C. et Lee, L. (1996). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*. Kluwer Academic Publishers.

Ben Nejma, S., Abouhanifa, S., Oké, E., Najjar, R., Squalli, H. et Adihou, A. (2022). Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie : analyse du savoir à enseigner relatif au développement de la pensée algébrique dans les manuels de 6e année primaire. *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, *Numéro thématique 2* (Tome 1), 59-95.

Bosch, M. et Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. Dans A. Mercier et C. Margolinas (dir.), *Balises pour la didactique des mathématiques. Actes de la 12e école d'été de didactique de mathématiques* (p. 107-122). Éditions la Pensée sauvage.

Boutros, P. (1920). *L'idéal scientifique des mathématiciens dans l'antiquité et dans les temps modernes*. Alcan.

Bronner, A. et Larguier, M., (2018). Éléments d'analyse du curriculum officiel à propos de la pensée algébrique. Dans M. Abboud (dir.), *Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines. Actes du colloque EMF2018* (p. 236-245). Université de Paris.

Cai, J. et Howson, G. (2012). Toward an international mathematics curriculum. Dans M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick et F. K. S. Leung (dir.), *Third international handbook of mathematics education* (p. 949-974). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_29

Carraher, D. W. et Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. Dans F. Lester (dir.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 669-705). Information Age Publishing.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, *19*, 43-75.

Chevallard, Y. (1994). Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique. *Actes du séminaire de l'Associazione Mathesis*, 190-200.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(2), 221-266.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. Dans A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen et J. Van Dormolen (dir.), *Mathematical knowledge: its growth through teaching* (p. 63-85). Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Gouvernement du Québec. (2006). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, premier cycle*. Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport.

Hitt, F. (2004). Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques et leur rôle dans une démarche heuristique. *Revue des sciences de l'éducation*, *30*(2), 329-354. https://doi.org/10.7202/012672ar

Hitt, F. et Passaro, V. (2007). De la résolution de problèmes à la résolution de situations problèmes : le rôle des représentations spontanées. *Actes de la Commission internationale pour l'Étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques*, 117-123.

Ilyenkov, E. (1977). *Dialectical logic*. Progress Publishers.

Jeannotte, D. et Squalli, H. (2022). Le développement de la pensée algébrique dans les programmes de l'Ontario : quel potentiel et quelle trajectoire visée? *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, *Numéro thématique 2* (Tome 1), 34-58.

Kaput, J. J. (1992). Technology and mathematics education. Dans A. D. Grouws (dir.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 515-556). National Council of Teachers of Mathematics.

Kaput, J. J. (1995). A research base supporting long term algebra reform. Dans D. T. Owens, M. K. Reed, et G. M. Millsaps (dir.), *Proceedings of the 17th Annual Meeting of North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-NA). Volume 1* (p. 71-94). ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education.

Kaput, J. J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. Dans National Research Council (dir.), *The Nature and Role of Algebra in the K-14 Curriculum: Proceedings of a National Symposium.* The National Academies Press. https://doi.org/10.17226/6286.

Larguier M. (2015) Première rencontre avec l'algèbre. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes du colloque EMF2015* (p. 313-333). Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene.

Lins, R. C. (1992). *A framework for understanding what algebraic thinking is* [thèse de doctorat, University of Nottingham]. Notthingham ePrints. https://eprints.nottingham.ac.uk/13227/1/316414.pdf

Mary, C., Squalli, H. et Schmidt, S. (2014). Activité de généralisation et de justification chez des élèves en difficulté. Dans C. Mary, H. Squalli, L. DeBlois et L. Theis (dir.), *Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques : regard didactique* (p. 163-186). Presses de l'Université du Québec.

Mason, J. (1994). *L'esprit mathématique*. Module.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. Dans N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), *Approaches to algebra* (p. 65-86). Kluwer.

Piaget, J. et Garcia, R. (1983). *Psychogenèse et histoire des sciences*. Flammarion.

Pollak, H. O. (1997). Mathematical modeling and discrete mathematics. Dans J. G. Rosenstein, D. S. Franzblau et F. S. Roberts (dir.), *Discrete Mathematics in the Schools. DIMACS Series in discrete mathematics and theoretical computer science, Volume 36* (p. 99-104). National Council of Teachers of Mathematics.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, *12*(1), 1-19. https://doi.org/10.1080/14794800903569741

Radford, L. (2011). Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage : la théorie de l'objectivation. *Éléments*, *1*, 1-27.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 257-277. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Radford, L. (2015). Pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation, Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes du colloque EMF2015* (p. 334-345). Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. Dans C. Kieran (dir.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds. The global evolution of an emerging field of research and practice* (p. 3-26). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_1

Ruiz Munzón, N., Bosch, M. et Gascón, J. (2020). Un modèle épistémologique de référence pour la recherche sur l'algèbre élémentaire. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 22(1),* 123-144. https://doi.org/10.7202/1070027ar

Squalli, H. (2000). *Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base* [thèse de doctorat, Université Laval]. https://www.collectionscanada.gc.ca/obj/s4/f2/dsk1/tape3/PQDD_0017/NQ55825.pdf

Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes du colloque EMF2015* (p. 346-356). Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene.

Squalli, H. (2017). La généralisation algébrique : une analyse phénoménologique. *Revue marocaine de didactique des mathématiques, 2*, 20-27.

Squalli, H. (2020). Early algebra : genèse d'un domaine de recherche, évolution et perspectives. Dans H. Squalli, I. Oliveira, A. Bronner et M. Larguier (dir.), *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires.* Livres en ligne du CRIRES. https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches

Squalli, H., Larguier, M., Bronner, A. et Adihou, A. (2020). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 22*(1), 36-62. https://doi.org/10.7202/1070024ar

van Reeuwijk, M. (1998). Structure in school algebra. Dans G. Burrill et J. Ferrini-Mundy (dir.), *The Nature and Role of Algebra in the K-14 Curriculum. Proceedings of a National Symposium* (p. 83-85). National Academy Press.

Vlassis, J., Demonty, I. et Squalli, H. (2017). Développer la pensée algébrique à travers une activité de généralisation basée sur des motifs (patterns) figuratifs. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 20*(3), 131–155. https://doi.org/10.7202/1055731ar

Wartofsky, M. (1979). *Models, representation and the scientific understanding*. D. Reidel Publishing.