



# Raisonner, conceptualiser, représenter et leurs rapports dialectiques : la pensée fonctionnelle comme une totalité dynamique

Virginie ROBERT

Université de Sherbrooke

[Virginie.Robert2@usherbrooke.ca](mailto:Virginie.Robert2@usherbrooke.ca)

**Résumé :** Cet article propose une caractérisation opératoire de la pensée fonctionnelle qui permet de rendre compte de la richesse et de la complexité de son déploiement dans l'activité. En nous appuyant sur la théorie de l'objectivation (Radford, 2011, 2021a) et sur des éléments d'un cadre conceptuel de la pensée fonctionnelle (Robert, 2024), nous proposons une caractérisation de cette dernière qui s'appuie sur ses principales manières d'agir et de réfléchir en activité et les rapports dialectiques qui les unissent. Nous illustrons ensuite les résultats de sa première mise à l'épreuve empirique (Robert, 2024). Ces derniers révèlent non seulement de nouvelles subtilités de la pensée fonctionnelle, mais aussi la richesse de notre approche consistant à traiter la pensée qui se déploie en activité comme une totalité dynamique.

*Mots-clés : pensée fonctionnelle, raisonner, conceptualiser, représenter, totalité dynamique*

**Functional thinking as a dynamic totality : reasoning, conceptualizing, representing and their dialectical relationships**

**Abstract:** This article proposes an operational characterization of functional thinking that accounts for its richness and complexity as it unfolds within activity. Drawing on the Theory of Objectification (Radford, 2011, 2021a) and elements of a conceptual framework for functional thinking (Robert, 2024), we propose a characterization based on the principal ways of acting and reflecting as they unfold within activity, along with the dialectical relationships that bind them. We then discuss the results of an initial empirical trial (Robert, 2024). The results reveal not only subtle nuances of functional thinking but also the value of conceiving thought as a dynamic totality.

*Keywords: functional thinking, reasoning, conceptualizing, representing, dynamic totality*

Revue québécoise de didactique des mathématiques, 2025, vol 6(1), p. 61-91.  
<https://doi.org/10.71403/qp71gr97>

## Introduction

Depuis plusieurs années, la pensée fonctionnelle occupe une place grandissante dans les recherches. Toutefois, elle est le plus souvent abordée à partir de contextes d'étude spécifiques (p. ex. des activités de généralisation), ce qui rend difficile l'élaboration d'une définition de cette forme de la pensée mathématique qui fasse consensus. Cet article vise à présenter une caractérisation opératoire de la pensée fonctionnelle offrant une manière de l'étudier qui rende compte du déploiement de ses principales manières d'agir et de réfléchir dans l'activité. Cette caractérisation opératoire s'appuie sur les résultats de notre recherche doctorale (Robert, 2024) dont l'objectif principal était de documenter la pensée fonctionnelle qui émerge et se déploie dans des activités d'enseignement-apprentissage.

Pour en arriver à présenter notre manière d'approcher la pensée fonctionnelle, il importe d'abord de bien saisir les enjeux qui nous ont poussés à la développer. Nous entamons donc cet article par la présentation des points de tension qui ont motivé sa construction, dont l'absence d'un consensus sur une caractérisation de la pensée fonctionnelle dans les travaux existants, le manque d'ancre théorique permettant notamment de distinguer pensée et raisonnement, ainsi que le besoin de disposer d'une caractérisation apte à saisir la pensée fonctionnelle dans toute la richesse de son déploiement dans l'activité.

### 1. Pourquoi une caractérisation opératoire de la pensée fonctionnelle?

Prenant appui sur les fondements de la théorie de l'objectivation, Radford (2021a) définit la pensée mathématique comme un système complexe de manières d'agir et de réfléchir en accord avec des formes mathématiques de pensées culturellement et historiquement constituées. La pensée fonctionnelle est ici conçue comme l'une des formes de la pensée mathématique se distinguant de ses autres formes par la nature des activités dans lesquelles elle est mobilisée. Le déploiement de la pensée étant indissociable de l'activité (Radford, 2021a), nous nous intéressons d'emblée à ces activités qui peuvent provoquer le déploiement de la pensée fonctionnelle. Pour ce faire, il est intéressant de se référer au développement historique du concept de fonction. Selon Freudenthal (1983/2002) et Comin (2005), le concept de fonction est issu de réflexions et de questionnements sur les phénomènes de changement et les lois de variation qui régissent le monde. D'ailleurs, c'est notamment grâce à la modélisation fonctionnelle que nous arrivons à comprendre et décrire le changement en y dégageant les différentes variables et les relations de dépendances qui les unissent (Freudenthal, 1983/2002). Ainsi, la pensée fonctionnelle ne se restreint pas à l'usage explicite du concept de fonction, mais réfère davantage aux manières de penser les relations fonctionnelles. D'ailleurs, selon Smith (2008), elle émerge et se

déploie dès qu'une personne s'engage dans une activité et fait le choix de s'intéresser à la relation entre deux ou plusieurs quantités variables. Par conséquent, à l'instar de Smith (2008), nous adoptons la posture selon laquelle la pensée fonctionnelle peut se développer dans des activités mettant en jeu une ou plusieurs relations fonctionnelles, et ce, même avant l'introduction du concept de fonction comme objet explicite d'apprentissage. Nous pouvons ainsi définir sommairement la pensée fonctionnelle comme des manières d'agir et de réfléchir dans des activités mettant en jeu une ou plusieurs relations fonctionnelles.

Récemment, la pensée fonctionnelle a fait l'objet de plusieurs recherches (p. ex. Ben Nejma, 2020; Blanton et Kaput, 2004, 2011; Carraher et Schliemann, 2007; Cooper et Warren, 2011; Moss et al., 2020; Robert, 2018; Stephens et al., 2017) qui nous ont permis d'en apprendre davantage quant à son importance ainsi que sur les différents enjeux relatifs à son développement. Toutefois, malgré ces recherches, il n'existe pas de consensus quant à une définition ou à une caractérisation de la pensée fonctionnelle (Pitallis et al., 2020; Robert, 2018).

Jusqu'ici, la plupart des recherches qui se sont intéressées à la pensée fonctionnelle ont été menées dans le contexte des recherches du courant Early Algebra<sup>1</sup> visant à promouvoir le développement de la pensée algébrique (p. ex. Beatty et al., 2013; Blanton et al., 2015; Pinto et Cañadas, 2021; Stephens et al., 2017). Ces recherches, faites principalement auprès d'élèves du primaire, mobilisent la pensée fonctionnelle davantage comme une approche favorisant le développement de la pensée algébrique. Autrement dit, la pensée fonctionnelle y est invoquée par l'entremise de tâches (souvent des tâches de généralisation de suites à motifs croissants ou de situations contextualisées) considérées comme étant propices au développement de la pensée algébrique. Les résultats de ces différentes recherches sont pertinents pour nous permettre de bien comprendre les enjeux liés au développement de la pensée fonctionnelle en plus de mettre en lumière le potentiel des élèves face à des tâches fonctionnelles. Toutefois, les définitions ou les caractérisations de la pensée fonctionnelles proposées dans ces recherches demeurent partielles : elles sont tantôt spécifiquement adaptées aux tâches de généralisation de relations fonctionnelles, tantôt adaptées à celles de modélisation de situations spécifiques mettant en jeu une relation fonctionnelle. De plus, elles se déclinent généralement sous la forme d'une liste de raisonnements qui peuvent émerger dans l'activité ou des registres de représentations mobilisés par les élèves, laissant de côté toute la dimension conceptuelle de la pensée fonctionnelle. Par

---

<sup>1</sup> Selon Squalli (2015), *Early Algebra* est un courant qui réfère à la fois à un domaine de recherche, à une approche curriculaire, mais aussi à un domaine de formation des personnes enseignantes.

exemple, dans leur recherche de 2011, Blanton et Kaput mentionnent de manière explicite :

Nous concevons la pensée fonctionnelle de manière générale comme « englobant la construction et la généralisation de patterns et de relations à l'aide d'outils linguistiques et de représentations variés, ainsi que le traitement des relations généralisées des fonctions comme des objets mathématiques à part entière, utiles en elles-mêmes (p. 8, traduction libre<sup>2</sup>).

Ces auteurs opérationnalisent ensuite cette définition par trois manières typiques de traiter les relations fonctionnelles qui sont utilisées pour catégoriser les raisonnements des élèves dans des activités de généralisation : les raisonnements récursif, covariationnel et par correspondance. Dans un même ordre d'idées, la définition de Smith (2008), utilisée dans différentes recherches (p. ex. Blanton et Kaput, 2004; Tanişlı, 2011; Warren et al., 2006), conçoit la pensée fonctionnelle comme une « pensée représentationnelle qui met l'accent sur la relation entre deux ou plusieurs quantités variables et plus spécifiquement les modes de pensée qui permettent de passer de cas spécifiques vers la généralisation de la relation » (p. 143, traduction libre<sup>3</sup>). Cette définition, adaptée elle aussi davantage à des activités de généralisation, n'offre pas de précision théorique sur ce qui est entendu par « modes de pensée ». Le cadre de référence qui l'accompagne expose plutôt six étapes consécutives de ce qu'il nomme être la construction des fonctions : 1) s'engager dans une activité de nature conceptuelle; 2) identifier deux ou plusieurs quantités qui varient et porter son attention sur la relation entre ces quantités variables; 3) extraire des couples de données de cette situation et les consigner dans un registre de représentation (tabulaire, graphique ou iconique); 4) identifier les régularités de ces données; 5) coordonner ces régularités avec les actions nécessaires à la réalisation de l'activité; 6) utiliser cette coordination pour créer une représentation de la régularité de la relation (Smith, 2008). De son côté, la définition de Stölting (2008) désigne la pensée fonctionnelle comme étant une manière typique de penser lors du travail sur des dépendances fonctionnelles. L'opérationnalisation de cette définition se décline sous la forme de compétences à détecter, décrire, produire et reproduire des dépendances fonctionnelles dans toutes les représentations usuelles et sur la compétence à faire, à tester et à réviser

<sup>2</sup> « We broadly conceptualize functional thinking to incorporate building and generalizing patterns and relationships using diverse linguistic and representational tools and treating generalized relationships, of functions, that result as mathematical objects useful in their own right » (Blanton et Kaput, p. 8).

<sup>3</sup> « representational thinking that focuses on the relationship between two (or more) varying quantities, specifically the kinds of thinking that lead from specific relationships (individual incidences) to generalizations of that relationship across instances » (Smith, 2008, p. 143).

des hypothèses sur la nature de la relation et plus spécifiquement sur l'influence de changements dans une variable. Ici, c'est la modélisation de phénomènes qui est prise davantage en considération et certains concepts centraux de la pensée fonctionnelle sont nommés comme ceux de dépendance et de covariation. Toutefois, l'opérationnalisation proposée semble surtout offrir un cadre pour reconnaître certaines étapes du travail avec les relations fonctionnelles, sans pour autant offrir des balises pour comprendre ce qui anime cette activité de l'élève avec les relations fonctionnelles et donc le déploiement de sa pensée fonctionnelle. Il apparaît ainsi qu'aucune définition ne parvienne à englober l'ensemble des manières d'agir et de réfléchir de la pensée fonctionnelle qui ont le potentiel de se déployer dans la diversité des activités mettant en jeu une relation fonctionnelle.

En réponse à ceci et dans une perspective de proposer un modèle praxéologique de référence de la pensée fonctionnelle pour procéder à l'analyse de tâches de manuels scolaires, nous avions développé, en 2018, une première caractérisation de la pensée fonctionnelle qui comprenait trois composantes : la mobilisation d'un ensemble de raisonnements particuliers, un rapport aux concepts et une manière de communiquer. Cette caractérisation s'appuyait notamment sur la manière tridimensionnelle d'opérationnaliser la pensée algébrique de Squalli et al. (2020), les quelques définitions de la pensée fonctionnelle trouvées dans les recherches, dont celles citées ci-haut, et un cadre conceptuel du concept de fonction (Robert, 2018). Or, bien que pertinente pour les besoins de notre recherche de l'époque, cette caractérisation était insuffisante pour répondre à nos nouvelles questions de recherche, celles-ci nécessitant une définition permettant de mieux saisir et de documenter la pensée qui se déploie « dans » l'activité. Entre autres, pour répondre à nos objectifs de recherche doctorale, nous avions besoin d'une définition qui puisse rendre compte du mouvement de la pensée dans l'activité d'enseignement-apprentissage puisque l'un de nos objectifs était de documenter les rapports dialectiques qu'entretiennent les principales manières d'agir et de réfléchir de la pensée fonctionnelle qui se déplient dans celle-ci. Par conséquent, nous souhaitions que notre caractérisation rende possible l'étude des raisonnements qui émergent et se transforment dans l'activité et qu'elle ne se limite pas à la mobilisation de raisonnements pré-déterminés théoriquement. Dans un même ordre d'idées, nous voulions qu'elle nous permette de décrire et de comprendre la manière dont les élèves conceptualisent, comment évoluent leurs processus de conceptualisation et comment elles et ils appréhendent et mobilisent les différents concepts rencontrés dans l'activité. Finalement, il était important que notre nouvelle caractérisation permette d'aller au-delà d'une vérification de la capacité des élèves à utiliser certains registres de représentation dont ils ont préalablement appris les principales caractéristiques par un enseignement formel.

Nous souhaitions qu'elle offre l'opportunité de documenter, au fil de l'activité, les manières dont les élèves mobilisent, appréhendent et développent leur compréhension des divers registres de représentation qui apparaissent dans l'activité ou qui sont imposés par la tâche.

Enfin, la dernière raison qui a motivé notre choix de produire notre propre caractérisation de la pensée fonctionnelle est que les recherches sur cette dernière ne semblent pas s'appuyer sur un cadre théorique qui rendrait explicite ce qui est entendu par « pensée » ou encore par « pensée mathématique ». Entre autres, certaines recherches utilisent pensée fonctionnelle et raisonnement fonctionnel comme des synonymes. C'est le cas de la recherche de Stephens et al. (2017) où les expressions « pensée fonctionnelle », « pensée par correspondance » et « pensée covariationnelle » sont utilisées tout autant et dans les mêmes contextes que « raisonnement fonctionnel », « raisonnement par correspondance » et « raisonnement covariationnel ». Considérant ceci, nous avions la volonté que notre caractérisation de la pensée fonctionnelle s'appuie sur des fondements théoriques et que les références à ce que nous entendons notamment par pensée, par raisonnement et par activité soient explicites. Ce sont ces fondements que nous présentons dans la section suivante.

## 2. Les assises théoriques de notre caractérisation

Dans cette section, nous exposons d'abord les principaux concepts de la théorie de l'objectivation (TO) qui constituent les assises théoriques de notre caractérisation. Nous abordons ensuite certains piliers d'un cadre conceptuel du concept de fonction qui permet de cerner davantage ce que celle-ci recouvre. Cette mise en place théorique permettra de soutenir la présentation de notre caractérisation opératoire de la pensée fonctionnelle.

### 2.1 La théorie de l'objectivation : les concepts essentiels

La théorie de l'objectivation de Radford (2011, 2021a) s'inscrit à l'intérieur des théories éducatives socioculturelles et se dote d'une vision de l'apprentissage qui met en valeur la formation d'individus critiques, réflexifs et éthiques qui se positionnent dans des pratiques mathématiques historiquement et culturellement constituées. Dans notre quête de caractérisation de la pensée fonctionnelle, nous nous appuyons d'abord sur les définitions que nous offre la TO de la pensée mathématique, de la pensée anthropologique et de la pensée subjective.

La pensée est conçue ici comme étant non mentaliste au sens où penser n'est pas vu comme un acte privé, purement intracérébral et indépendant de tout facteur externe (Radford, 2011). Pour Radford (2011), la pensée est sociale, culturelle et sensible. Elle peut être décrite comme un mouvement dialectique entre la réalité

qui est construite historiquement et culturellement et l'individu qui s'y inscrit, la réfléchit et la modifie en fonction de ses propres interprétations et sa subjectivité. À ce titre, la pensée mathématique est définie par la TO comme un système complexe de manières d'agir et de réfléchir en accord avec des formes mathématiques de pensées culturellement et historiquement constituées (Radford, 2021a). La pensée fonctionnelle peut alors y être traitée comme étant l'une des formes de la pensée mathématique.

Plus précisément, la pensée mathématique, en son sens anthropologique, surpassé l'individu. Elle correspond à une synthèse culturellement et historiquement constituée du labeur humain et elle n'est que pure possibilité (Radford, 2011). En ce sens, la pensée fonctionnelle au sens anthropologique correspond à une entité historico-culturelle et elle existe comme une possibilité toujours latente d'agir et de réfléchir de certaines manières dans une activité invoquant une relation fonctionnelle. Cette pensée, que nous qualifions d'idéelle au sens où elle relève de l'idée et qu'elle est inatteignable, a un caractère général et elle continue d'évoluer alors que de nouvelles activités humaines l'enrichissent. De son côté, la pensée subjective correspond à l'actualisation de la pensée anthropologique dans l'activité (Radford, 2011). Elle est ce qui apparaît, la matérialisation d'une potentialité culturelle. C'est d'ailleurs par la médiation offerte par une activité qu'un individu peut rencontrer la pensée fonctionnelle historico-culturelle et que la pensée fonctionnelle subjective peut apparaître et se développer. Ainsi, comme la pensée subjective correspond à une actualisation de la pensée au sens anthropologique, nous définissons la pensée fonctionnelle subjective comme ces manières d'agir et de réfléchir qui se déplient dans des activités mettant en jeu une ou plusieurs relations fonctionnelles.

Pour bien saisir le caractère unique de la pensée subjective, il est important de rendre explicite la manière dont la TO conçoit le sujet comme un être-dans-le-monde en perpétuel développement et l'activité d'enseignement-apprentissage. D'abord, la TO conçoit le sujet, qu'il s'agisse des personnes enseignantes ou des élèves, comme une entité en perpétuel développement qui est indissociable de sa culture et du monde social (Radford, 2021a). En effet, selon Radford (2022), c'est par la relation qu'il entretient avec le monde et tout ce qui le constitue que le sujet arrive à développer sa compréhension de ce dernier. En contexte d'étude d'un phénomène d'enseignement-apprentissage, les élèves et les personnes enseignantes sont considérés comme des sujets singuliers en constante transformation qui sont aux prises avec des savoirs culturels, vivent, souffrent et apprennent avec d'autres. La pensée fonctionnelle subjective que les sujets développent de manière active est donc toujours unique puisqu'elle est empreinte de toute la singularité du sujet, de sa culture et de toutes ses expériences passées.

Enfin, l'activité et plus particulièrement l'activité d'enseignement-apprentissage, est l'unité d'analyse à partir de laquelle documenter et expliquer l'apprentissage (Radford, 2024). Plus particulièrement, l'activité d'enseignement-apprentissage est conçue comme un système dynamique et complexe qui se révèle dans le temps et l'espace et qui est mis en mouvement par l'énergie des sujets qui s'y engagent (Radford, 2019). C'est un système qui est « à la fois sensible, matériel, idéel, affectif et émotionnel que forment les individus et qui, en même temps les enveloppe et les dépasse » (Radford, 2019, p. 323). Pour bien mettre en valeur l'essence de l'activité d'enseignement-apprentissage, Radford renvoie au concept de travail conjoint (qu'il traduit de l'expression anglaise *joint labour*) qui réfère à une manière de voir l'enseignement et l'apprentissage comme une seule et même activité que la personne enseignante et les élèves mettent en œuvre ensemble et dans laquelle tous les participants s'affirment et se réalisent en tant qu'humains (Radford, 2020). Enseigner dépasse ainsi la simple transmission de savoirs puisque l'activité d'enseignement-apprentissage est imprégnée des intentions et des personnalités des sujets qui s'y impliquent, mais aussi de toutes les possibilités cognitives et matérielles qu'offrent le langage, les signes et les artefacts (Radford, 2021a). Puisque la pensée se déploie et se développe en activité, ceci signifie que la pensée fonctionnelle subjective qui émerge dans l'activité d'enseignement-apprentissage est nécessairement teintée par les spécificités de l'activité et des sujets qui s'y impliquent. Notre caractérisation vise ainsi à offrir une manière d'aborder la pensée qui permette d'en saisir toute la richesse et la dynamique, en mettant notamment en lumière les diverses prises de conscience qui l'animent.

## 2.2 Quelques éléments d'un cadre conceptuel de la fonction

La pensée fonctionnelle au sens anthropologique étant idéelle et impossible à atteindre, elle est aussi difficile à définir. Or, certains éléments issus d'une analyse épistémologique du concept de fonction et des recherches s'y étant intéressées nous permettent de poser quelques piliers théoriques pour soutenir notre caractérisation. Ici, l'idée n'est pas de proposer une grille pour pouvoir évaluer la pensée fonctionnelle en fonction de la présence ou de l'absence d'éléments théoriques prédéfinis, mais plutôt de nous assurer que notre caractérisation permette d'étudier ce qui a déjà été documenté dans les recherches.

### 2.2.1 Les raisonnements

D'entrée de jeu, nous adoptons la posture selon laquelle les raisonnements sont considérées comme des manières particulières d'agir et de réfléchir de la pensée fonctionnelle. Ainsi, cette dernière les englobe tout en ne s'y restreignant pas. Les recherches qui se sont intéressées à l'enseignement-apprentissage des fonctions, à la pensée fonctionnelle ou qui ont plus spécifiquement portées sur l'épistémologie

du concept de fonction ont permis de mettre en lumière certains raisonnements qui émergent dans le travail avec et sur les relations fonctionnelles. Nous abordons ici le raisonnement covariationnel, le raisonnement par correspondance et le raisonnement récursif qui ont notamment été identifiés par Confrey et Smith (1991).

D'abord, le raisonnement covariationnel est défini par (Carlson et al., 2002) comme une activité cognitive qui consiste à coordonner deux grandeurs qui varient en même temps en considérant la manière dont celles-ci évoluent l'une par rapport à l'autre. L'une des spécificités du raisonnement covariationnel consiste en la nécessité d'envisager la variation simultanée de deux quantités variables (Thompson et Carlson, 2017). Concrètement, le raisonnement covariationnel peut être décrit comme un processus dynamique qui se déploie par l'observation de la variation que la variable dépendante subit lors de la variation de la variable indépendante (Doorman et al., 2012). Différentes recherches soulignent d'ailleurs que le raisonnement covariationnel doit être considéré comme un processus puisqu'il se développe de manière progressive à travers le travail sur et avec une ou plusieurs relations fonctionnelles (p. ex. Carlson et al., 2002).

De son côté, le raisonnement par correspondance consiste à chercher comment obtenir une valeur de la variable dépendante à partir de la valeur correspondante de la variable indépendante. La correspondance est associée au lien interne entre les grandeurs (Passaro, 2015) et nécessite ainsi de prendre en considération la relation entre les paires correspondantes de variables indépendante et dépendante (Smith, 2008). Ce raisonnement se manifeste notamment par la recherche de la règle de correspondance.

Le troisième raisonnement identifié par Confrey et Smith (1991) est le raisonnement récursif. Ce type de raisonnement se déploie par la recherche de la régularité dans la variation d'une seule variable (Warren et Cooper, 2006), comme lorsque la régularité est recherchée dans une suite de nombre sans qu'un lien ne soit fait avec le rang des différents termes (p. ex. 1, 3, 5, 7...). Pour différentes personnes chercheuses le raisonnement récursif serait constitutif de la pensée fonctionnelle (Beatty et al., 2013; Moss et McNab, 2011; Stephens et al., 2017). Selon nous, dans le cas d'un travail explicite avec les relations fonctionnelles, il est nécessaire de s'intéresser à la relation entre les variables impliquées (par exemple entre le terme et son rang) et ne pas seulement chercher à déterminer la régularité dans la variation de la variable dépendante. Ainsi, bien que le raisonnement récursif ne soit pas négligeable pour le développement de la pensée fonctionnelle, nous le considérons plutôt comme une forme primitive de la pensée fonctionnelle puisqu'il ne prend pas appui sur la relation fonctionnelle qui lie les deux quantités variables impliquées.

### 2.2.2 Les concepts

Un second aspect essentiel à considérer dans notre caractérisation relève de la prise en considération des différents concepts qui sous-tendent celui de fonction. Mentionnons d'abord que selon Radford (2021a), un concept doit être considéré comme une entité à la fois subjective et objective, matérielle et idéale qui s'exprime dans l'activité pratique et concrète du sujet et ne devrait ainsi pas être conçu comme une reproduction mentale de l'essence d'un objet. Un concept est quelque chose qui s'applique à une gamme de situations et qui doit entrer en dialogue avec de réelles possibilités d'actions pour permettre au sujet d'agir et de réfléchir en activité (Radford, 2021b). Par ailleurs, les concepts ne doivent pas être considérés comme des entités isolées puisqu'ils s'organisent sous la forme de systèmes de concepts (Radford, 2015b). À cet effet, Benoit (2022) mentionne que « prendre conscience d'un concept, c'est en partie l'insérer progressivement en rapport dialectique avec ses autres concepts, c'est développer le réseau conceptuel global » (p. 86).

Pour Dreyfus et Eisenberg (1982), la fonction ne pourrait être un concept en soi que si l'ensemble des concepts fondamentaux qui la constituent sont pris en considération. Il est ici question notamment des concepts de variable, de variation, de covariation, de dépendance et de correspondance. Au sens anthropologique, la pensée fonctionnelle s'appuie ainsi sur un système de concepts qui comprend notamment les concepts mentionnés. Dans notre recherche doctorale, nous avons représenté ce système de concepts par la schématisation suivante (figure 1) en nous inspirant du modèle atomique.

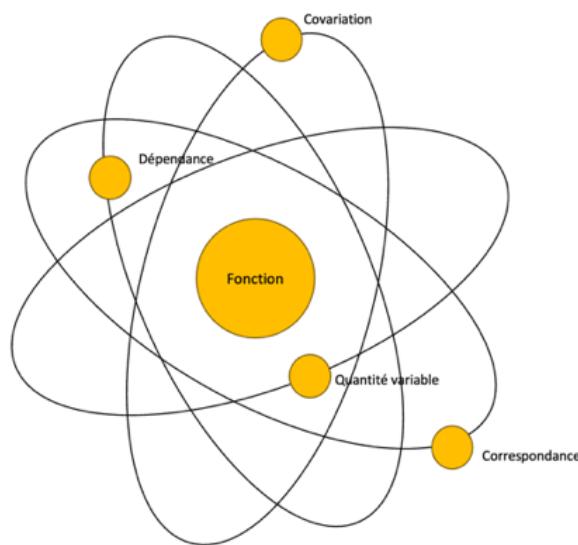


Figure 1. Schématisation du système de concepts de fonction (Robert, 2024, p. 88)

Cette représentation du système de concept de fonction permet de rendre compte (sans toutefois en révéler toutes les subtilités) de la manière dont certains concepts gravitent autour et influencent le concept de fonction. Ici, le concept de fonction est vu comme un système complexe de concepts qui sont mis en mouvement d'une manière ou d'une autre dans l'activité et qui entretiennent entre eux des liaisons complexes.

À l'image de ce que nous avons fait pour les raisonnements, voici quelques définitions des concepts inhérents à la pensée fonctionnelle. D'abord, le concept de variation renvoie à ce qui varie, au changement entre deux ou différents états. Il s'ancre dans une vision dynamique de transformation (Castillo-Garsow et al., 2013) et sa compréhension requiert d'être en mesure de se représenter une quantité pour laquelle les valeurs varient (Thompson, 2011). Le concept de covariation, quant à lui, désigne la manière dont deux (ou plusieurs) quantités varient simultanément en relation l'une avec l'autre (Confrey et Smith, 1995). C'est sur ce concept que s'appuie le raisonnement covariationnel. Dans cette même logique, la correspondance est le concept sur lequel s'appuie le raisonnement par correspondance et il réfère à la relation qui unit des paires correspondantes de variables indépendantes et dépendantes, généralement exprimée à l'aide d'une règle (Smith, 2008). Finalement, le concept de dépendance renvoie à la relation d'interdépendance entre deux ou plusieurs quantités variables qui deviennent alors quantités dépendantes et quantités indépendantes (Stephens et al., 2017).

### 2.2.3 Les représentations

Dans le cadre de l'étude du concept de fonction ou du déploiement de la pensée fonctionnelle, il est finalement nécessaire de s'intéresser aux signes et aux registres de représentations puisque selon Yavuz (2010), la compréhension des propriétés des fonctions ne serait atteignable que par la prise en considération de ses multiples représentations. Plus précisément, il est question ici des registres de représentations sémiotiques qui peuvent être mobilisés à des fins de représentation, de conversion ou de traitement de relations fonctionnelles (Duval, 1993), c'est-à-dire le registre tabulaire, le registre algébrique, le registre analytique et le registre graphique. Nous ajoutons que ces registres peuvent être institutionnels ou personnels comme les représentations spontanées (Hitt et González-Martin, 2015).

La tâche de modélisation fonctionnelle (qui sera présentée à la section 4.2 – Tâche de bouteilles) de laquelle découlent les données qui serviront à illustrer notre caractérisation de la pensée fonctionnelle s'appuie principalement sur le registre graphique. Selon Passaro et al. (2023), pour interpréter adéquatement la

représentation graphique d'une fonction, il faut savoir en discriminer les éléments signifiants pour ensuite leur donner un sens au regard du phénomène étudié. Concrètement, il faut donc s'approprier tant le graphique cartésien et ses caractéristiques (deux axes, l'un horizontal et l'autre vertical, se coupant en un point aux coordonnées  $(0, 0)$ ) (Dufour, 2019) que la représentation de la fonction qui y est représentée et ses propriétés (son domaine, son codomaine, ses signes, ses extrêums, ses points d'inflexion, etc.). En ce sens, le registre graphique joue un rôle central dans l'apprentissage du concept de fonction en rendant visibles certaines de ses propriétés et spécificités en lien avec un phénomène donné.

### 3. La pensée fonctionnelle : une caractérisation opératoire

Nous en arrivons maintenant à proposer notre caractérisation de la pensée fonctionnelle qui se déploie en activité. Pour tenter d'en rendre compte le plus fidèlement possible, nous avons fait le choix de la décliner sous une forme opératoire en proposant une caractérisation qui reflète concrètement les principales manières d'agir et de réfléchir de la pensée fonctionnelle, mais qui tient aussi compte des rapports dialectiques qui les unissent, préservant ainsi la richesse de son dynamisme et de son mouvement dans l'activité. En concordance avec ce que nous avons exposé dans les éléments de notre cadre conceptuel de la pensée fonctionnelle, nous avons cerné les trois principales manières d'agir et de réfléchir dans des activités mettant en jeu une ou plusieurs relations fonctionnelles comme étant : « raisonner », « conceptualiser » et « représenter ». La terminologie employée, sous la forme de verbes d'action et de réflexion, est un reflet de notre ancrage dans la TO et permet de mettre en valeur le déploiement de la pensée dans l'activité.

D'entrée de jeu, nous conceptualisons « raisonner » comme les manières particulières d'agir et de réfléchir qui se déploient dans un processus de production de sens et qui peuvent permettre d'aboutir ou du moins d'amorcer le chemin vers un raffinement du sens et des idées. Comme pour Passaro (2015), nous sommes d'avis que pour étudier les raisonnements qui émergent en activité, il ne faut pas se limiter au repérage d'unités pré-déterminées théoriquement puisque celles-ci ne permettent pas de rendre compte de la richesse de ces manières d'agir et de réfléchir et de leur évolution dans l'activité. Dans la littérature, il existe différentes définitions du raisonnement ou du raisonnement mathématique. Jeannotte (2015) en fait d'ailleurs une recension exhaustive dans sa thèse avant de proposer son propre modèle conceptuel. Dans ce dernier, le raisonnement mathématique est conceptualisé comme un processus commognitif à partir duquel de nouveaux énoncés mathématiques sont inférés à partir d'énoncés déjà établis. Dans un même ordre d'idées, pour Blanché (s. d), un raisonnement est « une

certaine activité de l'esprit, une opération discursive par laquelle on passe de certaines propositions posées comme prémisses à une proposition nouvelle, en vertu du lien logique qui l'attache aux premières » (s. p.). De son côté, Mason (1994) mentionne que le raisonnement consiste en un « processus dynamique qui permet de manipuler des idées de plus en plus complexes et, par là, d'étendre la compréhension » (p. 133). Dans cette définition, c'est l'idée de processus qui rejoint davantage notre perspective puisque pour nous, la production du sens se fait dans un processus dynamique et complexe de manières d'agir et de réfléchir qui peut relever autant, par exemple, de la généralisation d'idées (conjecturer, généraliser, etc.) que de la validation (justifier, prouver, etc.). Bien évidemment, raisonner englobe également les raisonnements identifiés comme étant associés à la pensée fonctionnelle (p. ex. raisonnements covariationnel et par correspondance), mais il ne s'y limite pas au sens où raisonner réfère aussi à l'émergence et au développement de tout processus de raisonnements dans l'activité.

De son côté, « conceptualiser » est défini comme des manières d'agir et de réfléchir de la pensée fonctionnelle qui renvoient notamment aux processus de rencontre, de tâtonnements et de mobilisation de concepts en activité. Selon Vygotski (1934/2019), peu importe le stade de son développement, le concept est en soi un acte complexe de la pensée; un acte de généralisation. Nous avons discuté dans la section 2.2.2 de l'organisation des concepts sous la forme de systèmes de concepts. À cet effet, Vygotski (1934/2019) mentionne que « [c]est seulement lorsqu'il est intégré dans un système que le concept peut devenir conscient et volontaire » (p. 328). Dans le cadre de la pensée fonctionnelle, ceci implique que les rencontres avec le concept de fonction sont en quelque sorte dépendantes d'une certaine familiarité avec les concepts de son système. D'ailleurs, il est aussi intéressant de souligner que les processus de conceptualisation sont sans fin. En effet, pour Radford (2021a), peu importe leur niveau de sophistication, les concepts n'arriveront jamais à rendre compte en totalité du savoir qu'ils tentent de révéler. Ainsi, la manière dont les individus entrent en contact avec les concepts doit être envisagée en mouvance : les concepts se développent à mesure que les individus qui s'en saisissent, affrontent et réfléchissent de nouvelles situations (Radford, 2021a). Conceptualiser renvoie donc encore une fois à des processus que nous pouvons appeler plus généralement des processus de conceptualisation associés à différents concepts. Ceux-ci sont empreints de cette vision des concepts et des individus comme étant intimement liés et même indissociables dans l'activité. Ce sont des processus qui contribuent chacun à leur manière au développement de la pensée fonctionnelle et plus largement de la pensée mathématique.

Finalement, « représenter » englobe les manières d’agir et de réfléchir qui réfèrent au travail sur et avec les représentations, considérées, encore une fois, comme des processus. Sachant que le langage et plus particulièrement le signe est en fait un construit social ou une entité sans laquelle il serait impossible pour une société de se développer (Radford, 1998), représenter implique d’abord et avant tout de s’inscrire dans un système de signifiés culturels qui, en mathématiques, est constitué de différents registres de représentation. Il est notamment question ici de l’appréhension et la mobilisation de différents registres de représentation. À l’image de raisonner et conceptualiser, représenter ne se limite pas à la capacité des élèves à utiliser adéquatement ou non un certain registre de représentation. Ici, représenter renvoie aux manières d’agir et de réfléchir que les élèves déplient quand elles et ils appréhendent, s’approprient et mobilisent différents registres de représentations sémiotiques dans l’activité.

Dans l’activité, « raisonner », « conceptualiser » et « représenter » coexistent et se coordonnent sans cesse. Des développements dans les processus de conceptualisation peuvent être réinvestis dans les raisonnements qui trouvent ensuite écho dans l’appréhension des registres de représentations mobilisés. À l’inverse, la prise de conscience d’une propriété du registre graphique peut enclencher un remaniement des raisonnements et alimenter les processus de conceptualisation. C’est à travers les rapports dialectiques qu’ils entretiennent et leur constante mouvance que conceptualiser, raisonner et représenter se déploient dans l’activité mathématique. Pour illustrer cette idée, nous représentons notre caractérisation de la pensée fonctionnelle par la schématisation suivante :

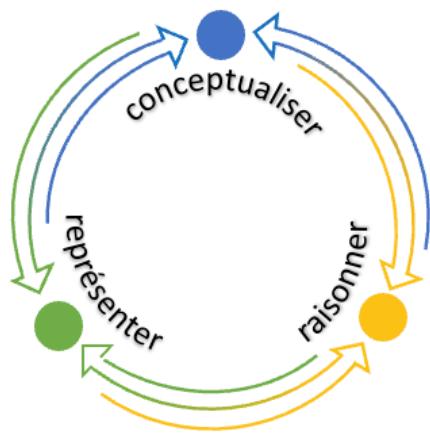


Figure 2 : Raisonner, conceptualiser, représenter et leurs rapports dialectiques

Dans la schématisation de la figure 2, les doubles flèches et les transitions entre leurs couleurs exposent les effets transformatifs des rapports dialectiques qui unissent raisonner, conceptualiser et représenter dans l’activité.

## **4. La pensée fonctionnelle qui se déploie en activité : une mise à l'épreuve de notre caractérisation**

La caractérisation avancée a été mise à l'épreuve dans le cadre de notre recherche doctorale. Pour montrer comment celle-ci peut être mobilisée pour documenter le déploiement de la pensée fonctionnelle dans l'activité et mettre en évidence la richesse des résultats qu'elle permet de faire émerger, nous présentons dans cette section des éléments méthodologiques éclairant la recherche menée, ainsi que des extraits de la thèse qui ont permis de révéler de nouvelles subtilités de la pensée fonctionnelle.

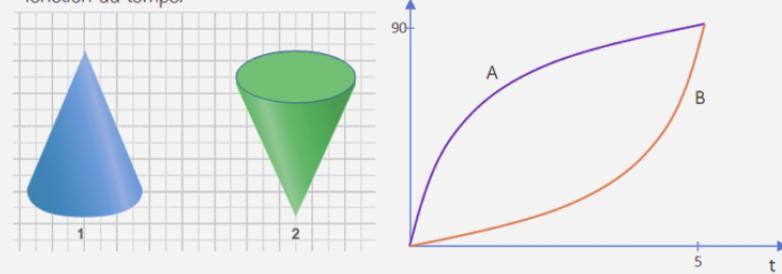
### **4.1 Éléments de méthodologie**

La majorité des recherches sur la pensée fonctionnelle ayant été menées auprès d'élèves du primaire, nous avons fait le choix de nous intéresser aux élèves du premier cycle du secondaire, à l'aube de rencontrer le concept de fonction comme objet explicite d'apprentissage. L'activité présentée dans cet article a été réalisée auprès d'un groupe de la première année du secondaire (élèves de 12 et 13 ans) et a été enregistrée en vidéo et en audio. Ces élèves avaient très peu d'expériences avec le registre graphique et n'avaient pas encore étudié en profondeur les situations de proportionnalité. Dans les pages qui suivent, nous exposons la tâche présentée aux élèves, les particularités de l'activité menée qui sont susceptibles d'avoir influencé le déploiement de la pensée fonctionnelle ainsi que la démarche adoptée pour analyser les données recueillies.

### **4.2 La tâche des bouteilles**

Inspirée notamment des travaux de Carlson (1998) et de Passaro (2015), la tâche des bouteilles avait pour objectif de provoquer le déploiement de manières d'agir et de réfléchir de la pensée fonctionnelle en contexte de modélisation fonctionnelle d'un phénomène. Ici, le phénomène en question est la modélisation du remplissage, à débit constant, de bouteilles de différentes formes. Les quantités variables impliquées y étaient la hauteur de l'eau ( $h$ ) en fonction du temps ( $t$ ). L'activité se déclinait en quatre sous-tâches. La première sous-tâche consistait en une initiation au registre de représentation graphique. Elle invitait les élèves à produire l'allure de la courbe représentant la hauteur de l'eau ( $h$ ) en fonction du temps écoulé ( $t$ ), après avoir visionné un extrait vidéo montrant le remplissage, à débit constant, d'un bécher gradué de 400 ml. Pendant le visionnement, la chercheuse réalisait la production graphique, en suivant les indications fournies par les élèves. La sous-tâche 2 reposait sur la modélisation du remplissage de bouteilles coniques (voir figure 3) et visait à ce que les élèves associent les bouteilles (1 et 2) aux fonctions qui modélisent leur remplissage (A et B). L'association devait aussi être accompagnée d'une explication.

- a) Sachant que ces bouteilles coniques sont de même hauteur et de même volume et qu'elles se remplissent en 5 minutes. En équipe, associe les bouteilles suivantes à la représentation graphique qui représente le mieux la hauteur de l'eau en fonction du temps.



1 avec \_\_\_\_\_ et donc 2 avec \_\_\_\_\_

- b) Avec ton équipe, expliquez votre choix (une seule réponse par équipe) :

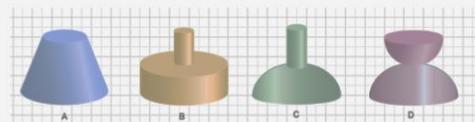
Figure 3. Tâche des bouteilles : sous-tâche 2 (Robert, 2024, p. 105)

La sous-tâche 3 (figure 4), elle, avait pour objectif de provoquer un travail sur la représentation graphique et d'amener les élèves à comparer l'allure des courbes modélisant le remplissage de quatre bouteilles de formats différents sur un même repère graphique.

#### PARTIE 3 : À VOS CRAYONS

Trace l'allure du graphique de la hauteur de l'eau ( $h$ ) en fonction du temps écoulé ( $t$ ) en imaginant le remplissage à débit constant des quatre bouteilles ci-dessous. Les bouteilles ont toutes la même hauteur (90 cm), mais elles n'ont pas le même volume. Or, en ajustant le débit de remplissage pour chacune d'elles, nous pouvons faire en sorte qu'elles se remplissent en 20 secondes.

Tu dois faire les 4 courbes dans un même repère. Attention de bien identifier tes courbes par la même lettre que la bouteille associée.



À la fin, tous les membres de l'équipe doivent s'entendre sur la représentation la plus adéquate et l'indiquer sur une des copies.



Figure 4. Tâche des bouteilles : sous-tâche 3 (Robert, 2024, p. 106)

Finalement, la quatrième sous-tâche avait pour objectif de susciter l'analyse d'une courbe illustrant le remplissage d'une bouteille inconnue, en invitant les élèves à en déduire la forme (figure 5). Concrètement, les élèves devaient interpréter la courbe tracée dans un graphique cartésien, puis dessiner une bouteille dont la modélisation pourrait correspondre à la fonction représentée.

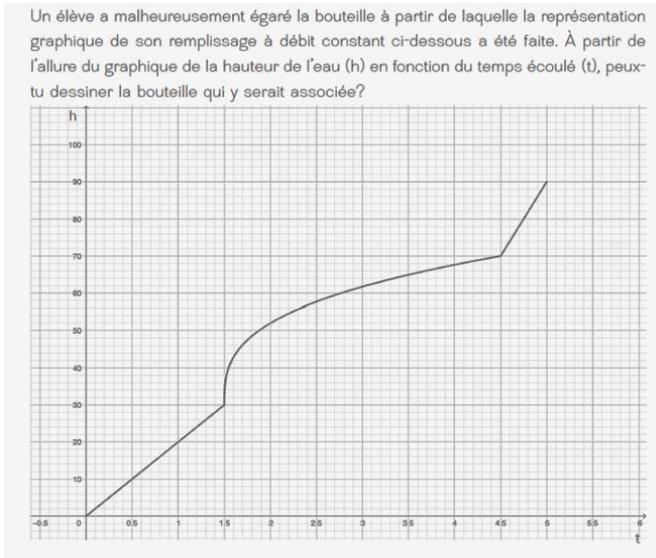


Figure 5. Tâche des bouteilles : sous-tâche 4 (Robert, 2024, p. 108)

### 4.3 Les spécificités de l'activité menée

Dans la classe, les élèves étaient regroupés en équipes de 3 à 5 élèves de manière à favoriser les échanges entre pairs et le débat des idées. Dans cette expérimentation, c'est la chercheure qui a pris la responsabilité du pilotage des tâches. L'enseignante régulière du groupe participait aux activités d'enseignement-apprentissage et elle était responsable d'aider la chercheure dans la gestion de la classe. La chercheure est ainsi partie prenante de l'activité d'enseignement-apprentissage qui s'est déployée. Une autre spécificité de l'activité menée est que les élèves étaient explicitement invités à débattre de leurs idées. Elles et ils devaient d'ailleurs s'entendre sur la meilleure réponse aux différentes questions des tâches. Cette consigne a suscité des échanges riches, car les élèves devaient débattre de chaque idée en s'appropriant le phénomène représenté. C'est d'ailleurs en cherchant la meilleure manière d'expliquer les variations de courbure que les membres des équipes ont été amenés à raffiner progressivement leurs explications, ce qui a contribué à une véritable sophistication de leur pensée, comme nous le verrons dans la section 4.5.1. Il est important de souligner que plusieurs espaces de réponse étaient présents pour chacune des sous-tâches sous la forme de « tentatives ». Cette organisation visait à encourager les élèves à être critiques envers leurs réponses et leurs représentations de manière à les améliorer d'une tentative à l'autre sans effacer leurs traces précédentes. Il s'agit pour nous d'un élément significatif de nos activités puisqu'au fil des tentatives, nous avons pu voir les élèves peaufiner leurs représentations et verbaliser des raisonnements de plus en plus sophistiqués. Une telle organisation des espaces de réponse pour les différentes sous-tâches ne nous

semble donc pas être négligeable pour le développement de la pensée fonctionnelle. Par ailleurs, la chercheure circulait dans la classe pour répondre aux différentes questions des élèves et travailler conjointement avec les membres des équipes pour les amener, par exemple, à mieux se représenter le phénomène ou à préciser leur propos. Puisque l'activité ne s'est déroulée qu'en une séance de 65 minutes, nos résultats reflètent uniquement l'évolution de la pensée fonctionnelle des élèves ayant eu lieu dans cette période. C'est la raison pour laquelle nous privilégions le terme déploiement plutôt que celui de développement.

#### **4.4 Le devis méthodologique et la démarche d'analyse des données**

Le devis méthodologique général de notre recherche doctorale s'est appuyé sur les pistes que fournissent la TO (Radford, 2015a) pour ses deux premiers moments : 1) l'anticipation et la configuration de l'activité et 2) son implantation. À ceux-ci, nous avons ajouté un troisième moment qui consistait à réaliser des 3) autoconfrontations simples ou croisées au sens de Benoit (2022) avec certaines élèves de la classe pour mettre à l'épreuve nos premières hypothèses et mieux comprendre le déploiement de la pensée fonctionnelle dans l'activité première. Pendant ces autoconfrontations, des extraits vidéos étaient présentés aux élèves de manière à ce qu'elles puissent nous décrire leur propre perception de leur activité. La recherche adoptant un devis descriptif et qualitatif, nous avons procédé à une analyse des enregistrements vidéos des activités en classe et des autoconfrontations et de leur verbatim. Pour réaliser ces analyses, nous avons développé un devis d'analyse multisémiotique (Robert, 2024) en huit étapes s'inspirant de la TO et du modèle d'analyse pour le développement des idées mathématiques de Powell et al. (2003). Guidé par le cadre théorique et nos questions de recherches, le devis permettait d'identifier des unités d'analyse correspondant à des moments pendant lesquels l'apparition ou le déploiement de la pensée fonctionnelle était rendu apparent à travers l'activité ostensible. Le codage de ces unités d'analyse a été fait à partir d'une grille déclinant les principales manières d'agir et de réfléchir de la pensée fonctionnelle. Par exemple, des codes généraux ont été rédigés pour les unités d'analyse relatives à raisonner, conceptualiser et représenter, puis des codes plus fins ont été créés au fil de l'analyse de manière à cerner davantage les subtilités associées à chacune de celles-ci. De nombreuses descriptions ont été rédigées sous forme de vignettes descriptives tout au long de l'analyse pour rendre compte de la finesse des processus ou encore du contexte historico-spatio-temporel des différentes unités d'analyse. Notons que le devis est qualifié de multisémiotique puisque la pensée est considérée dans la TO comme étant sensible puisqu'elle invoque nos sens, notre perception, notre corps et les signes. Ces différents moyens sémiotiques

d'objectivation ne sont pas considérés comme des manifestations extérieures ou des aides à la pensée : ils en sont des parties constitutives dans la saisie des objets et ils opèrent à des niveaux différents de signification, nous dévoilant la manière dont la production de sens se réalise (Radford, 2022). Dans cette perspective, l'analyse multisémotique nous a permis de prendre en considération le discours, les gestes, les traces écrites, les éléments prosodiques (intonation, volume, rythme) et les comportements non verbaux. Certains de ces éléments sont donc intégrés dans les verbatims qui parsèment l'illustration que nous faisons de notre caractérisation de la pensée fonctionnelle.

#### **4.5 Les résultats de cette mise à l'épreuve**

Grâce à certains résultats spécifiques de la thèse, nous explorons dans les sections qui suivent la portée de notre caractérisation et les subtilités de la pensée fonctionnelle qu'elle permet de révéler.

##### **4.5.1 Les inter-actions entre les systèmes de concepts**

Le premier résultat que nous voulons faire ressortir relève de l'évolution des processus de conceptualisation et de ce que nous avons nommé les inter-actions entre les systèmes de concepts (Robert, 2024). Plus précisément, comme la modélisation fonctionnelle du phénomène de remplissage des bouteilles impliquait la rencontre entre deux systèmes de concepts principaux, soit celui de capacité et celui de fonction, nous avons pu observer les influences mutuelles de leurs processus de conceptualisation. Ces inter-actions ont non seulement favorisé le développement conceptuel et le raffinement des raisonnements, mais elles ont aussi suscité des prises de conscience de propriétés du registre graphique. Pour illustrer ce résultat, voici des extraits de l'activité d'équipe dans laquelle les élèves travaillent conjointement pour trouver la meilleure explication possible à la sous-tâche 2 qui consistait à associer les cônes A et B, représentés dans le registre figural, à leur fonction respective représentée dans le registre graphique.

Dan : Le 1 et le B commencent doucement et finissent rapidement...

[...]

Coralie : On pourrait dire comme le 1 commence plus gros, ça va aller...

Élisabeth : Ça va aller [...] plus lent.

Coralie [termine son idée] : ... ça va moins courber.

Élisabeth [pointe Coralie] : Ouais, moi je dis qu'on prend ça, ça l'a plus de sens.

Coralie : Comme le 1 commence plus épais [elle place deux doigts de chaque côté de la base du cône 1], ça va être le B parce que ça courbe moins au début [elle trace en même temps la courbe avec son crayon] et après ça monte comme ça.

Dans son intervention initiale, Dan appréhende simultanément les courbes et les cônes, articulant son interprétation de la vitesse (doucement et rapidement) à travers les deux registres de représentation. L'accord du verbe « finissent » au pluriel laisse entendre qu'il perçoit le remplissage du cône et la fonction représentée graphiquement comme deux objets distincts, mais exprimant une même variation de vitesse. De son côté, Coralie établit un lien entre le diamètre du cône, qu'elle traduit d'abord par sa « grosseur » puis son « épaisseur », et la courbure de la fonction. Pour elle, un diamètre plus grand correspond à une courbure moins prononcée. Ici, le système de concept de capacité trouve une première traduction dans le registre graphique. Les échanges se poursuivent ensuite :

Élisabeth : Moi je dis qu'on écrit ça, ça marche mieux. On arrête tout, on écrit ce que Coralie a proposé.

[Dan hoche la tête et pointe Coralie en signe d'approbation.]

Malix : Mais non, [...] il faut écrire une seule réponse par équipe.

Élisabeth : Ben, c'est ça, on est une équipe.

Malix : Ben moi je dis que, [...] le 1 commence doucement, car il y a une plus grosse surface à remplir, donc ça peut prendre plus de temps au début et moins de temps à la fin, comme on peut voir avec le diagramme B.

Élisabeth [acquiesce tout de suite] : Ok ça c'est bien [fait l'emblème du pouce levé].

Dan : Moi aussi je mettrais ça.

À travers leurs échanges, nous pouvons voir les membres de l'équipe en arriver à raffiner leur sélection des quantités variables impliquées dans le phénomène. Concrètement, c'est notamment grâce au raffinement des processus de conceptualisation relatifs au concept de capacité qui se produit par une prise de conscience des différentes dimensions des bouteilles qui peuvent influencer la vitesse du remplissage qu'un raffinement conceptuel de la relation fonctionnelle impliquée a pu prendre forme.

L'évolution conceptuelle de la capacité semble aussi avoir été influencée par la reconnaissance des changements dans la courbure de la représentation graphique et par une prise de conscience progressive de certaines propriétés de celle-ci. En effet, c'est notamment en tentant de donner un sens à la variation de la courbure que les élèves en sont venus à conceptualiser la capacité comme une accumulation de surfaces. De plus, comme les élèves étaient peu familières et peu familiers avec le registre graphique, il était nécessaire de l'explorer pour se familiariser avec cette nouvelle manière de représenter des phénomènes. Par exemple, certains élèves ont pris conscience tardivement de la graduation des

axes du graphique cartésien. C'est notamment le cas de Malix qui remet en question l'une de ses tentatives de la sous-tâche 3 dans laquelle il a représenté le remplissage de la bouteille B formée d'une superposition de deux cylindres de diamètres différents (figure 6).

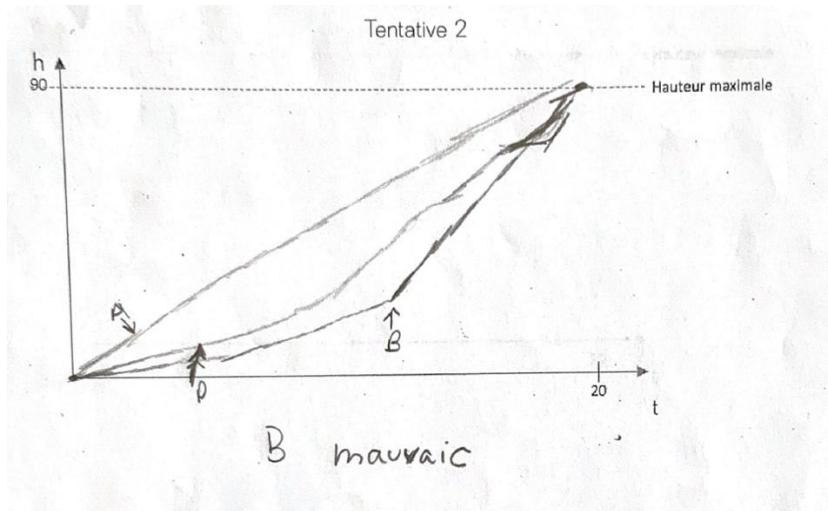


Figure 6. Tentative 2 de Malix dans la sous-tâche 3 (Robert, 2024, p. 182)

Dans sa tentative 2, Malix a représenté chaque partie du cylindre par une courbe (B) qui s'approche d'une courbe rectiligne, mais sans tenir compte de la position du moment critique où le changement de pente a lieu. Ici, son hypothèse initiale semble reposer sur une conception en deux parties de la bouteille dont les vitesses de remplissage distinctes peuvent être représentées par des courbes rectilignes de pentes différentes. L'extrait de verbatim suivant met en évidence le moment où il réalise que sa représentation graphique ne correspond pas au phénomène étudié.

Malix [s'adressant à la caméra] : [...] J'ai fait une erreur dans le B parce que ça devrait durer plus de temps [le remplissage du bas de la bouteille], mais là [ça] dure seulement 10 secondes. Mais étant donné qu'ici on va plus vite [pointe le cylindre du haut], je pense pas que ça dure 10 secondes le petit tuyau de remplissage, donc je pense que je me suis trompé, alors on va recommencer, caméra.

[Malix se remet au travail.]

Malix [quelques secondes plus tard, s'adressant toujours à la caméra] : Donc selon moi, si on fait un petit calcul mental, ça devrait durer 16 secondes pour le remplissage du début du B et à la fin, comme ça, ça va monter hyper vite, ça va prendre 4 secondes.

Malix : Ah c'est magnifique ! [inaudible] [Il montre son repère à la caméra] plus de temps avec une augmentation de la vitesse vers la fin.

Par l'étude du moment critique de cette courbe, Malix prend conscience d'une propriété essentielle du graphique cartésien : la graduation des axes et sa signification. Ceci le pousse à se questionner puisque son modèle mathématique entre en contradiction avec sa compréhension conceptuelle de la capacité. Le fait de prendre en considération le temps nécessaire pour remplir les différentes parties de la bouteille enclenche de nouveaux processus de conceptualisation, notamment par la comparaison de la capacité et du temps de remplissage des différentes parties des bouteilles. Nous pouvons donc voir ici comment les processus de conceptualisation sont intimement liés à la manière dont les élèves appréhendent les représentations.

#### 4.5.2 Des raisonnements variationnels aux raisonnements covariationnels

Un second résultat qui ressort de notre manière de rendre compte du déploiement de la pensée fonctionnelle à travers la lunette de notre caractérisation opératoire concerne les raisonnements qui ont émergé dans l'activité. Nous avons répété que pour nous, l'apprehension des raisonnements ne peut se limiter à tenter de déterminer si oui ou non les sujets mobilisent des raisonnements théoriquement prédéterminés. Grâce à ce regard plus ouvert sur le déploiement des raisonnements dans un processus de production de sens, trois types de raisonnements ont été observés : des raisonnements basés sur l'évaluation de la vitesse moyenne, des raisonnements basés sur l'évaluation de la vitesse instantanée et des raisonnements covariationnels faisant intervenir diverses quantités variables. Notons d'emblée que dans la tâche des bouteilles, en raison du dynamisme du phénomène étudié et de la place accordée au temps comme variable indépendante, la vitesse a eu une part importante à jouer dans l'étude des relations fonctionnelles en jeu. En effet, même si le débit de remplissage est constant, la vitesse à laquelle la hauteur de l'eau monte est variable et c'est souvent à cette variation de la vitesse que les élèves référaient pendant l'activité comme nous avons déjà pu l'entrevoir avec les extraits présentés jusqu'ici. Mentionnons aussi que comme l'objectif des sous-tâches n'était pas de trouver la règle ou de quantifier précisément la valeur des accroissements, les raisonnements qui se sont manifestés dans l'activité étaient de nature descriptive et qualitative.

Le premier type de raisonnement que nous avons relevé est un raisonnement variationnel basé sur l'évaluation de la vitesse moyenne. Concrètement, il consistait à évaluer et à attribuer une vitesse moyenne aux différentes parties de la bouteille ou à différentes parties des courbes dans le registre graphique. Par exemple, ce type de raisonnement est apparu quand les élèves décrivaient les vitesses moyennes associées aux différentes parties des bouteilles de la sous-tâche 4 par une description qualitative comme étant « lent », « vite », « constant » comme nous pouvons notamment le voir dans la figure 7.

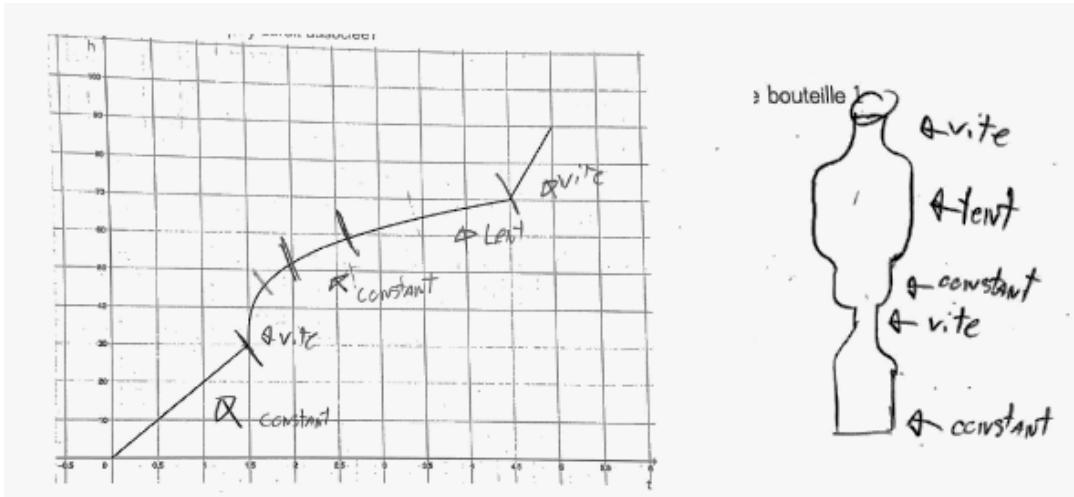


Figure 7. Traces écrites de Maël (Robert, 2024, p. 197)

Ces raisonnements basés sur l'évaluation des vitesses moyennes s'appuient sur une conceptualisation de la variation qui évolue par intervalles à l'image de ce que Castillo-Gaslow et al. (2013) appellent la *chunky image of change* et sont donc intimement lié aux processus de conceptualisation de la capacité et de la fonction. Dans l'activité, nous avons pu constater que ce type de raisonnement provoque certaines difficultés puisque la hauteur et le temps n'y sont pas traités de manière explicite. Ceci représente notamment un défi lors du passage à la représentation graphique qui met explicitement la hauteur et le temps en relation.

Le second type de raisonnement que nous avons pu observer relève des raisonnements basés sur l'évaluation de la vitesse instantanée. En comparaison avec les raisonnements qui précèdent, ceux-ci exposent la prise en considération d'une variation continue de vitesses instantanées. Dans les réponses des élèves, ces raisonnements se traduisent dans des formulations comme « ça va être progressivement plus vite » ou encore « ça commence très lentement, pis ça s'en va de plus en plus vite ». Ici, bien que la vitesse soit encore exprimée avec un référent absent ou implicite, l'idée de progression est nommée explicitement et la variation a un caractère continu. Ces raisonnements partagent des similitudes avec ce que Castillo-Gaslow et al. (2013) appellent la *smooth image of change*.

Au fil des analyses, nous avons pu dégager divers raisonnements covariationnels mettant en jeu une variété de quantités variables puisque les élèves se sont intéressés à différentes relations fonctionnelles. Des élèves se sont notamment intéressés à la covariation entre la vitesse de remplissage et les différentes

dimensions des bouteilles, ou encore la covariation entre la « surface à remplir<sup>4</sup> » et la vitesse de remplissage. Comme nous pouvions nous y attendre, la vitesse est apparue dans la grande majorité des raisonnements covariationnels, jouant tantôt le rôle de variable dépendante (la vitesse de la montée de la hauteur de l'eau dépend des dimensions de la surface à remplir) et tantôt le rôle de variable indépendante (le diamètre de la bouteille dépend de sa vitesse de remplissage).

Comme pour la conceptualisation, le travail avec le registre graphique est apparu comme étant essentiel pour provoquer une progression des raisonnements puisqu'il offre une représentation ostensible d'un phénomène dynamique. En effet, au fil des unités d'analyse, les élèves confrontaient leur interprétation du phénomène de remplissage et de la covariation, en les mettant à l'épreuve à la fois dans le registre figural et dans le registre graphique. C'est d'ailleurs ce que nous pouvons capter dans les extraits présentés dans la section précédente.

En somme, en mobilisant notre caractérisation opératoire, nous avons été en mesure de documenter la multiplicité des raisonnements qui se déploient dans l'activité. Ceci met de l'avant la richesse de ne pas se limiter au repérage de raisonnements prédéterminés théoriquement pour étudier les raisonnements qui émergent en activité (Passaro, 2015) puisqu'il ne permet pas de rendre compte de la richesse de l'évolution des manières dont les élèves appréhendent le phénomène des élèves. Par ailleurs, le fait de faire un traitement chronologique des raisonnements tout au long de l'activité permet de rendre compte de la progression des raisonnements qui peuvent être provoqués tant par une évolution conceptuelle que par une évolution dans la manière dont les élèves appréhendent les registres de représentation. C'est précisément là que réside la richesse de la prise en compte des rapports dialectiques entre raisonner, conceptualiser et représenter.

## 5. Discussion et conclusion

L'objectif principal de cet article était de proposer une caractérisation opératoire de la pensée fonctionnelle qui se déploie en activité. Concrètement, notre caractérisation propose d'appréhender celle-ci à travers ses principales manières d'agir et de réfléchir indissociables que sont raisonner, conceptualiser et représenter et des rapports dialectiques qu'elles entretiennent. Tel qu'exposé dans cet article, les définitions recensées sur la pensée fonctionnelle (p. ex. Blanton et Kaput, 2004; Smith, 2008; Stölting, 2008) demeurent partielles. En effet, elles sont

---

<sup>4</sup> Dans de tels cas, la capacité de la bouteille était conceptualisée comme une accumulation de surfaces. Bien qu'une surface ne puisse se remplir, les élèves qui ont utilisé cette quantité variable semblent conceptualiser lesdites surfaces comme ayant une certaine épaisseur, aussi petite soit-elle.

généralement adaptées pour des activités de généralisation de relations fonctionnelles ou sur la modélisation de situations et ne s'appliquent donc pas à toute activité fonctionnelle. Selon nous, la caractérisation que nous proposons permet de dépasser les frontières de la généralisation et de la modélisation fonctionnelle puisqu'elle peut s'appliquer à l'ensemble des activités mettant en jeu une relation fonctionnelle. Par ailleurs, en prenant appui sur les assises théoriques de la théorie de l'objectivation, notre caractérisation est empreinte d'une manière précise de considérer notamment la pensée, les raisonnements, la conceptualisation, l'enseignement et l'apprentissage, ce qui la distingue des définitions existantes, souvent dépourvues d'un ancrage théorique explicite.

De plus, nous avançons que notre caractérisation permet d'enrichir les définitions existantes par son opérationnalisation en trois principales manières d'agir et de réfléchir, tout en préservant le caractère dynamique de la pensée en considérant aussi les rapports dialectiques entre raisonner, conceptualiser et représenter. En effet, nous avons exposé que les recherches recensées (p. ex. Blanton et al., 2015; Stephens et al., 2017; Pinto et Cañadas, 2021) déclinent généralement leur définition par deux composantes traitées de manières distinctes : 1) les raisonnements mobilisés par les élèves (par une comparaison avec des raisonnements théoriques prédéterminés) et 2) les registres de représentation utilisés par les élèves. La conceptualisation était donc absente des recherches alors qu'elle est pour nous essentielle pour documenter finement la pensée fonctionnelle. De son côté, notre caractérisation opératoire met en évidence l'importance de la conceptualisation en la plaçant parmi l'une des trois principales manières d'agir et de réfléchir de la pensée fonctionnelle, ce qui en constitue l'un de ses principaux apports. Par ailleurs, à l'instar de Passaro (2015), nous avons réitéré que l'étude de la pensée fonctionnelle ne devrait pas se limiter au repérage d'unités prédéterminées théoriquement puisque celles-ci ne permettent pas de rendre compte de la richesse de son déploiement dans l'activité. En opérationnalisant notre caractérisation par des manières d'agir et de réfléchir qui sont formulées sous la forme de verbe d'action, nous ouvrons la porte à l'observation et à la documentation de raisonnements intermédiaires, des subtilités impliquées dans les processus de conceptualisation et des différentes manières dont les élèves appréhendent les divers registres de représentation. Ceci reflète de plus près le dynamisme et le mouvement de la pensée en activité, ce qui est généralement absent des définitions traditionnellement utilisées dans les recherches.

Ces apports de notre caractérisation se sont manifestés dans sa mise à l'épreuve et les résultats qu'elle a permis de mettre en lumière dans la thèse. En effet, en ayant la volonté de nous intéresser à la conceptualisation, nous avons pu documenter les effets des inter-actions entre les systèmes de concepts. Ce résultat fait écho aux propos de Radford (2021a) qui mentionne que les concepts, comme les sujets,

doivent être considérés comme étant en mouvement et non pas statique. Les concepts ont des frontières qui évoluent, et par cette évolution, les individus qui les incarnent changent aussi (Radford, 2021a, p. 104). Dans l'activité, et donc dans le déploiement de la pensée, les concepts inter-agissent, se transforment et influencent les manières dont les élèves appréhendent les phénomènes. Dans un cas comme celui de la tâche des bouteilles, ceci a permis de montrer notamment que les processus de conceptualisation impliqués dépassent le concept de fonction et sont indissociables de la conceptualisation des autres concepts en jeu.

Par ailleurs, la mise à l'épreuve de notre caractérisation a permis de révéler l'émergence et le déploiement de raisonnements variationnels qui pourraient constituer des précurseurs du raisonnement covariationnel. Ayant des similitudes avec les conceptions de la variation définies par Castillo-Garsow et al. (2013) (*chunky image of change* et *smooth image of change*), ces raisonnements que nous pouvons qualifier d'intermédiaires nous offrent une vitrine privilégiée sur la manière dont les élèves appréhendent la variation. En faisant un traitement chronologique des raisonnements à travers l'activité, nous avons pu documenter plus finement les différentes tentatives et hypothèses que les élèves émettent dans leur processus de production de sens. C'est notamment dans ce regard transversal que s'est révélée l'évolution des raisonnements.

Finalement, les courts extraits présentés de l'activité réalisée autour de la tâche des bouteilles illustrent les subtilités des manières dont la pensée fonctionnelle se révèle dans l'activité à travers les rapports dialectiques existants entre raisonner, conceptualiser et représenter. En ce sens, nous entrevoyons des pistes prometteuses pour la recherche par la mise à l'épreuve de notre caractérisation opératoire non seulement dans d'autres recherches sur la pensée fonctionnelle, mais également dans l'étude du déploiement d'autres formes de pensée mathématique. En effet, raisonner, conceptualiser et représenter n'étant pas rattachés spécifiquement à la pensée fonctionnelle, nous croyons que notre caractérisation apporte aussi aux réflexions sur la pensée mathématique en elle-même puisque c'est précisément la richesse et la complexité de la pensée, vue comme une totalité dynamique, que notre caractérisation vise à promouvoir.

## Remerciements

Ce travail s'inscrit dans la continuité des réflexions menées avec mon équipe de direction dans le cadre de ma recherche doctorale. Je tiens donc à les remercier chaleureusement, tout comme les membres du jury de la thèse, pour la richesse de leurs questionnements et de nos échanges tout au long de ce parcours. Cette recherche a été rendue possible grâce au soutien d'une bourse du Conseil de recherches en sciences humaines du Canada (CRSH).

## Références

- Beatty, R., Day-Mauro, M. et Morris, K. (2013). Young students' explorations of growing patterns: developing early functional thinking and awareness of structure. Dans M. Martinez et C. Superfine (dir.), *Proceedings of the 35<sup>th</sup> annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 103-110). University of Illinois.
- Ben Nejma, S. (2020). Exploitation de l'histoire dans une analyse didactique du développement de la pensée fonctionnelle au début de l'enseignement tunisien. *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, 1, 38-69.
- Benoit, D. (2022). *La clinique didactique de l'activité en classe d'accueil de mathématiques : provoquer le développement de la pensée didactique* [thèse de doctorat, Université de Sherbrooke]. Savoirs UdeS. <https://savoirs.usherbrooke.ca/handle/11143/19193>
- Blanché, R. (s. d.). Raisonnement. Dans *Encyclopædia Universalis*. <https://www.universalis-edu.com/>
- Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. et Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-Year-Olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(5), 511-558. <https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.5.0511>
- Blanton, M. et Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. Dans M. J. Høines et A. B. Fugelstad (dir.), *Proceedings of the 28<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, p. 135-142). Bergen University.
- Blanton, M. et Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. Dans J. Cai et E. Knuth (dir.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (p. 5-23). Springer.
- Carlson, M. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 7, 114-162.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. et Hsu, E. (2002). Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events: A Framework and a Study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352-378. <https://doi.org/10.2307/4149958>
- Carraher, D. W. et Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. Dans F. Lester (dir.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 669-705). Information Age Publishing.

- Castillo-Garsow, C., Johnson, H. L. et Moore, K. C. (2013). Chunky and smooth images of change. *For the Learning of Mathematics*, 33(3), 31-37.
- Comin, E. (2005). Variables et fonctions, du collège au lycée, *Petit x*, 67, 33-61.
- Confrey, J. et Smith, E. (1991). A framework for functions: Prototypes, multiple representations, and transformations. Dans R. Underhill et C. Brown (dir.), *Proceedings of the thirteenth annual meeting of the north American chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (p. 57-63). Blacksburg.
- Confrey, J., et Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(1), 66-86.
- Cooper, T. et Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalise: models, representations and theory for teaching and learning. Dans J. Cai et E. Knuth (dir.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (p. 187-214). Springer.
- Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P. et Reed, H. (2012). Tool use and the development of the function concept: from repeated calculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10(6), 1243-1267.
- Dreyfus, T., et Eisenberg, T. (1982). Intuitive functional concepts: A baseline study on intuitions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13(5), 360-380. <https://doi.org/10.2307/749011>
- Dufour, S. (2019). *Des processus de compréhension sous l'angle des représentations : un Teaching Experiment autour de la dérivée* [thèse de doctorat, Université du Québec à Montréal]. Archipel. <https://archipel.uqam.ca/12668/>
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 37-65.
- Freudenthal, H. (1983/2002). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Springer.
- Hitt, F. et González-Martín, A. S. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational Studies in Mathematics*, 88(2), 210-219. <https://doi:10.1007/s10649-014-9578-7>
- Jeannotte, D. (2015). *Raisonnement mathématique : proposition d'un modèle conceptuel pour l'apprentissage et l'enseignement au primaire et au secondaire* [thèse de doctorat, Université du Québec à Montréal]. Archipel. <https://archipel.uqam.ca/8129/>
- Mason, J. (1994). *L'esprit mathématique*. Modulo.

Moss, J. et McNab, S. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. Dans J. Cai et E. Knuth (dir.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (p. 277-301). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4\\_16](https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_16)

Moss, D. L., Boyce, S. et Lamberg, T. (2020). Representations and conceptions of variables in students' early understandings of functions. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(2), 1-14. <https://doi.org/10.29333/iejme/6257>

Passaro, V. (2015). *Analyse du raisonnement covariationnel favorisant le passage de la fonction à la dérivée et des situations qui en sollicitent le déploiement chez des élèves de 15 à 18 ans* [thèse de doctorat, Université de Montréal]. Papyrus. <https://doi.org/10.71781/5371>

Passaro, V., Saboya, M. et Venant, F. (2023). Émergence de signes personnels chez des élèves de 3<sup>e</sup> secondaire dans un contexte d'interprétation graphique avec le capteur de distance CBR. *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, 1(2), 66-105.

Pinto E. et Cañadas, M. (2021). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra, *Mathematics Education Research Journal*, 33 113-134.

Pitalis, M., Pitta-Pantazi, D. et Christou, C. (2020). Young students' functional thinking modes: the relation between recursive patterning, covariational thinking, and correspondence relations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 51(5), 631-674.

Powell, A. B., Francisco, J. M. et Maher C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *Journal of Mathematical Behavior*, 22, 405-435.

Radford, L. (1998). On culture and mind, a post-Vygotskian semiotic perspective, with and example from greek mathematical thought. Dans M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger et V. Cifarelli (dir.) *Proceedings of the 23<sup>rd</sup> Annual Meeting of the Semiotic Society of America* (p. 1-30). University of Toronto.

Radford, L. (2011). Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage: la théorie de l'objectivation. *Éléments*, 1, 53-87.

Radford, L. (2015a). Methodological aspects of the theory of objectification. *Perspectivas da Educação Matemática*, 8(18), 547-567.

Radford, L. (2015b). The epistemological foundations of the theory of objectification. Dans L. Branchetti (dir.), *Teaching and learning mathematics. Some past and current approaches to Mathematics Education* (p. 127-149). Isonomia Epistemologica.

Radford, L. (2019). Une théorie vygotskienne de l'enseignement-apprentissage : la théorie de l'objectivation. Dans J. Pilet et C. Vendeira (dir.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM 2018* (p. 314-332). Université Diderot.

Radford, L. (2020). Le concept de travail conjoint dans la théorie de l'objectivation. *Cahier du laboratoire de didactique André Revuz*, 1-19.

Radford, L. (2021a). *The theory of objectification, a Vygotskian perspective on knowing and becoming in mathematics teaching and learning*. Brill.  
<https://doi.org/10.1163/9789004459663>

Radford, L. (2021b). Davydov's concept of the concept and its dialectical materialist background. *Educational Studies in Mathematics*, 106(3), 327-342.  
<https://doi.org/10.1007/s10649-020-09959-y>

Radford, L. (2022). Corps, matière et signes dans la constitution du sens en mathématiques. Dans C. Houdement, C. Hache, et C. de Hosson (dir.), *Sémiose et apprentissages scientifiques* (p. 245-280). ISTE Editions.

Radford, L. (2024). The dialectic between knowledge, knowing, and concept in the theory of objectification. *Éducation et didactique*, 18(2), 147-159.  
<https://doi.org/10.4000/11xa9>

Robert, V. (2018). *Le développement de la pensée fonctionnelle dans les manuels scolaires du 3<sup>e</sup> cycle du primaire québécois : une analyse praxéologique* [mémoire de maîtrise, Université de Sherbrooke]. Savoirs UdeS.  
<https://savoirs.usherbrooke.ca/handle/11143/12608>

Robert, V. (2024). *La pensée fonctionnelle : une analyse multisémiotique de l'activité d'enseignement-apprentissage visant son déploiement avant l'introduction formelle du concept de fonction* [thèse de doctorat, Université de Sherbrooke]. Savoirs UdeS.  
<http://hdl.handle.net/11143/21653>

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. Dans J. Kaput, D. Carraher et M. Blanton (dir.), *Algebra in the early grades* (p. 95-132). National Council of Teachers of Mathematics.

Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes du colloque EMF2015* (p. 346-356). Université d'Alger.

Squalli, H., Larguier, M., Bronner, A. et Adihou, A. (2020). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 22(1), 36-62. <https://doi.org/10.7202/1070024ar>

Stephens, A., Fonger, N., Strachota, S., Isler, I., Blanton, M., Knuth, E. et Murphy Gardiner, A. (2017). A learning progression for elementary students' functional thinking. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal*, 19(3), 143-166. <https://doi.org/10.1080/10986065.2017.1328636>

Stölting, P. (2008). *La pensée fonctionnelle des élèves de 10 à 16 ans - Analyse comparative et études empiriques de son enseignement en France et en Allemagne* [thèse de doctorat inédite]. Université Denis Diderot et Universität Regensburg.

Tanışlı, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *Journal of Mathematical Behavior*, 30(3), 206-223. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.08.001>

Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. Dans L. Hatfield, S. Chamberlain et S. Belbase (dir.), *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education* (vol. 1, p. 33-57). WISDOMe Monographs.

Thompson, P. W., et Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. Dans J. Cai (dir.), *Compendium for research in mathematics education* (p. 421-456). National Council of Teachers of Mathematics.

Vygotski, L. S. (1934/2019), *Pensée et langage* (F. Sève, trad., 3e éd.). La Dispute.

Warren, E. et Cooper, T. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 11(1), 9-14.

Warren, E., Cooper, T. et Lamb, J. (2006). Investigating functional thinking in the elementary classroom: Foundations of early algebraic reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, 25(3), 208-223. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.09.006>

Yavuz, I. (2010). What does a graphical representation mean for students at the beginning of function teaching? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(4), 467-485. <https://doi.org/10.1080/00207390903477442>