Revue québécoise de didactique des mathématiques

volume 1 (2020)
DOI : 10.71403/tp14xe27

Table des matières

Université Laval, Québec

ISSN : 2563-6995

Éditorial : une voix de plus pour les francophonies du monde

Patricia MARCHAND
Université de Sherbrooke
patricia.marchand@usherbrooke.ca

Vincent MARTIN
Université de Sherbrooke
vincent.martin@USherbrooke.ca

Claudia CORRIVEAU
Université Laval
claudia.corriveau@fse.ulaval.ca

Izabella OLIVEIRA
Université Laval
izabella.oliveira@fse.ulaval.ca

Introduction

Avec un demi-siècle d'existence, le Groupe de didactique des mathématiques du Québec (GDM) a atteint un certain degré de maturité par sa vitalité démographique, et surtout, par la qualité et le volume de ses activités scientifiques. Dans ce contexte, un constat a émergé au sein de la communauté du GDM concernant le nombre restreint de revues scientifiques publiant en français des recherches en didactique des mathématiques, que ce soit au Québec ou dans le reste du monde francophone (Benoit et al., 2017).

Par ailleurs, la diversité des travaux développés au Québec à la fois par leurs objets, leurs visées, leurs ancrages théoriques et leurs méthodologies a été identifiée de façon récurrente (Bednarz, 2007; Lemoyne, 1996; Mura, 1994). Si une telle diversité est souhaitable pour toutes disciplines scientifiques, il est aussi nécessaire d'y retrouver une certaine cohérence. Certaines institutions, comme le GDM et son colloque annuel, ont contribué à créer un effet structurant pour la communauté québécoise. Cette revue scientifique constitue une institution qui va dans ce sens. En conséquence, en assemblée générale annuelle, les membres de la communauté du GDM ont exprimé le besoin de bonifier l'offre de canaux de diffusion pour publier en français. C'est pourquoi, en 2017, l'idée de la Revue québécoise de didactique des mathématiques (RQDM) est lancée.

https://doi.org/10.71403/8fx4p719

Un comité a été mis sur pied pour démarrer le processus de création de cette revue. Trois membres de la communauté des didacticiennes et des didacticiens des mathématiques du Québec, David Benoit, Izabella Oliveira et Vincent Martin y ont travaillé afin d'en dégager les principales orientations. Par la suite, la communauté a mandaté un comité de nomination afin de constituer le comité éditorial de cette revue. France Caron, Jacinthe Giroux, Sophie René de Cotret et Laurent Theis ont contribué à la création du comité éditorial actuel. Patricia Marchand, comme éditrice en chef, Claudia Corriveau, Izabella Oliveira, et Vincent Martin, comme éditeurs adjoints, constituent le premier comité éditorial de la RQDM.

Le comité éditorial s'est réuni à plusieurs reprises pour échanger sur la vision de cette revue, clarifier le type d'articles qui pourra y être proposé, s'entendre sur le processus d'évaluation des articles, créer un logo significatif en lien avec les visées de la revue et mettre sur pied son site Web. Par la suite, le processus d'appel d'articles pour le premier numéro a été lancé en juin 2019 et la date de réception des soumissions de textes a été fixée à la fin octobre 2019. Notre appel de proposition a été bien accueilli pour ce premier numéro de la part de la communauté des didacticiennes et des didacticiens des mathématiques du Québec et d'ailleurs.

1. Premier numéro

La revue voulant être un reflet de la communauté francophone, elle établira de nouveaux ponts entre les francophonies et se laissera bercer par les orientations et préoccupations de cette communauté.

Le premier numéro propose cinq articles, tissant des liens entre des didacticiennes et didacticiens des mathématiques du Québec, de la Tunisie et de la France. Cette première édition met ainsi en exergue la diversité des réalités, des enjeux et des productions francophones de personnes auteures de ces trois pays, mais aussi la diversité des cadres de référence et des méthodologies qu'elles exploitent pour publier leurs travaux.

Le premier article, rédigé par Doris Jeannotte, Sarah Dufour et Stéphanie Sampson traite du concept de raisonnement mathématique à travers le discours de six enseignantes du primaire. Par le biais d'entretiens individuels et collectifs, ces auteures questionnent les enseignantes sur leur conception et leur traitement du raisonnement mathématique en classe. L'analyse de ce discours s'appuie sur un cadre théorique développé antérieurement et permettant ici de mieux comprendre leur discours et, par le fait même, d'enrichir le modèle théorique.

Le deuxième article écrit par Sonia Ben Nejma expose une réflexion autour du développement de la pensée algébrique et de la pensée fonctionnelle dans le contexte spécifique de l'enseignement des mathématiques au secondaire de la Tunisie. Deux types d'analyses y sont décrits, l'une de nature historicoépistémologique et l'autre de nature institutionnelle. Ces analyses permettent à l'auteure de mettre en évidence le potentiel des praxéologies instaurées dans ce système éducatif en prenant appui sur le cadre de la théorie antropologique du didactique.

Le troisième article proposé par Jérôme Proulx revisite le concept fondateur de la didactique des mathématiques qu'est l'institutionnalisation. L'auteur entreprend une réflexion du concept d'institutionnalisation à partir des écrits de Brousseau pour l'enseignement des mathématiques en contexte, ici, de résolution de problèmes. Par le biais de l'analyse de tâches et d'extraits d'échanges de séances en classe, trois pratiques spécifiques d'institutionnalisation semblent émerger. Celles-ci permettent une réflexion des limites et des potentielles interprétations de ce concept didactique.

Le quatrième article rédigé par Thomas Rajotte, Dominic Simard, Marie-Paule Germain et Sylvain Beaupré traite d'un enjeu interpellant les personnes enseignantes, orthopédagogues, professionnelles et chercheures réalisant ou étudiant les aides fournies aux élèves en difficulté dans le milieu scolaire actuel. Ils exposent trois perspectives d'interprétation et de dépistage des difficultés d'apprentissage en mathématiques auprès des élèves du primaire. L'analyse de ces perspectives est réalisée à partir d'entretiens semi-dirigés et soutenue par l'approche anthropo-didactique.

Le cinquième et dernier article de ce premier numéro est écrit par Patrick Gibel. L'auteur propose l'étude d'une ingénierie didactique visant l'introduction de la notion de limite finie d'une suite réelle. En s'appuyant sur la théorie des situations didactiques, il présente d'abord une analyse a priori de la séquence d'enseignement réalisée. Après avoir défini les caractéristiques théoriques des « raisonnements » en classe de mathématiques, il expose les résultats d'une analyse des raisonnement produits par les élèves et par l'enseignant en classe. Cette étude lui permet de rendre compte de la pertinence et de l'adéquation de cette ingénierie didactique.

2. Perspectives

Pour l'épanouissement de cette nouvelle revue, nous vous invitons à poursuivre sur cette lancée en proposant des textes à la revue et en acceptant de participer au processus d'évaluation. Il est possible de soumettre des textes tout au long de l'année pour les numéros réguliers. En terminant, nous rappelons que la RQDM est une revue scientifique de didactique des mathématiques offerte en libre accès en ligne. En ce sens, nous vous invitons chaleureusement à la lire et à la faire lire dans votre communauté. Nous espérons ainsi que cette revue saura répondre aux besoins de la communauté, participer au rayonnement en français des travaux de recherche et qu'elle pourra cultiver les liens entre la didactique des mathématiques d'ici et d'ailleurs.

3. Remerciements

Le comité éditorial tient à remercier les membres du GDM qui ont permis la création de cette revue, en particulier les collègues qui ont fait partie du comité de création et du comité de nomination.

Nous remercions également les membres de la communauté qui se sont mobilisés pour proposer des soumissions à cette nouvelle revue ainsi que celles et ceux qui ont assumé le rôle de personnes évaluatrices pour ces soumissions. Pour assurer l'essor de la revue, nous considérons que vous, individuellement et collectivement, jouez un rôle incontournable dans ce processus d'évaluation d'une revue à caractère scientifique.

La mise en place du site Web de la revue a représenté un travail important dans le démarrage de la revue et nous tenons à remercier David Benoit qui y a consacré plusieurs heures bénévolement. Il a mis à profit son expertise en la matière, ce qui a permis au site Web de voir le jour.

Enfin, nous remercions Marianne Homier, coordonnatrice bénévole de ce premier numéro, qui a revu la mise en pages de chacun des articles et qui a ajusté le fichier-modèle au fur et à mesure du processus puisque ce dernier a subi de multiples modifications depuis sa première élaboration. La mise en page de chacun des articles a été réalisée avec rigueur et a nécessité plusieurs allers-retours entre les membres du comité éditorial, la coordonnatrice, les personnes réviseures linguistiques et les auteurs et auteures. Nous remercions cette étudiante pour son implication dans une telle tâche d'édition.

Références

Bednarz, N. (2007). Ancrage de la didactique des mathématiques au Québec : à la recherche de sens et de cohérence. Dans P. Marchand (dir.), *La didactique des mathématiques au Québec : genèse et perspectives. Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques au Québec* (p. 21-61). Université du Québec à Rimouski.

Benoit, D., Martin, V. et Oliveira, I. (2017). Perceptions des membres de la communauté du GDM concernant les canaux de diffusion leur permettant de publier des textes scientifiques en français. Dans A. Adihou, J. Giroux, A. Savard et K. Mai Huy (dir.), *Données, variabilité et tendance vers le futur. Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec* (p. 71-95), Université McGill.

Lemoyne, G. (1996). La recherche en didactique des mathématiques au Québec : rétrospectives et perspectives. *Bulletin AMQ*, *36*(3), 31-40.

Mura, R. (1994). Les didacticiens et les didacticiennes des mathématiques au Canada : un portrait de famille. Dans M. Quigley (dir.), *Actes du colloque du Groupe canadien d'étude en didactique des mathématiques* (p. 91-113). University of Regina.

Discours autour du raisonnement mathématique : ajouter la voix d'enseignantes du primaire à la conversation

Doris JEANNOTTE
Université du Québec à Montréal
jeannotte.doris@uqam.ca
Sarah DUFOUR
Université de Montréal
sarah.dufour.3@umontreal.ca
Stéphanie SAMPSON
Université du Québec à Montréal
sampson.stephanie@courrier.uqam.ca

Résumé : La personne enseignante du primaire favorise et évalue, dans sa pratique quotidienne, le développement du raisonnement mathématique [RM]. Toutefois, le concept de RM reste flou autant en recherche que dans la pratique. Par exemple, on en connait très peu sur les différentes façons dont les personnes enseignantes utilisent ce concept dont les usages viennent façonner plusieurs choix didactiques (Hill et al., 2005). Cet article a pour but de contribuer à la clarification du concept de RM en particulier dans le contexte de l'enseignement primaire par l'enrichissement d'un modèle théorique développé à partir de la littérature scientifique. Fondée sur la commognition, une analyse du discours de six enseignantes et sa mise en dialogue avec le modèle de Jeannotte (2015) a permis d'élaborer un réseau conceptuel entourant le RM. À la suite de cette analyse, le processus « expliquer » a été ajouté en tant que support au RM. Par ailleurs, les éléments partagés ou non par les enseignantes et le milieu de la recherche sont mis en lumière dans ce texte.

Mots-clés : raisonnement mathématique, enseignement primaire, commognition, discours, modèle

Revue québécoise de didactique des mathématiques, 2020, *vol 1*, p. 5-37.
https://doi.org/10.71403/ny1mxs41

Mathematical reasoning discourse: elementary teachers' voice added to the conversation

Abstract: Elementary teachers promote and evaluate the development of mathematical reasoning in their daily practices. However, the concept of mathematical reasoning remains vague both in research and in practice. For example, very little is known about the different ways in which teachers use this concept, uses that shape several of their pedagogical choices (Hill et al., 2005). This article aims to contribute to the clarification of the concept of mathematical reasoning in the context of elementary education by enriching a theoretical model developed from the scientific literature. we develop a conceptual network of RM base on a commognitive analysis of the discourse of six teachers and the model previously develop by Jeannotte (2015). Through this analysis explaining was added to the model and defined as a mathematical reasoning support process. Likewise, the elements shared or not by the teachers and the research community are highlighted.

Keywords: mathematical reasoning, elementary teaching, commognition, discourse, model

Introduction

Cet article a pour objectif de contribuer à clarifier le concept de RM pour l'enseignement et l'apprentissage au primaire. Pour ce faire, le modèle théorique de RM développé à partir d'une analyse d'écrits scientifiques de Jeannotte (2015) est mis en dialogue avec le discours d'enseignantes du primaire.

Depuis environ 30 ans, le RM est placé au premier plan dans les évaluations internationales (voir Lindquist et al., 2019; Organisation de coopération et de développement économiques [OCDE], 2006) tout comme dans les programmes de formation mathématiques des pays qui y participent (par exemple le programme de formation de l'école québécoise (PFEQ, Gouvernement du Québec, 2001), le *Common Core* aux États-Unis (National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers, 2010).

Au Québec, en particulier lors des deux dernières réformes, le RM est passé d'aucune mention spécifique (Gouvernement du Québec, 1984) à un objectif global, « raisonner » (Gouvernement du Québec, 1995) et encore, à l'une des trois compétences disciplinaires, « raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques » (Gouvernement du Québec, 2001). Le raisonnement y est alors défini comme:

> établir des relations, […] les combiner entre elles et […] les soumettre à diverses opérations pour créer de nouveaux concepts et pousser plus loin l'exercice de la pensée mathématique. (Gouvernement du Québec, 2001 p. 124)

> organiser de façon logique un enchainement de faits, d'idées ou de concepts pour arriver à une conclusion qui se veut plus fiable que si elle était le seul fait de

> l'impression ou de l'intuition[…] organiser signifie effectuer des activités mentales telles qu'abstraire, coordonner, différencier, intégrer, construire et structurer. (Gouvernement du Québec, 2001, p. 128)

Ainsi, il y a maintenant prescription, pour les personnes enseignantes, de développer et d'évaluer le RM chez les élèves.

Bien que cette importance du RM dans les politiques éducatives soit justifiée par sa relation avec la compréhension du monde, sa définition varie grandement d'un document institutionnel à l'autre. Il y est associé à une pléthore de termes tels que pensée, déduction, argumentation, preuve et démonstration (Jeannotte, 2015). Or, les évaluations internationales et les documents ministériels ont des incidences sur les manuels scolaires développés et sur la formation initiale des maitres qui doit prendre en compte les prescriptions du programme du ministère de l'Éducation (MEQ). Enfin, les personnes enseignantes doivent aussi répondre de ces exigences. Ces personnes sont effectivement amenées à créer, choisir ou encore discriminer, dans le cadre de leur pratique, des moyens de développer et d'évaluer le RM de leurs élèves. De plus, le discours des personnes enseignantes à propos du RM contingenterait plusieurs choix didactiques qu'ils effectuent (Hill et al., 2005 ; Stylianides et Ball, 2008).

Du côté de la recherche, plusieurs études se penchent sur le développement du RM en classe du primaire ou du secondaire. Le raisonnement s'inscrit alors dans le développement des processus de preuve (Balacheff, 1988), l'apprentissage de la démonstration (Cabassut, 2005; Duval, 1995), la réussite en mathématiques (Stylianides, 2005) et la résolution de problème (Lithner, 2008). Là encore, le terme RM est polysémique. Or, comme le mentionne Reid (2002), « le but de développer le RM en classe demande que la communauté de recherche clarifie ce qu'est le RM et à quoi il ressemble en contexte scolaire » (p. 7, traduction libre[1]).

Dans le but de clarifier ce qu'est le RM en classe, Jeannotte (2015; voir aussi Jeannotte et Kieran, 2017) propose un modèle du RM pour l'enseignement et l'apprentissage à l'école élaboré à partir d'une analyse de la littérature scientifique. Quoique le modèle réponde en partie à l'assertion de Reid (2002) en proposant une façon de caractériser le RM, cette caractérisation ne prend pas en compte le point de vue des personnes enseignantes. C'est donc dans le but d'enrichir le modèle théorique de Jeannotte (2015) par la prise en compte du discours d'acteurs du milieu que cette étude a été entreprise. Dans un premier temps, il s'agit de voir si le modèle théorique trouve écho chez les personnes enseignantes. Ensuite, à partir

[1] The aim of developing mathematical reasoning in classrooms calls on the research community to clarify what is mathematical reasoning and what it looks like in school contexts (Reid, 2002, p. 7).

du discours de ces dernières, le modèle sera modifié. La prise en compte du point de vue des personnes enseignantes n'est pas en opposition avec les savoirs développés par les chercheurs, mais vient plutôt rendre les modèles développés plus pertinents socialement (Guignon et Morrissette, 2006). L'idée est de construire un modèle qui tient compte de la vision de la pratique pour ensuite interpréter et analyser cette dernière.

1. Un modèle de raisonnement mathématique

Afin de développer un modèle conceptuel du RM (figure 1), Jeannotte a mis en place une recherche théorique ancrée dans une perspective commognitive (Sfard, 2008). Dans cette perspective, Sfard (2008) définit la recherche comme une forme de communication :

> La recherche, […] peut se définir comme un type de discours particulier et bien circonscrit qui produit des récits convaincants avec lesquels d'autres pratiques humaines peuvent être médiées, modifiées et progressivement améliorées quant à leur efficacité et à leur productivité. (p. 35, traduction libre[2])

Ainsi, basé sur cette idée de partir du discours existant, un corpus d'écrits scientifiques en didactique des mathématiques autour du RM contenant 145 références a été construit.

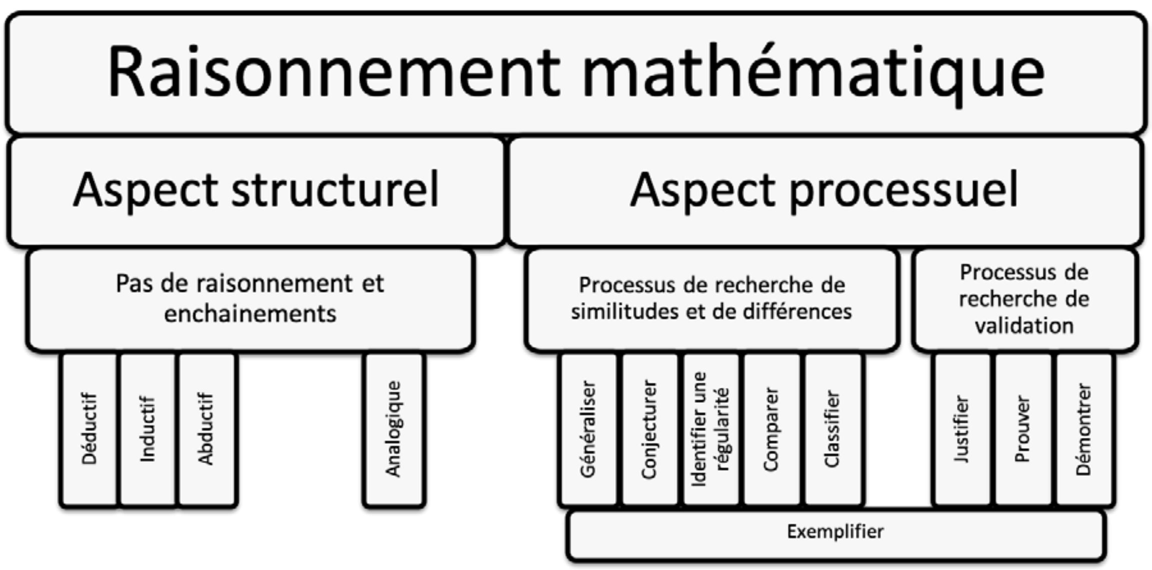


Figure 1 : Modèle de RM (Jeannotte, 2015, p. 277)

[2] Research, [...], can be defined as a particular, well-defined kind of discourse producing cogent narrative with which other human practices can be mediated, modified, and gradually improved in their effectiveness and productivity (Sfard, 2008, p. 35).

De ce fait, la littérature scientifique, en tant que réalisation des discours[3] présents dans la communauté de didacticiennes et de didacticiens des mathématiques, est apparue comme une source riche pour mieux comprendre le concept de RM et ainsi en proposer un modèle conceptuel.

De même, ce modèle s'appuie sur la prémisse que l'apprentissage débute dans la sphère publique dans un mouvement d'individualisation et de (re)communication. « C'est par la communication avec les autres qu'une personne développe des façons de vivre exclusivement humaine et devient partie intégrante de la communauté humaine. » (Sfard, 2008, p. 280, traduction libre[4]). Dans le modèle de Jeannotte (2015), le RM est alors défini comme une activité particulière de communication avec soi-même ou les autres qui permet d'inférer des énoncés mathématiques à partir d'autres énoncés mathématiques. Cette activité de communication, qui est une forme de pensée mathématique, débute lorsqu'elle se fait sur des énoncés mathématiques. Ainsi, tout raisonnement n'est pas mathématique. De plus, le RM développe le discours mathématique en extension, c'est-à-dire qu'il ajoute des énoncés à propos d'un objet ou d'un énoncé déjà inclus dans ce même discours. Les règles du discours ne changent pas, contrairement à un développement métadiscursif (autre forme de pensée). Lors du développement du premier modèle, la commognition a servi autant à fonder la méthodologie qu'à la formulation de définitions liées aux différents aspects du modèle (voir Jeannotte, 2015).

Le modèle définit le RM selon deux aspects essentiels : structurel (lié à la forme de l'activité discursive) et processuel (lié à la temporalité et à l'intention de l'activité discursive). Ces aspects sont deux façons différentes de parler de cette activité de communication. L'aspect structurel s'appuie sur la littérature qui traite de la logique mathématique. On y retrouve les structures déductives, inductives, abductives et analogiques. L'aspect processuel, pour sa part, émerge d'un corpus plus éclectique dans lesquels plusieurs verbes d'action sont utilisés en lien avec le RM. L'aspect processuel comprend huit processus de raisonnement, dont quatre processus de recherche de similitudes et de différences :

> Généraliser : ... infère un énoncé à propos d'un ensemble d'objets mathématiques, ou d'une relation entre différents objets de cet ensemble, à partir d'un ensemble plus restreint d'objets contenus dans ce premier.

[3] En commognition, le développement d'un discours (ici sur le RM) passe par l'extension d'un discours existant.

[4] It is through communication with others that a person develops uniquely human forms of life and turns into an integral part of the human community (Sfard, 2008, p. 280).

> Conjecturer : … par la recherche de similitudes et de différences, permet d'inférer un énoncé à propos d'une régularité, ou d'une relation, pour lequel la valeur épistémique qui lui est rattachée est vraisemblable, et qui a un potentiel de théorisation mathématique.
>
> Identifier une régularité : … infère un énoncé à propos d'une relation récursive entre différents objets ou relations mathématiques, par la recherche de similitudes et de différences entre ces objets ou relations mathématiques.
>
> Comparer: ... permet d'inférer, par la recherche de similitudes et de différences, un énoncé à propos d'objets et de relations mathématiques.
>
> Classifier : … par la recherche de similitude et de différences entre des objets mathématiques, permet d'inférer des énoncés à propos de classes en s'appuyant sur des propriétés ou des définitions mathématiques. (Jeannotte, 2015, p. 270)

L'aspect processuel comprend également trois processus de recherche de validation :

> Justifier : ... processus de RM qui, par la recherche de données, de permis d'inférer et de fondement mathématique, permet de modifier la valeur épistémique d'un énoncé.
>
> Prouver : … processus de RM qui, par la recherche de données, de permis d'inférer et de fondement mathématique, permet de modifier la valeur épistémique de vraisemblable à vraie d'un énoncé. Ce processus est contingenté par :
>
> 1. des énoncés acceptés par la communauté de la classe (ensemble d'énoncés acceptés) qui sont vrais (du point de vue du discours mathématique de l'expert) et disponibles sans autre justification;
> 2. une restructuration finale déductive;
> 3. des réalisations appropriées et connues ou accessibles à la classe.
>
> Démontrer : ... processus de RM qui, par la recherche de données, de permis d'inférer et de fondement mathématique, permet de modifier la valeur épistémique de vraisemblable à vraie d'un énoncé. Ce processus est contingenté par :
>
> 1. des énoncés acceptés par la communauté de la classe (ensemble d'énoncés acceptés) qui sont vrais (du point de vue du discours mathématique de l'expert) et systématisés dans une théorie mathématique;
> 2. une restructuration finale déductive;
> 3. des réalisations formalisées et acceptées par la communauté de la classe et par la communauté mathématique. (Jeannotte, 2015, p. 271-272)

2. Les personnes enseignantes et le raisonnement mathématique

À notre connaissance, quoique plusieurs recherches étudient les sens accordés à la preuve par des personnes enseignantes, peu d'études portent sur ce qu'est le RM pour des personnes enseignantes du primaire. Clarke et al. (2012) ont demandé à 104 personnes enseignantes du primaire quels termes liés au RM ils utilisaient fréquemment en classe de mathématiques parmi une liste donnée[5]. Cette liste avait été développée par les chercheurs à partir de la littérature et des programmes de formations. Seuls les termes « expliquer », « justifier », « prouver » et « raisonner » ont été choisis par plus de 50 % des personnes enseignantes.

Herbert et al. (2015) se sont intéressés aux différentes conceptions données au RM par des personnes enseignantes de l'Australie et du Canada (Vancouver). Ils ont recueilli des données à partir d'entretiens individuels auprès de 24 personnes enseignantes du primaire participant à une formation sur le développement du RM en classe. Leur analyse a permis de mettre en évidence sept catégories de conceptions que peuvent avoir les personnes enseignantes du primaire du RM :

- Penser
- Communiquer
- Résoudre des problèmes
- Valider
- Conjecturer
- Utiliser la logique pour valider
- Connecter différents aspects mathématiques

Ces catégories sont définies par : 1) le récepteur du raisonnement (soi-même et/ou les autres); 2) les buts du raisonnement (raconter, comparer/contraster, choisir, expliquer, argumenter étape par étape, articuler les raisons, justifier, poser des hypothèses, généraliser, prouver, évaluer, établir des liens); 3) quatre types de représentations (symbolique, orale, diagrammatique/écrite et gestuelle); et 4) quatre types de raisonnement (adaptatif, déductif, inductif et abductif).

On retrouve ici des similitudes avec le modèle de RM de Jeannotte (2015) et Jeannotte et Kieran (2017), à tout le moins en termes de vocabulaire. De même, certaines catégories et certaines fonctions de Herbert et al. (2015) peuvent être associées à l'aspect processuel, et les types de raisonnement, à l'aspect structurel. Par ailleurs, le modèle de Herbert et al. (2015) est un modèle qui caractérise la façon dont la compréhension individuelle de ce qu'est le RM pour un enseignant a évolué à la suite d'une formation. Or, le but du présent article n'est pas d'évaluer

---

[5] Expliquer, justifier, prouver, raisonner, analyser, évaluer, généraliser, inférer, déduire, adapter, transférer, contraster.

le développement de la compréhension à la suite d'une formation, mais davantage d'identifier ce qu'est le RM pour des enseignantes du primaire n'ayant pas reçu de formation particulière sur le RM et d'enrichir le modèle de RM développé par Jeannotte (2015) par l'ajout de la voix des personnes enseignantes.

3. La commognition

Pour Sfard (2008), les mathématiques sont un discours, c'est-à-dire un type particulier de communication constitué d'actions couplées à des (ré)actions qui seront reconnues comme mathématiques par une communauté donnée. Pour une communauté donnée, les mathématiques (le discours mathématique) seront reconnaissables par le vocabulaire, les médiateurs visuels et les règles métadiscursives utilisés, les routines mises en place et les énoncés acceptés par la communauté. Le vocabulaire, lié à ses routines d'utilisation, aura souvent un ou des sens différents selon la communauté donnée. Par exemple, le terme démontrer en mathématiques universitaires est associé à un type bien particulier de routines qui permet de déterminer le domaine de validité d'un énoncé. Or, démontrer dans le langage courant est plutôt lié à montrer; démontrer qu'on sait nager est équivalent à montrer qu'on en est capable. Les médiateurs visuels peuvent aussi prendre différentes formes. Les représentations de nombres à l'aide de chiffres, de lettres, de blocs base-dix ou encore d'un abaque en sont des exemples. Les règles métadiscursives relèvent de règles, souvent implicites, qui sont partagées par une communauté donnée. Par exemple, ce qui est considéré comme une « belle » preuve peut varier selon la communauté dans laquelle elle vit. Les routines sont des *patterns* d'actions discursives qui permettent de communiquer. Enfin, les énoncés généralement acceptés réfèrent à des énoncés reconnus comme vrais ou valides par une communauté donnée. Les définitions de diagonale au primaire et au secondaire en sont de bons exemples. Au primaire, on définit souvent la diagonale comme un segment de droite reliant deux sommets opposés. Or, au secondaire, cette définition devient inutilisable pour les polygones autres que les quadrilatères et pourrait ainsi être reformulée comme étant un segment de droite reliant deux sommets non consécutifs d'un polygone. Notons que le discours ne se restreint pas à la langue, mais englobe toute action qui communique des informations aux autres ou à soi-même, notamment les actions physiques (gestes, mouvements du corps, etc.).

Dans cette recherche, les personnes enseignantes du primaire sont considérées comme membre d'une communauté professionnelle. En tant que communauté distincte, le discours mathématique qui s'y développe diffère de celui de la communauté de didacticiennes et didacticiens des mathématiques. On n'a qu'à penser aux contraintes liées aux évaluations ministérielles du primaire que les chercheurs n'ont pas à prendre en compte. Ou encore, la visée du chercheur, de la chercheuse est habituellement de mieux comprendre les phénomènes d'enseignement-apprentissage. Celle de l'enseignante, de l'enseignant, est d'amener un maximum d'élèves à réussir. Ainsi, la prise en compte des discours à propos du RM des deux communautés dans l'élaboration d'un modèle de RM s'avère nécessaire à une meilleure communication entre ces deux communautés.

4. Méthodologie

Dans ce projet, l'enseignant, en tant que membre d'une communauté, est compétent au sens qu'il agit selon l'interprétation qu'il a de la situation (Morrissette, 2011). En réunissant plusieurs acteurs dans certaines situations, il est alors possible de dégager l'interprétation qu'ils se font de ces dernières, les routines qu'ils partagent, les règles métadiscursives qui régissent leur discours. Ces règles ne déterminent pas les interactions entre acteurs, mais les contraignent (Sfard, 2008). Ainsi, les acteurs compétents se servent de ces règles pour interagir avec les autres membres d'une communauté. De même, le modèle d'acteur compétent de Giddens (1987) met de l'avant que le langage est « constitutif des activités des acteurs, porteur des savoirs nécessaires à ces activités quotidiennes organisées, ce qui met également en relief l'intérêt d'examiner ce qu'ils peuvent en dire » (Morrissette, 2009, p. 74). C'est donc par le biais du discours des personnes enseignantes, tel que constitué à travers les interactions avec une chercheuse et d'autres collègues, que nous chercherons à dégager comment ces dernières définissent le RM. Nous chercherons à dégager plus particulièrement, le vocabulaire et les énoncés généralement acceptés qui teinte leur discours à propos du RM. Par la suite, nous pourrons mettre en relation ces éléments d'analyse avec le modèle théorique proposé par Jeannotte (2015). Pour ce faire, nous avons fait le choix d'utiliser la méthode d'entretiens individuels et collectifs.

4.1 Participantes

Six enseignantes du primaire ayant entre 2 et 16 ans d'expérience ont participé à notre étude. Toutes sont entrées en fonction après la réforme de 2001. L'enseignement par compétences incluant la compétence « Raisonner à l'aide de concepts et processus mathématiques » fait donc partie de leur pratique depuis leur début. Enseignantes de la 1re année à la 6e année du primaire, elles proviennent de cinq écoles et de cinq commissions scolaires (maintenant centres de services scolaires) différentes.

4.2 Collecte de données

La collecte de données consistait en un entretien individuel (30 à 60 minutes) et en un entretien collectif (120 minutes). Chaque entretien a été filmé ou enregistré au moyen d'une bande audio. Les entretiens ont été conduits en personne ou via la plateforme *Zoom*, en raison d'une grande distance entre l'intervieweuse et les participantes. Pour cette même raison, l'entretien collectif s'est déroulé via la plateforme *Zoom*.

4.2.1 L'entretien individuel

L'entretien individuel avait deux objectifs : entamer une réflexion autour du RM chez les participantes et expliciter leur conception du RM afin d'en faire un premier portrait. Les entretiens se sont déroulés en trois temps. D'abord, une discussion autour de leur vision du RM était lancée au moyen de l'expérience passée des participantes. L'intervieweuse demandait à chacune des participantes de raconter un moment de leur enseignement ou de présenter une tâche qu'elles font vivre à leurs élèves dans lesquelles elles jugent que les élèves sont en situation de raisonnement. Cela permettait de, premièrement, rester dans un domaine connu des participantes. Deuxièmement, cela informait sur les situations d'apprentissage que les enseignantes jugent favorables à la mise en œuvre et au développement du RM.

Ensuite, deux exemples de tâches tirées de manuels scolaires, dont une accompagnée d'une résolution orale d'élève, étaient proposés aux participantes (figure 2). Il s'agit de tâches accessibles à la fin du primaire. Les participantes étaient alors invitées à se prononcer sur la possibilité pour un élève résolvant ces tâches de mettre en place un RM ou non et de justifier sa réponse. Dans le cas d'une réponse positive, on lui demandait de décrire dans ses propres mots les raisonnements mis en œuvre.

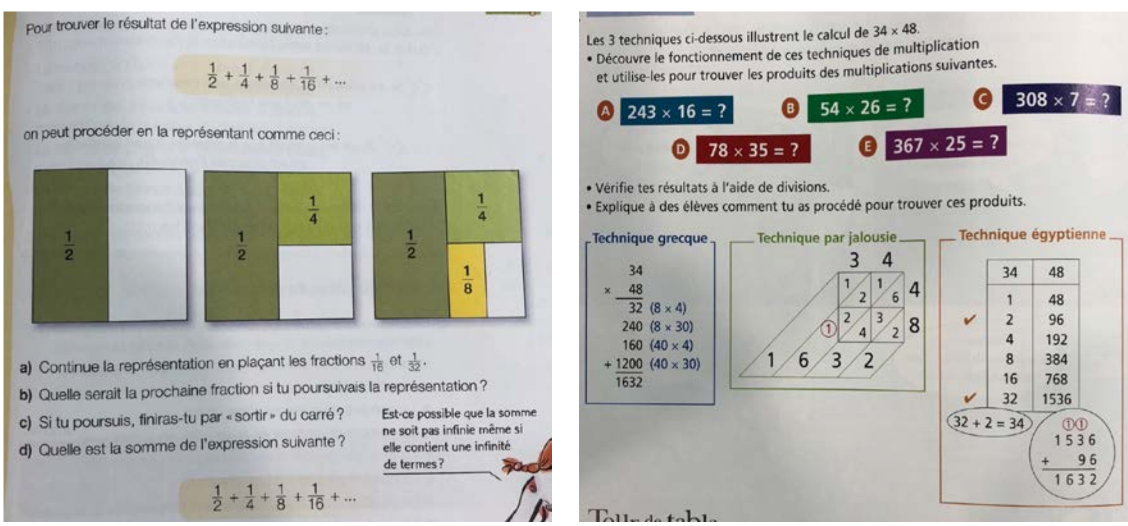


Figure 2 : Les deux tâches discutées lors de l'entretien individuel
(Coupal et Marotte, 2005, p. 145; Lacasse, 2005, p. 34)

La tâche de gauche, tirée de Coupal et Marotte (2005), met en jeu le concept de somme infinie qui n'est pas au programme du primaire. Toutefois, tous les autres concepts en jeu le sont. Du point de vue du raisonnement, l'exploration de cette tâche demande d'identifier une régularité, de généraliser, de conjecturer. La sous-tâche d) peut mener à prouver la valeur de la somme à l'aide de la représentation visuelle.

La tâche de droite, tirée de Lacasse (2005), demande d'explorer trois algorithmes non conventionnels et d'en expliquer le fonctionnement. Du point de vue du raisonnement, la tâche met l'accent sur l'utilisation d'exemples qui peuvent supporter la mise en œuvre d'autres processus. L'élève peut comparer ces exemples et ensuite généraliser. Il peut également prouver pourquoi ils fonctionnent, peu importe les nombres en jeu, quoique ce ne soit pas demandé.

Enfin, pour clore la rencontre, on demandait à la participante de définir ce qu'était, selon elle, le RM.

4.2.2 L'entretien collectif

L'objectif de l'entretien collectif était de favoriser les échanges entre praticiennes autour du RM et de faire ressortir des éléments discursifs partagés par ces dernières (Morrissette, 2009), en particulier le vocabulaire et des énoncés généralement acceptés. De même, par la remise en question de certains énoncés, les enseignantes ont pu clarifier leur pensée.

Cinq des six participantes ont participé à l'entretien collectif. La première partie de l'entretien se voulait un rappel et une mise en commun de leurs différentes façons de définir le RM. L'entretien commençait donc avec la question qui avait terminé l'entretien individuel soit : « Comment définissez-vous le RM en quelques mots ou phrases ? »

La deuxième partie était une activité autour du vocabulaire. L'activité se centrait sur le vocabulaire utilisé par les participantes pendant leur entretien individuel ainsi que certains mots utilisés dans le modèle de Jeannotte (2015). L'activité s'est déroulée en deux temps. Une première liste de vocabulaire tirée des entretiens individuels a été fournie. Il a été demandé aux enseignantes d'en faire une première carte conceptuelle. Puis, une seconde liste de mots a été ajoutée pour continuer d'enrichir la carte conceptuelle développée. La figure 3 présente les deux listes utilisées.

Liste 1	Liste 2
Justifier	Généraliser
Comprendre	Argumenter
Expliquer comment	Résoudre
Expliquer pourquoi	Conjecturer
Logique	Connaissances antérieures
Communiquer	Exemplifier
Procédures	Contexte
Analyser	Déduction
Concepts	Induction
Traces	Réfléchir
Prouver	Se questionner
	Faire des choix
	Vocabulaire

Figure 3 : Les deux listes de vocabulaire proposées aux enseignantes

La troisième partie avait pour but de voir comment les enseignantes allaient pouvoir réinvestir la carte conceptuelle et les mots qu'elle contenait pour commenter des productions d'élèves. Une solution d'élève à la tâche Charrière (figure 4) leur a été proposée. Cette solution, tirée de Jeannotte (2015), a été choisie, car elle présente un grand potentiel d'éléments à associer aux différents termes proposés plus tôt dans l'entretien[6].

2	.	7	.	: 4
milliers	centaines	dizaines	unités	

A. Trouve (et écris) toutes les façons de compléter ce nombre pour que la division par 4 ne donne pas de reste.

B. Remplace le 7 des dizaines par d'autres chiffres (1, 2, 3, ...);
- Combien y aura-t-il, dans chaque cas, de nombres divisibles par 4 ?

Essaie d'énoncer des lois.

Note : pour B, utilise une calculatrice de poche ou bien travaille avec deux autres camarades et répartissez-vous la tâche.

Figure 4 : La tâche Charrière tirée de Charrière (1991, dans Del Notaro, 2013)

[6] Pour une analyse de la tâche et de la solution en termes de RM, il est possible de consulter le chapitre 6 de Jeannotte (2015).

Enfin, l’entretien collectif s’est terminé en offrant la possibilité à chacune des participantes de revenir sur leur définition du RM.

4.3 La démarche d’analyse

Pour fin d’analyse, les vidéos et bandes audios ont été visionnées/écoutées à plusieurs reprises et des verbatims de chacune ont été transcrits (Powell et al. 2003). Plusieurs cycles de codage des entretiens individuels et de l’entretien collectif ont permis de repérer les mots-clés et les énoncés généralement acceptés. Chaque unité de sens a reçu un ou plusieurs codes. Un codage semi-émergent a été utilisé. Le vocabulaire des modèles de Jeannotte (2015) et de Herbert et al. (2015) a été utilisé pour coder, et de nouveaux codes ont été ajoutés lorsque cela s’est avéré nécessaire. Enfin, l’ensemble du corpus a été codé par deux chercheuses et une triangulation interjuge a été effectuée. Cette triangulation a permis de clarifier les interprétations des codes, d’en fusionner certains et ainsi, d’assurer une cohérence dans les codages.

5. Analyse et résultats

L’analyse et la présentation des résultats seront effectuées en deux temps. Premièrement, l’analyse des tâches apportées par les enseignantes et des discussions autour des tâches apportées par l'intervieweuse sera présentée. Cette analyse permet de mettre en lumière certaines caractéristiques du RM dans le discours des enseignantes. Deuxièmement, une synthèse des analyses des six entretiens individuels et de l’entretien collectif permet de proposer une version modifiée du modèle de Jeannotte (2015).

5.1 Les tâches apportées par les enseignantes

Deux des enseignantes n’ont pas apporté d’énoncé spécifique. Agathe, enseignante de 1re année, fait référence à l’exploration des nombres pairs et impairs à l’aide de matériel de manipulation (construction de tours avec des blocs emboitables). Dans cette exploration, elle s’attend à ce que les élèves soient en mesure de justifier qu’un nombre est pair ou impair à partir du fait qu’on peut partager le nombre en deux groupes égaux ou non (deux tours de blocs égaux ou non) et non parce que le nombre se termine par 0, 2, 4, 6, ou 8. Ceci peut être lié à la définition du processus prouver. En effet, Agathe cherche à développer l’utilisation de raisons mathématiques pour justifier la parité d’un nombre. Pour cette enseignante, ses élèves développent un RM, car, dans d’autres situations, ils arrivent à expliquer la parité d’un nombre à l’aide de cette idée de partage et non en faisant référence à un truc (le dernier chiffre qui compose le nombre).

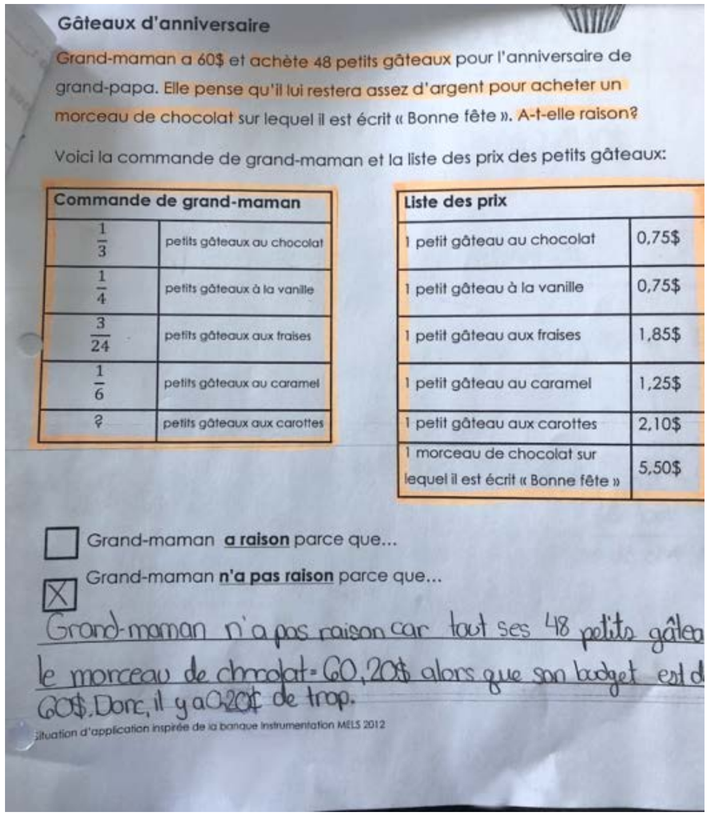
> Agathe : … Hey! 19, ça, c'est un nombre impair. Oh yeah! c'est vrai, t'as raison. Comment tu le sais? Bien là, les enfants me disaient : « Ben je l'sais parce que j'sais

> que 9+9, ça fait 18. Pis là, j'en rajoute un autre, fak c'est pas deux tours égales. » « Excellent! » C'est ce genre de trucs-là qu'ils sont capables de faire avec ça, le type de raisonnement qu'ils sont capables de faire avec ça.

Alice, aussi enseignante de 1re année, décrit une activité qu'elle utilise pour introduire le concept de fraction où les élèves doivent prendre des photos d'objets de la vie courante puis, par le biais d'une plateforme numérique, séparer l'objet en parties égales (en demi, en quart, etc.). Par la suite, elle demande aux élèves si l'objet est bien séparé en parties égales (équivalentes), s'il y a d'autres façons de le séparer en parties égales. Alice considère que, dans cette tâche, les élèves développent un raisonnement précis portant sur le sens de la fraction comme partition d'un tout. Tout comme dans le cas d'Agathe, justifier à l'aide de raisons mathématiques est à développer chez les élèves. Dans cette activité, on retrouve aussi les processus de recherche de similitudes et de différences, soit comparer et classifier ces objets selon leur partitionnement. Durant la discussion, Alice soulève la différence entre raisonner et résoudre. Elle précise que l'activité dont elle parle n'est pas une situation de résolution. Alice voit le développement du raisonnement, dans le cas de cette tâche, comme une construction de sens d'un concept (« se bâtir une boite à outils ») qu'on utilise éventuellement en résolution de problème.

Deux enseignantes ont partagé des situations d'application. Aurélie, enseignante de 5e année, a apporté une situation d'application[7] inspirée d'une banque élaborée par le ministère de l'Éducation, des Loisirs et du Sport (MELS) (figure 5). Dans cette situation, l'élève doit déterminer si grand-maman a suffisamment d'argent pour acheter tout ce qu'il y a sur sa liste d'épicerie. En termes de RM, l'élève doit calculer le cout total des achats, en faisant appel à ses connaissances (sens et opérations sur les fractions et les nombres décimaux), puis le comparer avec le montant du budget de grand-maman. Il, elle justifie ainsi si grand-maman peut ou non acheter le morceau de chocolat.

[7] Les situations d'application sont des situations d'évaluation apprentissage liées à la compétence raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques.



Gâteaux d'anniversaire

Grand-maman a 60$ et achète 48 petits gâteaux pour l'anniversaire de grand-papa. Elle pense qu'il lui restera assez d'argent pour acheter un morceau de chocolat sur lequel il est écrit « Bonne fête ». A-t-elle raison?

Voici la commande de grand-maman et la liste des prix des petits gâteaux:

Commande de grand-maman	
$\frac{1}{3}$	petits gâteaux au chocolat
$\frac{1}{4}$	petits gâteaux à la vanille
$\frac{3}{24}$	petits gâteaux aux fraises
$\frac{1}{6}$	petits gâteaux au caramel
?	petits gâteaux aux carottes

Liste des prix	
1 petit gâteau au chocolat	0,75$
1 petit gâteau à la vanille	0,75$
1 petit gâteau aux fraises	1,85$
1 petit gâteau au caramel	1,25$
1 petit gâteau aux carottes	2,10$
1 morceau de chocolat sur lequel il est écrit « Bonne fête »	5,50$

☐ Grand-maman **a raison** parce que...

☒ Grand-maman **n'a pas raison** parce que...

Grand-maman n'a pas raison car tout ses 48 petits gâtea
le morceau de chocolat = 60,20$ alors que son budget est d
60$. Donc, il y a 0,20¢ de trop.

Situation d'application inspirée de la banque Instrumentation MELS 2012

Figure 5 : Tâche apportée par Aurélie

Aurélie entame la discussion en parlant d'une formation reçue autour de l'évaluation de la compétence 2, « raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques ». Elle fait référence à une grille d'évaluation reçue durant cette formation pour présenter et parler de la tâche. Elle parle des trois critères : analyser, appliquer et justifier. Elle utilise donc un vocabulaire lié aux programmes et surtout aux documents ministériels destinés aux personnes enseignantes, tels que situation de validation, situation d'action, connaissances, concepts. La tâche Gâteaux d'anniversaire est une situation de validation où l'élève doit justifier sa réponse. Selon les critères d'évaluation, Aurélie précise qu'il est important de développer l'explicitation de la démarche chez les élèves afin que leur réponse soit complète. En effet, le critère 3, justifier, serait lié à la réponse et aux traces. Les traces sont la démarche, sur laquelle elle insiste beaucoup:

> Aurélie : Oui, puis on voit … qu'est-ce qui s'est passé dans sa tête, ce n'est pas juste … un quart égale quoi.

Gisèle, aussi enseignante de 5e année, propose une situation d'application qu'elle a récemment faite avec ses élèves et dont elle a fait l'évaluation (figure 6). Dans la tâche « Randonnée en vélo », l'élève doit tracer deux trajets sur un plan cartésien à partir de coordonnées, calculer la distance parcourue et la durée de chacun des trajets, puis déterminer le trajet le plus long. En termes de RM, cette situation amène l'élève à comparer les temps pour justifier sa réponse. Elle fait également référence à la grille d'évaluation proposée par le ministère pour l'évaluation de la compétence 2. En parlant d'une solution d'élève, elle aborde l'idée d'analyser adéquatement la situation, de valider la cohérence de la réponse et des choix d'opérations en contexte.

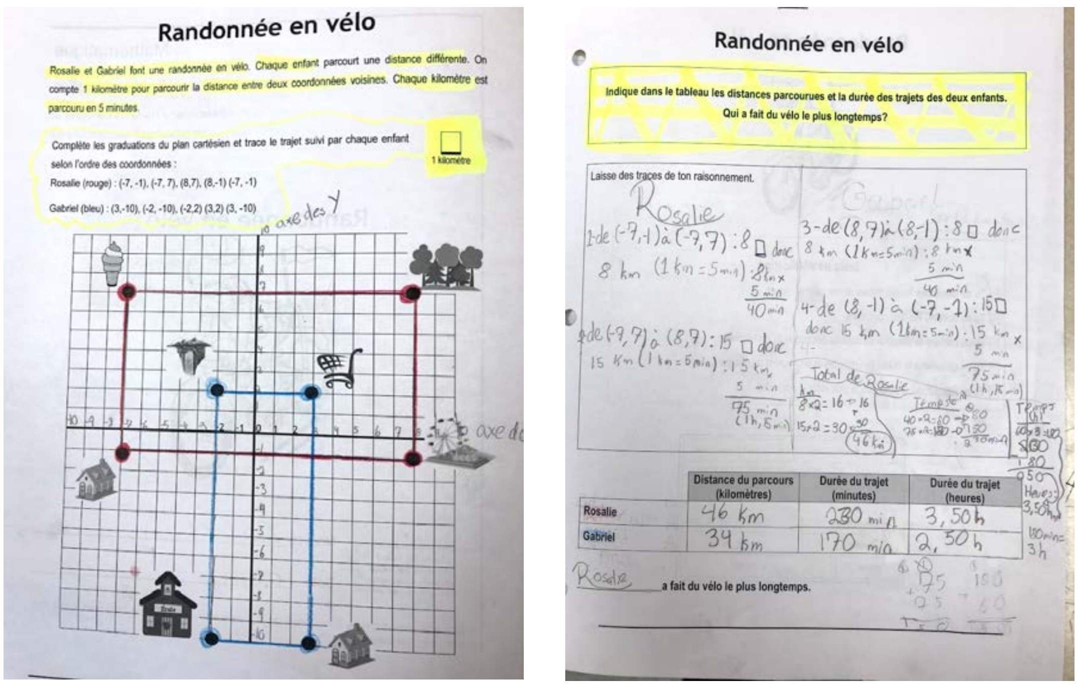


Figure 6: Tâche apportée par Gisèle

Jeanne, enseignante en 6e année, a apporté une énigme tirée du site de la Semaine des maths (Université Laval, 2014) (figure 7). Il s'agit d'une tâche qui nécessite très peu de calculs et où l'élève doit se construire des combinaisons de personnes qui traversent le pont (exemplifier), en calculer la durée de traversée puis les comparer afin d'optimiser ce temps de traversée.

Jeanne insiste sur la démarche que les élèves doivent mettre en place et, pour elle, c'est cette démarche qui est au cœur du raisonnement de cette tâche. Pour être en mesure de résoudre ce problème, l'élève doit s'organiser et, souvent, modifier sa première façon d'approcher le problème. Pour elle, raisonner mathématiquement se fait dès qu'on résout un problème, qu'on explique sa démarche; ceci permet de comprendre les mathématiques que l'on fait.

Quatre personnes doivent traverser un pont le plus rapidement possible. Le pont ne peut supporter que le poids de deux personnes à la fois.

C'est la nuit et il est impossible de traverser le pont sans torche. Or les quatre personnes ne disposent que d'une seule torche. Chaque personne a une vitesse maximale. Albert peut traverser le pont en une minute. Berthe peut le faire en deux minutes. Carole a besoin de cinq minutes. Diane traverse le pont en dix minutes. Cela signifie, par exemple, que si Diane et Albert traversent le pont ensemble, cela leur prendra dix minutes. Combien de temps est nécessaire, au minimum, pour faire traverser tout le monde?

Figure 7 : La traversée du pont

Martine, enseignante de 1re année, partage des traces d'élèves de 1re année qui additionnent 58 + 27 (figure 8). Dans la solution de gauche, l'élève avait écrit 80 sans aucune autre trace. L'écriture de la somme des « chiffres » est venue à la suite d'une demande de Martine. La seconde solution utilise des représentations de boite à dix, matériel utilisé dans sa classe pour travailler les opérations.

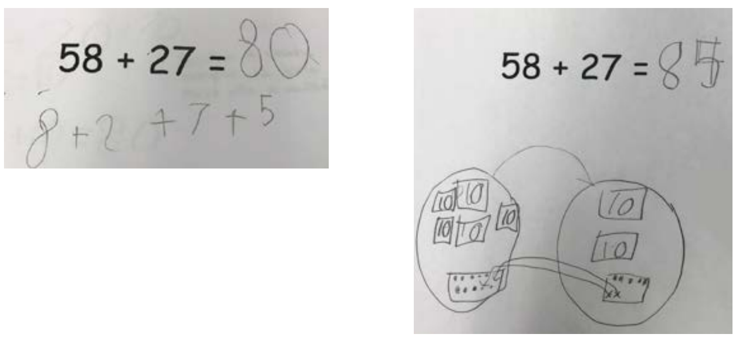


Figure 8 : Deux solutions de la tâche apportée par Martine

Martine nous parle alors de l'importance des traces laissées par les élèves pour montrer leur raisonnement. Son rôle est d'amener les élèves à communiquer leur raisonnement de façon claire. Ainsi, ce raisonnement pourra se faire avec du matériel de manipulation, des schémas, des symboles, à l'oral, à l'écrit, etc.

À l'exception de Jeanne, toutes les activités apportées ou discutées visent directement un concept bien précis. De même, les processus de RM potentiellement mis en place par les élèves sont essentiellement liés à comparer ou justifier. Ainsi, les activités sont très différentes de celles apportées par l'intervieweuse.

5.2 Discours autour des tâches apportées par l'intervieweuse

Pour ces trois tâches (figures 2 et 4), on remarque que les enseignantes ont de la difficulté à trouver des mots pour décrire les RM potentiels ou actuels des élèves autrement qu'en termes des concepts mathématiques en jeu.

Tout comme pour les tâches apportées par les enseignantes, les discussions autour des deux tâches apportées par l'intervieweuse en entretien individuel (figure 2) mettent de l'avant la place des concepts dans le discours des enseignantes à propos du RM. Selon elles, les concepts de fractions et d'infini ainsi que le sens des opérations sur les fractions sont essentiels pour mener à bien le RM nécessaire pour répondre à la tâche de la somme infinie. De même, elles relèvent comment l'analyse des algorithmes, en faisant appel aux valeurs de position et aux propriétés des opérations, peut favoriser la compréhension de ces algorithmes.

Pour la tâche de la somme infinie, elles font la différence entre « être en mesure de dire que la somme vaut 1 », ce qu'on peut lier à conjecturer, et « expliquer que la somme vaut 1 en faisant appel aux raisons mathématiques », ce qu'on peut lier aux processus de validation. En particulier, la représentation visuelle joue un rôle essentiel, selon elles, pour que l'élève soit en mesure de justifier sa conjecture. De même, elles y voient un potentiel pour l'élève de continuer la schématisation (exemplifier), d'identifier une régularité et d'extrapoler (au sens de généraliser).

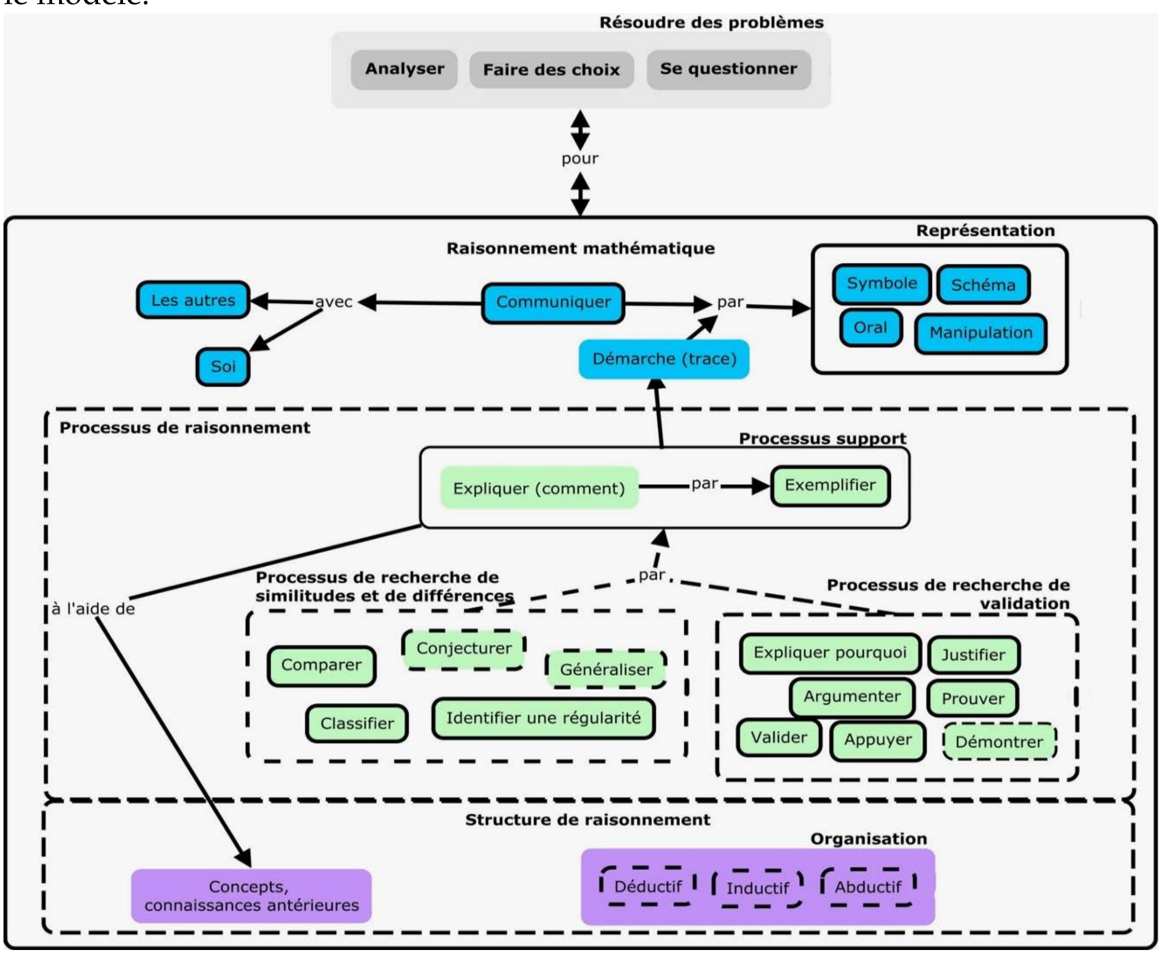
Pour ce qui est des algorithmes, certaines enseignantes soulignent que la formulation de la tâche peut mener à l'application d'une technique dépourvue de raisonnement. Toutefois, en modifiant la tâche, elles y voient un potentiel pour mieux comprendre l'algorithme en expliquant comment et pourquoi il fonctionne à partir d'arguments mathématiques.

L'analyse de la discussion autour de la tâche Charrière (figure 4) met en lumière deux éléments importants par rapport au discours des enseignantes sur le RM. Premièrement, cette tâche semble très différente de celles utilisées par les enseignantes dans leur classe. En effet, les enseignantes sont surprises qu'une élève de 4e année puisse résoudre cette tâche et ont de la difficulté à trouver les mots pour décrire la démarche de l'élève. Deuxièmement, la discussion autour de la copie d'élève leur a permis de réinvestir certains termes qui leur étaient moins familiers, tels que généraliser, conjecturer et exemplifier.

5.3 Le raisonnement mathématique : un complexe de sens

En somme, chez les six enseignantes, quoique l'aspect structurel est abordé, c'est l'aspect processuel qui est davantage mis de l'avant par le vocabulaire qu'elles emploient, et ce, autant en entretien individuel que collectif. L'entretien collectif a permis de confirmer l'association du RM à plusieurs verbes tels que justifier, identifier, extrapoler, appliquer, expliquer, prouver. De même, communiquer avec soi-même ou avec les autres est central au RM. Cette communication se fait par le biais de différentes représentations dont, entre autres, la manipulation. Enfin, comme le souligne Jeanne, raisonner en mathématiques est fortement lié à donner du sens et va au-delà de la procédure. Ainsi, cette analyse du discours des enseignantes a permis de modifier le modèle de RM présenté à la figure 1.

En particulier, quatre groupes de termes ont été mis en évidence (figure 9). Le premier, en gris, lié à la résolution de problème, est considéré comme périphérique au RM : se questionner, faire des choix et analyser. Le second, en bleu, définit le RM en tant qu'activité de communication et inclut les troisième (en vert) et quatrième (en violet) groupes, à savoir, les aspects processuel et structurel du RM. Les termes dans les bulles au contour continu, peu importe leur couleur, font partie du discours des enseignantes et du modèle de Jeannotte. Les termes dans les bulles au contour pointillé proviennent du modèle théorique et ont été peu ou pas repris par les enseignantes et parfois avec des usages différents. Enfin, les termes dans les bulles sans contour proviennent du discours des enseignantes et enrichissent le modèle.



Légende : bulles sans contour: apports des enseignantes ; bulles pointillées : apports du modèle ; bulles au contour continu : modèle et enseignantes.

Figure 9 : Modèle de RM modifié à la suite de l'analyse du discours des enseignantes

5.4 Les termes périphériques

Les termes en gris à l'extérieur du schéma n'ont pas été intégrés au modèle de RM. Quoique ces termes soient utilisés par les enseignantes, deux raisons nous amènent à les laisser en périphérie. Premièrement, on cherche à opérationnaliser les définitions des termes qui sont inclus directement dans le modèle, ce qui n'a pas été possible de faire jusqu'à maintenant pour ces termes. Deuxièmement, cette difficulté peut venir du lien entre ces termes et la résolution de problèmes. Selon delMas (2004), résolution de problème et RM sont souvent utilisés comme synonyme, ce qui rend la conceptualisation du RM difficile. Dans le discours des enseignantes comme dans le PFEQ (Gouvernement du Québec, 2001), le verbe résoudre se trouve lié à la modalité pédagogique et à la compétence « Résoudre des situations problèmes ». Les situations d'apprentissage et d'évaluation (SAE) de cette compétence se nomment des « situations problèmes ». Ces situations problèmes se caractérisent entre autres par leur complexité. « La complexité se traduit (dans l'exemple précédent) par différents choix sous-tendant la construction de la situation : plusieurs concepts en jeu, plusieurs données, plusieurs contraintes, divers modes de représentation, un énoncé très long » (Lajoie et Bednarz, 2016, p. 15). Les enseignantes se servent ainsi de ce critère pour différencier les situations associées à la compétence 1 (résoudre des situations problèmes) de celles associées à la compétence 2 (raisonner à l'aide de concepts et de processus). Or, la résolution de problème comme la résolution de situation problème se fait à l'aide d'un RM :

> Martine : … le lien que je fais avec résoudre et raisonner, c'est que... En fait, une SAE, ça devrait être complexe. Donc, c'est sûr que chaque enfant peut avoir une réponse différente… Dans le fond, le raisonner pour moi, c'est les connaissances, c'est les notions. C'est les savoir-faire. Puis, au niveau du résoudre, il va chercher ses connaissances pour les mettre en application dans une situation qui est plus complexe.

Selon Lajoie et Bednarz (2016), le concept de situation problème est aussi lié à l'idée de faire des choix, ce qui est souligné par Agathe : « Parce que dans un résoudre, on peut... Je te présente une situation, c'est à toi de juger, d'après ce qu'on a vu, quels outils tu dois utiliser ».

Or, faire des choix est un des critères d'évaluation de la compétence 2 : « Choix de concepts et de processus mathématiques appropriés à la situation d'application » (Gouvernement du Québec, 2001, p. 130). Ces critères se retrouvent liés à l'activité de raisonner en mathématique, comme on le constate chez Gisèle : « Une fois que j'ai compris, j'ai analysé le problème, là je dois faire des choix dans ce que je connais et ce que je pense qui va m'être utile pour le raisonner »[8].

Durant les entretiens individuels, le terme « analyser » a été introduit par trois enseignantes en lien avec une grille d'évaluation de la compétence 2. « Dans le fond, l'analyse c'est : Est-ce qu'on a choisi les bons concepts et processus? » (Gisèle). C'est à travers les traces de l'élève que l'enseignant évalue s'il, si elle a bien analysé. L'entretien collectif a permis de revenir sur ce terme. Pour Gisèle, lorsque des élèves résolvent des problèmes, ils, elles éprouvent de la difficulté à les analyser :

> Gisèle : je trouve qu'en raisonnement mathématique, les élèves se lancent trop rapidement avant de, au lieu d'analyser la situation, de prendre le temps de réfléchir, de faire des liens avec qu'est-ce qu'ils connaissent déjà.... Donc, se questionner sur qu'est-ce qu'on cherche réellement à savoir.

Analyser (ou réfléchir) permet ici de mettre l'accent sur l'idée de faire des liens, de se questionner, donc de contraster l'application d'une procédure apprise par cœur sans qu'il y ait de sens ou de compréhension associée et la mise en œuvre d'un RM, d'une activité raisonnée.

Il est possible de faire un parallèle entre la grille d'évaluation de la compétence 2 et le modèle de résolution de problème de Pólya (1965). Ce modèle propose de : 1) comprendre le problème (qui s'apparente à analyser) ; 2) élaborer un plan (ou faire des choix) ; 3) mettre le plan en œuvre (ou appliquer) ; et enfin 4) faire une vérification (ou justifier). C'est ce qu'Agathe ressent en lien avec la compétence raisonner :

> Agathe : Écoute. Je vais le dire, on parle beaucoup, beaucoup de résoudre à l'aide de situations complexes. C'est vraiment ça la grande préoccupation des enseignants présentement. J'ai l'impression que le raisonner, bien c'est l'ancien… c'est l'ancien résoudre de, mettons, d'il y a 15 ou 20 ans là.

Les critères d'évaluation de la compétence « raisonner à l'aide de concepts et de processus » prennent donc une place importante dans le discours sur le RM, contribuant à faire paraitre « résoudre des problèmes » et « raisonner en mathématiques » comme synonymes.

Quoique faire des choix, analyser et se questionner sont liés au RM dans le discours des enseignantes, nous jugeons qu'il s'agit de termes génériques et trop

[8] Notons que ce critère a été fusionné au critère « analyse adéquate de la situation » dans le cadre d'évaluation (Gouvernement du Québec, 2011).

liés à résoudre des problèmes pour être inclus dans le modèle de RM. Ainsi, ils sont considérés comme périphériques.

5.5 Le RM en tant qu'activité de communication

Deuxièmement (en bleu), le RM est vu comme une activité de communication avec soi. Les enseignantes utilisent des expressions comme « dans sa tête », « mentalement », « se convaincre ». Par ailleurs, la communication avec l'autre (surtout avec l'enseignant) est tout autant, sinon davantage, soulignée. Jeanne dit que le RM « c'est la manière que l'enfant va arriver à nous communiquer ce qu'il comprend de ce qui est demandé ». Martine dit aussi : « Donc, en gros, pour moi, c'est vraiment d'être capable d'expliquer le chemin pour arriver à une réponse ».

Ainsi, du point de vue du modèle de Jeannotte, le RM est défini comme une activité de communication à partir des fondements commognitifs. Du point de vue des personnes enseignantes, c'est la pratique enseignante qui mène à parler du RM en tant qu'activité de communication. En effet, l'évaluation formative ou sommative des apprentissages des élèves s'effectue à travers la communication de l'élève, qu'elle soit écrite ou orale.

De même, tout comme la commognition reconnait plusieurs types de représentation et met l'accent sur les liens entre ces différentes représentations pour le développement d'objets mathématiques (Sfard, 2008), les enseignantes mettent de l'avant différents types et liens entre ces dernières. En effet, les tâches apportées lors des entretiens individuels font état d'une variété de représentations: symbole (Jeanne, Aurélie et Gisèle), schéma (Martine et Alice), manipulation (Agathe), plan cartésien (Gisèle). De même, la discussion sur la tâche de la somme infinie et sa solution orale (figure 2) a principalement tourné autour de l'importance de faire le lien entre le partitionnement du carré (schéma) et la somme de fractions (symbole).

Les enseignantes utilisent beaucoup le terme démarche pour référer à la communication de l'élève. Elles contrastent les démarches qui sont des techniques et procédures de celles qui sont des RM, les premières étant davantage liées à une application sans compréhension nécessaire ou à du par cœur. Ainsi, du point de vue du modèle, la démarche de l'élève sera un RM lorsqu'elle infère des énoncés mathématiques à partir d'autres énoncés mathématiques.

5.6 Le RM en tant que processus

Troisièmement (en vert), l'aspect le plus présent dans le discours des enseignantes, autant dans les entretiens individuels que dans l'entretien collectif, est le RM en tant que processus, en tant qu'ensemble d'actions. Par ailleurs, il y a un contraste entre les processus de recherche de similitudes et les processus de recherche de validation. En effet, les premiers sont très peu présents, tandis que les seconds sont variés et prennent énormément d'importance dans le discours enseignant, ce qui fait écho à la littérature.

5.6.1 Des processus de recherche de validation

Tous les processus de recherche de validation ont été repris par les enseignantes de façon souvent cohérente avec le modèle, à l'exception de « démontrer ».

En fait, les enseignantes utilisent le terme « démontrer » dans le sens de montrer : « c'est une démonstration soit orale, soit écrite, une démonstration [dans le sens de montrer] du chemin qui est fait par l'enfant pour accomplir ou pour faire le problème qui est demandé » (Agathe). On peut ici lier cette définition à expliquer comment, qui sera élaborée plus loin. Par ailleurs, si l'on reprend la définition du modèle, il serait surprenant de retrouver un processus « démontrer » au primaire. En effet, par définition, ce processus demande une systématisation des énoncés en une théorie mathématique reconnue par les personnes mathématiciennes.

Quoiqu'il soit impossible de dire comment se vit le processus prouver dans la classe à partir des entretiens, les enseignantes relient « prouver » à l'idée de valider, de justifier, d'argumenter : « quand tu justifies ou que tu prouves, c'est que tu dois argumenter sur, mettons, la raison mathématique qui est derrière » (Jeanne). De même, l'idée de raisons mathématiques est sous-jacente au processus « prouver », comme illustré par la discussion avec Agathe sur l'activité des nombres pairs et impairs. Pour sa part, Martine relie « prouver » et « expliquer pourquoi » :

> …souvent je leur demande tout le temps de me prouver qu'ils ont raison, même quand ils ont raison… Quand ils doivent prouver, nécessairement ils doivent verbaliser, expliquer le pourquoi de la chose.

Chez Jeannotte (2015), « argumenter » et « expliquer pourquoi » sont des synonymes de processus de recherche de validation, mais plutôt orientés vers la communication avec l'autre : « un RM est un processus de recherche de validation s'il vise à changer la valeur épistémique (c'est-à-dire la vraisemblance ou la vérité) d'un énoncé mathématique » (Jeannotte, 2015, p. 222). Or, comme le soutient Pedemonte (2002), argumenter a pour but de convaincre qu'un énoncé est vrai. Il en est de même pour expliquer pourquoi.

5.6.2 Des processus de recherche de similitudes et de différences

Pour les processus de recherche de similitudes et de différences, le processus « identifier une régularité » semble faire partie du quotidien des enseignantes. En fait, on peut noter que le travail sur les régularités est présent dès le premier cycle du primaire dans le PFEQ (Gouvernement du Québec, 2001) et il est spécifié dans la Progression des apprentissages en mathématiques au primaire (Gouvernement du Québec, 2009), document complémentaire au PFEQ.

Quoique les termes « comparer » et « classifier » ne soient pas utilisés explicitement par les enseignantes, les tâches discutées laissent penser que ces deux processus sont souvent mis en œuvre au primaire. Que ce soit classifier les nombres pairs et impairs ou les représentations de fractions, comparer des couts, des trajets, du temps, toutes ces tâches impliquent l'un, l'autre ou les deux processus.

Conjecturer et généraliser ont été introduits dans la discussion à l'aide de la seconde liste de mots, puisqu'il s'agit de processus importants du modèle et qu'ils sont présents dans le PFEQ du secondaire (Gouvernement du Québec, 2006).

Or, contrairement au PFEQ du secondaire et au programme de l'Australie que les participants du projet de Herbert et al. (2015) utilisaient, ni « conjecturer » ni « généraliser » ne fait partie du PFEQ du primaire de façon explicite. Par ailleurs, les enseignantes réussissent à donner du sens à ces termes à l'aide d'exemples de leur propre pratique ou encore à l'aide de la copie d'élève explorée à la fin de l'entretien collectif. Par exemple, Aurélie relie une activité où elle amène ses élèves à découvrir une règle pour multiplier des nombres décimaux au processus conjecturer. Jeanne associe des traces d'une élève à généraliser : « Elle est venue dégager ce qui est, dans le fond, la généralité, c'est-à-dire que pour n'importe quel nombre, peu importe la centaine, ce qui importe, c'est l'unité ».

Une utilisation particulière du terme « généraliser » est faite par les enseignantes lorsqu'il est introduit dans la conversation, à savoir que généraliser c'est être capable d'appliquer une même procédure dans un nouveau problème. On peut interpréter les deux utilisations dans les propos de Jeanne qui parle d'un élève et d'une tâche générique :

> Jeanne : C'est qu'ils sont en train de généraliser quelque chose, un procédé ou un raisonnement, une manière de faire qui est identique à celle, à une autre qu'ils ont déjà faite. Ben là, ils sont en train de faire des liens en termes de connaissances mathématiques, mais ils sont en train de généraliser, de voir qu'il y a une généralité qui est tout le temps là.

Lajoie et Bednarz (2016) soulignent cet aspect de transfert des connaissances lié à l'approche par compétences à la base du PFEQ et qui prend de l'importance dans les situations problèmes. Selon elles, l'idée de transfert est empruntée à un autre discours que celui de la didactique des mathématiques et n'est pas directement liée aux mathématiques, mais plutôt au concept d'apprentissage au sens large.

5.6.3 Les processus de support

Exemplifier est défini comme un processus qui supporte autant les processus de recherche de similitudes et de différences que de recherche de validation (Jeannotte, 2015). Chez les enseignantes, il est aussi associé à l'idée de support au RM, puisque lié à des stratégies essai-erreur : « ...des fois, quand tu es bloqué quand tu fais un problème. OK. Bien on va essayer de voir un exemple autre qui va nous permettre de [le] résoudre » (Jeanne). Les propos d'Agathe vont dans le même sens lorsqu'elle parle de la résolution de la tâche Charrière (figure 4) : « Elle part avec une page blanche, puis elle se dit : "Bon. Je fais un choix. Je prends ce chemin-là, puis on essaie puis on reviendra au pire "… dans le fond il faut comme commencer quelque part ». Exemplifier est alors une façon de rentrer dans le problème, de se donner un point de départ, d'explorer le problème. Les propos de Jeanne et d'Agathe sont similaires à ceux de Mason (1994), qui mentionne qu'étudier un problème à l'aide d'un certain nombre d'exemples donne accès à la nature du problème.

On considère également « expliquer » comme processus de support dans le modèle modifié. Jeannotte (2015) a développé autour de ce terme en divisant expliquer quoi, expliquer pourquoi et expliquer comment, le troisième n'étant à priori pas associé au RM. Dans la littérature sur le RM, Yackel (2001) associe expliquer à un construit social. Pour Arsac et al. (1992), l'explication est « tout discours tenu par une personne ou un groupe dont l'objectif est de communiquer à d'autres le caractère de vérité d'un énoncé mathématique » (p. 5). Ils soulignent ainsi la valeur épistémique liée aux processus de validation. Toutefois, pour Duval (1992-1993), l'explication n'est pas un raisonnement : « [l]'explication donne une ou plusieurs raisons pour rendre compréhensible une donnée [...] Or ces raisons avancées ont en réalité une fonction quasi descriptive » (p. 40). Il s'agit donc davantage de décrire une procédure, une technique. Par exemple, pour décrire la multiplication de deux fractions, on dira : multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux. Il s'agit de l'explication d'un algorithme de multiplication de fractions, mais ça ne dit rien à propos du pourquoi cet algorithme serait valide ou ce qui aurait pu m'amener à conjecturer cette règle. Il s'agit d'une description d'étapes.

Or, dans le discours des enseignantes, le terme « expliquer », en particulier « expliquer comment », apparait central au RM et il va au-delà de la description. Pour Jeanne, en entretien collectif, raisonner : « c'est ma façon d'expliquer pourquoi ça fonctionne, c'est ma façon d'expliquer que je peux le prouver, c'est ma façon d'expliquer, ça permet d'expliquer comment on l'a analysé, comment on peut le prouver. »

On comprend que pour elles, lorsqu'on explique à un, une autre, on lui montre qu'on a compris ce qu'on fait. L'explication de l'élève doit être porteuse de compréhension, de sens. Par exemple, lorsqu'on demande à Aurélie d'analyser le problème où l'élève explore différents algorithmes (figure 2), elle nous dit que ce problème permettra à l'élève de raisonner, car ce dernier pourra mieux comprendre l'algorithme traditionnel :

> Aurélie : Parce que ça je pense. Faire un problème comme ça, ça explique bien l'algorithme.
>
> Int : Mmm... L'algorithme qu'ils utilisent [l'algorithme traditionnellement enseigné en classe].
>
> Aurélie : Parce que l'algorithme, ils ne [le] comprennent pas nécessairement. Ils font la multiplication, mais ils ne comprennent pas pourquoi à la fin ça arrive à la réponse.

De même, on ne parle pas de n'importe quelle explication. Comme le précise Gisèle après que d'autres membres du groupe aient questionné sa définition de RM en tant qu'« enchainement … de logique, d'étapes qui conduit à énoncer une règle quelconque ou à trouver une solution », celle-ci doit être organisée :

> Gisèle : Ou il va plus être en mode exploration, mais à la fin, il va être capable de regarder ce qu'il a fait, puis peut-être de l'expliquer de façon plus logique, d'articuler un peu plus son raisonnement.

Au même titre qu'exemplifier, on peut donc considérer expliquer et plus spécifiquement expliquer comment comme processus de support qui sera défini comme suit:

> Expliquer est un processus de RM qui supporte la mise en œuvre d'autres processus de RM par la description d'actions posées menant à des inférences qui favorisent
>
> 1) la recherche de similitudes et de différences
>
> 2) la recherche de validation.

En effet, lorsqu'on explique comment, on peut faire référence à une panoplie d'autres processus et favoriser leur développement. On peut voir un tel cas de processus dans la solution orale de Frédérick à la tâche somme infinie (figure 2) proposée aux enseignantes.

> Frédérick [en réponse à quelle serait la fraction suivante]: Tu coupes en deux, ça donne un soixante-quatrième… [lit à voix haute le c)] Si tu poursuivais, finiras-tu par sortir du carré?... mmm… J'en sais rien… Un cent-vingt-huitième… un… deux-cent-cinquante-six… [en ajoutant des subdivisions au schéma].

> Int: D'après toi, est-ce que tu vas sortir?
>
> Frédérick: Non
>
> Int: Pourquoi?
>
> Frédérick: Parce qui reste un carré et à chaque fois, tu ajoutes une ligne et tu vas juste faire, genre… tu prends toujours la moitié de la fraction que tu avais avant.

Ici, Frédérick explique ce qu'il fait à plusieurs reprises pour obtenir la prochaine fraction de la suite: tu coupes en deux, tu ajoutes une ligne, tu prends la moitié. Or, ces explications supportent son processus conjecturer (je ne vais pas sortir du carré) et son processus justifier.

5.7 Le RM, une activité organisée, logique : l'aspect structurel

Quatrièmement (en violet), cette communication avec l'autre ne se fait pas n'importe comment, elle doit suivre une certaine logique, un certain enchainement, elle doit être cohérente, compréhensible pour l'enseignante. De plus, cette organisation du RM tient compte de l'élève qui raisonne. Alice nous dit « ... logique ou raisonnement, mais dans l'fond on va parler de sa logique à lui. Dans le sens que c'est ce qu'il peut faire avec les outils ou ce qu'il sait déjà. » Cette logique fait partie intégrante du RM : « logique, dans l'fond utiliser notre logique quand tu analyses au début. Après ça, utiliser notre logique pour voir quand on fait nos calculs pour voir si ça a du bon sens » (Aurélie).

On peut lier ce discours sur l'importance que le RM ait une certaine organisation à l'aspect structurel du RM (bas de la figure 9). Quoiqu'elles n'utilisent pas les termes « déductif » et « inductif » spontanément et qu'elles se questionnent sur ce que ces mots signifient, les enseignantes semblent décrire en d'autres termes les pas de raisonnements de l'aspect structurel : des enchainements d'étapes soutenus par une certaine logique. De plus, pour les enseignantes, les concepts, les connaissances antérieures des élèves viennent donner une cohérence à cette organisation.

Enfin, la grille d'évaluation de la compétence 2 fournie par le MELS semble mener à un discours qui, à priori, caractériserait le RM de façon linéaire (j'analyse, je fais des choix, j'applique, je justifie). Lors de l'entretien collectif, les enseignantes reprenaient souvent les termes proposés par les grilles d'évaluation et donc, la linéarité qui s'en dégage. Afin de valider si les enseignantes endossent réellement cette idée de linéarité ou si elle n'est qu'une conséquence des termes utilisés, l'intervieweuse a présenté un croquis linéaire du RM aux enseignantes après une discussion autour des mots de vocabulaire introduit en entretien collectif (figure 3). C'est alors que les enseignantes cherchent à restructurer autrement le schéma :

> Jeanne : En tout cas, moi, là, ce que je vois là, c'est comme s'il y a analyser/comprendre [d'un côté], y'aurait procédures/concepts/j'explique comment je m'y prends [au milieu]. Après ça, y'aurait euh communiquer/traces pi expliquer pourquoi/justifier/prouver.
>
> [... Un modèle linéaire leur est présenté...]
>
> Jeanne : Ça me dérange beaucoup parce que ce n'est jamais linéaire. Au contraire, plus on force la ligne, plus les élèves se plantent parce que ce n'est pas un chemin un raisonnement.

Par l'utilisation d'imbrication, le schéma présenté à la figure 9 tente de se dégager de cette idée de linéarité en présentant le RM en tant qu'activité de communication avec soi ou avec l'autre, activité qui peut être regardée autant selon son aspect structurel (organisation) que processuel (action dans le temps). En fait, le modèle propose un vocabulaire pour parler du RM. Or, un même RM peut être regardé du point de vue structurel ou processuel. Des processus de recherche de similitude peuvent se produire avant, pendant ou après des processus de recherche de validation. C'est en fait ce qui rend le RM si complexe à analyser.

Discussion et conclusion

Le discours des enseignantes autour du RM semble prendre sa source dans deux éléments relativement distincts. Le premier est le RM en tant que compétence qui doit être évaluée à l'aide d'une grille particulière et de situations d'application. Comme on le constate, les critères d'évaluation associés à cette grille teintent énormément le discours des enseignantes. Or, ces critères pourraient favoriser une vision linéaire (remise en question par les enseignantes) du RM, mais aussi l'assimiler à la résolution de problèmes. En effet, les enseignantes utilisent un vocabulaire qui laisse de côté plusieurs processus de RM au profit d'un vocabulaire plus général associé à la résolution de problème. Ce lien fort avec le programme permet aussi de comprendre en partie pourquoi les processus de recherche de validation sont plus présents que les processus de recherche de similitudes et de différences. Évidemment, cette importance des processus de recherche de validation n'est pas l'apanage du programme. En fait, les mathématiques publiques (celles publiées) mettent souvent davantage l'accent sur les preuves, les démonstrations, laissant les processus au domaine privé. Or, le modèle de Jeannotte (2015) cherche à valoriser l'ensemble des processus de RM nécessaire pour le développement des mathématiques en explicitant ceux qui sont davantage de l'ordre du privé. On constate ici un apport du modèle pour l'enseignement primaire. En effet, le modèle pointe vers des processus de RM qui apparaissent peu ou pas développés en classe du primaire. C'est le cas des processus conjecturer et généraliser. En effet, on peut penser que si les enseignantes n'utilisent pas d'emblée ces termes et qu'elles trouvent peu ou pas d'exemples d'activités qui les favorisent, c'est que ces deux processus vivent peu en classe du primaire au Québec. Il en est de même pour exemplifier, qui est peu mentionné comme un processus à favoriser.

Par ailleurs, lorsqu'elles illustrent des RM, elles recourent énormément à des exemples génériques, à des exemples qui illustrent, qui justifient leurs propos. Agathe, par exemple, utilise le nombre 19 pour discuter de la façon dont les enfants sont en mesure de justifier qu'un nombre est impair. Il est clair ici que le nombre 19 est un exemple générique. Exemplifier devient alors un outil d'enseignement et non un processus de raisonnement supportant les processus de validation pour les élèves eux-mêmes. Quoique cette stratégie pédagogique favorise le développement du RM (Watson et Mason, 2006), la question se pose à savoir si le processus exemplifier en tant que support des processus de validation vit en classe de mathématiques au primaire chez les élèves. En tant que support des processus de validation, exemplifier n'a pas toujours eu bonne presse, surtout lorsque réduite à ce que Balacheff (1988) appelle l'empirisme naïf. Or, lorsque l'exemplification est un exemple générique, il s'agit d'un outil puissant pour prouver lorsque le symbolisme mathématique en est encore à ses balbutiements (Balacheff, 1988).

Avec le programme vient aussi l'importance des concepts, des connaissances antérieures de l'élève. En effet, l'évaluation des concepts mathématiques a été intégrée à la compétence « raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques ». Ces concepts jouent un rôle important dans la structure des raisonnements, puisque ce sont les éléments constitutifs des différents pas de raisonnements.

Le second élément qui structure le discours des enseignantes est que le RM est associé à la compréhension et à un apprentissage qui a du sens pour l'élève. Cet élément favorise une vision plus globale du RM, en tant que phénomène multifacette, prenant en compte l'élève, ses connaissances, ses difficultés, le problème à résoudre et son contexte, les visées d'apprentissage de la leçon, etc. Le terme « expliquer » semble prendre en compte cette idée de compréhension dans le discours des enseignantes et ne réfère donc pas à ce que Duval (1992-1993) entend par expliquer. Ainsi, ce second plan du discours a permis d'enrichir le modèle du processus expliquer en tant que processus support.

Enfin, on note aussi la nécessité de communiquer liée au RM chez les six enseignantes du primaire. De ce fait, on peut penser, étant donné l'importance de cet aspect dans la pratique quotidienne des personnes enseignantes, qu'une formation continue basée sur notre conceptualisation du RM pourrait favoriser l'adoption de pratiques favorables au développement du RM en classe du primaire. En effet, il s'agit d'une conceptualisation qui est appropriée pour prendre en compte la nature individuelle et collective du RM, nature soulignée par les enseignantes.

Tout comme le discours en didactique des mathématiques, le discours des enseignantes est formé à partir d'un ensemble de discours lié au domaine de l'éducation : discours de diverses institutions d'enseignement, discours psychologique, pédagogique, didactique des mathématiques et d'autres disciplines. Or, ces discours proviennent de communautés différentes qui ont chacune leurs propres pratiques. Ainsi, comme les enseignantes ayant participé à ce projet le soulignent, enrichir et clarifier le vocabulaire lié au RM que ce soit dans le PFEQ ou en formation pourrait entre autres ouvrir de nouvelles possibilités pour le développer en classe :

> Agathe : Mais ça prouve qu'il faut qu'on ait un langage commun. Je pense qu'il y a une compréhension à avoir là… On enseigne les mathématiques différemment selon notre compréhension.

Remerciements

Nous tenons à remercier les six participantes ainsi que le FRQSC, subvention (#197178) sans qui ce projet n'aurait pu voir le jour.

Références

Arsac, G., Chapiron, G., Colonna, A., Germain, G., Guichard, Y. et Mante, M. (1992). *Initiation au raisonnement déductif au collège : une suite de situations permettant l'appropriation des règles du débat mathématique*. Presses universitaires de Lyon.

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves du Collège* [thèse de doctorat, Université de Grenoble 1]. TEL. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00326426

Cabassut, R. (2005). *Démonstration, raisonnement et validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et en Allemagne* [thèse de doctorat, Université Paris Diderot]. TEL. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00009716

Clarke, D. M., Clarke, D. J. et Sullivan, P. (2012). Reasoning in the Australian Curriculum: Understanding its meaning and using the relevant language. *Australian Primary Mathematics Classroom, 17*(3), 28-32.

Coupal, M. et Marotte, L. (2005). *À vos Maths! Mathématiques, premier cycle du secondaire. Manuel de l'élève.* Chenelière Éducation.

delMas, R. C. (2004). A comparison of mathematical and statistical reasoning. Dans D. Ben-Zvi et J. Garfield (dir.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (p. 79-96). Kluwer Academic Publishers.

Del Notaro, C. (2013). Transposition didactique de quelques critères de divisibilité dans le manuel de 6P. *Math-École,* (219), 4-9.

Duval, R. (1992-1993). Argumenter, démontrer, expliquer : Continuité ou rupture cognitive ? *Petit x*, (31), 37-61.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Giddens, A. (1987). *La constitution de la société* (traduit par M. Audet). Presses universitaires de France.

Gouvernement du Québec. (1984). *Programme d'études : mathématique 116, enseignement secondaire*. Ministère de l'Éducation.

Gouvernement du Québec. (1995). *Programmes d'études : mathématique 314, enseignement secondaire*. Ministère de l'Éducation.

Gouvernement du Québec. (2001). *Programme de formation de l'école québécoise éducation préscolaire, enseignement primaire*. Ministère de l'Éducation.

Gouvernement du Québec. (2006). *Programme de formation de l'école québécoise éducation préscolaire, enseignement secondaire*. Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport.

Gouvernement du Québec. (2009). *Progression des apprentissages au primaire. Mathématique*. Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport.

Gouvernement du Québec. (2011). *Cadre d'évaluation des apprentissages*. Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport.

Guignon, S. et Morrissette, J. (2006). Quand les acteurs se mettent en mots. *Recherches qualitatives, 26*(2), 19-36

Herbert, S., Vale, C., Bragg, L. A., Loong, E. et Widjaja, W. (2015). A framework for primary teachers' perceptions of mathematical reasoning. *International Journal of Educational Research, 74*, 26-37. doi.org/10.1016/j.ijer.2015.09.005

Hill, H. C., Rowan, B. et Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal, 42*, 371–406. doi.org/10.3102/00028312042002371

Jeannotte, D. (2015). *Raisonnement mathématique: proposition d'un modèle conceptuel pour l'apprentissage et l'enseignement au primaire et au secondaire* [Thèse de doctorat, Université du Québec à Montréal]. Archipel. https://archipel.uqam.ca/8129/

Jeannotte, D. et Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*(1), 1-16. doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Lacasse, C. (2005). *Presto Mathématique, 3e cycle. Manuel B, volume 1*. Éditions CEC.

Lajoie, C. et Bednarz, N. (2016). La notion de situation-problème en mathématiques au début du XXI[e] siècle au Québec : rupture ou continuité? *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies, 16*(1), 1-27. doi.org/10.1080/14926156.2014.993443

Lindquist, M., Philpot, R., Mullis, I. V. S. et Cotter, K. E. (2019). TIMSS 2019 mathematics framework. Dans I. V. S. Mullis et M. O. Martin (dir.), *TIMSS 2019 assessment frameworks* (p. 11-25). TIMSS & PIRLS International Study Center.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255-276. doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2

Mason, J. (1994). *L'esprit mathématique.* Éditions Modulo.

Morrissette, J. (2009). *Manières de faire l'évaluation formative des apprentissages selon un groupe d'enseignantes du primaire : une perspective interactionniste* [Thèse de doctorat, Université Laval]. Corpus. https://corpus.ulaval.ca/jspui/handle/20.500.11794/20506

Morrissette, J. (2011). Vers un cadre d'analyse interactionniste des pratiques professionnelles. *Recherches qualitatives, 30*(1), 10-32.

National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers (2010). *Common Core State Standards (Mathematics).* http://www.corestandards.org.

Organisation de coopération et de développement économiques. (2006). *Compétences en sciences, lecture et mathématiques : Le cadre d'évaluation de PISA 2006*.

Pedemonte, B. (2002). *Étude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques* [thèse de doctorat, Université Joseph Fourier]. TEL. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00004579/

Pólya, G. (1965). *Comment poser et résoudre un problème* (2[e] éd.). Éditions Jacques Gabay.

Powell, A. B., Francisco, J. M. et Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *The Journal of Mathematical Behavior, 22*(4), 405-435. doi.org/10.1016/j.jmathb.2003.09.002

Reid, D. A. (2002). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(1), 5–29. doi.org/10.2307/749867

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Stylianides, A. J. et Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(4), 307-332. doi.org/10.1007/s10857-008-9077-9

Stylianides, G. J. (2005). *Investigating students' opportunities to develop proficiency in reasoning and proving: a curricular perspective* [thèse de doctorat, University of Michigan]. Deep Blue. https://deepblue.lib.umich.edu/handle/2027.42/125230

Université Laval (2014, 7 novembre). *Semaine des maths : Énigmes*. https://www.semainedesmaths.ulaval.ca/fileadmin/semainemsg/documents/2014_doc/Enigme_-_Pont_Prim_FE.pdf

Watson, A. et Mason, J. (2006). *Mathematics as a constructive activity : Learners generating examples.* Routledge.

Yackel, E. (2001). Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. Dans M. van den Heuvel-Panhuizen (dir.), *Proceedings of the 25th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 9-24). Utrecht.

Exploitation de l'histoire dans une analyse didactique du développement de la pensée fonctionnelle au début de l'enseignement secondaire tunisien

Sonia BEN NEJMA
Université de Carthage – Tunisie – Laboratoire de recherche LARINA
sonianejma@yahoo.com

Résumé : Cet article propose une réflexion didactique autour de la dialectique entre les modes de pensée algébrique et fonctionnelle dans le curriculum tunisien, au début du cycle secondaire (14-15 ans). Deux analyses sont réalisées. L'une, de nature historicoépistémologique, vise à retracer le développement de la pensée fonctionnelle à travers les notions de variable, de dépendance fonctionnelle et de covariation. Cette étude est conduite en lien avec les cadres mathématiques et les registres de représentation sémiotiques. L'autre, de nature institutionnelle, est consacrée à l'exploration du programme et du manuel officiel de première année du secondaire tunisien, pour en décrypter les visées et les choix institutionnels, au regard de la construction historique de ces notions. Cette recherche s'inscrit dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD). Elle invite à réfléchir sur le potentiel des praxéologies instaurées dans ce système éducatif pour permettre une entrée dans la pensée fonctionnelle.

Mots-clés : pensée fonctionnelle, sémiotique, histoire, algèbre

Exploring history in a didactic analysis of the development of functional thinking at the beginning of Tunisian secondary education

Abstract: This research offers a didactic reflection around the dialectic between algebraic and functional thinking in the Tunisian curriculum, at the beginning of secondary school (14–15 years). Two analyses are carried out. The historicoepistemological analysis aims to trace the development of functional thinking through the concepts of variable, functional dependence and covariation and is conducted in conjunction with mathematical frameworks and semiotic representation registers. The institutional analysis focuses on exploring the program and the official textbook to decipher their aims and institutional choices with regard to the historical construction of these concepts. This research comes under the Anthropological Theory of Didactics (ATD). It invites reflection on the potential of the praxeologies established in this education system as a doorway to functional thinking.

Keywords: functional thinking, semiotics, history, algebra

Introduction

La caractéristique principale de la pensée fonctionnelle, par opposition aux modes de pensée arithmétique et algébrique, est l'intégration d'une variation continue de la variable, par contraste avec les phénomènes « discrets » étudiés antérieurement dans le cursus scolaire des élèves. En effet, si le mode de pensée algébrique est relié au domaine des lettres, à l'usage du calcul littéral, et se caractérise par l'établissement d'équations, d'inéquations, de formules, etc., la pensée fonctionnelle renvoie plutôt aux notions de variable, de lois fonctionnelles et de variations. L'accès à ces aspects fonctionnels n'est pas si simple à concevoir au niveau des curriculums. Les travaux internationaux en didactique de l'algèbre prêtent parfois un peu à confusion, car les approches d'enseignement de l'algèbre paraissent différentes, plus ou moins fonctionnelles ou équationnelles, selon les pays, et pas toujours explicites. Dans un premier temps, les élèves découvrent un nouveau processus à travers des activités d'anticipation à la notion de variable par un travail sur les formules. Celles-ci, souvent considérées comme des abréviations de procédures à appliquer, permettent non seulement une première entrée dans le calcul littéral dès l'enseignement primaire, mais constitue souvent une assise pour développer certains aspects fonctionnels et le calcul associé. Cependant, la transition d'un mode de pensée à un autre, selon cette approche, peut entraver la conceptualisation de la notion de fonction. Les élèves, dès le collège, manipulent des expressions algébriques sans véritablement saisir les changements du statut des objets qu'ils manipulent, en particulier, dans les activités de modélisation. Une maitrise insuffisante des transformations algébriques, des confusions dans le statut des lettres et l'absence d'une représentation mentale du concept de variation et la difficulté à passer d'un registre sémiotique (écriture symbolique, courbe, figure, tableau de valeurs, etc.) à un autre constituent autant d'obstacles conceptuels à considérer, dans la conception des programmes et des manuels.

Dans la première partie de cet article, nous présentons le cadre épistémologique de référence qui se centre sur une analyse historicoépistémologique des aspects fonctionnels (Charbonneau, 1987; Passaro, 2015; Radford, 2006, 2014; Serfati, 1997; Youschkevitch, 1981). Cette étude permet de faire le lien avec les fondements épistémologiques de la théorie anthropologique du didactique (TAD). Celle-ci constitue le cadre théorique de notre recherche, à travers notamment, les praxéologies que les choix institutionnels laissent présager, au regard de la constitution du savoir savant. La seconde partie de ce travail porte sur une analyse institutionnelle conduite sur la base du programme et du manuel officiel tunisien de première année du secondaire (élèves de 14-15 ans). Nous illustrons cette analyse par quelques activités posées dans le manuel en nous interrogeant sur leur potentiel à faire émerger des concepts propres au cadre fonctionnel.

Le choix du contexte tunisien a été motivé par son aspect universel. Des travaux de recherches internationaux portant sur les pratiques institutionnelles en algèbre (Assude et al., 2012; Coulange et al., 2012; Robert, 2018; Ruiz-Munzón et al., 2012; Schliemann et al., 2012) présentent des proximités dans l'approche de l'enseignement du domaine et interrogent les choix curriculaires en général, au regard de la spécificité des savoirs algébriques. Ces études permettent, dans un premier temps, de s'interroger sur la persistance des difficultés en algèbre, au regard de certains profils d'élèves; dans un deuxième temps, de soulever des questions relatives aux pratiques enseignantes en algèbre; et dans un troisième temps, de se centrer sur la nature spécifique des savoirs algébriques. De ce fait, le cursus scolaire tunisien nous semble intéressant à explorer vu sa similarité avec plusieurs contextes institutionnels.

1. Problématique

L'analyse des programmes d'algèbre des réformes successives de l'enseignement secondaire tunisien, conduite dans le cadre de notre travail de thèse (Ben Nejma, 2009), a en partie motivé cette recherche. Les résultats obtenus (Ben Nejma, 2009, 2010, 2012) ont permis de mettre en avant une évolution récente des savoirs algébriques enseignés au niveau du secondaire en Tunisie. Ces savoirs prendraient une forme plus dynamique (liée à la notion de fonction) au travers de la dernière réforme du curriculum, forme qui semble se rattacher intuitivement à la notion de « variable », par opposition à la notion « d'inconnue » caractérisant une forme plus statique des savoirs enseignés auparavant en algèbre, dans les périodes d'enseignement précédentes. Ces points de vue « dynamique » et « statique » de l'enseignement de l'algèbre se donnent notamment à voir à travers une imbrication des thèmes d'études développées autour des « équations » et des « fonctions linéaires et affines ». Cette imbrication semble possible grâce à, d'une part, l'articulation de différents registres sémiotiques et, d'autre part, l'omniprésence du registre graphique et la prépondérance des situations issues du cadre des grandeurs. Ces constats nous ont conduits à approfondir l'étude et à affiner notre questionnement autour des formes plus ou moins « statique » ou « dynamique » du domaine algébrique en explorant la manière dont la notion de variable a émergé et s'est développée au fil de l'histoire, et le rapport qu'il pourrait y avoir avec l'enseignement tunisien.

> L'analyse historique de la notion de variable est en ce sens fondamentale non seulement pour estimer la complexité de ce « concept » et toutes les percées ayant eu lieu lors de son édification mais également pour cerner la question didactique de l'articulation entre ce concept et celui d'inconnue. (Bardini, 2003, p. 23)

Notre hypothèse est que les praxéologies développées dans le système éducatif tunisien autour de cette notion et celles qui s'y rattachent sont inspirées de l'histoire. Cette hypothèse conduit naturellement à se poser des questions de nature épistémologique.

> Les questions qu'on doit poser à l'histoire sont des questions essentiellement épistémologiques puisqu'elles surviennent, dans la salle de cours, lors de situations d'appréhension de concepts et de constructions de savoirs. D'autre part, la traduction épistémologique du développement historique est nécessaire et même indispensable pour que les résultats prennent une signification didactique et que l'on puisse retourner dans la salle de cours pour tester à nouveau les hypothèses. (Waldegg, 1997, p. 43)

Ainsi, notre problématique s'organise autour du développement de la pensée fonctionnelle posée dans ses rapports avec le mode de pensée algébrique dans un contexte de modélisation. Dans cette perspective, nous nous centrons sur les rapports dialectiques entre les notions d'inconnue et de variable, et le fonctionnement des cadres et des registres qui supportent ces rapports. (Douady, 1986; Duval, 1993). L'entrée par les cadres et les registres fournit des outils pour « positionner » les savoirs enseignés en algèbre : le positionnement dans un cadre ou dans un registre ou à la croisée de « plusieurs registres ou cadres » permet en quelque sorte de déterminer si l'on est plus dans une approche « statique » ou « dynamique » de l'algèbre et plus du côté de la variable ou de l'inconnue.

Ce travail se situe donc à l'intersection de deux approches : historicoépistémologique et didactique. La première entrée conduit inévitablement à identifier les conditions et les obstacles épistémologiques reliés à l'avancée des connaissances autour du développement de la pensée fonctionnelle. La seconde, s'appuie sur les fondements épistémologiques de la TAD, qui permettent d'étudier la manière dont le concept de fonction est amorcé dans le savoir à enseigner. La mise en regard de ces deux approches permet de remonter aux sources du processus de transposition didactique et de la constitution du savoir savant autour des aspects fonctionnels. C'est en particulier ce qu'exprime Dorier (2015) :

> Une part importante de l'analyse didactique consiste à prendre en compte l'évolution et la constitution historique du savoir mathématique dans la sphère savante et ses rapports avec la constitution du texte du savoir enseigné. (p. 7)

Les questions de recherche qui guideront la première partie de ce travail sont les suivantes : Quels sont les aspects liés au mode de pensée fonctionnelle repérés dans l'histoire du concept de fonction? Quels sont les obstacles épistémologiques rencontrés? Quels sont les rôles joués par les cadres et les registres dans le développement de ce mode de pensée?

2. Cadre épistémologique de référence

Le recours à l'histoire dans les recherches en didactique de l'algèbre a constitué un point d'entrée pour de nombreux travaux dans ce domaine (Kieran, 1992; Kieran et al., 2016; Radford, 2006; Sfard, 1997). Ces recherches se sont inscrites dans une problématique directement liée à la construction des notions mathématiques et de leur évolution, comme il est évoqué :

> Pour que l'histoire devienne épistémologiquement intéressante, il faut se poser les questions de la portée et de la signification des concepts, leur donner une épaisseur historique en posant la question, non de leur attribution, mais des conditions de leur naissance et donc du changement. (Barbin, 1987, p. 24)

Par ailleurs, le développement historique des notions mathématiques peut être mis en rapport avec les pratiques institutionnelles à travers la notion d'obstacle didactique, tel qu'il est suggéré :

> Il s'agit dans cette approche d'identifier les obstacles dans l'histoire, de les caractériser comme des obstacles didactiques et de produire des modèles didactiques de situations qui prennent en compte toutes les conditions pertinentes de la construction des savoirs – connues dans l'histoire – et de les organiser selon leur propre logique. (Waldegg, 1997, p. 44)

2.1 La notion d'obstacle épistémologique

La notion d'obstacle a été introduite par Bachelard (1938), qui l'utilise pour expliquer la genèse de la pensée scientifique, en particulier en physique. Le rôle de l'histoire dans l'étude des obstacles épistémologiques a été débattu par Artigue (1991, 1998) qui confirme que c'est par une analyse historique que sont identifiés les obstacles épistémologiques, susceptibles d'expliquer certaines difficultés rencontrées par les étudiantes et étudiants actuels. Brousseau (1998) considère les obstacles épistémologiques comme des formes de connaissances devenues inopérationnelles dans un contexte nouveau. Il distingue trois origines pour ces obstacles : ontogénique, didactique et épistémologique. Dans notre étude, nous nous centrons sur le troisième type. Toutefois, les obstacles d'origine didactique, qui semblent ne dépendre que d'un choix ou d'un projet du système éducatif, peuvent également renvoyer à une volonté institutionnelle de reproduire en partie l'évolution historique de certains concepts. On peut citer, par exemple, certains choix actuels d'approcher l'algèbre par la modélisation algébrique ou fonctionnelle, plutôt que par les structures. Les obstacles d'origine proprement épistémologique sont

> ceux auxquels on ne peut ni ne doit échapper, du fait même de leur rôle constitutif dans la connaissance visée. On peut les retrouver dans l'histoire des concepts eux-mêmes. Cela ne veut pas dire qu'on doit amplifier leur effet ni qu'on doit reproduire en milieu scolaire les conditions historiques où on les a vaincus. (Brousseau, 1998, p. 125).

Ces considérations nous semblent importantes à prendre en compte dans le sens où l'analyse historique peut aider la chercheure ou le chercheur dans sa recherche des nœuds de résistance de l'apprentissage, mais elle ne peut en aucun cas prouver l'existence de tel ou tel obstacle pour les élèves actuels. Artigue (1998) émet l'hypothèse de l'existence, pour l'enseignement actuel, de nœuds de résistance qui fonctionnent comme ont fonctionné les obstacles épistémologiques dans le développement des mathématiques. Toutefois, il est impossible, selon l'auteure, de leur attribuer historiquement le statut d'obstacle, étant données les disparités entre les conditions des genèses historique et scolaire.

2.2 Une analyse historique du concept de fonction

Certains auteurs (Charbonneau, 1987; Youschkevitch, 1981) se sont intéressés à l'évolution historique du concept de fonction. Celui-ci trouve son origine dans l'antiquité; des mathématiciens babyloniens ont largement utilisé pour leurs calculs des tables sexagésimales de nombres inverses, de carrés et de racines carrées. Au Moyen Âge, l'idée que les lois quantitatives de la nature étaient de type fonctionnel a commencé à se dessiner. Une fonction est définie soit par une description verbale de sa propriété, soit par un graphe. Les notions générales de quantités variables et les fonctions étaient exprimées à la fois à travers des formes géométriques et mécaniques. Cependant, comme dans l'Antiquité, chaque cas concret de dépendance entre deux quantités était défini par une description verbale, ou au moyen d'un graphe à la place d'une formule. À cette époque, des mouvements étaient décrits soit de façon qualitative, par le biais d'une formulation dans le langage naturel du sens de variation, soit en étudiant numériquement certaines variables du phénomène sans aboutir à une relation numérique précise. Cette approche ne permettait pas en réalité de rendre compte de l'aspect de variation continue.

Les premières formes de représentations graphiques se sont développées dans les études d'Oresme (1323-1382), qui marque un pas en avant dans le concept de variable dépendante, sans pour autant qu'il s'agisse de fonctions clairement définies, mais plutôt d'aspects caractéristiques d'un mode de pensée fonctionnelle. Par le biais de figures géométriques, il tentait de représenter les intensités d'une qualité d'un sujet. Les intensités des qualités (des vitesses) sont représentées par des segments érigés perpendiculairement à un autre segment représentant, lui, le temps. On obtient ainsi un graphique illustrant, pour la première fois, une relation fonctionnelle qui lie le temps et la vitesse. Ce moment historique est relativement important puisqu'on commence à envisager les lois de la nature comme des lois de type fonctionnel et où s'effectuent des échanges entre pensée mathématique et considérations cinématiques. Comme le dit Bourbaki, « toute cinématique repose sur l'idée intuitive de quantité variable avec le temps, c'est à dire fonction du temps » (Bourbaki, 1960, p. 209). Ainsi, à cette époque, ce n'est pas la variation de la qualité par rapport à un sujet qui était un objectif en soi, mais plutôt la configuration globale de la qualité du sujet qui permettait de concrétiser la nature des changements; ces représentations étaient plutôt descriptives, qualitatives sans vérification numérique (à l'aide des mesures). C'est Galilée qui introduira le quantitatif dans les représentations d'Oresme.

La grande avancée de Galilée (1564-1642) au regard de l'évolution du concept de fonction fut son acharnement à chercher des résultats et des relations qui proviennent de l'expérience plutôt que de la pensée seule, comme c'était le cas dans les études d'Oresme. Pour Galilée, l'expérimentation était facilitée par l'avènement d'instruments de mesure, et donc de l'aspect quantitatif; les graphiques de Galilée sont issus de l'expérience et de la mesure. Les liens de cause à effet sont exprimés de façon quantitative vérifiable et vérifiée. Le principal champ d'études de Galilée a été le mouvement, et donc la vitesse, l'accélération, la distance parcourue. Il cherche à relier ces différents concepts à l'aide de lois qui lui sont inspirées de l'expérience et de l'observation. Il s'intéresse à l'étude des trajectoires de projectiles en mouvement à la surface de la Terre, elle-même considérée au repos. Ainsi, une évolution est marquée dans un domaine des grandeurs qui regroupe à la fois les intervalles de temps et ceux de l'espace. Elle est très nettement pensée comme une règle fonctionnelle par la conception de la variable dépendante. Ainsi, avec les progrès de l'écriture symbolique en algèbre (Viète), se développe la notion de relation fonctionnelle exprimée de façon explicite par une formule. Les travaux de Galilée sur la mécanique (étude des trajectoires) mettent en relation des variables comme la vitesse et la distance parcourue par un solide.

Au XVII^{e} siècle, des expressions analytiques des fonctions deviennent prégnantes, particulièrement dans les travaux de Descartes (1596-1650). Il distingue les courbes géométriques et les courbes mécaniques et se restreint aux « courbes géométriques », où les deux coordonnées x et y sont reliées par une équation algébrique P (x, y) (courbes algébriques). C'est la première fois que cette idée émerge de façon explicite : une équation entre x et y est une façon d'introduire une relation de dépendance fonctionnelle entre quantités variables, au sens que la connaissance de la valeur d'une variable permet de déterminer la valeur de l'autre. Cette méthode est appliquée avec succès à des résolutions graphiques d'équations. Vuillemin (1960, 1962), historien et philosophe, critique en quelque sorte les limites des études de Descartes. Il approfondit la notion de fonction pour des courbes non géométriques qui ne peuvent pas être approchées par l'étude analytique proposée par Descartes. Il s'agit désormais d'une relation qui permet de faire correspondre à une longueur donnée une autre longueur déduite de la première par un nombre fini d'opérations algébriques. Seule une telle relation est, selon Descartes, susceptible d'une construction par laquelle on atteindra tous les points de la courbe sans en exclure aucun. Cette possibilité assurera l'enchainement et la continuité intuitive de la courbe, sans qu'aient besoin d'intervenir des considérations infinies. Ce moment important révèle pratiquement tous les aspects spécifiques de la pensée fonctionnelle : les lignes x et y sont variables, leurs grandeurs sont dépendantes et une correspondance entre ces variables est explicite. Par ailleurs, en collaboration avec Fermat (1601-1665), Descartes met au point la méthode des coordonnées qui permet de réaliser plus facilement des preuves géométriques par un choix d'une unité de longueur, et l'identification de la demi-droite avec l'ensemble des nombres réels positifs : il met ainsi en relation les grandeurs et les nombres.

Le concept de fonction évolue par la suite avec la loi de variation dans les travaux de Newton (1643-1727), qui exprime les deux principaux problèmes du calcul infinitésimal en termes mécaniques et interprète les variables x, y, v etc., comme des « quantités fluentes » s'écoulant avec des changements de vitesse. Il mettra ensuite en avant la distinction de ces quantités selon « une quantité corrélative » qui représente la variable indépendante (assimilable au temps) et des « quantités relatives ». Ainsi, si x est la variable corrélative et y la variable relative, la façon dont y est fonction de x traduit en fait un mouvement quelconque; c'est l'introduction des notions de cinématique qui permettra de développer la méthode de fluxions de façon analytique, soit sous une forme finie, soit en tant que séries finies de puissances.

Leibniz (1646-1716) se sert du mot « fonction » pour désigner des quantités qui dépendent d'une variable et introduit les termes de « constante », de « variable », de « coordonnées » et de « paramètre ». La théorisation de la notion de fonction évolue au fur et à mesure des avancées des travaux de l'époque moderne; dans les diverses définitions des fonctions que Youschkevitch (1981) a citées, nous constatons une formulation de définitions qui décrit les fonctions comme des expressions algébriques. Nous remarquons également une référence explicite à la dépendance entre variables qui s'appuie sur une description géométrique ou graphique et qui sous-entend une perception dynamique et covariationnelle. Contrairement à Descartes, Leibniz divise les fonctions et les courbes en deux catégories : algébriques et transcendantes.

Euler (1707-1783) définit la fonction d'une quantité variable comme une expression analytique constituée de cette quantité variable et de constantes. Dans son traité « Introduction à l'analyse infinitésimale », il évoque la nécessité de l'algèbre pour s'élever à la connaissance de l'analyse. De plus, il fait du concept de fonction l'objet essentiel de l'analyse et, à cette fin, il utilise l'algèbre comme un outil fondamental. Ainsi, le concept de fonction est libéré des considérations cinématiques et géométriques : 1) une quantité constante est une quantité déterminée, qui conserve toujours la même valeur; 2) une quantité variable est une quantité indéterminée, ou, si l'on veut, une quantité universelle, qui comprend toutes les valeurs déterminées; 3) une quantité variable devient déterminée, lorsqu'on lui attribue une valeur déterminée quelconque; 4) une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes; 5) une fonction d'une variable est donc aussi une quantité variable. Il étudie systématiquement toutes les fonctions élémentaires et distingue les fonctions explicites des fonctions implicites. Il introduit, pour la première fois, la notation $f(x)$. Le point de vue qui prime alors est l'aspect purement formel du concept de fonction qui évoluera au fil du temps.

2.3 Déductions et constats épistémologiques

Cette analyse historique révèle que les concepts d'inconnue et d'équation ont émergé bien avant ceux de variable et de fonction, dans des situations concrètes puis de plus en plus mathématisées. Le développement de ces deux concepts a été fortement lié au cadre des grandeurs. En outre le concept d'inconnue a toujours référé au nombre cherché ou à la racine d'une équation (Serfati, 1997). Dans ce cadre particulier des grandeurs, les lettres désignent des mesures de grandeurs et c'est dans une problématique de variation (notamment dans le cadre géométrique) qu'elles font référence à un ensemble de nombres. De ce fait, elles sont considérées comme des nombres inconnus qui ne sont plus fixes, la conceptualisation de la notion de variable devient alors délicate et difficilement repérable, à l'époque, dans certaines démonstrations, par exemple dans les travaux de Diophante. Radford (1996) montre qu'il y a eu usage implicite du concept de variable non pas à travers le concept de fonction, mais à travers le concept de formule. Celui-ci n'est plus fondé sur le maniement de quantités continues, mais plutôt, sur les relations entre nombres perçus comme des unités ou encore des parties fractionnaires. Autrement dit, la formule devient un moyen de détermination d'un nombre, connaissant les propriétés d'un autre. L'auteur pointe des différences subtiles entre les deux concepts d'inconnue et de variable, parmi lesquelles les représentations attribuées. En effet dans le premier cas, il s'agit d'un ensemble abstrait de valeurs représentées géométriquement, alors que dans le cas de *l'Arithmetica*, en référence à Diophante, l'inconnue n'est pas représentée géométriquement. C'est sur cette idée qu'il envisage une approche algébrique de l'enseignement de la variable en se référant aux distinctions repérées dans l'histoire et au contexte déductif de l'ensemble abstrait de valeurs développées par Diophante.

Nous apportons certains constats qui guideront l'analyse institutionnelle :

- Le premier constat est de nature écologique en rapport avec l'émergence des aspects relatifs à la pensée fonctionnelle, lesquels dérivent premièrement du monde physique. L'idée était de modéliser des situations puisées dans le cadre des grandeurs et à travers des phénomènes de mouvements, vitesse, cinématique. Progressivement le caractère intuitif géométrique de cette notion laisse place au symbolisme analytique et algébrique. En effet, le dégagement des considérations physiques va permettre une introduction formelle du concept de fonction, basé sur la notion centrale de variable. Exprimée d'abord par une formule algébrique dans la première moitié du XVIII^e^ siècle, la définition de la notion de fonction se généralise à des expressions différentes dans la seconde moitié du XVIII^e^ siècle. L'analyse montre que c'est sur l'idée de dépendance qu'est basé le concept de fonction (variable), mais c'est également par l'idée de variation et la mathématisation du temps qu'il a pu se développer; c'est l'adjonction de ces deux aspects qui a permis cette genèse. L'approche ensembliste de ce concept par une mise en correspondance, terme à terme, des éléments de deux ensembles évacue cette idée de variation et se rattache à la théorie des ensembles (Bourbaki, 1960).
- Le second constat concerne la concrétisation de ces phénomènes dans un contexte géométrique, évoluant d'un aspect qualitatif, à travers des configurations géométriques qui permettent de saisir la nature des changements sans recours aux mesures, vers un aspect quantitatif pour lequel les grandeurs ont joué un rôle important dans la conception de la variable dépendante.
- Le troisième constat est que les relations de dépendances dynamiques entre deux quantités (grandeurs) variables et de covariation caractérisent un aspect important du mode de pensée fonctionnelle. Cette perspective entraine un point de vue dynamique sur les fonctions qui renforce l'expérience du changement et du mouvement.

- Le quatrième constat est que l'introduction de la fonctionnalité par l'intermédiaire des équations constitue une étape importante dans le développement des mathématiques. Le lieu d'articulation entre équation et fonction fut le cadre des grandeurs, particulièrement « les courbes géométriques » retenues par Descartes à l'époque. C'est la première fois qu'une équation entre x et y (donc à deux inconnues) permet de faire émerger une relation de dépendance fonctionnelle entre quantités variables. L'obtention d'une longueur par l'intermédiaire d'une autre par des opérations algébriques est liée à la théorie des proportions exactes.

2.4 La dialectique algébrique/fonctionnelle dans l'enseignement

Certaines recherches ont tenté d'apporter une caractérisation d'un mode de pensée fonctionnelle dans l'objectif d'analyser certains choix curriculaires. Robert (2018) apporte une caractérisation de la pensée fonctionnelle sur la base de quelques approches : la manière de voir la pensée et l'activité selon Radford (1996, 2006, 2014); la manière tridimensionnelle d'opérationnaliser la pensée selon certains membres de l'Observatoire international de la pensée algébrique (Robert et al., 2018) et les quelques définitions de la pensée fonctionnelle trouvées dans les recherches et le cadre conceptuel du concept de fonction. Elle spécifie la pensée fonctionnelle comme une manière de penser dans des activités faisant intervenir la notion de fonction (activités fonctionnelles) de manière explicite ou implicite à travers les différents sens de la fonction. Selon Robert et al. (2018), la pensée fonctionnelle s'opérationnalise à partir d'un rapport particulier aux concepts fonctionnels qu'elle englobe : la variable, la dépendance, les relations fonctionnelles, la relation d'équivalence, la covariation et la correspondance.

> Nous caractérisons la pensée fonctionnelle comme une manière de penser dans des activités fonctionnelles qui s'appuie sur diverses tendances de l'esprit. Elle s'observe à travers différentes composantes, dont un ensemble de raisonnements fonctionnels particuliers, un rapport particulier aux concepts fonctionnels et une manière de communiquer. (Robert et al., 2018, p. 53)

Ainsi, l'amorce d'une pensée fonctionnelle est considérée par Carraher et Schliemann (2007) comme étant une voie d'accès très intéressante à utiliser dans le courant des recherches *Early Algebra*. L'introduction des fonctions dans le cadre algébrique à un niveau d'enseignement élémentaire est importante, les situations fonctionnelles ne sauraient se passer de compétences algébriques. Par exemple, la définition du mode de pensée fonctionnelle inspirée des travaux de Smith (2008) apporte un éclairage sur ce point :

> la pensée représentationnelle se concentre sur la relation entre deux quantités variables (ou plus), en particulier sur les types de pensée qui conduisent des

> relations spécifiques (occurrences individuelles) aux généralisations de cette relation entre les occurrences. (p. 532, traduction libre[1])

Ce point de vue rejoint celui de Beatty et Bruce (2012) pour qui la pensée fonctionnelle consiste à analyser des régularités (numériques et géométriques) pour identifier un changement et reconnaître la relation entre deux ensembles de nombres. Cette méthode implique l'étude de la façon dont certaines quantités sont liées à d'autres quantités, ou encore modifiées ou transformées par celles-ci. La pensée fonctionnelle parait ainsi une autre forme de généralisation. Une fonction est une relation particulière entre deux ensembles de données, tel que chaque élément d'un ensemble est associé à un élément unique d'un autre ensemble. La représentation visuelle des régularités permet aux élèves de penser à des relations entre des quantités allant au-delà des calculs en arithmétique. Ainsi, il apparait que la dialectique algébrique/fonctionnelle dans le cursus scolaire des élèves doit être pensée de manière à développer simultanément ces deux modes de pensée. Toutefois, cela ne doit pas être naturalisé, lorsqu'il s'agit de repenser, par exemple, le statut des lettres ou de l'égalité, l'équivalence des relations fonctionnelles et la dialectique entre registres sémiotiques.

3. Cadre théorique

Les fondements épistémologiques de la TAD peuvent inspirer le travail historique en renforçant l'importance de l'étude des lieux de transmission et plus globalement, les dimensions sociale et culturelle de la production scientifique (Dorier, 2015). En effet, la recherche en didactique requiert de remonter aux origines du processus de transposition didactique, jusqu'à la production du savoir savant, pour « se déprendre de la familiarité de son objet d'étude, et exercer sa vigilance épistémologique » (Chevallard, 1991, p. 15). Ainsi, à travers le regard institutionnel de cette théorie, les obstacles épistémologiques trouvent des racines profondes dans la culture, au point que certaines analyses nécessitent de remonter très haut dans l'échelle de codétermination didactique (Radford, 1996).

3.1 La notion de praxéologie

La TAD permet de modéliser toute pratique humaine ou sociale en termes de praxéologie (Chevallard, 1998). Celle-ci permet de décrire et d'analyser toute activité mathématique en la décomposant en un quadruplet (tâche, technique, technologie et théorie). Selon ce modèle, les pratiques institutionnelles peuvent

---

[1] […] it is representational thinking that focuses on the relationship between two (or more) varying quantities, specifically the kinds of thinking that leads from specific relationships (individual incidences) to generalizations of that relationship across instances (Smith, 2008, p 143).

être analysées par un découpage en un système de tâches (t) appartenant à des types de tâches (T) (Bosch et Chevallard, 1999). Toute tâche t est accomplie au moyen d'une technique. Chaque technique est justifiée à son tour par une technologie. Celle-ci correspond à un discours rationnel qui permet d'expliquer la technique. Finalement, toute technologie repose elle-même sur les fondements d'une théorie (Chevallard, 1998). Cette décomposition en praxéologies modélise l'activité mathématique pour en favoriser l'analyse. Dans le cadre de cette étude, cette modélisation permet d'analyser les organisations mathématiques (OM) développées autour des aspects fonctionnels dans le domaine algébrique, à l'entrée au secondaire. Nous tentons de relever des aspects plus ou moins ignorés ou cachés dans la dynamique existante entre ces organisations mathématiques.

3.2 Les ostensifs et non-ostensifs

La TAD définit deux classes d'objets : les ostensifs et les non-ostensifs au niveau des praxéologies. La première classe est constituée d'objets matériels, ce sont les objets qui peuvent être manipulés (un mot, un symbole, etc.). Cependant, les non-ostensifs sont des objets abstraits comme les concepts ou les idées. Bosch et Chevallard (1999) évoquent la dialectique ostensifs / non-ostensifs dans l'activité mathématique; le remplacement d'un ostensif par un autre ou sa naturalisation peut avoir des effets sur le développement de l'activité. Nous nous intéresserons particulièrement aux conditions d'émergence et de manipulation de certains ostensifs, par exemple, les graphiques, expressions algébriques, variable, ou *f(x)* que l'on retrouve dans les textes officiels.

3.3 Les niveaux de codétermination didactiques

Une hiérarchie de niveaux de détermination mise en avant par Chevallard (2002), allant des sujets d'étude à la discipline, permet de préciser cette première échelle des organisations praxéologiques, tout en les repositionnant les unes par rapport aux autres. Ces niveaux supérieurs de détermination didactique sont définis de la façon suivante :

- La discipline (NV1) : ici, les mathématiques sont considérées comme un amalgame de domaines d'études.
- Le domaine d'étude (NV2) : ici, l'algèbre correspond à une organisation globale représentant à son tour une amalgamation de plusieurs organisations régionales (Tji/δji/θj/ θk).
- Le secteur (NV3) fait appel à l'organisation régionale, donc à l'amalgamation d'organisations locales se basant sur la même théorie. Nous considérons dans cette étude les secteurs relatifs aux équations et aux fonctions (linéaires et affines).

- Les thèmes d'études (NV4) correspondent à l'organisation locale (Ti / δi / θ / θ). Ces thèmes sont réunis dans des organisations régionales étiquetées comme secteur d'études.
- Les sujets d'étude (NV5) renvoient généralement à un type de tâche T; ce sont des questions et des organisations ponctuelles. Ils se regroupent plus ou moins clairement dans des organisations locales qui représentent les thèmes d'études.

Nous faisons implicitement référence aux travaux de Bosch et Gascón (2005), qui introduisent l'idée d'une organisation mathématique (OM) de référence comme modèle praxéologique du curriculum de mathématiques dont l'élaboration s'appuie sur les programmes et les manuels officiels. L'interprétation des effets possibles de cette OM sur les praxéologies instaurées nécessite, selon les personnes auteures, la prise en compte d'un point de vue épistémologique.

4. Analyse institutionnelle

Divers travaux menés sur l'enseignement de l'algèbre montrent une diversité d'entrées possibles au domaine de l'algèbre élémentaire que l'on retrouve par exemple dans les travaux de Kieran (1992). Trois approches semblent privilégiées dans l'enseignement, une première, par la généralisation à travers des situations numériques et géométriques, une seconde, par la modélisation de situations en termes fonctionnels, apparue historiquement et qui revêt de plus en plus d'importance au niveau des curriculums; et une troisième, par les équations, perçue selon certains chercheurs comme une approche réductrice de l'algèbre.

Dans le contexte tunisien, après la réforme des mathématiques modernes centrée sur l'aspect purement ensembliste et structuraliste du concept de fonction, les réformes successives de l'enseignement secondaire jusqu'en 2004 ont fondé leur approche d'enseignement de l'algèbre sur les équations (Ben Nejma, 2004). La réforme actuellement en vigueur est particulièrement centrée sur la modélisation et articule les points de vue équationnel et fonctionnel. L'accent est notamment mis sur les concepts de variable et fonction par la résolution de problèmes du cadre des grandeurs physiques et géométriques. Cette approche confère un aspect plus « dynamique » du savoir algébrique à enseigner par contraste avec l'aspect « statique » qui caractérise l'approche équationnelle.

4.1 Méthodologie

Nous identifions, au sein du domaine algébrique, les niveaux de codétermination didactique inférieurs et les liens qui subsistent. Nous caractérisons ensuite les OM développées autour des notions de variable, relation fonctionnelle, dépendance et variation à partir des activités du manuel. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que, dans le contexte tunisien, et par contraste avec d'autres systèmes éducatifs, nous disposons d'un manuel officiel unique pour chaque niveau d'enseignement qui est la principale référence à suivre par les enseignants, traduisant les directives du programme officiel. Notre étude est exemplifiée par des éléments d'analyse à priori qui mettent en avant les contextes dominants (extramathématique, géométrique, concret), les registres de représentation les plus sollicités, les éléments explicites ou implicites du bloc technologico-théorique développés et les ostensifs et non-ostensifs en jeu dans ces activités. Au regard de l'étude historique, nous menons une réflexion sur les praxéologies développées autour du concept de fonction, en examinant si elles sont éventuellement portées par des éléments historicoépistémologique favorisant le développement du mode de pensée fonctionnelle.

4.2 Description du contexte institutionnel et aperçu des programmes du collège

Dans le système éducatif tunisien, l'enseignement est organisé en trois niveaux : l'enseignement de base (6-14 ans), le secondaire (15-18 ans) et le supérieur (18-21 ans). L'enseignement de base, qui s'étend sur une période de 9 ans, comporte le cycle primaire d'une durée de 6 ans, sanctionné par un diplôme permettant de poursuivre l'enseignement au collège et par un concours facultatif pour entrer aux collèges pilotes. Le collège, d'une durée de trois ans, est sanctionné par un brevet de fin d'enseignement de base qui permet la transition au cycle secondaire et par un concours d'accès aux lycées pilotes. Le cycle secondaire, d'une durée de quatre ans, est sanctionné par le diplôme du baccalauréat. L'enseignement des mathématiques à partir du cycle secondaire est dispensé en langue française. Les programmes officiels indiquent comme premier objectif de « faire accéder l'apprenant progressivement à la pensée abstraite à travers la mathématisation de certaines situations de la vie pratique » (République tunisienne, 2008, p. 7). En septième année de base, le domaine des mathématiques auquel il est fait référence est l'arithmétique, les équations ne font pas encore leur apparition dans le paysage mathématique des élèves. En huitième année de base sont introduits les nombres relatifs ainsi que la notion d'équation du premier degré à une inconnue. Les objectifs visent la maitrise du calcul sur les nombres relatifs (entiers ou rationnels) et la résolution des équations du premier degré dans l'ensemble des nombres rationnels. L'enseignement de l'algèbre est pensé avec la manipulation de grandeurs négatives et l'emploi d'un langage spécifique à l'algèbre (inconnue, équation, solution). C'est à partir de la neuvième année de base que les nombres réels sont introduits ainsi que les propriétés relatives aux opérations usuelles, les notions d'ordre, d'encadrement et d'intervalles. La dernière partie est consacrée aux équations et inéquations du premier degré. Elles font toutes les deux l’objet d’un même chapitre dont les objectifs énoncés s’organisent autour de la résolution de problèmes par la mise en équation.

4.3 Analyse du programme et du manuel officiel de première année du secondaire

Ces programmes sont formulés en termes de compétences que nous considérons d’un point de vue anthropologique comme des éléments du bloc pratico-technique [T,τ], et de savoirs à enseigner. Ces éléments peuvent être perçus comme des constituants du bloc technologico-théorique [θ,Θ], qui peuvent aussi nous renseigner sur les types de tâches et les techniques attendues. En première année du secondaire, on amorce progressivement l’entrée dans la pensée fonctionnelle sur la base d’activités de modélisation qui précèdent l’étude des fonctions linéaires et affines. La définition explicite de la notion de fonction est donnée en deuxième année, suivie de l’étude de quelques fonctions usuelles et polynomiales.

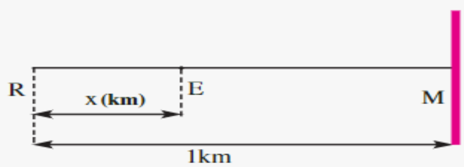
4.3.1 Analyse des niveaux de codétermination didactique

Le programme en vigueur est constitué de sous parties intitulées « Activités numériques », « Activités algébriques », « Activités géométriques », Activités statistiques », « Activités dans un repère » et « Activités sur les mesures des grandeurs ». Cette organisation de l’étude révèle une association des secteurs consacrés aux équations et inéquations et une intercalation des thèmes d’étude : fonctions linéaires / équations et inéquations du premier degré à une inconnue / fonctions affines / système de deux équations linéaires à deux inconnues. Les secteurs « Équations » et « Fonctions » sont entremêlés et imbriqués au travers de certains concepts comme la linéarité, la proportionnalité (dans les activités numériques et la recherche d’une quatrième proportionnelle dans le thème consacré aux équations à une inconnue) et le graphique. Le travail graphique constitue un sujet d’étude permanent au sein du domaine algébrique et joue un rôle important dans l’imbrication des différents thèmes et secteurs, particulièrement dans les interrelations entre équation et fonction. Il est suggéré que : « En particulier, les élèves modélisent des situations réelles en produisant des représentations graphiques; les élèves analysent et interprètent une représentation graphique modélisant une situation » (République tunisienne, 2008, p. 7).

Une modélisation fonctionnelle de situations extramathématiques. L’imbrication des sujets d’études s’appuie sur une dialectique entre le registre graphique et celui des écritures fonctionnelles, dans un contexte de modélisation de situations issues du cadre des grandeurs géométriques ou physiques. Dans ce contexte, le graphique apparait comme bien plus qu’un ostensif, il donne lieu à un travail spécifique. Il est perçu comme devant servir à l’illustration des phénomènes mathématiques, comme la vitesse du son illustrée par l'extrait suivant du manuel officiel de première année (figure 1).

Situation **La vitesse du son**

Un émetteur E est situé entre un récepteur R et un mur M.



Un son est émis par E. Le récepteur R reçoit directement le son émis par E, ainsi que l'écho qui résulte de la réflexion du son sur le mur.
On désigne par t(x) le temps (en secondes) mis par le son pour parcourir la distance ER.
On désigne par t' (x) le temps (en secondes) mis par le son pour parcourir la distance EM + RM.
1- a) Sachant que la vitesse du son est 340m/s, exprimer t(x) en fonction de x.
b) Représenter la fonction affine associée et colorer les points qui conviennent aux données.
2- Exprimer t'(x) en fonction de x.
3- Sachant que le récepteur a reçu l'écho quatre secondes après le son, calculer ER.

Figure 1 : modélisation fonctionnelle : la vitesse du son. (République tunisienne, 2019, p. 220)

Une analyse à priori de ce problème du cadre des grandeurs (physiques) permet de constater qu'il met en jeu une relation fonctionnelle entre deux variables : le temps t(x) (respectivement, t'(x)) mis par le son émis par un émetteur pour parcourir une certaine distance x (resp(2-x)). L'ostensif t(x) (resp t'(x)) renvoie déjà à l'expression algébrique d'une fonction t (resp t') de x qui fera correspondre pour tout $0 < x < 1$ le temps t(x) (image de x). La première tâche consiste à exprimer la relation de correspondance entre x et t(x) dont la technique s'appuie sur la formule de vitesse $v = \frac{d}{\Delta t}$avec la donnée implicite que la vitesse du son est constante. La relation est modélisée sous forme de $t(x) = \frac{x}{V}$, puis le passage au numérique donne lieu à $t(x) = \frac{x.10^3}{340} = \frac{50\,x}{17}$, en tenant compte des contraintes de l'énoncé liées aux unités de mesure (km et m). La seconde tâche s'organise autour d'une relation fonctionnelle entre x et t(x) représentée dans le registre graphique. L'ostensif « affine » est convoqué, pourtant la fonction t en est un cas particulier, celle d'une fonction linéaire. Le concept de proportionnalité semble au cœur de la définition de bien des grandeurs physiques; il est inséparable de notions comme vitesse, débit, taux d'accroissement, pente d'une droite décrivant un phénomène physique. Il s'agit d'une OM ponctuelle qui permet de faire le lien entre les fonctions linéaires et le travail sur les formules. Par la suite, les élèves sont amenés identifier, parmi les données du problème, l'intervalle de variation de x qui est [0,1] convoqué par la tâche « colorer des points qui conviennent aux données ». La courbe représentative de t dans ce cas n'est plus le cas classique des droites habituellement représentées sur l'ensemble des nombres réels IR, mais d'un segment de droite dont les extrémités sont les points de coordonnées (0,0) et $(1,\frac{50}{17})$. La tâche suivante laisse davantage d'autonomie à l'élève dans la recherche de la nature de la fonction t'reliant x et la distance EM + RM. Cette distance sera modélisée par l'expression algébrique :1 + (1 - x) = 2 - x. Toutefois, l'interprétation du phénomène comme le produit du temps mis pour parcourir cette distance par la vitesse du son physique (raison d'être) n'est pas convoquée. La relation fonctionnelle attendue est : $t'(x) = \frac{2-x}{V} = ax + b$ avec a = -1/v et b = 2/v. Cette fois, il s'agit d'une fonction affine, mais la représentation graphique n'est plus convoquée. Il aurait pourtant été intéressant d'une part, de percevoir la variation décroissante (a < 0) de la fonction représentée par le segment de droite dont les extrémités sont les points de coordonnées $((0,\frac{100}{17})$ et $(1,\frac{50}{17}))$ et d'autre part, de lier l'étude des graphes associés aux fonctions affines y = a x + b à la description de variations de grandeurs à accroissements proportionnels. Cela donnerait un point de vue plus opérationnel pour associer la pente d'une droite à une vitesse. L'accomplissement de la dernière tâche du problème conduit à une relation entre deux variables t(x) et t'(x) exprimées en fonction de la variable x : t'(x) = t(x) + 4. La perception de la relation fonctionnelle en tant qu'équation $\frac{2-x}{V} = \frac{x}{V} + 4$ est un véritable changement de point de vue. Il s'agit de repenser le nouveau statut de la lettre x comme inconnue (x = 1 - 2v = 0,320km.) Celle-ci correspond à la distance ER, lorsque le récepteur reçoit l'écho quatre secondes après le son.

Cet exemple illustre le type de problèmes souvent posés dans les manuels mettant en jeu des relations entre les variables temps et distance. Ces lois de la nature sont exploitées pour amorcer une entrée dans la pensée fonctionnelle. Ainsi, comme à l'époque d'Euler, une quantité variable devient déterminée, lorsqu'on lui attribue une valeur déterminée quelconque. La raison d'être de ces activités semble liée à l'Histoire, notamment à la genèse des concepts fonctionnels dans un contexte extramathématique : « Le besoin de chercher à quantifier certains phénomènes tels que la chaleur, la densité, la vitesse et la distance a amené les mathématiciens à établir une correspondance entre une quantité variable et la loi de variation de cette quantité » (République tunisienne, 2019, p. 226).

Les inéquations au cœur d'une interrelation entre équations et fonctions. Le thème consacré aux inéquations du premier degré à une inconnue joue un rôle important dans l'interrelation entre équation et fonction. La présence des inéquations dans le contexte des équations ne se limite pas en effet à la modélisation des problèmes concrets. Durand-Guerrier et al. (2000) précisent que ce rapprochement est susceptible d'alimenter un point de vue dynamique sur l'algèbre enseigné et permet d'amorcer le concept de variable. Les auteures affirment que

> la question du signe de a x + b selon x ne peut guère être séparée de celle de la résolution d'inéquations, mais la présenter en lien avec l'étude des fonctions affines correspondantes et de leur représentation graphique est un moyen de favoriser le point de vue variable. (Durand-Guerrier et al., 2000, p. 96)

Ce problème concret (figure 2), proposé dans le manuel permet d'illustrer cet aspect.

Situation 3

Comparaison de Tarifs

Une agence de location de voitures propose à ses clients deux options :

Option A : Forfait 60^{D} et $0^{D},400$ par km.

Option B : Forfait 80^{D} et $0^{D},300$ par km.

Quelle est l'option la plus avantageuse selon le nombre de kilomètres parcourus ?

Figure 2 : Comparatif de tarifs (République tunisienne, 2019, p. 206)

Une analyse à priori de ce problème de modélisation algébrique posé dans un contexte concret permet de constater qu'il conduit à la résolution d'une inéquation du premier degré à une inconnue. L'OM attendue s'organise autour de relations fonctionnelles entre deux variables : le nombre de kilomètres à parcourir et les tarifs respectifs de l'option A et de l'option B. Or, il semble que la conversion des données formulées dans le registre du langage naturel vers le registre symbolique en posant les bonnes variables est problématique. En effet, si l'ostensif x est choisi pour désigner le nombre de kilomètres à parcourir, les ostensifs A(x) et B(x) renvoient aux tarifs de chaque option en fonction de x. La modélisation en jeu moyennant ces ostensifs met en avant des relations de correspondance entre variables (dépendantes et indépendantes). Des expressions algébriques de fonctions affines : $A(x) = 60 + 0{,}4x$ et $B(x) = 80 + 0{,}3\,x$ modélisent les tarifs pour les deux options. Les élèves sont amenés à comparer deux expressions qui sont en fait des grandeurs, ce qui convoque une étude du signe de leur différence, ici $B(x) – A(x) = 20 -0{,}1\ x$. Il s'agit par la suite de résoudre une inéquation à une inconnue : $20 - 0{,}1\,x > 0$, dont la solution est $x < 200$. Le retour au contexte permet de conclure que l'option A est la plus avantageuse ($B(x) > A(x)$) lorsque le nombre de kilomètres ne dépasse pas 200. Dans le registre fonctionnel, on peut considérer qu'il s'agit d'un problème d'optimisation : déterminer l'ensemble des valeurs de la variable x, pour lesquelles $B(x) – A(x)$ est maximale.

En allant plus avant dans l'identification des sujets d'étude repérés dans le manuel officiel, il apparait d'abord deux domaines intitulés « Travaux géométriques » et « Travaux numériques » au sein desquels se réalise l'étude conjointe du numérique, du calcul algébrique, du traitement des équations, des inéquations et des fonctions. La nouvelle disposition des sujets d'étude au sein du domaine algébrique montre la prégnance du cadre des grandeurs et des proportions. Le registre graphique est omniprésent. Une articulation des registres algébrique et graphique est mise en avant dans des problèmes de modélisation, dont certains qui seront exemplifiés dans cette étude.

4.3.2 Analyse des organisations mathématiques autour des notions de variables, dépendance, relations fonctionnelles, correspondance et covariation.

L'analyse de certaines activités dans la partie « cours » du manuel présente quelques problèmes du cadre numérique visant à renforcer les acquis des élèves autour du statut de la lettre. Cependant, la plupart des problèmes font appel à des situations de modélisation entre grandeurs géométriques (57 %) et physiques (34 %). Les OM globales développées autour des grandeurs s'appuient sur des formules qui mettent en rapport plusieurs OM régionales du domaine algébrique. Celles-ci sont développées simultanément grâce à l'articulation de différents registres sémiotiques (numérique-algébrique-graphique-figures géométriques-tableaux de valeurs), investis à leur tour dans des OM ponctuelles.

Génération des concepts de variable et correspondances fonctionnelles. La notion de variable émerge de situations qui réfèrent en général au continu géométrique, par le biais d'une figure et d'un point variant sur un segment ou une courbe (côté, arête ou arc de cercle). La distance d'un point variable à un point fixe est modélisée par un réel x, et c'est à partir d'une formule entre grandeurs qu'une relation fonctionnelle implicite entre variables est établie. Dans ce cas, les activités proposées prêtent souvent à confusion entre les statuts d'inconnue et de variable. Toutefois l'usage implicite du concept de variable est convoqué non pas à travers le concept de fonction, mais par le biais de celui de formule. À ce propos, Kieran et al. (2016) soulignent que le type d'erreurs que les élèves peuvent commettre dans les activités de transformations algébriques peut être en rapport avec une perception erronée du concept de variable. En effet, le développement des notions de variable et de relations fonctionnelles doit passer par une reconnaissance de la structure des expressions de la part de l'élève. Dans l'ancienne réforme du système tunisien, le modèle proposé pour mettre en avant ces aspects était celui d'une représentation simplifiée et implicite d'une relation fonctionnelle linéaire du monde réel ou entre grandeurs géométriques. Le registre du tableau paraissait alors comme un moyen de représenter les relations de dépendance entre variables. Dans la réforme actuelle, cette notion émerge dans un contexte de modélisation qui accorde plus d'importance aux relations fonctionnelles non linéaires via des formules. Les auteures et auteurs du manuel justifient le choix d'une telle approche en se référant à l'histoire : « L'étude des mouvements est l'un des plus importants sujets traités dans l'histoire. C'est ainsi que, la plupart des fonctions introduites au XVIII[e] siècle ont été d'abord étudiées comme des courbes, celles-ci étant elles-mêmes considérées comme trajectoires de points en mouvement » (République tunisienne, 2019, p. 226). À titre d'exemple, on retrouve le problème du « pendule » de l'époque de Galilée (1564-1642) qui servait à décrire les mouvements, puis à les exprimer en tant que relations fonctionnelles (figure 3).

21 **Le pendule.**

Le temps mis par un pendule pour faire un aller-retour est donné par la formule $t = 2\pi\sqrt{\frac{L}{9,8}}$ où t est exprimé en secondes et L en mètres.

1- Calculer t pour L = 1.
2- Comment choisir L pour que le temps mis soit le double du précédent ?
3- Déterminer L pour avoir t < 1.

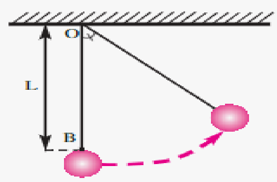


Figure 3 : Le problème du pendule (République tunisienne, 2019, p. 182)

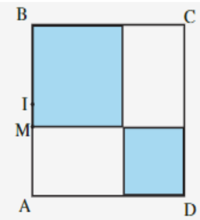
Une analyse à priori de l'activité proposée permet de constater que le mouvement du pendule n'est pas un objet d'étude, car la formule qui relie le temps t à la longueur L est d'emblée introduite. La perception de la variation semble naturalisée; il s'agit de travailler sur la formule donnée dans l'objectif d'amorcer une correspondance entre les variables t et L. À l'aide d'une technique de substitution numérique, il y a lieu de trouver la valeur d'une variable connaissant l'autre. Une résolution d'inéquation est convoquée par la troisième tâche, permettant de déterminer l'intervalle de variation de L tout en faisant varier t.

Génération de dépendances fonctionnelles entre variables. Dans la plupart des activités algébriques proposées, le type de tâche : « Pour une valeur donnée de l'une des variables, calculer la valeur de l'autre » est omniprésent. La technique requise convoque une substitution numérique dans une formule géométrique ou physique conduisant à la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue. Généralement, le statut sémiotique du symbole x (choisi pour l'inconnue) renvoyant à un objet qui à priori n'a pas d'existence va progressivement acquérir au fil des tâches proposées le statut de variable. Or, l'acquisition de ce statut n'a rien d'évident et renvoie à des obstacles épistémologiques déjà rencontrés dans l'histoire : remplacer une « quantité inconnue » dans une expression et la manipuler par des transformations analogues à celles qui règlent les « quantités connues », comme l'illustre l'exemple suivant (figure 4).

Mesure de grandeurs

Situation 1

Dans le dessin ci-contre, ABCD est un carré de côté 2cm, I est le milieu du segment [AB] et M est un point du segment [AB].
On note AM = x.
On désigne par R l'aire de la région colorée constituée de deux carrés.

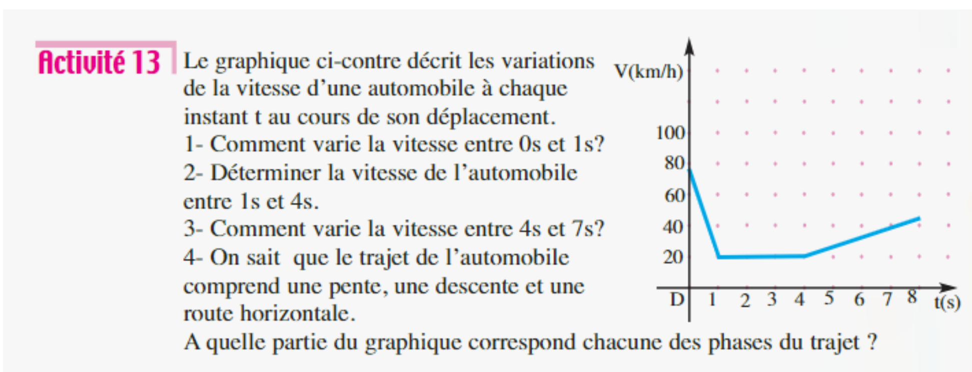


1- Que vaut R lorsque le point M est en A ?
2- Que vaut R lorsque le point M est en B ?
3- On suppose que M est en I. Que vaut R ?
4- Donner l'expression de R en fonction de x.
5- On suppose que BM = 0,25. Que vaut R ?
6- Existe-t-il une autre position de M pour laquelle on obtient la même valeur de R que dans 5)?

Figure 4 : La dépendance fonctionnelle entre grandeurs variables (République tunisienne, 2019, p. 176)

Une analyse à priori de la tâche montre que le point M est variable sur le segment [AB] et la distance AM désigne d'emblée la variable x. Il s'agit de considérer l'aire R comme une variable dépendante de x. À chaque position du point M, on fait correspondre la figure associée et la surface correspondante en fonction de x. Pour les deux premières tâches, la région colorée est formée d'un seul carré qui est ABCD dont l'aire est 4. Ce sont les points extrêmes de la variation de x dans l'intervalle [0,2]. Lorsque M est en I, la région colorée est formée de deux carrés superposables d'aire 1 chacun. La quatrième tâche consiste à établir la relation de dépendance fonctionnelle en x et R qui donne $R(x) = (2 - x)^2 + x^2$ donc $R = 2x^2\ 4x + 4$. La relation fonctionnelle convoquée n'est pas linéaire ou affine. Les tâches proposées dans les questions 4 et 5 consistent implicitement à trouver l'image de x (ici 7/4) par R(x) qui donnera 25/8 par une technique de substitution dans l'expression de R(x). L'antécédent de 25/8 permettra, par des techniques de manipulations formelles, de retrouver une seconde valeur de x qui est 1/4 (la nouvelle position du point M sur le segment [AB]). Ce qui émerge ici, ce sont les aspects de correspondance et de dépendance entre variables. La reproduction des figures, correspondantes à chaque position de M dans le registre géométrique, peut aider les élèves à saisir l'aspect de variation. En effet, les notions de variable dépendante et indépendante sont souvent mises en rapport avec l'interprétation du déplacement d'un mobile selon une trajectoire (ici dans une figure de l'espace). L'emploi des ostensifs du type « exprimer en fonction de… », ou à l'ostensif graphique (figure géométrique ou graphique) semble orienter les pratiques algébriques des élèves vers une conceptualisation des aspects fonctionnels. Toutefois, une grande part de responsabilité est laissée aux enseignantes et enseignants pour atteindre les objectifs institutionnels attendus.

Génération du concept de variation entre grandeurs. Les activités génératives du concept de variation font appel à des OM autour du graphique dans le cadre des grandeurs physiques. Deux OM ponctuelles sont développées autour des types de tâches : représentation graphique et lecture graphique. Les élèves analysent et interprètent une représentation graphique modélisant une situation. (République tunisienne, 2008). La principale compétence à développer repose sur une technique d'appréhension globale de la forme visuelle du graphique par rapport au champ quadrillé ou plan repéré, permettant une appréhension de la variation d'une grandeur en fonction d'une autre. La plupart des exercices allant dans ce sens font appel à des grandeurs physiques, notamment à la variable temps, et proposent un modèle non linéaire qui convoque une variation quelconque entre grandeurs, comme il est illustré dans l'exemple suivant (figure 5).



Activité 13 Le graphique ci-contre décrit les variations de la vitesse d'une automobile à chaque instant t au cours de son déplacement.
1- Comment varie la vitesse entre 0s et 1s?
2- Déterminer la vitesse de l'automobile entre 1s et 4s.
3- Comment varie la vitesse entre 4s et 7s?
4- On sait que le trajet de l'automobile comprend une pente, une descente et une route horizontale.
A quelle partie du graphique correspond chacune des phases du trajet ?

Figure 5 : Une visualisation du trajet d'une automobile (République tunisienne, 2019, p. 87)

Une analyse à priori des tâches proposées montre qu'elles reposent sur une lecture du graphique. Il s'agit implicitement d'une fonction affine par morceaux, avec des variations différentes de la vitesse en fonction du temps, décroissante puis constante selon l'intervalle du temps [0,8]. L'élève est amené à identifier les parties de la courbe qui correspondent à chacune des variations et à repérer la variable indépendante t et la variable dépendante v. Il n'est certes pas demandé de proposer une expression algébrique possible de v (t) dans chaque cas, ce qui aurait favorisé, à notre avis, une interaction entre les modes de pensée algébrique et fonctionnel au sein du registre graphique, par exemple, amorcer la notion de pente de la droite en la reliant, dans chaque cas, au coefficient de la fonction affine implicitement convoquée. Souvent, la perception de la variation repose sur une maitrise des techniques de pointage par le repérage d'un point et la lecture de coordonnées. L'appréhension globale du sens de variation d'une fonction est généralement amorcée par des situations de vitesse selon laquelle une trajectoire donnée est représentée dans un repère donné ou dans un champ quadrillé. Cela se rapproche de ce que l'on a pu observer à l'époque d'Oresme, motivant l'introduction des graphiques et des fonctions, chez Leibniz et Newton, associées systématiquement à des courbes parcourues en fonction du temps. Cependant, ce choix classique des situations proposées dans le manuel peut, selon certaines études, constituer un obstacle à la perception du concept de variation. En effet, Sierpinska (1992) évoque l'omniprésence du temps qui porte à penser que toute fonction est une fonction du temps, c'est-à-dire que la variable indépendante est forcément le temps. Ces considérations portent à croire que, d'un côté, les fonctions qui dépendent du temps sont essentielles au développement de la notion de variable (Biehler, 2006), l'idée de variation étant alors beaucoup plus facilement disponible (Krysinska et Schneider, 2010). La référence au temps peut même constituer, selon ces auteures et auteurs, une contrainte à la perception de la variation de grandeurs autres que le temps dans la mesure où « une imagerie cinématique des situations qu'elle soit ou non suggérée par les pratiques est un facteur didactique pouvant jouer favorablement sur l'émergence du regard fonctionnel » (Krysinska et Schneider, 2010, p. 34). L'omniprésence du temps et la vision statique sur le mouvement agissent alors comme obstacles. C'est du dépassement de ces obstacles, plusieurs siècles plus tard, au Moyen Âge, qu'émergera une analyse plus fine du mouvement par l'intermédiaire de l'étude de la relation entre la position et le temps. Cette analyse de la variation est alors rendue possible grâce au regard dynamique adopté sur la fonction. La relation entre une distance parcourue par un mobile en mouvement au fur et à mesure que le temps s'écoule est liée au concept de covariation.

5. Une mise en regard des deux analyses

De cette analyse, conduite sur la base des problèmes du cadre algébrique proposés dans le manuel, se dégagent des éléments de rapprochement avec les praxéologies de référence donnée à voir dans l'analyse historicoépistémologique.

- Les OM développées semblent vouloir retracer en quelque sorte l'histoire de l'introduction de la fonctionnalité par l'intermédiaire des équations, ce qui a constitué une étape importante dans le développement du concept de fonction. Le lieu d'articulation entre équation et fonction est le cadre des grandeurs, tout comme dans l'histoire, avec particulièrement « les courbes géométriques » retenues par Descartes à l'époque.
- Les OM développées dans le cadre algébrique autour des notions de variable et de relations fonctionnelles font souvent appel au contexte

géométrique ou physique dans une dialectique interregistres (algébrique, graphique, numérique) rendant nécessaire une nouvelle reconsidération du statut des lettres et des transformations algébriques. Par ailleurs, la notion de variable indépendante a toujours été liée à un domaine discret, un continu géométrique (ou un continu physique). « Toute chose mesurable, excepté les nombres, est imaginée dans une manière de quantité continue » (Youschkevitch, 1981, p. 94). Telle a été l'intuition d'Oresme à l'époque où il a explicité graphiquement la notion de fonction par une idée de variation continue. Les nombres entiers étant insuffisants pour « mesurer » les grandeurs, Oresme les représente par des longueurs. Bien que le numérique ne soit pas lié à ces représentations graphiques, cette correspondance entre grandeurs continues et graphiques, particulièrement entre temps et vitesse, lui permet de représenter les fonctions linéaires, affines et quadratiques. Toutefois, dans les travaux d'Euler, la présence du temps va jouer un rôle important ; on y observe l'idée du « temps physique », qui est implicite et que l'on retrouve d'ailleurs dans les situations proposées aux élèves. En effet, derrière cette notion, on trouve la notion de continuité. En fait, pour Euler, le continu restera dans un domaine physique, puisque la droite réelle n'existe pas sous forme numérique dans ces travaux (la droite numérique achevée est du XIX^e^ siècle). Dans cette définition, il n'y a pas de notion de domaine de définition, ni de valeurs interdites, ni d'usage de la notation f(x).

- L'omniprésence des formules entre grandeurs géométriques ou physiques dans les situations proposées peut engendrer des confusions entre inconnues, variables, relations fonctionnelles et expressions algébriques, même si la volonté des concepteurs du programme est d'amener les élèves à se représenter le concept de dépendances à travers des problèmes contextualisés. De plus, lorsque la modélisation fonctionnelle n'est pas guidée ou convoquée, il est possible que des stratégies de résolutions non attendues soient mises en œuvre. Des démarches aussi bien arithmétiques qu'algébriques peuvent très bien être éloignées des attentes institutionnelles. Cela suppose également que sur le plan des pratiques d'enseignement (Coulange et al., 2012), le point de vue « dynamique » du domaine algébrique amorcé soit perçu comme un véritable enjeu d'enseignement. Par exemple, au-delà de la notion de formule, on doit penser le passage du mode de pensée algébrique à un mode de pensée fonctionnelle en termes de variation. Or, dans la plupart des problèmes proposés à l'entrée au lycée, l'élève est amené à accomplir des transformations algébriques dépourvues de sens, sans un contrôle des résultats.

- La plupart des formules en jeu dans les situations géométriques du manuel présentent des liens de proportionnalité entre grandeurs. Or, bien que cette approche permette de dépasser le réductionnisme du registre algébrique par des situations où interviennent simultanément plusieurs variables et plusieurs formes de dépendance, elle est susceptible de freiner l'appréhension d'un modèle non linéaire et présente le risque de généraliser certaines propriétés de linéarité à des fonctions usuelles quelconques. Dans le contexte de grandeurs physiques, cela est possible au moyen de formules de types affine ou polynomiale.
- Les activités fondées sur l'étude des relations de dépendances entre grandeurs ou mesures mettent en avant une modélisation fonctionnelle qui permet de relier implicitement un domaine initial d'existence des grandeurs (le système physique) et le modèle mathématique (les fonctions mathématiques). Les activités suggérées par l'expression de la valeur d'une grandeur et par l'exploration de la variation entre grandeurs permettent de conceptualiser certains aspects de la pensée, mais laissent peu de choix à l'élève pour quantifier des dépendances fonctionnelles, ce qui pourrait compromettre cet objectif.
- La naturalisation de l'ostensif f(x) comme une généralisation de « ...en fonction de… » peut être justifiée par des considérations historiques. Le terme « fonction » a longtemps référé à une relation entre deux variables (grandeurs ou quantités numériques). Il est d'ailleurs assez fréquent de voir dans les écrits que « y dépend de x ou que y est une fonction de x ». Depuis le temps d'Euler, on observe, dans certains livres ou manuels, la notation « soit y = f(x) » qui se lit « soit y une fonction de x ». Avec le développement des travaux en analyse, une distinction claire et nécessaire doit être établie entre la variable y et le rôle que joue y par rapport à x (correspondance à partir de laquelle y dépend de la variable x). Le formalisme relié à f (notation attribuée à une fonction) et à f(x) (notation de la correspondance ou encore de la variabilité de x) n'est apparu qu'assez tard.
- Les OM développées autour de la représentation graphique (appelée aussi graphe[2]) par la perception de variations entre grandeurs physiques constituent une approche insuffisante pour développer le concept de covariation. C'est aussi la conversion inverse qui permettrait de percevoir cet aspect dynamique en guidant le travail de l'élève vers une

[2] Graphe d'une fonction. Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble Df, on appelle graphe de f (ou courbe représentative de f) l'ensemble des points (x, f(x)) du plan dont l'abscisse x est un élément de Df et l'ordonnée est l'image f(x) de x par f. Cet ensemble est en général noté graph(f) ou Cf.

> représentation d'un phénomène. Cela se rapproche des travaux de Rogalski (2013), qui précise le rôle de l'histoire dans le développement du concept de covariation de grandeurs (physiques, géométriques, etc.) et montre que l'introduction de la notion de fonction par la notion de graphe ne doit pas être naturalisée dans l'enseignement. Rogalski se demande pourquoi une courbe tracée dans le plan, uniquement numérique, ferait penser à la notion de fonction.

Conclusion

Penser les réformes de l'algèbre élémentaire dans une perspective fonctionnelle est un terrain d'étude encore peu exploré au niveau des recherches en didactique des mathématiques. Ce travail aborde cette thématique dans le système éducatif tunisien qui s'inspire du développement historique de ces concepts et qui est représentatif d'une grande majorité de systèmes institutionnels actuels. Ces travaux questionnent également la visibilité épistémologique et didactique des organisations contemporaines de l'étude de l'algèbre élémentaire. Dans notre étude, l'éclairage historique a servi de modèle épistémologique de référence pour appréhender certains choix curriculaires. La mise en regard des deux analyses historicoépistémologique et institutionnelle a permis de pointer, au niveau des praxéologies développées autour du concept de fonction, certains aspects ignorés ou cachés que l'on pourrait qualifier de vides institutionnels dans les OM développées autour des notions de variable, de dépendance fonctionnelle et de covariation, et cela, même si une articulation entre les objets de savoir équation et fonction est amorcée au sein du cadre algébrique.

Ainsi, du point de vue du développement du curriculum, se posent, à notre avis, deux questions importantes. La première concerne le « comment » débuter un enseignement favorisant une entrée dans la pensée fonctionnelle. En effet, l'algèbre est un levier pour développer une approche fonctionnelle. Toutefois, si l'on s'appuie uniquement sur le langage algébrique, les notions souvent abordées (proportionnalité, formule, linéarité) et les calculs associés, on pourrait venir bloquer le développement de certains aspects du cadre de l'analyse. Il nous semble qu'une approche interdisciplinaire entre mathématique et sciences physiques peut, par exemple, favoriser l'émergence des aspects fonctionnels dans un contexte de modélisation plus active. La deuxième question qui se pose renvoie à la prise en compte du développement historicoépistémologique de la pensée fonctionnelle dans la construction des curriculums. Finalement, comme le dit Brousseau (1998) :

> en aucun cas, il ne saurait suffire de plaquer, d'appliquer sans modifications, l'étude historique à l'étude didactique. Et c'est aussi à cette source qu'il faut puiser

> les arguments pour choisir une genèse scolaire d'un concept et construire ou "inventer" les situations d'enseignement qui produiront cette genèse. (p. 138)

Références

Artigue, M. (1991). Épistémologie et didactique, *Recherches en didactique des mathématiques, 10*(2.3), 241-286.

Artigue, M. (1998). L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. *Recherches en didactique des mathématiques*, *18*(2), 231-262.

Assude, T., Coppé, S. et Pressiat, A. (2012). Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège. Atomisation et réduction. *Recherches en didactique des mathématiques, Hors-série,* 41–62.

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Librairie philosophique J. Vrin.

Barbin, E. (1987). Dix ans d'histoire des mathématiques dans les IREM. *Bulletin de l'APMEP* (Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public), *358*, 175-184.

Bardini, C. (2003). *Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique* [thèse de doctorat, Université Paris-Diderot - Paris VII]. TEL. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00011697

Beatty, R. et Bruce, C. (2012). *Linear relationships : from patterns to algebra*. Nelson Publications.

Ben Nejma, S. (2004). *La mise en équations en première année de l'enseignement secondaire tunisien : transition collège/lycée* [mémoire de DEA inédit]. Université de Tunis.

Ben Nejma, S. (2009). *D'une réforme à ses effets sur les pratiques enseignantes. Une étude de cas : l'enseignement de l'algèbre dans le système scolaire tunisien* [thèse de doctorat, Université Paris VII et Université de Tunis]. TEL. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01267461

Ben Nejma, S. (2010). Quel impact d'une évolution du curriculum officiel sur les pratiques enseignantes? Étude de cas dans le contexte tunisien. *Petit x, 82*, 5-30.

Ben Nejma, S. (2012). Pratiques enseignantes et changements curriculaires : une étude de cas en algèbre élémentaire. Dans J.-L. Dorier et S. Coutat (dir.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle. Actes du colloque EMF2012* (p. 1133-1142). Université de Genève.

Biehler, R. (2006). Reconstruction of meaning as a didactical task: The concept of functions as an example. Dans J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose et P. Valero (dir.), *Meaning in mathematics education* (p. 61-81). Springer.

Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999). Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l’activité mathématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(1), 77-124.

Bosch, M. et Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d’analyse des processus didactiques. Dans A. Mercier et C. Margolinas (dir.), *Balises pour la didactique des mathématiques. Actes de la XII[e] école d’été de didactique de mathématiques* (p. 107-122). Éditions la Pensée sauvage.

Bourbaki, N. (1960). *Éléments d'histoire des mathématiques*. Éditions Hermann.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Éditions la Pensée sauvage.

Carraher, D. et Schliemann, A. (2007). Early Algebra and Algebraic Reasoning. Dans F. Lester (dir.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 669-705). Information Age Publishing.

Charbonneau, L. (1987). Fonction : du statisme grec au dynamisme du début du XVIII[e] siècle. *Bulletin AMQ* (Association mathématique du Québec), *XXVII*(2), 5-10.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné* (2[e] éd.). Éditions la Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : L’approche anthropologique. Dans R. Noirfalise (dir.), *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques. Actes de l'université d'été de La Rochelle* (p.91-119). IREM de Clermont-Ferrand.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l’étude 3. Écologie & régulation. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot et R. Floris (dir), *Actes de la XI[e] école d’été de didactique des mathématiques* (p. 41-46). Éditions la Pensée sauvage.

Coulange L., Ben Nejma S., Constantin C. et Lenfant-Corbin A. (2012). Des pratiques enseignantes aux apprentissages des élèves en algèbre. *Recherches en didactique des mathématiques, Hors-série*, 57-79.

Dorier, J.-L. (2015). Dimension épistémologique de la didactique des mathématiques. Dans Theis L. (dir.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes du colloque EMF2015* (p. 108-118). Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques,* 7(2), 5-31.

Durand-Guerrier, V., Le Berre, M., Pontille, M.-C. et Reynaud-Feurly, J. (2000). *Le statut logique des énoncés dans la classe de mathématiques : éléments d'analyse pour les enseignants*. Institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, *(5)*, 37-65.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. Dans D. A. Grouws (dir.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 390-419). National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. et Fong Ng, S. (2016). *Early Algebra. Research into its nature, its learning, its teaching*. SpringerOpen.

Krysinska, M. et Schneider, M. (2010). *Emergence de modèles fonctionnels.* Presses universitaires de Liège.

Passaro, V. (2015). *Analyse du raisonnement covariationnel favorisant le passage de la fonction à la dérivée et des situations qui en sollicitent le déploiement chez des élèves de 15 à 18 ans* [thèse de doctorat, Université de Montréal]. Papyrus. https://papyrus.bib.umontreal.ca/xmlui/handle/1866/13509.

Radford, L. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalization. Dans N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir), *Approaches to Algebra: perspectives for research and teaching* (p. 107-111). Kluwer Academic Publishers.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. Dans S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz et A. Méndez (dir.) *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 2-21). Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 257-277. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

République tunisienne. (2008). *Programmes de mathématiques. Enseignement secondaire.* Ministère de l'Éducation et de la Formation. http://www.edunet.tn/ressources/pedagogie/programmes/nouveaux_programme2011/secondaire/math.pdf

République tunisienne. (2019a). *Mathématiques. Première année de l'enseignement secondaire. Partie 1.* Ministère de l'Éducation. http://www.cnp.com.tn/cnp.tn/arabic/PDF/222104P02.pdf

Robert, V. (2018). *Le développement de la pensée fonctionnelle dans les manuels scolaires du 3e cycle du primaire québécois : une analyse praxéologique* [mémoire de maitrise, Université de Sherbrooke]. Savoirs UdeS. https://savoirs.usherbrooke.ca/handle/11143/12608

Robert V., Squalli H. et Bronner, A. (2018). La pensée fonctionnelle : une analyse praxéologique du potentiel de son développement précoce. Dans M. Abboud (dir.), *Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines. Actes du colloque EMF2018* (p. 51-63). Université de Paris.

Rogalski, M. (2013). Modéliser dans la classe de mathématiques, pourquoi et comment? Quelles relations entre mathématiques et physiques? Dans M. Gandit (dir.), *Commission de recherche sur la formation des enseignants de mathématiques (CORFEM). Actes du 20ème colloque* (p. 27-44). Université Joseph Fourier.

Ruiz-Munzón, N., Matheron, Y., Bosch, M. et Gascón, J. (2012). Autour de l'algèbre : les entiers relatifs et la modélisation algébrico-fonctionnelle. *Recherches en didactique des mathématiques, Hors-série*, 81-101.

Schliemann, D., Carraher, W. et Brizuela, B. (2012). Algebra in elementary school. *Recherches en didactique des mathématiques, Hors-série*, 2-15.

Serfati, M. (1997). *L'écriture des mathématiques. La recherche de la vérité.* Éditions du Kangourou.

Sfard, A. (1997). On metaphorical roots of conceptual growth. Dans L. D. English (dir.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images* (p. 339-371). Lawrence Erlbaum Associates.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. Dans E. Dubinsky et G. Harel (dir.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (p. 25-58). Mathematical Association of America.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. Dans J. L. Kaput, D. W. Carraher et M. L. Blanton (dir.), *Algebra in the early grades* (p. 133-160). Routledge.

Vuillemin, J. (1960). *Mathématiques et métaphysique chez Descartes.* Presses universitaires de France.

Vuillemin, J. (1962). *La philosophie de l'algèbre.* Presses universitaires de France.

Waldegg, G. (1997). Histoire, épistémologie et méthodologie dans la recherche en didactique. *For the Learning of Mathematics, 17*(1), 43-46.

Youschkevitch, A. (1981). Le concept de fonction jusqu'au milieu de XIXe siècle. Fragment d'histoire des mathématiques. Dans J.-L. Ovaert et D. Reisz (dir.), *Fragments d'histoire des mathématiques* (p. 7-68). Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public (APMEP).

Institutionnalisation et enseignement en contexte de résolution de problèmes

Jérôme PROULX
Laboratoire Épistémologie et Activité Mathématique
Université du Québec à Montréal
proulx.jerome@uqam.ca

Résumé : Cet article aborde la question de l'institutionnalisation des savoirs lors de l'enseignement des mathématiques en contexte de résolution de problèmes. Dans un premier temps, le concept d'institutionnalisation de Brousseau est examiné à partir de son origine et des définitions usuelles données en didactique des mathématiques. Par la suite, à partir d'un exemple tiré de travaux conduits en classe de mathématiques, ce cadrage est mis à contribution pour faire ressortir trois types de pratiques (nommées de validation, de reformulation et de ramassage) reliées à l'institutionnalisation. Finalement, une mise en relation supplémentaire des écrits permet d'investiguer comment ces trois pratiques s'arriment à, mais aussi se distinguent à certains égards, de la proposition initiale de Brousseau sur l'institutionnalisation.

Mots clés : institutionnalisation, résolution de problèmes, pratiques de validation, pratiques de reformulation, pratiques de ramassage

Institutionalization and teaching in a problem-solving context

Abstract: This article addresses the institutionalization of knowledge in a problem-solving context. First, Brousseau's concept of institutionalization is examined from its inception and according to its usual definitions in "didactique des mathématiques". Then, using an example taken from a study conducted in mathematics classrooms, this framing is used to draw out three types of teaching practices related to institutionalization (namely validating, reformulation and summarizing). Finally, an additional analysis illustrates how these three practices are aligned with, as well as differ from, Brousseau's initial conceptualization on institutionalization.

Key words: institutionalization, problem-solving, validating practices, reformulating practices, summarizing practices

1. Introduction au contexte et aux questions

Plusieurs des travaux menés au sein du Laboratoire Épistémologie et Activité Mathématique sont centrés sur l'étude de différentes façons de travailler en

Revue québécoise de didactique des mathématiques, 2020, *vol 1*, p. 70-109.
https://doi.org/10.71403/ta763065

contexte de résolution de problèmes en classe de mathématiques. Ces travaux nous[1] font intervenir dans plusieurs classes, du primaire à l'université, où divers types de problèmes sont proposés aux élèves : des problèmes simples à des plus complexes, en passant par du calcul mental, des énigmes, des mises en situation variées, etc. (voir Borasi, 1986, pour une classification de divers types de problèmes mathématiques).

Ces travaux s'ancrent dans la théorie cognitive de l'enaction et du « faire | mathématique » (Maheux et Proulx, 2014, 2015; Proulx et Maheux, 2017), concevant l'activité de résolution de problèmes comme un processus non-linéaire et évolutif. Ils s'inspirent aussi des travaux de Borasi (1992, 1996), Brown et Walter (2005) et Lampert (1990a, b) sur l'investigation et la résolution de problèmes en classe, où les élèves sont plongés en situations authentiques de résolutions et d'explorations mathématiques. Dans ces travaux, et de façon analogue au développement des mathématiques comme discipline (voir Davis et Hersh, 1981; Wilder, 1984), la résolution de problèmes est vue comme un processus émergent, ne suivant pas un plan pré-décidé, et à travers lequel de nombreuses questions et productions jaillissent en cours de résolution; ces nouvelles questions et productions devenant même parfois l'objet central de l'investigation en redirigeant l'exploration par leur prise en compte (voir aussi Cobb et al., 1994). Ce contexte mène à travailler avec les solutions et stratégies des élèves, produites en cours de résolution, en les questionnant, en établissant des liens entre elles, en relançant les élèves sur des interrogations diverses, etc. (voir Schoen, 2004a, b).

Dans ce contexte, les problèmes donnés aux élèves ne sont pas conçus, tel que décrit par Stanic et Kilpatrick (1988), en tant que véhicules ou transmetteur de savoirs mathématiques pré-décidés à acquérir par la résolution dudit problème. Les problèmes ont plutôt le rôle de déclencheurs de l'activité mathématique des élèves. L'intention de ces problèmes est de provoquer l'émergence de stratégies et de concepts à travers leur résolution, que l'enseignant devra prendre en compte et réinvestir pour faire avancer les mathématiques de la classe. Ainsi, mis à part les thèmes mathématiques globaux (par exemple, algèbre, estimation, géométrie, fractions, mesure), le contenu mathématique qui est abordé durant les séances en classe n'est pas totalement anticipé. Ce contenu mathématique prend forme à travers la résolution des problèmes, les stratégies suggérées et justifiées, les questions posées, les interactions entre les élèves, etc., qui forment le matériau avec lequel l'enseignant travaille pour faire avancer les mathématiques de la classe.

[1] Le « nous » est utilisé pour désigner toutes les personnes (enseignants, conseillers pédagogiques, étudiants, collègues chercheurs) qui se sont investies de près ou de loin dans les travaux menés au Laboratoire et qui ont interagit avec ceux-ci de différentes façons.

C'est en ce sens qu'il est souvent difficile de prévoir où les résolutions et explorations mathématiques des élèves vont précisément mener, car le tout se développe dans l'action même de la classe, à partir des échanges, des partages, des explorations et des questionnements mathématiques divers. Dans ce contexte, des mathématiques sont pensées, proposées, expliquées, produites sur-le-champ, etc., et fréquemment des « surprises mathématiques » émergent de leur exploration en classe.

Bien que fort dynamique, ce travail en classe nous a rapidement confrontés, comme chercheurs, aux questions d'institutionnalisation des savoirs. Nous avons voulu comprendre comment l'enseignement en contexte de résolution de problèmes que nous étudions peut participer au processus d'institutionnalisation, tel que développé par Brousseau en didactique des mathématiques. Cette situation nous a fait réfléchir sur le sens à donner à ce concept et aux actions qui peuvent être posées dans ces contextes de résolution de problèmes; des contextes bien différents, il va sans dire, de celui de la TSD dans lequel Brousseau a initialement développé son concept d'institutionnalisation. En particulier, deux questions spécifiques ont guidé notre travail : Quelles sont les pratiques mises en place lors des séances de résolution de problèmes qui se relient à l'institutionnalisation ? Quelles filiations peuvent être tracées entre ces pratiques et le concept d'institutionnalisation tel que proposé par Brousseau ?

Dans cet article, dans le but d'aborder ces questions, le concept d'institutionnalisation de Brousseau est premièrement examiné, à partir de son origine et des définitions usuelles données en didactique des mathématiques. Ceci offre un ancrage théorique pour mieux comprendre le concept d'institutionnalisation lui-même et faire ressortir des compréhensions pouvant s'arrimer avec nos travaux sur l'enseignement en contexte de résolution de problèmes. Par la suite, des dimensions d'ordre méthodologique sont proposées pour clarifier le contexte dans lequel nos travaux se réalisent, ainsi que leur nature, en faisant référence à un extrait illustratif d'une séance de classe conduite avec des élèves de 4e secondaire (15-16 ans). En fonction de cet extrait, trois types de pratiques sont présentées et reliées à l'institutionnalisation. Ces trois pratiques, nommées de validation, de reformulation et de ramassage, sont reprises et étudiées à travers une analyse des divers écrits de Brousseau sur le concept d'institutionnalisation. Ceci permet d'investiguer comment ces trois pratiques s'arriment à la proposition de Brousseau, mais aussi s'en distinguent à certains égards. De toutes ces analyses ressort une conceptualisation de l'institutionnalisation pour l'enseignement en contexte de résolution de problèmes, mais aussi une contribution, aussi modeste soit-elle, à l'approfondissement du concept d'institutionnalisation en didactique des mathématiques.

2. Ancrage théorique : origine et sens du concept d'institutionnalisation en didactique des mathématiques[2]

Dans le sens commun et les discussions informelles entre didacticiens et/ou (futurs) enseignants, l'institutionnalisation est souvent perçue comme une des dernières étapes du processus d'enseignement, soit comme synthèse ou fermeture d'une activité. L'enseignant y rend explicite les concepts mathématiques officiels qui ont été travaillés en classe ou encore comment ce qui a été fait par les élèves se situe à l'intérieur de mathématiques déjà reconnues par la communauté mathématique (les savoirs mathématiques culturels) pour légitimer et établir les avancées mathématiques réalisées durant le cours. Toutefois, mis à part ces compréhensions informelles du concept d'institutionnalisation, qu'en est-il de Brousseau lui-même ? Quels sens donne-t-il au concept à l'intérieur de sa théorie ? Un rappel du contexte social et d'expérimentation à l'intérieur duquel, comme chercheur, Brousseau a été amené à développer ce concept dans sa théorie offre une première entrée.

> Nous avons cru un instant avoir envisagé toutes les classes possibles de situations. Mais au cours de nos expériences à Jules Michelet, nous avons vu que les maîtres, au bout d'un moment, avaient besoin de ménager un espace; ils ne voulaient pas passer d'une leçon à la leçon suivante et souhaitaient s'arrêter, pour « revoir ce qu'ils avaient fait », avant de continuer : « quelques élèves sont perdus, ça ne va plus, il faut faire quelque chose ». Il a fallu un certain temps pour nous apercevoir qu'ils étaient vraiment obligés de faire quelque chose pour des raisons qu'il fallait s'expliquer.
>
> Les situations « adidactiques » sont les situations d'apprentissage dans lesquelles le maître a réussi à faire disparaître sa volonté, ses interventions, en tant que renseignements déterminants de ce que l'élève va faire : ce sont celles qui fonctionnent sans l'intervention du maître au niveau des connaissances. Nous avons fabriqué des situations adidactiques de toutes sortes. Le maître était là pour faire fonctionner la machine, mais, sur la connaissance elle-même, ses interventions étaient pratiquement annulées. Nous avions là des situations d'apprentissage – au sens des psychologues – et on pouvait penser que nous avions réduit l'enseignement à des successions d'apprentissage. Or, nous avons été obligés de nous demander ce qui justifiait cette résistance des maîtres à la

[2] Il est important de souligner que le concept d'institutionnalisation est traité ici en didactique des mathématiques. La sociologie, par exemple, a développé une conceptualisation différente du concept, tout comme le monde médical avec ses institutions diverses. Ces acceptions du concept dans différents domaines ne sont évidemment pas considérées ici.

> réduction complète de l'apprentissage aux processus que nous avions conçus. Il ne s'agissait pas de faire leur procès ou celui des méthodes mais de comprendre ce qu'ils avaient légitimement besoin de faire et pourquoi ils avaient besoin d'une certaine opacité pour le faire, face aux chercheurs.
>
> C'est ainsi que nous avons découvert (!) ce que font tous les enseignants à longueur de cours mais que notre effort de systématisation avait rendu inavouable : ils doivent prendre acte de ce que les élèves ont fait, décrire ce qui s'est passé et ce qui a un rapport avec la connaissance visée, donner un statut aux événements de la classe, comme résultat des élèves et comme résultat de l'enseignant, assumer un objet d'enseignement, l'identifier, rapprocher ces productions des connaissances des autres (culturelles, ou du programme), indiquer qu'elles peuvent resservir. (Brousseau, 1998, p. 310-311)[3]

Déjà, à cette lecture, Brousseau semble confesser que la situation d'institutionnalisation, bien qu'il la considère importante, a été provoquée par la nature des situations qu'ils mettaient en route comme chercheurs, où celles-ci « fonctionnent sans l'intervention du maître au niveau des connaissances ». En ce sens, il est possible de penser que d'autres types de situations, dans notre cas en enseignement en contexte de résolution de problèmes, peuvent mener à des façons différentes ou adaptées de travailler l'institutionnalisation en classe de mathématiques. C'est à travers cette perspective que l'analyse du concept d'institutionnalisation est ici réalisée, pour tenter de développer une vision de l'institutionnalisation qui s'arrime avec nos travaux autour de l'enseignement en contexte de résolution de problèmes.

La définition qu'en donnent Briand et Chamorro (1991), à l'intérieur d'un glossaire de didactique, se décline en ces termes :

> L'institutionnalisation consiste à donner un statut culturel ou social aux productions des élèves : activités, langage, connaissances (Brousseau, Angers 87). L'institutionnalisation porte aussi bien sur une situation d'action, que sur une situation de formulation ou de preuve. Les maîtres doivent prendre acte de ce que les élèves ont fait, décrire ce qui s'est passé et qui a un rapport avec la connaissance visée, donner un statut aux événements de la classe comme résultat des élèves et comme résultat de l'enseignant, assumer un objet d'enseignement, l'identifier, rapprocher ces productions des connaissances des autres (culturelles ou du programme), indiquer qu'elles peuvent resservir (Brousseau, Angers 87). Dans l'information traitée, l'enseignant choisit et expose, avec les conventions en usage, ce qui est nouveau à retenir. Il fait le « cours ». Ainsi, l'enseignant a la charge de

[3] Le livre de Brousseau de 1998 est celui qui est référé constamment au cours de cet article. Ce dernier rassemble plusieurs textes disparates publiés à différents endroits en un seul recueil. De plus, tous les textes ont été relus et mis à jour par Brousseau lui-même au cours de son édition.

> donner un statut aux concepts qui, jusque-là, sont intervenus comme outils. Il constitue alors un savoir de classe auquel chacun pourra se référer (R. Douady, MJ Perrin, ESM 20 1989). (Briand et Chamorro, 1991, p. 143)

Au moins quatre dimensions importantes ressortent de cette définition. La première est que l'institutionnalisation a pour but de conférer un statut culturel, voire officiel, aux productions mathématiques des élèves réalisées durant le travail en classe. L'idée est alors de valider ces productions, de les partager socialement, de montrer qu'elles sont utiles et importantes et qu'elles serviront dans le futur. La deuxième dimension est que ce rôle revient à l'enseignant. C'est à lui que revient le rôle d'exposer ce qui est à retenir, ce qui constituera un savoir mathématique sur lequel la classe pourra se référer (et aussi ce qui est possible d'oublier diront certains). La troisième dimension est relative au rapprochement par l'enseignant des productions des élèves avec celles de la communauté mathématique ou du programme d'étude. La quatrième, fortement reliée à la troisième, est que les productions développées au sein de la classe, individuellement et collectivement, sont reliées par l'enseignant aux savoirs visés par l'enseignement, c'est-à-dire que les productions des élèves sont mises en relation avec le savoir visé initialement par la situation proposée.

Alors que les trois premières dimensions semblent s'arrimer avec nos travaux, tel que détaillés plus bas, la quatrième semble quelque peu lui faire défaut. En effet, tel que mentionné, lors de l'enseignement en contexte de résolution de problèmes, les problèmes ne sont pas conçus comme des véhicules servant à atteindre un savoir spécifique et préalablement visé. Ceux-ci sont des déclencheurs de l'activité mathématique des élèves; ce qui rend la reproductibilité des situations en contexte de résolution de problèmes un enjeu difficilement conceptualisable. À ce propos, la définition qu'en donne Brousseau ne s'aligne pas tout à fait avec la question des savoirs culturels, ou plutôt ne les envisage pas comme étant la seule et unique avenue. La conceptualisation de Brousseau semble plus « ouverte » à l'activité mathématique de l'élève en elle-même et non pas uniquement au regard d'un savoir externe qui la justifie. En ce sens, elle permet une meilleure adaptation à nos travaux.

> Situation d'institutionnalisation d'une connaissance. C'est une situation qui se dénoue par le passage d'une connaissance de son rôle de moyen de résolution d'une situation d'action, de formulation ou de preuve, à un nouveau rôle, celui de référence pour des utilisations futures, personnelles ou collectives. […] Avant l'institutionnalisation, l'élève ne peut pas se référer à ce problème qu'il sait résoudre : devant un problème semblable, il doit produire à nouveau la démonstration. Au contraire après l'institutionnalisation, il peut utiliser le théorème sans en redonner la démonstration ou la méthode sans la justifier. L'institutionnalisation comporte donc un changement de convention entre les

> actants, une reconnaissance (justifiée ou non) de la validité et de l'utilité d'une connaissance, et une modification de cette connaissance – qui est « encapsulée » et désignée – et une modification de son fonctionnement. Il correspond donc à une institutionnalisation une certaine transformation du répertoire commun accepté et utilisé par ses protagonistes. L'institutionnalisation peut consister en une adjonction au répertoire mais aussi en un retrait d'une croyance commune reconnue soudain comme fausse. […] L'institutionnalisation peut déjà se produire dans des situations non didactiques d'auto-apprentissage spontané et aussi dans des processus auto-didactiques, c'est alors une convention interne au groupe d'actants (institutionnalisation non didactique). Mais elle est évidemment fondamentalement liée au processus didactique et résulte d'une intervention spécifique. C'est elle qui permet au professeur et à l'élève de reconnaître et de légitimer « l'objet de l'enseignement », même s'ils le voient de façons différentes. Elle peut consister en la reconnaissance par l'enseignant de la valeur d'une production des élèves. Elle affirme alors : (1) que la proposition de l'élève est valide et reconnue comme telle hors du contexte particulier de la situation présente, (2) qu'elle servira dans d'autres occasions, encore non connues, (3) qu'il sera alors plus avantageux de la reconnaître et de l'utiliser sous sa forme réduite que de l'établir à nouveau (4) qu'elle sera acceptée directement par tous ou au moins par les initiés. (Brousseau, 2003, p. 4-5)

Les mêmes thématiques se retrouvent ici chez Brousseau. La phrase « L'institutionnalisation comporte donc un changement de convention entre les actants, une reconnaissance (justifiée ou non) de la validité et de l'utilité d'une connaissance, et une modification de cette connaissance – qui est "encapsulée" et désignée – et une modification de son fonctionnement » est notable. Elle souligne la possibilité de reconnaître valides certaines connaissances ou productions sans que celles-ci soient justifiées, donc adéquates ou réellement utiles. Il est question ici de donner une légitimité à ces productions, bien qu'elles puissent être erronées : soit que cette erreur aura droit de vie un certain temps en classe ou encore que l'enseignant fasse lui-même une erreur en validant positivement celle-ci[4]. Cette production mathématique erronée pourra aussi, tel que Brousseau l'indique, être retirée par une institutionnalisation ultérieure qui la montrera limitée ou fausse. L'institutionnalisation est alors ici vécue comme un processus dynamique. Ceci illustre un caractère interne à l'institutionnalisation; interne à la classe et non nécessairement relié à la communauté externe mathématique.

De plus, la dimension « modification » insiste sur le caractère actif du processus d'institutionnalisation, qui modifie, clarifie ou reformule les idées émises pour les montrer mathématiquement fortes ou importantes. Ceci souligne un côté créatif

[4] Ce qui est tout à fait possible, comme certains travaux sur les connaissances des enseignants l'ont déjà montré (voir Heaton, 1992; Post et al., 1991).

de l'enseignant, qui établit des liens entre les productions des élèves et les savoirs culturels. Ces liens ne sont pas nécessairement explicites ou évidents dans les productions des élèves et l'enseignant fait alors un travail considérable pour relier, faire des analogies, modifier, rendre fonctionnelles, etc., ces productions mathématiques. Il est alors question d'une modification autant des productions mathématiques que de leur fonctionnement.

Brousseau ouvre ainsi sur la considération d'institutionnalisations internes à la (communauté de) classe, permettant de légitimer ce que celle-ci a produit, compris et proposé. Ceci se distingue de l'idée de ramener les productions des élèves à des savoirs culturels préétablis et visés d'avance, soit de l'idée de tout relier aux savoirs mathématiques externes. Les compréhensions mathématiques de la classe sont ici prises dans leur envol, en cours de travail et pour elles-mêmes. Ces compréhensions locales peuvent avoir une valeur même si elles ne sont pas en lien avec ou en fonction des mathématiques externes et culturelles. Il y a une acceptation que les élèves sont capables de créer, de faire des propositions authentiques, etc. De plus, ce qui est fait en classe n'est pas toujours connecté à un savoir visé préalablement. Des mathématiques intéressantes peuvent être proposées en cours de route de l'activité et celles-ci peuvent être valorisées et justifiées, même si elles ne sont pas celles qui avaient été visées au départ[5].

En ce sens, Brousseau ne fait pas uniquement référence à la communauté mathématique ou aux savoirs externes culturels pour parler d'institutionnalisation. La validation interne résulte des ententes de la communauté de validation qu'est la classe (voir aussi Boaler, 1999; Borasi, 1992; Lampert, 1990a), qui s'auto-suffit et construit son répertoire mathématique au fil des activités. C'est un répertoire dynamique, en constante possibilité d'être bonifié tout comme d'être élagué, en fonction de ce qui se produit en classe.

Cette perspective adoptée par Brousseau sur l'institutionnalisation a beaucoup de potentiel pour la concevoir au niveau de l'enseignement en contexte de résolution de problèmes, et pour conceptualiser les enjeux que cet enseignement soulève au niveau de l'institutionnalisation des productions réalisées. Ces ancrages théoriques sont directement réinvestis dans les sections suivantes pour donner un sens aux pratiques déployées en contexte de résolution de problèmes.

3. Éléments de méthodologie

Tel que souligné, nous collaborons dans nos travaux avec des enseignants qui nous invitent sur une base régulière dans leurs classes afin d'expérimenter différentes

---

5 Une idée similaire se retrouve chez Coulange (ex., 2012) avec son double mouvement à la fois descendant et ascendant dans les pratiques enseignantes reliées à l'institutionnalisation.

approches de résolution de problèmes et pour interagir, analyser et réfléchir avec eux sur l'enseignement qui a cours durant ces expérimentations. Comme ils prennent place dans diverses classes, nos travaux s'insèrent dans les planifications prévues des enseignants au niveau des thèmes à travailler avec les élèves. Les problèmes donnés aux élèves lors des séances sont sélectionnés à partir des écrits scientifiques, des manuels scolaires, des évaluations et documents ministériels, des revues professionnelles, ou simplement parce que ces problèmes sont typiques ou bien connus du monde de l'enseignement des mathématiques (par exemple, le problème des anniversaires, celui de Monty Hall, celui des poignées de mains[6]). Ces problèmes sont proposés, discutés et choisis de concert avec les enseignants (et comparés/contrastés avec le matériel de ces enseignants, qui peut tout autant leur être préféré). Ce processus nous permet de bénéficier des expertises des enseignants lors des stades de planification (Bednarz, 2000, 2009) et de développer des problèmes plus alignés à leur contexte de classe.

Les séances menées en classe suivent normalement le même format, démarrant avec un problème présenté aux élèves, écrit au tableau ou sur papier, ou encore donné oralement selon la nature de ce dernier. Les élèves ont par la suite un temps variable pour résoudre (seuls ou en équipe). Après ce temps, en plénière, les élèves sont invités à expliquer leurs stratégies et solutions à la classe, en s'assurant de bien justifier leurs raisonnements. Les élèves sont aussi invités à interagir entre eux au niveau des stratégies et solutions mathématiques offertes, à se questionner, à compléter les idées, à faire des liens entre les solutions, etc. À l'occasion, tel que mentionné, ces nombreuses interactions provoquent en retour de nouvelles investigations, où les élèves sont invités à creuser des idées et questions supplémentaires (Cobb et al., 1994), ici encore seuls ou en équipe.

Les données recueillies sont centrées sur ces discussions et interactions en classe, autant verbales, écrites au tableau que gestuelles, de la part des élèves et de l'enseignant, prises chronologiquement sous forme de notes de terrain par des assistants de recherche ou enregistrées sous format audiovidéo. Ces notes de terrain sont par la suite combinées et complétées par celles écrites à chaud par le chercheur.

L'analyse des données se produit en deux phases. La première phase consiste en des rencontres d'équipe (enseignants, chercheur et assistants) suivant les séances pour discuter de divers événements s'étant produits durant les séances et qui méritent attention (dans ce cas-ci, sur les pratiques reliées à l'institutionnalisation,

---

6 Par exemple, pour leur utilisation dans des travaux québécois, voir Doddrigde et Voyer (1999) pour le problème des anniversaires, voir Theis (2012) pour le problème de Monty Hall et voir Barry (2008) pour le problème des poignées de main.

mais d'autres thématiques sont aussi abordées). Ces rencontres offrent un premier niveau d'analyse, et permettent aussi une interprétation des événements à travers la lunette des enseignants. Ces rencontres représentent aussi des occasions pour bonifier les notes de terrain initiales sur les événements des séances. Dans le cas ici présent, ce premier niveau a contribué à souligner des dimensions concernant des pratiques reliées à l'institutionnalisation qui permettent de faire avancer les mathématiques de la classe, soit celles nommées de validation, de reformulation et de ramassage. Cette triple entrée sur les pratiques a par la suite été réinvestie dans les analyses subséquentes. Réalisée en fonction de la première phase, la deuxième phase d'analyse est alors plus ciblée. Elle consiste à réinvestir les concepts théoriques disponibles (Desgagné, 1998) dans les écrits scientifiques pour donner un sens, guider et enrichir, dans ce cas-ci, l'analyse relative aux trois pratiques reliées à l'institutionnalisation soulevées lors de la première phase : par exemple, le concept de *revoicing* de Forman et Ansell (2001) ou encore celui de communauté de validation de Lampert (1990a).

Tel que le partage Nemirovsky (2005), un des défis de l'analyse de données dans ce contexte est de considérer les événements de classe sans adopter une attitude de diagnostic du type : « cette solution est bonne/mauvaise », « cet élève a telle et telle conception erronée », « l'enseignant aurait dû poser une autre question », « cet élève a tel type de compréhension », « les élèves mêlent cette idée avec une autre », etc. Éviter une attitude de diagnostic permet d'apprécier pour elles-mêmes les mathématiques produites durant les séances et tous les événements qui les entourent (ici, les pratiques reliées à l'institutionnalisation). Comme chercheurs, ceci exige de mettre de côté nos propres tendances à comparer en imposant un référent externe; une attitude exigeante qui demande beaucoup d'auto-conscientisation lors des analyses. Comme chercheurs, nous trouvons important d'éviter d'adopter une attitude de diagnostic, parce que cette attitude nous empêche de voir du nouveau au cœur des événements mathématiques produits en classe. Cette attitude de diagnostic nous amène à nous répéter nous-mêmes, à tomber dans une vision déficitaire du travail mathématique réalisé et des pratiques déployées (voir Proulx, 2015a). Cette attitude de diagnostic semblait inappropriée pour arriver à aborder nos questions autour des pratiques reliées à l'institutionnalisation (par exemple, insister sur une erreur mathématique de l'enseignant empêcherait de porter attention à la nature sous-jacente de ses actions). Ainsi, plutôt que de juger ou de comparer avec « ce qui devrait être fait », les analyses tentent à reconnaître et donner un sens aux actions réalisées en se reposant sur leur propre rationnel au moment de leur production.

Dans ce qui suit, à la Section 4, une analyse des pratiques reliées à l'institutionnalisation en contexte de résolution de problèmes est offerte. Cette analyse prend appui sur un extrait d'une séance réalisée avec des élèves de 4e secondaire (15-16 ans), déjà publié ailleurs (voir Proulx, 2018a, b, 2019a, b) et qui se retrouve en Annexe. À travers l'analyse de cet extrait, l'intention n'est pas de retrouver les mêmes pratiques d'institutionnalisation soulevées par Brousseau (ou encore de les « écraser » sous celles-ci), car chacune de ces pratiques, tel qu'expliqué, prend forme en contexte. La signification de chacune de ces trois pratiques (de validation, de reformulation, de ramassage) est explorée et reconstruite en considérant l'unicité et l'originalité de celles-ci. Par la suite, la Section 5 offre une mise en relation (liens, différences, contradictions) de ces pratiques avec les propos de Brousseau sur l'institutionnalisation.

4. La nature des pratiques reliées à l'institutionnalisation en contexte de résolution de problèmes

L'enseignement en contexte de résolution de problèmes, tel que l'illustre l'extrait en Annexe, est axé sur l'exploration mathématique des élèves face aux problèmes donnés. Un des enjeux importants pour l'enseignant est de faire le point, de souligner les éléments importants, de laisser des traces du travail mathématique réalisé, dans le but constant de faire avancer les mathématiques de la classe. C'est en ce sens que l'enseignant a un rôle à jouer dans une certaine forme d'officialisation des productions de la classe, forme qui peut participer au processus d'institutionnalisation des productions mathématiques réalisées, tel que Brousseau les définit.

Pour arriver à investiguer ces filiations potentielles entre ces pratiques en contexte de résolution de problèmes et le concept d'institutionnalisation de Brousseau, l'extrait en Annexe est réinvesti et analysé. À partir de ce dernier, trois pratiques qui s'arriment à celles d'institutionnalisation, nommées ici de validation, de reformulation et de ramassage, sont présentées. Des extraits d'interactions entre élèves et enseignant, reconstruits à partir des notes de terrain, sont utilisés pour permettre d'entrer dans les détails de chacune de ces pratiques et de concevoir les façons avec lesquelles celles-ci participent au processus d'institutionnalisation.

4.1 Pratiques de validation

Les pratiques de validation sont reliées à la considération de la classe comme communauté mathématique. Suivant les travaux de Boaler (1998), Borasi (1992) et Lampert (1990a), les membres de la classe sont encouragés à expliquer leurs stratégies, à générer des idées, des questions et des problèmes, à rendre explicites leurs compréhensions, à développer des explications et des arguments à l'appui des solutions avancées, à explorer différentes avenues pour résoudre et aborder les problèmes, à donner un sens aux concepts et notations/représentations utilisées, à valider les solutions mises en avant, etc.

Tout au long des explications des solutions et stratégies, l'enseignant s'assure que les justifications des élèves sont adéquates, que les arguments sont clairs et que les réponses sont exprimées de façon accessible pour être bien comprises par tous. L'enseignant, sans imposer une façon unique de faire, tel que l'explique Kieren (1995), s'assure de l'aspect intelligible du travail proposé. Ce dernier a ici un rôle de *gate keeper*, dira Lampert (1990b), ce qui pour elle représente une des conditions essentielles pour aider la communauté mathématique à fleurir et fonctionner adéquatement (tel que de s'assurer d'offrir un environnement sécuritaire de travail, à l'écoute et respectueux des idées de chacun). Par exemple, lors de la Stratégie D, où l'élève utilisant la loi des sinus affirme que l'angle est de 45^o, l'interaction suivante a mené à une demande de clarification et de validation par la communauté de classe.

> Enseignant : Et, comment sais-tu que l'angle est de 45^o?
>
> [plusieurs élèves ruminent à voix basse un certain désaccord]
>
> Élève : Parce que c'est 45^o, pour les deux autres angles du triangle!
>
> [certains élèves acquiescent, d'autres s'opposent]
>
> Enseignant : Ok, alors oui peut-être 45^o ou peut-être pas. [une élève dit « c'est pas 45^o pantoute », un autre répond « ben oui voyons! »] Donc, on n'est pas certain, mais il faut arriver à quelque chose, il faut s'entendre, à savoir si c'est ou pas 45^o. Alors, je vais vous demander de prendre quelques minutes, soit seul ou en équipe de 2 ou 3, pour voir si c'est 45^o ou pas et d'être capable de pouvoir expliquer et même convaincre les autres camarades de classe. Et, vous avez droit à tout, vos cahiers, manuels, etc., tout votre matériel pour fouiller. Par après, on va partager vos trouvailles! Allez, go!
>
> [la classe se met au travail]

Pour Cobb et al. (1994) et Lampert (1990a), la vérité mathématique se construit alors dans, par et avec la classe, où une communauté de validation se forme. Celle-ci analyse, questionne, juge et argumente sur ce qui est acceptable ou non mathématiquement. Cette communauté, qui prend forme au sein de la classe, développe ses propres processus argumentatifs et justificatifs : c'est en ce sens que des habitudes de travail mathématiques prennent place, que des exigences s'installent et que des pratiques se développent.

> À l'intérieur d'une communauté d'apprenants centrée sur la création de connaissances, la communication mathématique devient un moyen essentiel d'offrir des idées, de faire des propositions, de donner des rétroactions constructives et de les utiliser, et ultimement de développer un consensus

> permettant de sanctionner les nouvelles connaissances. (Borasi, 1992, p. 170, traduction libre[7])

Les mathématiques produites à l'intérieur de la communauté de classe sont alors validées par la communauté même (de laquelle l'enseignant fait partie). Déjà, ce travail de justification et de clarification par tous permet une certaine forme d'officialisation des productions mathématiques (et des pratiques de justification et d'argumentation en mathématiques), car elles sont exposées et proposées à l'ensemble du groupe.

Lampert (1990b) explique en ce sens que le rôle de l'enseignant est de créer cette communauté mathématique, dans laquelle il est vu comme le membre le plus expérimenté mathématiquement (voir aussi Hiebert, 2004). Cette idée de création d'une communauté mathématique de validation, de surcroît en plaçant les élèves en contexte de résolution de problèmes, souligne le rôle des élèves dans le processus de validation et leur place au sein d'une autorité mathématique de classe. D'une certaine façon, parce que la parole (mathématique) est donnée aux élèves, ces derniers ont justement aussi leur mot à dire! La communauté de classe participe alors à l'établissement de ce qui est accepté ou non mathématiquement, de ce qui est adéquat, etc. Il y a en ce sens une certaine « distribution » du rôle de validation, où la communauté elle-même s'auto-gère et développe ses façons de faire et d'accepter les mathématiques. Tel que l'exprime Borasi (1992) : « Lorsque nous apprécions que les connaissances [mathématiques] représentent un processus dynamique plutôt qu'un produit fini, l'enseignant ne peut plus être vu comme la source ultime de connaissances et vérités » (Borasi, 1992, p. 181, traduction libre[8]).

L'expression *ultimate* utilisée par Borasi réfère ici à l'idée que l'enseignant, malgré son importance, n'est plus le seul à décider de la vérité mathématique et à confirmer le caractère adéquat d'une production, d'un résultat ou d'une stratégie mathématique. Tel que l'explique Schoenfeld (1994), « Mathematical authority resides in the mathematics » (p. 69). L'autorité mathématique n'est plus externe, décidée à l'avance, et n'est pas non plus dans les personnes qui l'affirment : elle

---

7 Within a community of learners engaged in the creation of knowledge, mathematical communication becomes an essential way of sharing guesses and ideas, providing and using feedback constructively, and ultimately building the consensus that sanctions new knowledge (Borasi, 1992, p. 170).

8 Once we appreciate that [mathematical] knowledge is a dynamic process rather than a finished product, the teacher can no longer be seen as the ultimate source of knowledge and truth (Borasi, 1992, p. 181).

réside dans les mathématiques qui sont faites; ce qui est une dimension au cœur du travail en résolution de problèmes en mathématiques.

Ce processus de validation n'est toutefois aucunement garant de l'absence d'erreurs ou de compréhensions incomplètes dans ce qui est justifié « en cours de route » : l'accent est placé sur la clarification et la justification des productions mathématiques par des voies acceptables et intelligibles. Des productions bien expliquées, mais qui ne sont pas tout à fait adéquates ou complètes mathématiquement peuvent (sur-)vivre un certain temps en classe. En effet, certaines productions locales, validées par la communauté de classe, sans toutefois être complètement fausses, peuvent avoir des portées moindres ou être incomplètes. Il est possible de penser, par exemple, à l'argument de la feuille d'examen pour l'angle de 45^{o} ou à la stratégie de comptage des points de coordonnées croisés par la diagonale du carré (où une infinité de points de coordonnées sont franchis et étaient possibles, mais de valeur non-entières). Ou, encore, à la théorie du plus grand côté du triangle rectangle opposé à l'angle le plus grand, où l'enseignant a fait varier l'angle droit vers un angle obtus et aigu en demandant aux élèves si leur théorie tenait toujours la route. La réponse des élèves que cela est vrai pour des triangles isocèle et équilatéral, sans être fausse, décrit une réponse limitée et de moindre portée que si l'argument avait considéré l'ensemble des triangles; par contre, il y a présence d'exemples pour trois « types » de triangle (rectangles, isocèles et équilatéraux), offrant alors une portée intéressante pour valider l'affirmation.

Tel que l'explique Brousseau, certaines productions validées peuvent même être fausses, mais aussi avoir droit de vie pendant un certain temps (par exemple l'affirmation fausse que la diagonale coupe à la fois en deux parties égales le rectangle et l'angle de 90^{o}). C'est ici, dans le maintien de la communauté de classe en contexte de résolution de problèmes, qu'un équilibre d'intervention est fait par l'enseignant. Intervenir trop rapidement sur une erreur peut avoir des conséquences néfastes sur l'engagement des élèves dans la communauté. Tel que l'explique Borasi (1996), le rôle et le traitement réservé à l'erreur en classe de mathématiques peut avoir des incidences sur l'espace sécuritaire de travail nécessaire pour que la communauté fleurisse et que les élèves s'y engagent. Cette communauté peut se démanteler rapidement, alors que des élèves peuvent se rétracter de son fonctionnement si les réponses sont constamment corrigées, rabrouées ou traitées de façon défavorable dès leur émergence. Cet équilibre à maintenir entre intervenir sur l'erreur et la laisser suivre son cours n'est pas simple, tout comme celui d'attendre et de laisser émerger, au besoin, des contre-exemples chez les élèves (comme ce fut le cas à quelques occasions dans l'extrait, par exemple, avec la proposition des angles de 32^{o} et 58^{o}). Un peu à la manière des preuves et réfutations de Lakatos (1976), ce sont des séries de validations qui se font en cours de route, qui vont au-delà de simples explications et affirmations et qui ont pour but la validation des productions avancées par et dans la communauté de classe. Parfois, cette communauté est divisée face à ce qui est avancé, ou admet pendant un certain temps des productions partielles, valides uniquement au niveau local ou encore erronées. Ceci peut être vu comme le signe que l'exploration mathématique suit son cours.

Ces pratiques de validation permettent de souligner les productions mathématiques déployées en classe (et leur sens), de les rendre accessibles et réutilisables car justifiés, mais aussi de les ouvrir au questionnement. Elles contribuent à l'avancement des mathématiques en classe et à l'établissement des productions mathématiques réalisées, s'alignant avec les situations d'institutionnalisation de Brousseau.

4.2 Pratiques de reformulation

Tout au long des explications des solutions et stratégies des élèves, l'enseignant n'est pas en retrait. Tel que Mopondi (1995) et Cobb et Yackel (1998) le soulignent, ce dernier peut re-décrire et reformuler les points de vue et les raisonnements des élèves, dans des termes que ces derniers n'auraient peut-être pas utilisés, mais qui auraient quand même fait du sens pour eux.

Par exemple, lors de l'explication de la Stratégie C par l'élève Sandra[9], l'enseignant a non seulement demandé une clarification de la stratégie, mais l'a aussi ré-expliquée et a reformulé l'idée sous-jacente.

> Enseignant : Oui, tu as une autre stratégie ?
>
> Élève : Moi j'ai juste compté les points.
>
> Enseignant : Que veux-tu dire exactement par ça?
>
> Élève : [se dirigeant vers le tableau] Bien si tu traces une ligne de lui à lui, ça donne 1, 2, 3…
>
> Enseignant : Ah, donc tu traces un segment d'un point à l'autre, donc de (0,0) à (4,3).
>
> Élève : Oui. Mais, finalement, ça ne marche pas comme je pensais mon affaire.
>
> Enseignant : Ok, c'est difficile à compter sur le dessin.
>
> Élève : Oui.

[9] Tous les prénoms utilisés sont des pseudonymes.

> Enseignant : Donc, Sandra, tu voulais compter le nombre de points de coordonnées que ton segment de (0,0) à (4,3) croise. Et, là, c'est difficile à compter sur le dessin, ça ne croise pas directement. Ok. Par contre, ça pourrait fonctionner. Par exemple, si tu prends ce segment-là ici, qui relie, tiens, ces deux autres points (voir la figure 3). Là on passe par les diagonales des carrés et on peut compter directement sur le graphique le nombre de points croisés. C'est un peu ça que tu voulais faire?
>
> Élève : Ouin, genre, mais moi c'était difficile.
>
> Enseignant : Et, dans ce cas-ci, ça se compte plus facilement et on aurait 4.

L'enseignant reprend ici les explications de l'élève et les reformule d'une autre façon, non pas dans le but de corriger celles-ci (bien qu'il puisse ajuster certains propos), mais pour clarifier, aller plus en profondeur, rendre explicite et faire ressortir des éléments clés. Il reformule aussi ce qui a été dit pour rendre les idées accessibles aux autres élèves. Ce principe est ce que Forman et Ansell (2001) appellent le *revoicing* :

> C'est-à-dire, il y a dans ces classes une forte inclinaison pour les élèves de fournir des explications et pour l'enseignant de répéter, élargir, remanier ou traduire ces explications pour celui qui les énonce et pour l'ensemble de la classe. L'enseignant revoice les contributions des élèves pour réussir à articuler l'information, insistant sur certains aspects de leurs explications. (Forman et Ansell, 2001, p. 119, traduction libre[10])

Ce type de travail réalisé en cours de route par l'enseignant permet de mettre en avant les productions des élèves. Celles-ci ne sont pas toujours adéquates ou ne seront pas toujours retenues, mais la pratique de reformulation permet de rendre claire ces productions et de les rendre « sujets de discussion » dans la classe. Un exemple de ceci s'est produit lorsque l'enseignant a reformulé l'affirmation que la diagonale coupe le rectangle en deux parties égales et donc aussi l'angle en deux parties égales (alors qu'il sait que cette idée est fausse). Le plus important devient ici le caractère reformulé de l'explication, dans le but de rendre accessibles à tous les productions mathématiques offertes. L'enseignant les rend alors sujettes à une argumentation ou à un questionnement, qui mènera autant sur d'autres pratiques de justification par les élèves que sur d'autres reformulations par l'enseignant. C'est ainsi autant une question de mieux dire, soit d'exprimer plus adéquatement les productions mathématiques soulevées, qu'une façon de mettre en avant, de

---

10 That [revoicing] is, there is a greater tendency for students to provide the explanations in these classrooms and for the teacher to repeat, expand, recast, or translate students' explanations for the speaker and the rest of the class. The teacher revoices students' contributions to the conversation so as to articulate presupposed information, emphasize particular aspects of the explanation (Forman et Ansell, 2001, p. 119).

rendre accessible au questionnement et à la justification certaines des productions réalisées. D'une certaine façon, en reformulant et en faisant des liens entre certaines idées, l'enseignant s'insère dans les explications de l'élève.

Par exemple, lors du partage des arguments pour savoir si oui ou non l'angle mesure 45°, une élève a ajouté que puisque les côtés du triangle ne sont pas de même mesure, alors la diagonale du rectangle ne coupe pas l'angle en deux parties égales. L'enseignant reprend alors les propos de l'élève et établit de plus des liens supplémentaires avec certaines idées affirmées précédemment.

> Enseignant : Ce que Béatrice affirme est que nous savons que les côtés du triangle ne sont pas de même mesure : on en a un de 3, un de 4, et même un de 5, l'hypoténuse. Et, donc, les angles ne seront pas nécessairement égaux non plus, si les côtés ne le sont pas. En fait, elle réutilise implicitement l'idée précédente acceptée de tous, votre théorie, à savoir qu'un côté plus grand fait face à un angle plus grand. Ici, comme les côtés ne sont pas égaux, alors les angles qui leur font face ne seront pas égaux non plus. Un côté plus grand fera face à un angle plus grand.

Ces liens peuvent aussi avoir pour effet de participer à rendre officielles certaines idées préalablement affirmées (par exemple, la théorie du plus grand côté). Ces idées, tout en évoluant, deviendront possiblement, à force d'y faire référence, de plus en plus établies dans le fonctionnement de la classe. Il est possible de parler ici d'une institutionnalisation graduelle, cristallisant au fur et à mesure les idées émises, offrant en ce sens une conceptualisation de l'institutionnalisation comme étant un processus dynamique et évolutif.

Ces reformulations de l'enseignant permettent de faire sortir de leur carcan certaines idées parfois plus obscures ou difficilement exprimées par les élèves, ou encore devant être clarifiées pour tous malgré les efforts investis par l'élève initialement pour les exprimer. En rendant les productions des élèves accessibles à tous, il contribue de façon dynamique et continue à faire avancer les mathématiques de la classe et souligne les productions mathématiques réalisées, ce qui participe à une certaine institutionnalisation.

4.3 Pratiques de ramassage

À différents moments, l'enseignant rend explicite les productions mathématiques de la classe à travers des pratiques de ramassage. L'enseignant souligne les productions réalisées durant la séance qui ont un potentiel important au niveau mathématique, qui vont être utiles et réutilisées plus tard ou encore qui sont liées à d'autres mathématiques déjà travaillées en séance. Il rend alors officielles certaines des idées et productions mathématiques réalisées, en les soulignant, en insistant sur leur importance, etc. Contrairement aux pratiques de validation et de reformulation précédentes, ici ne sont retenues que les productions mathématiques adéquates, alors que dans les deux autres cas ce critère ne prévalait pas nécessairement et, en ce sens, les productions erronées, limitées ou valides pouvaient se côtoyer. En plus d'être clarifiées, elles sont ici pensées sans erreurs pour instaurer des traces mathématiques pour la classe sur lesquelles se fier. Il se peut toutefois que certaines de ces productions nécessitent encore un certain raffinement, que justement leur ramassage permettra d'accomplir (ou qui se produira lors des activités subséquentes).

Ces ramassages peuvent être faits autant durant la résolution qu'à sa fin. Par exemple, au cours du questionnement concernant la diagonale du carré comparée à son côté, une fois plusieurs arguments avancés, l'enseignant fait le point sur ce qui a été expliqué et revient sur la stratégie proposée, tout en offrant une certaine implication de cette dernière sur le calcul de la distance :

> Enseignant : Ok, revenons à la question de la diagonale. Donc, la diagonale est plus grande que le côté du carré. Dans la stratégie de Sandra, au final, on veut compter le nombre de diagonales, le nombre de diagonales de carrés unités d'un point à l'autre, de (0,0) à (4,3). On parlait de croisements tantôt sur le graphique. On aurait donc ici 4. 4 c'est aussi une mesure possible de la distance entre (0,0) et (4,3). On aurait deux réponses : une de 5 en termes de côtés d'unités de carré et une de 5 en termes de diagonales de carré. On parle dans les deux cas de la même distance, mais mesurée de deux façons différentes, donc donnant deux « mesures » différentes.

Lorsque réalisé à la toute fin du processus, en synthèse, ce ramassage agit comme conclusion pour souligner les points mathématiques importants qui ont été travaillés durant cette résolution. Cette conclusion est ce que Shimizu (2004) nomme le *yamada* de l'activité. Par exemple, pour conclure l'exploration concernant la présence ou non d'un angle de 45°, l'enseignant offre une dernière stratégie, venant d'un élève, qui permet de récupérer la majorité des productions partagées et de conclure l'exploration réalisée :

> Enseignant : Ok, alors on semble tous convaincus que l'angle n'est pas de 45°, et on a fait ressortir différentes façons de le comprendre. Un de vous a fait quelque chose dans son cahier qui me semble faire le tour de tout ce qu'on a fait. Je crois que c'est intéressant à partager.
>
> Élève : [timide] Vous pouvez l'expliquer Monsieur.
>
> Enseignant : Tu veux que j'explique ce que tu as fait?
>
> Élève : Oui.
>
> Enseignant : Ok, je vais l'expliquer. Vous vous rappelez plus tôt de la question sur la diagonale et le côté? On a dit que la diagonale était plus longue. Ok, alors ce que

> Marco a fait est de faire un carré de 4 par 4 et de le couper d'une diagonale comme pour la question de tantôt sur la diagonale du carré. [Il dessine un carré de 4x4 et y insère le triangle de côtés 3 et 4, voir la figure 8] Ça ici, c'est notre triangle rectangle de tantôt avec les côtés de 4 et 3. On prolonge alors le côté de 3 vers un de 4 pour arriver au carré. Dans notre carré de 4x4, la diagonale forme deux triangles isocèles et on a dit tantôt, en parlant de la feuille d'examen par exemple, que dans un triangle rectangle isocèle les angles étaient de 45°. Donc, si les angles sont de 45° pour le carré 4x4, ils ne peuvent pas l'être pour notre triangle du départ. Car, regardez, l'angle formé est plus petit. Chacune des hypoténuses, celle du 4x4 et celle du triangle de 4 et 3, ne décrivent pas le même angle. Je trouve que c'est une très belle façon de le voir, et qui ramène plusieurs de nos idées depuis le début. Alors voilà!

Les pratiques de ramassage en contexte de résolution de problèmes s'avèrent essentielles pour permettre une centration du travail mathématique en classe, pour laisser certaines traces et permettre à tous d'interagir avec les productions mathématiques que l'enseignant juge importantes. Et celles-ci, ces productions ramassées, ne sont pas prédéfinies, tel que le soulève Borasi (1992), car en contexte de résolution de problèmes plusieurs productions mathématiques émergent en cours de route et permettent ou plutôt ont le potentiel de faire avancer mathématiquement la classe. À travers l'ouverture à l'exploration des élèves et la prise en compte des productions mathématiques qui sont réalisées en classe, l'enseignant joue un rôle pour souligner ces productions et s'assurer que celles-ci soient claires et accessibles, du moins le plus possible, pour tous. C'est en ce sens que Stein, Boaler et Silver (2004) soulignent que ce type de ramassage est une pratique essentielle en contexte de résolution de problèmes :

> Les leçons qui encouragent une variété d'idées, de solutions, de stratégies et de types de représentations ont l'avantage d'inciter les élèves à réfléchir et à apprendre à justifier et raisonner. Toutefois, elles ont aussi le désavantage de ne pas converger de façon ordonnée vers un ensemble de connaissances communes que les élèves possèdent and doivent savoir – et particulièrement pas à l'intérieur d'un temps prédéterminé, que ce soit une leçon, une étape, une année, ou simplement de façon opportune pour un examen. S'assurer que tous les élèves atteignent éventuellement une certaine forme de clarté et de synthèse concernant les idées et algorithmes mathématiques importants n'est pas trivial à l'intérieur de ce type d'enseignement. (Stein et al., 2004, p. 254, traduction libre[11])

---

[11] Lessons that encourage a variety of ideas, solution strategies, and forms of representation have the advantage of engaging students in thinking and learning to justify and reason. However, they also have the disadvantage of not converging neatly into a common core of knowledge that all students share and should know – especially not in any predetermined time frame, be it a lesson, a grading period, a year, or simply in time for a high-stakes test. Making sure that

Aux idées de Stein et al. (2004) s'ajoute, tel que souligné, que ces ramassages peuvent se produire à différents moments durant une séance et non uniquement à la toute fin comme conclusion finale de l'activité. L'enseignant peut en tout temps soulever, valider et mettre en avant, donc ramasser, les productions mathématiques réalisées en classe. C'est aussi de cette façon qu'il contribue à faire avancer les mathématiques de la classe en s'alignant sur une certaine institutionnalisation.

La prochaine section donne un sens supplémentaire à ces trois pratiques à travers les écrits de Brousseau sur l'institutionnalisation, pour permettre de les arrimer et de les conceptualiser.

5. Différents sens possibles de l'institutionnalisation et liens avec l'enseignement en contexte de résolution de problèmes

À l'intérieur des divers écrits de Brousseau, le concept d'institutionnalisation peut sembler varier au niveau des insistances portées sur différentes dimensions. Il est alors pertinent de reprendre, à travers ses écrits, les différents sens donnés à l'institutionnalisation et de voir où ceux-ci sont porteurs de distinctions intéressantes pour les trois pratiques soulevées en contexte de résolution de problèmes. Ce qui suit propose quelques extraits tirés des écrits de Brousseau autour du concept d'institutionnalisation. Ces extraits mettent en avant diverses dimensions discutées ici en fonction des définitions soulevées à la Section 2 et des trois pratiques en contexte de résolution de problèmes. Un retour sur ces diverses dimensions est par la suite réalisé, complété de commentaires sur le contexte dans lequel l'institutionnalisation s'est initialement développée.

Une des dimensions au cœur de l'institutionnalisation pour Brousseau est sa fonction pour donner un statut aux productions mathématiques réalisées en classe et pour créer des appuis mathématiques pour les élèves qui pourront les réutiliser dans leurs travaux ultérieurs. Par exemple, alors qu'il précise les détails de la situation de la course à 20 et du travail des élèves et leurs découvertes, Brousseau aborde les situations de validation en mentionnant que : « La situation de validation permet l'organisation des preuves en une démonstration qui, elle, suit le sens de la progression du jeu. L'institutionnalisation est de toute façon nécessaire pour étayer les pratiques et l'utilisation ultérieure » (Brousseau, 1998, p. 43). Brousseau parle ici d'une institutionnalisation qui veut permettre de laisser des traces sur ce qui a été produit en classe par et avec les élèves. L'institutionnalisation sert en ce sens à souligner ces productions mathématiques,

---

all students eventually reach some clarity and closure on important mathematical ideas and algorithms is not trivial in this form of instruction (Stein, Boaler et Silver, 2004, p. 254).

à les rendre disponibles pour le travail mathématique qui suivra et à les officialiser en les expliquant valables, car utilisables par après.

Une autre dimension, au risque d'être évidente, est que cette institutionnalisation est à la charge de l'enseignant, qui joue un rôle fondamental dans la coordination et la création des pratiques attenantes à l'institutionnalisation. Lorsqu'il aborde la question de l'accessibilité des savoirs, Brousseau souligne le caractère essentiel de l'institutionnalisation en ajoutant par rapport à l'enseignant que « s'il renonce à fixer, à institutionnaliser les acquisitions, même partielles, l'élève ne trouvera aucun appui lors des étapes suivantes » (Brousseau, 1998, p. 76).

Brousseau aborde une sorte d'institutionnalisation qui confirme, établit, fixe et souligne ce qui est important, ce qui a été atteint et réalisé et qui insiste sur ce qui doit être saisi. L'enseignant est ici central, car en plus d'être celui qui réalise cette institutionnalisation, les productions mathématiques qu'il institutionnalise ont une valeur reconnue aux yeux de ce dernier. Des liens forts existent avec la pratique de ramassage en contexte de résolution de problèmes, par le soulignement des accomplissements faits et sur lesquels des appuis seront pris pour le travail ultérieur. La question des productions partielles est aussi abordée, relativement aux compréhensions en développement ou en cheminement. L'institutionnalisation est alors une façon de faire le point, à un moment précis, sur les accomplissements de la classe.

Un lien est aussi à faire avec les pratiques de reformulation, où l'enseignant veut rendre plus clair ce qui a été fait, en soulignant des éléments d'importance qui sont proposés par les explications de l'élève. La stratégie du comptage des diagonales de Sandra est un bon exemple, alors que l'enseignant ré-explique sa stratégie et la replace dans un contexte qui fonctionne mieux avec les carrés unités, tout en expliquant et clarifiant le vocabulaire et les idées de celles-ci (par ex. : segment, diagonale). C'est ici que l'enseignant joue un rôle primordial, car il est celui qui offre un statut aux productions réalisées par les élèves, ces derniers ne connaissant ou ne réalisant pas nécessairement la valeur ou la force mathématique de leurs productions.

> Le sujet banalise la question dont il connaît les réponses dans la mesure où il n'a pas les moyens de savoir si d'autres se la sont posée avant lui, ou si personne n'a su y répondre, ou encore si d'autres questions lui ressemblent ou lui sont liées par le fait qu'elles pourront recevoir une réponse grâce à celle-ci…, etc. Il faut donc que quelqu'un d'extérieur vienne pointer ses activités et identifie celles qui ont un intérêt, un statut culturel. Cette institutionnalisation est en fait une transformation complète de la situation. Choisir certaines questions parmi celles que l'on sait résoudre, les placer au cœur d'une problématique qui confère aux réponses que ces questions appellent à un statut de savoir plus ou moins important, les relier à

> d'autres questions et à d'autres savoirs, constitue finalement l'essentiel de l'activité scientifique. Ce travail culturel et historique diffère totalement de ce qui semblait devoir être laissé à la charge de l'élève et il revient à l'enseignant. (Brousseau, 1998, p. 77)

L'institutionnalisation est vue ici comme un liant, une action pour montrer et relier les productions réalisées aux notions mathématiques culturelles reconnues. L'enseignant, tel que l'explique Lampert (1990b), est celui qui sert de pont entre la communauté mathématique et celle de la classe. Il est celui qui rend légitime ce qui a été fait en établissant des liens entre ce qui a été produit mathématiquement en classe et les savoirs dits officiels ou culturels[12].

Ce type d'institutionnalisation, axé sur la création de liens, est vu comme un processus de création de savoirs nouveaux, qui est au cœur de l'activité scientifique. Il y a pour Brousseau une dimension créative dans l'acte d'institutionnalisation, déployée par l'établissement de ces liens. En faisant des liens entre les productions mathématiques des élèves et d'autres officielles, du « nouveau » est créé et l'enseignant est vu, dans ce processus, comme un créateur de nouveautés mathématiques : l'institutionnalisation devient une activité (mathématique) créatrice de sens.

Brousseau reprend cette idée de création de liens en insistant sur le fait que l'institutionnalisation est une des actions importantes de l'enseignant. Abordant la question des jeux, il affirme :

> Il découle de cette définition [de jeux] que les deux types de jeux principaux du maître sont la dévolution que nous avons déjà présentée, et l'institutionnalisation. […] Dans l'institutionnalisation, [l'enseignant] définit les rapports que peuvent avoir les comportements ou les productions « libres » de l'élève avec le savoir culturel ou scientifique et avec le projet didactique : il donne une lecture de ces activités et leur donne un statut. (Brousseau, 1998, p. 92)

---

[12] Il est possible de se placer ici dans une perspective de l'observateur à la Maturana (1987; voir aussi en didactique des mathématiques les travaux de René de Cotret, 1999, ou encore les nôtres dans Maheux et Proulx, 2014, 2015). C'est en effet l'enseignant qui voit et fait les liens entre ce qui est fait par les élèves et les connaissances mathématiques reconnues. Ce n'est pas une affirmation que les élèves refont exactement les mêmes mathématiques que celles établies par la communauté des mathématiciens. Par contre, l'enseignant voit des filiations, des aspects compatibles et propose ces liens, voire les produits. Ceci représente alors une compatibilité, un *fit* et non une correspondance dirait von Glasersfeld (1995), car en effet il n'est pas possible d'affirmer épistémologiquement que ces productions mathématiques sont « les mêmes ». C'est en ce sens que tout ceci se place sous l'œil de l'enseignant, comme observateur, qui crée ces filiations de façon contingente à ses propres compréhensions mathématiques, autant des mathématiques officielles que de celles des élèves.

Le rôle actif et créateur de l'enseignant dans l'établissement de ces liens entre les réalisations des élèves et les savoirs culturels est ici encore souligné : « il donne une lecture de ces activités et leur donne un statut ». De là, le processus créatif de l'enseignant. La question de l'établissement de liens, par les dimensions culturelles et les enjeux de validation, ouvre de façon plus précise sur ce que peut être une situation d'institutionnalisation :

> Les situations d'institutionnalisation sont celles par lesquelles on fixe conventionnellement et explicitement le statut cognitif d'une connaissance ou d'un savoir. L'institutionnalisation est interne si un groupe fixe librement ses conventions, selon un processus quelconque qui en fait un système quasi isolé. Elle est externe si elle emprunte ses conventions à une culture : c'est la situation la plus fréquente dans la didactique classique. (Brousseau, 1998, p. 282)

Brousseau propose ici deux types d'institutionnalisations, une interne et une externe, chacune ayant des fonctions similaires. Dans le cas de l'institutionnalisation interne, il y a une reconnaissance que des productions mathématiques réalisées en classe ont une validité interne à la classe – et non une validité qui provient de l'extérieur à celle-ci. Celles de l'extérieur, les productions mathématiques officielles, sont des productions et savoirs mathématiques qui sont déjà, d'une certaine façon, fixés et canonisés. Les productions de la classe, quant à elles, doivent être rendues officielles pour la classe, pour les traces de la classe et leur réutilisation dans celle-ci. De nombreux exemples cités plus haut dans l'extrait de la distance entre deux points s'arriment bien à ceci. Il n'est pas clair, par exemple, que la théorie du grand côté du triangle face à l'angle le plus grand est une idée qui a une portée externe à cette classe : elle est une production à portée locale, mais qui jouera un rôle et sera un appui réutilisé dans les arguments suivants (par exemple, pour dire que si les côtés ne sont pas égaux, alors les angles ne le seront pas non plus et ne peuvent pas être chacun de 45° dans le partage du 90°). Évidemment, ce n'est pas parce qu'une production mathématique possède une validité interne au niveau de la classe qu'elle est nécessairement fausse ou incomplète, loin de là. Il est toutefois possible que sa portée sur la communauté plus large soit moindre. Ce sont des mathématiques qui émergent au niveau local, officialisées dans ce contexte local pour souligner leur caractère important, pour laisser une trace et permettre leur utilisation ultérieure par la communauté de classe.

Brousseau montre, avec ce jeu interne/externe, qu'il est donc possible de travailler en institutionnalisation sur deux dimensions. Au niveau interne, il est question d'accepter, souligner et laisser des traces des productions mathématiques réalisées en classe qui ont un sens interne à la classe, à un niveau local. Il y a une reconnaissance que la classe peut agir comme communauté et faire ses propres productions et validations, qui ont droit de vie dans la classe et sont légitimées par elle et non grâce à l'extérieur. Au niveau externe, il est question, tel que mentionné, de relier les productions produites en classe, de créer des liens, avec des savoirs reconnus à l'externe.

Tout comme certaines productions au niveau local de la classe ont peu d'intérêt à l'externe, il est tout aussi possible que les savoirs externes mathématiques aient peu d'intérêt dans le contexte local de la classe. Ceux-ci ne seront peut-être pertinents qu'ultérieurement, lorsque le contexte local leur permettra de prendre racine. Par exemple, l'inégalité triangulaire aurait pu servir à expliquer certaines des questions et réponses données concernant la théorie des élèves du plus grand côté faisant face au plus grand angle du triangle. Pour aborder ces productions et leur donner un sens, les élèves sont passés par un autre chemin, tout aussi pertinent et robuste mathématiquement, concernant l'angle opposé. Cette idée ne réfère pas par contre à l'inégalité triangulaire, souvent utilisée en mathématiques. L'enseignant aurait pu être tenté d'initier cette idée d'inégalité triangulaire pour aider à résoudre la question posée ou encore pour placer les autres idées proposées sous sa bannière. Il y aurait eu à ce moment un certain danger d'écraser les productions des élèves, de leur nier leur intérêt, alors qu'elles sont tout autant valides mathématiquement, surtout au niveau local. Brousseau aborde directement cet enjeu de l'importance de laisser vivre les productions mathématiques, de leur laisser prendre leur envol, lorsqu'il soulève la question du temps opportun pour tenter une institutionnalisation.

> Une pratique comparable, courante, dans l'enseignement élémentaire, consiste pour le maître à « exploiter » le genre de situations didactiques présenté plus haut, en institutionnalisant immédiatement la découverte de l'élève : « Vous avez découvert tel objet (affirmation implicite du fait qu'il a un caractère général); il s'appelle « composé de deux applications » (sous-entendu il a un statut cognitif et culturel, reconnaissez-le, utilisez-le, dans les exercices suivants…) ». Cette pratique court-circuite tout le travail mathématique et même le nie, elle revient à affirmer qu'il suffisait d'y penser pour transformer un concept proto-mathématique en notion mathématique. Certes, ce procédé didactique fonctionne et on peut légitimement l'employer localement. Mais nous sommes fondés à penser que le rejet de son emploi systématique est nécessaire pour changer fondamentalement les rapports du « sujet-s'apprenant » avec la connaissance. (Brousseau, 1998, p. 234)

Faire l'institutionnalisation pour Brousseau court le risque d'écraser l'activité de l'élève et son sens, voire de la nier. Il y a un équilibre important à maintenir, qui se relie bien avec ce qui a été avancé plus haut pour les pratiques de validation et de reformulation en contexte de résolution de problèmes : certaines productions peuvent avoir droit de vie un certain temps, il faut faire attention de ne pas critiquer ou encore de toujours mettre de côté ces productions erronées ou partielles des élèves, etc. C'est d'une certaine façon un avertissement servi par Brousseau sur les pratiques d'institutionnalisation, où un équilibre est à tenir pour que ces liens et le statut des productions mathématiques de la classe prennent leur envol. Établir des liens avec des savoirs mathématiques culturels est fait au risque d'écraser les productions initiales des élèves en les rendant futiles (et de risquer de bloquer l'engagement de l'élève qui pourra craindre de voir ses productions sitôt écrasées, dès leur énonciation ou presque). Brousseau sert ici une critique sévère à ceux qui en viennent à écraser l'activité de l'élève sous des savoirs culturels acceptés par la communauté mathématique. Il soulève l'importance de laisser fonctionner ces productions, voire de les laisser se faire contrecarrer plus tard par un contre-exemple (comme pour les deux contre-arguments formulés en désaccord avec l'idée que la diagonale qui coupe le rectangle en deux parties égales coupe aussi l'angle en deux parties égales). L'enseignant peut attendre le moment où tout ceci se fera, ou encore le provoquer et questionner les élèves – l'enseignant est fort actif en contexte d'institutionnalisation, car l'intention est de rendre possible l'exploration mathématique de la production elle-même.

En lien avec l'idée de faire vivre les productions, de les aider à prendre leur envol, Brousseau souligne des conditions importantes à réaliser pour que l'institutionnalisation ait lieu.

> Si l'on veut obtenir que les élèves aient la possibilité, non seulement d'appliquer des méthodes et de produire des solutions, mais aussi d'en comprendre et d'en discuter le bien-fondé, il faut rendre possible cette attitude réflexive, en leur donnant l'usage d'un vocabulaire, même simplifié, et d'une théorie, même non satisfaisante [il parle ici de l'exemple des applications linéaires et de leurs propriétés pour le travail des décimaux]. Notre étude épistémologique permet de comprendre que, pour qu'une théorie puisse être institutionnalisée, il est nécessaire qu'au préalable, elle ait fonctionné comme telle dans des débats scientifiques et dans des discussions entre élèves, comme moyen d'établir des preuves ou d'en rejeter. Ce processus correspond à la 3e étape de notre analyse, celle où la notion est maniée comme notion mathématique. Nous appelons situations de « validation » et d'« institutionnalisation » les situations didactiques qui permettent de simuler ce processus. (Brousseau, 1998, p. 218)

La question du partiel, du travail en cours ou local, se retrouve encore ici, tel que souligné pour les pratiques de validation et de reformulation. Les productions mathématiques sont soulevées, clarifiées, rendues accessibles, voire développées, et deviennent matière à discussions, même si certaines sont partielles ou locales. L'argument du grand côté faisant face au plus grand angle pour les cas des triangles rectangles, isocèles et équilatéraux est un bon exemple de ce caractère partiel d'une théorie avancée par les élèves. Loin de les écraser, il est ici question de rendre disponibles ces productions mathématiques à la discussion, au débat et à la validation par tous, pour souligner et mettre l'emphase sur des aspects envers lesquels porter attention pour les rendre légitimes et ajouter à leur force (et non les remplacer). L'enseignant peut aussi pour Brousseau lier ensuite ces productions avec des savoirs mathématiques culturels. Toutefois, ceci est fait pour leur donner une force, pour les établir et laisser des traces pour les réutiliser dans d'autres situations. Ces productions peuvent aussi être *short-lived*, car d'autres productions seront partagées, institutionnalisées, et remplaceront peut-être ces dernières (parce qu'elles couvrent plus largement, parce qu'elles sont plus approfondies ou développées). Toute production mathématique peut être subordonnée à une autre, dans un autre domaine plus large ou différent. Les mathématiques que la classe fait fonctionner, si elles ont un potentiel selon l'enseignant, peuvent être rendues légitimes par ce dernier. La validation en résolution de problèmes fait donc partie de ceci : valider c'est aussi institutionnaliser un peu.

C'est en ce sens, à travers les nombreuses nuances que développe Brousseau dans ses écrits, que les pratiques de validation, de reformulation et de ramassage peuvent se concevoir à différents degrés comme participant au processus d'institutionnalisation.

6. Remarques finales

6.1 Retour sur les dimensions de l'institutionnalisation et son contexte d'origine

Il est possible de soulever plusieurs dimensions qui apparaissent au cœur de l'institutionnalisation et qui s'arriment directement avec celles mentionnées pour l'enseignement en contexte de résolution de problèmes. Dans un premier temps, l'enseignant est central au processus d'institutionnalisation. Il est le metteur en scène de celle-ci et agit comme agent créateur. Ensuite, il y a la question de conférer un statut et de rendre légitime les productions mathématiques réalisées en classe en soulignant leur importance mathématique. Ceci est fait pour créer des appuis pour les élèves, pour laisser des traces et permettre une utilisation ultérieure de ces productions mathématiques. Ces appuis passent par la création de liens externes entre ce qui a été produit par les élèves et les savoirs culturels mathématiques. Ces appuis passent aussi par la validation interne des productions mathématiques partagées dans la classe. Ces liens créés et ces statuts conférés aux productions mathématiques de la classe, soulevés par l'enseignant, montrent tout le côté créatif à déployer par l'enseignant : il est celui qui produit ces liens, il est celui qui souligne l'importance de certaines productions, etc. En ce sens, l'institutionnalisation est un processus créatif, qui arrive en temps opportun, tant en cours de route sur des productions complètes ou en développement, qu'à la fin du processus, en synthèse. Dans son institutionnalisation, l'enseignant permet aux productions de vivre et de prendre leur envol, en s'assurant de ne pas les écraser, les banaliser ou les nier en les réduisant trop rapidement à du connu. C'est à travers leur force acquise durant le travail en classe que leur institutionnalisation prend ancrage. À travers ces dimensions, l'enseignement en contexte de résolution de problèmes s'arrime avec les pratiques d'institutionnalisation proposées par Brousseau.

Cité plus tôt dans l'article, le contexte lui-même dans lequel le besoin d'institutionnaliser a émergé mérite discussion. Le but des enseignants, dans ce qui est décrit par Brousseau, était de faire le point avec ce qui avait été fait en classe pour ne pas laisser les enfants en plan, sans savoir ce qui avait été compris, atteint, réalisé ou encore ce qui était important dans ce qui avait été vu. Ceci décrit bien une intention usuelle d'un enseignant de mathématiques qui veut s'assurer que ses élèves cheminent et aient compris. C'est ici l'idée pour l'enseignant de ramasser ce qui a été fait, pour rendre légitime ce qui a fonctionné, pour le souligner et l'expliquer aux yeux de tous. Ces actions permettent aussi de montrer qu'effectivement le groupe a bien avancé et travaillé, voire a réalisé quelque chose qui en vaut la peine mathématiquement. Les pratiques de reformulations et de ramassage en contexte de résolution de problèmes apparaissent ici remplir ce rôle recherché par les enseignants. Ceci s'éloigne, tel que souligné, de l'idée d'écraser les productions des élèves sous un savoir culturel externe.

C'est ainsi que les pratiques de ramassage et les reformulations de l'enseignant apparaissent fondamentales pour participer à l'institutionnalisation, et en résolution de problèmes de surcroit. L'analyse conduite montre que l'institutionnalisation n'est pas un processus linéaire et ne représente pas uniquement l'étape synthèse en fin de processus. L'analyse souligne, en contexte de résolution de problèmes, les aller-retours constants entre la résolution de problèmes et l'institutionnalisation, les deux influençant le développement de l'autre. En ce sens, autant la résolution de problèmes participe au processus d'institutionnalisation, autant l'institutionnalisation en retour participe au processus de résolution de problèmes. Ce besoin de « souligner » les avancées mathématiques ne s'arrête jamais en résolution de problèmes, et il se fait sentir constamment, alors qu'il faut pour l'enseignant faire beaucoup de « ménage » et clarifier plusieurs des productions lancées sur-le-champ par les élèves pour favoriser l'avancée des mathématiques en classe. De plus, tel que l'explique Borasi (1992), laisser la liberté aux élèves de faire des mathématiques, d'en explorer, de se questionner, etc., vient aussi avec le « fardeau » que leurs productions sont librement pensées et exprimées. Ces productions librement exprimées sont parfois peu organisées ou adéquatement formulées. Les reformulations de l'enseignant sont alors bénéfiques dans ces situations pour permettre aux productions de prendre leur envol à travers une certaine forme d'institutionnalisation.

6.2 Conclusion

L'intention de cet article est de mieux comprendre le concept d'institutionnalisation, tel qu'utilisé en didactique des mathématiques, et de le mettre en relation avec les pratiques d'enseignement en contexte de résolution de problèmes que nous étudions au sein de notre laboratoire. Le « retour aux sources » de ce qu'est l'institutionnalisation (son émergence dans les travaux de Brousseau, ses définitions, ses variétés d'utilisation dans ses écrits) permet d'établir des filiations entre l'institutionnalisation et certaines pratiques en contexte de résolution de problèmes qui suivent des objectifs similaires, soit de faire avancer les mathématiques de la classe. Les pratiques dites de validation, de reformulation et de ramassage ont toutes en elles des intentions arrimées avec l'institutionnalisation, surtout à travers la richesse des déclinaisons que Brousseau offre dans ses écrits. Évidemment, l'intention de cet article n'est pas de dire que ces pratiques en contexte de résolution de problèmes et celles développées par Brousseau sont les mêmes ou se réduisent les unes aux autres. L'intention est plutôt de tracer des filiations porteuses pour permettre de mieux comprendre le contexte de résolution de problèmes et ses potentialités pour l'avancement des mathématiques en salle de classe.

Finalement, ce travail d'arrimage soulève des questions au sujet des élèves et de leur place à l'intérieur des pratiques d'institutionnalisation. Tel que discuté, l'institutionnalisation est l'affaire de l'enseignant. Toutefois, les pratiques de validation en contexte de résolution de problèmes offrent une place importante aux élèves en tant que membres de la communauté mathématique de classe. Cette dimension se retrouve aussi en filigrane dans les travaux de Brousseau. Ainsi, l'opposition du travail élève et du travail enseignant est peut-être à repenser en contexte de résolution de problèmes, où les deux participent au processus d'institutionnalisation. Évidemment chacun n'a pas le même rôle, tel que le souligne Lampert (1990b), mais chacun joue tout de même un rôle dans l'avancement des mathématiques de la classe…

Références

Barry S. (2008). *Analyse des ressources mises à contribution par enseignant et chercheur dans l'élaboration de scénarios d'enseignement en dénombrement visant le développement de la modélisation en secondaire 1* [thèse de doctorat, Université du Québec à Montréal]. Archipel. https://archipel.uqam.ca/2218/

Bednarz, N. (2000). Formation continue des enseignants en mathématiques: Une nécessaire prise en compte du contexte. Dans P. Blouin et L. Gattuso (dir.), *Didactique des mathématiques et formation des enseignants* (p. 63-78). Éditions Modulo.

Bednarz, N. (2009). Analysis of a collaborative research project: a researcher and a teacher confronted to teaching mathematics to students presenting difficulties. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *8*(1), 1-24.

Boaler, J. (1998). Open and closed mathematics: student experiences and understandings. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(1), 41–62. https://doi.org/10.2307/749717

Boaler, J. (1999). Participation, knowledge and beliefs: a community perspective on mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics*, *40*, 259-281. https://doi.org/10.1023/A:1003880012282

Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics*, *17*(2), 125-141. https://doi.org/10.1007/BF00311517

Borasi, R. (1992). *Teaching mathematics through inquiry*. Heinemann.

Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction: A focus on errors*. Ablex.

Briand, J. et Chamorro, C. (1991). Glossaire de didactique. static.canalblog.com/storagev1/rodformation.canalblog.com/docs/glossaire_Brousseau.pdf

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Éditions la Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (2003). Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques. guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf

Brown, S. I. et Walter, M. I. (2005). *The art of problem posing* (3e éd.). Routledge.

Cobb, P., Perlwitz, M. et Underwood, D. (1994). Construction individuelle, acculturation mathématique et communauté scolaire. *Revue des sciences de l'éducation*, *20*(1), 41-61. https://doi.org/10.7202/031700ar

Cobb, P. et Yackel, E. (1998). A constructivist perspective on the culture of the mathematics classroom. Dans F. Seeger, J. Voigt et U. Waschescio (dir.), *The Culture of the mathematics classroom* (p. 158-190). Cambridge University Press.

Coulange, L. (2012). *L'ordinaire de l'enseignement des mathématiques, Pratiques enseignantes et leurs effets sur les apprentissages des élèves* [note de synthèse pour une habilitation à diriger des recherches, Université Paris 7]. TEL. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00801863

Davis, P. J. et Hersh, D. (1981). *The mathematical experience*. Birkhauser.

Desgagné, S. (1998). La position du chercheur en recherche collaborative: illustration d'une démarche de médiation entre culture universitaire et culture scolaire. *Recherches qualitatives*, *18*, 77-105. https://doi.org/10.7202/000305ar

Doddridge, É. et Voyer, D. (1999). Un problème de dates de fêtes. *Envol*, *109*, 45-47.

Forman, E. et Ansell, E. (2001). The multiple voices of a mathematics classroom community. *Educational Studies in Mathematics*, *46*, 115-142. https://doi.org/10.1023/A:1014097600732

Heaton, R. M. (1992). Who is minding the mathematics content? A case study of a fifth-grade teacher. *Elementary School Journal*, *93*(2), 153-162. https://doi.org/10.1086/461719

Hiebert, J. (2004). Signposts for teaching mathematics through problem solving. Dans L. Schoen (dir.), *Teaching mathematics through problem solving* (p. 53-61). National Council of Teachers of Mathematics.

Kieren, T. E. (1995, juin). *Teaching mathematics (in-the-middle): Enactivist view on learning and teaching mathematics* [conférence]. Queens/Gage Canadian National Mathematics Leadership Conference, Queens University, Kingston, Canada.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery*. Cambridge University Press.

Lampert, M. (1990a). When the problem is not the question and the solution is not the answer. *American Educational Research Journal*, *27*(1), 29-63. https://doi.org/10.3102/00028312027001029

Lampert, M. (1990b). Connecting inventions with conventions. Dans L. Steffe (dir.), *Transforming early childhood education* (p. 253-265). Lawrence Erlbaum Associates.

Maheux, J.-F. et Proulx, J. (2014). Vers le *faire mathématique* : essai pour un nouveau positionnement en didactique des mathématiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *19*, 17-52.

Maheux, J.-F. et Proulx, J. (2015). Doing|mathematics: Analysing data with/in an enactivist-inspired approach. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, *47*(2), 211-221. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0642-7

Maturana, H.R (1987). Everything is said by an observer. Dans W. I. Thompson (dir.), *GAIA: A way of knowing* (p. 65-82). Lindisfarne Press.

Mopondi, B. (1995). Les explications en classe de mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 15*(3), 7-52.

Nemirovsky, R. (2005). Mathematical spaces. Dans R. Nemirovsky, A. S. Rosebery, J. Solomon et B. Warren (dir.), *Everyday matters in science and mathematics* (p. 45-94). LEA.

Post, T. R., Harel, G., Behr, M. J. et Lesh, R. (1991). Intermediate teachers' knowledge of rational number concepts. Dans E. Fennema, T. P. Carpenter et S. J. Lamon (dir.), *Integrating research on teaching and learning mathematics* (p. 177-198). SUNY Press.

Proulx, J. (2013). Le calcul mental au-delà des nombres : conceptualisations et illustrations avec la résolution d'équations algébriques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *18*, 61-90.

Proulx, J. (2015a). Looking at students' mathematics: from a deficit view on mathematical knowledge toward possibilities of mathematical actions. *Proceedings of Interdisciplinary Scientific Conference on Mathematical Transgressions*, 89-102.

Proulx, J. (2015b). Mental mathematics with mathematical objects other than numbers: The case of operation on functions. *Journal of Mathematical Behavior*, *39*, 156-176. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.07.001

Proulx, J. (2017). Le calcul mental en mathématiques : Quels potentiels pour l'activité mathématique ? *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, *17*(4), 288-307. https://doi.org/10.1080/14926156.2017.1378833

Proulx, J. (2018a). Démarche d'investigation à travers un enseignement par résolution de problèmes : pistes initiales. Dans M. Abboud (dir.), *Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines. Actes de Espace mathématique francophone 2018 (p.* 51-58). IREM de Paris.

Proulx, J. (2018b). On teaching actions in mathematical problem-solving contexts. Dans T. E. Hodges, G. J. Roy et A. M. Tyminski (dir.), *Proceedings of the 40th Annual Meeting of North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-NA)* (p. 1060-1067). University of South Carolina et Clemson University.

Proulx, J. (2019a). Recherches et résolution de problèmes en enseignement des mathématiques : éducation, mathematics education et didactique des mathématiques. *Chroniques – fondements et épistémologie de l'activité mathématique*. http://www.chroniques.uqam.ca

Proulx, J. (dir.). (2019b). *Enseignement des mathématiques par résolution de problèmes : approche, fondements et illustrations*. Notes de cours MAT3227. http://profmath.uqam.ca/jproulx/MAT3227.html

Proulx, J., Lavallée-Lamarche, M.-L. et Tremblay, K.-P. (2017). Équations algébriques et activité mathématique en calcul mental : regard sur les défis d'enseignement. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *22*, 43-65.

Proulx, J. et Maheux, J.-F. (2017). From problem-solving to problem-posing, and from strategies to laying down a path in solving – Taking Varela's ideas to mathematics education research. *Constructivist Foundations*, *13*(1), 701-708.

René de Cotret, S. (1999). Perspective bio-cognitive pour l'étude des relations didactiques. Dans G. Lemoyne et F. Conne (dir.), *Le cognitif en didactique des mathématiques* (p. 103-120). Presses de l'Université de Montréal .

Schoen, L. (2004a). *Teaching mathematics through problem solving* – Grade K-6. National Council of Teachers of Mathematics.

Schoen, L. (2004b). *Teaching mathematics through problem solving* – Grade 6-12. National Council of Teachers of Mathematics.

Schoenfeld, A. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. Dans A. Schoenfeld (dir.), *Mathematical thinking and problem solving* (p. 53-70). Lawrence Erlbaum Associates.

Shimizu, Y. (2004). Problem solving as a vehicle for teaching mathematics: a Japanese perspective. Dans L. Schoen (dir.), *Teaching mathematics through problem solving* (p. 205-214). National Council of Teachers of Mathematics.

Stanic, G. et Kilpatrick, J. (1988). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. Dans R. I. Charles et E. A. Silver (dir.), *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving* (p. 1-22). National Council of Teachers of Mathematics.

Stein, M. K., Boaler, J., et Silver, E. (2004). Teaching mathematics through problem solving: Research perspectives. Dans L. Schoen (dir.), *Teaching mathematics through problem solving* (p. 245-56). National Council of Teachers of Mathematics.

Theis, L. (2012). Quelle formation mathématique pour les enseignants du primaire et du préscolaire? Dans J. Proulx, C. Corriveau et H. Squalli (dir.), *Formation mathématique pour l'enseignement des mathématiques : pratiques, orientations et recherches* (p. 181-204). Presses de l'Université du Québec.

von Glasersfeld, Ernst. (1995). *Radical constructivism: a way of knowing and learning*. Falmer Press.

Wilder, R. L. (1981). *Mathematics as a cultural system*. Pergamon Press.

Annexe

Extrait d'une séance de résolution de problèmes en classe

Le matériau utilisé dans cet article pour illustrer la nature des analyses conduites et ce qui en ressort est un extrait d'une séance menée dans une classe de mathématiques de secondaire 4 comptant une trentaine d'élèves (élèves de 15-16 ans, période de 75 minutes). Cet extrait a été choisi pour sa capacité à bien illustrer les interactions entre élèves et enseignants, communs dans la majorité des séances conduites dans nos travaux.

L'enseignant de la classe avec qui nous avons collaboré s'intéressait précisément aux travaux menés au sein de notre Laboratoire en contexte de résolution de problèmes par le calcul mental (voir, par exemple, Proulx, 2013, 2015b, 2017; Proulx et al., 2017). L'enseignant voulait ainsi donner ce type de problèmes (courts, à l'oral, en temps limité, sans papier-crayon) pour voir la façon avec laquelle ses élèves s'engageraient et le type de stratégies qu'ils déploieraient. Le thème retenu pour la séance d'où l'extrait est tiré est la géométrie analytique des distances dans le plan (points de croisement, de partage, distance entre deux points, etc.). Le problème proposé aux élèves dans l'extrait concerne la distance entre deux points dans le plan cartésien, soit : « Trouvez la distance entre les points (0,0) et (4,3) » (avec un plan cartésien affiché au tableau avec les deux points tracés, voir la figure 1).

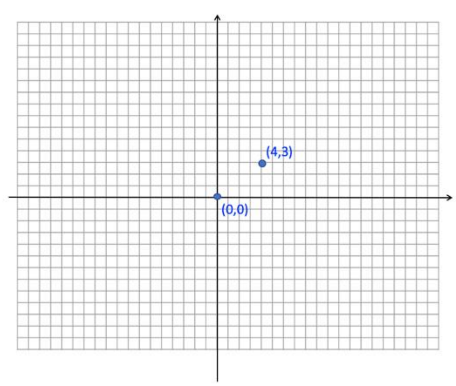


Figure 1 : Le plan cartésien utilisé pour le problème de distance entre deux points

Parce qu'ils avaient déjà abordé les formules de distance entre deux points au niveau algébrique (D=$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$), l'intention derrière ce problème n'était pas de faire découvrir/trouver ladite formule. L'intention était plutôt de plonger les élèves en résolution orale avec un court laps de temps pour faire émerger leurs compréhensions spontanées et voir ce qu'ils comprennent à ce stade sur l'idée de distance entre deux points. En d'autres mots, l'idée était de voir comment les élèves s'en sortiraient, dans quelles stratégies mathématiques ils s'engageraient, quels types d'interactions, de questions et d'explorations seraient provoquées par ce type de problème, soit quelles productions mathématiques émergeraient et se développeraient en classe.

Les élèves disposaient d'une quinzaine de secondes pour résoudre sans avoir recours au support papier-crayon ni à d'autres aides matérielles. Après le temps écoulé, ils ont été invités à partager leurs solutions (complètes ou non) et comment ils y sont parvenus. Ce problème était le premier donné aux élèves durant la séance, et le travail qui en a suivi s'est étalé sur 40 minutes, menant les élèves sur des explorations et interactions subséquentes et contingentes au problème et aux productions partagées. Voici dans ce qui suit un déroulement synthétique et chronologique des explorations menées une fois le temps écoulé, où l'enseignant[13] a invité les élèves à expliquer leurs solutions.

Stratégie A : Un élève explique avoir trouvé la réponse en appliquant la formule usuelle pour la distance (D=$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + \ (y_1 - y_2)^2}$), soit en faisant 4-0=4 et 3-0=3, mettant ensuite chaque résultat au carré avant de les additionner. Prendre la racine carrée de cette somme lui permet d'obtenir une distance de 5 unités.

Stratégie B : Un autre élève explique qu'il est possible de tracer un triangle, puis d'utiliser la relation de Pythagore. Pour trouver la valeur des cathètes du triangle, il compte le nombre de « carrés » d'un point à l'autre (soit 3 et 4, que l'enseignant indique sur le dessin). Il dit ensuite chercher l'hypoténuse en élevant 3 et 4 au carré, en additionnant les carrés, puis en trouvant la racine carrée de la somme ainsi obtenue (figure 2).

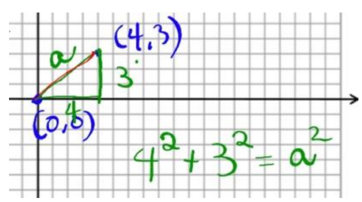


Figure 2 : Le triangle tracé pour rejoindre les deux points

Stratégie C : Une élève explique qu'il est possible de compter les points entre (0,0) et (4,3). Au tableau, elle trace en rouge un segment entre (0,0) et (4,3) sur le triangle précédent (figure 3). Partant de (0,0), elle compte alors le nombre de « points » de croisement parcourus sur ce segment rouge jusqu'à (4,3), soit en quelques sortes le nombre de diagonales de carrés-unités. Elle s'arrête toutefois et affirme que le segment en rouge ne passe pas exactement sur toutes les diagonales des carrés-unités et que, par conséquent, le comptage est difficile à réaliser.

13 L'enseignant dans ce cas-ci était un membre de l'équipe de recherche.

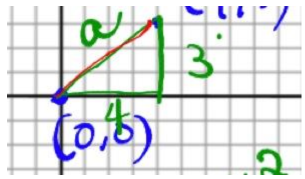


Figure 3 : Ligne rouge tracée sur le triangle

Pour l'aider à expliquer sa stratégie, même si elle a été infructueuse, l'enseignant trace plus bas sur le tableau un segment qui passe par deux autres points fictifs, mais exactement par toutes les diagonales des carrés-unités. De cette façon, le nombre de diagonales franchies par le segment, ici 4, peut être compté directement (figure 4).

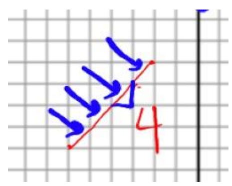
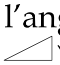


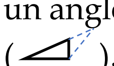
Figure 4 : Segment de droite croisant toutes les diagonales des carrés-unités

L'enseignant demande alors si la longueur de la diagonale du carré-unité est la même que celle du côté de ce même carré, auparavant utilisé pour déterminer la longueur de la cathète du triangle (en traçant au tableau un carré-unité traversé d'une diagonale ).

> Une élève affirme que les deux longueurs ne sont pas les mêmes, car la diagonale d'un carré n'est pas de la même longueur que son côté.
>
> Un élève dit qu'il est certain que ces deux longueurs sont différentes, car l'hypoténuse est toujours le plus grand côté d'un triangle.
>
> Une autre élève explique que la diagonale est plus grande, car elle est en face de l'angle le plus grand du triangle.

Relativement à cette dernière affirmation, l'enseignant demande aux élèves si c'est toujours le cas, soit que le côté le plus grand dans un triangle se situe en face de l'angle le plus grand (en dessinant un triangle rectangle quelconque au tableau ).

> L'élève précédente, pointant ce dessin, affirme que l'angle faisant face au grand côté est justement plus grand.
>
> Une autre élève explique que, dans un triangle, plus l'angle est grand plus la longueur opposée est grande. Pointant le dessin, elle affirme que si le côté (hypoténuse) avait été plus long, il aurait donné un plus grand angle. Elle ajoute que, puisque la somme des angles d'un triangle donne 180°, alors l'angle droit est toujours l'angle le plus grand du triangle (parce qu'il ne reste que 90° à partager entre les deux autres angles).

L'enseignant reprend ces derniers propos en soulignant que cela suppose que, dans un triangle, le côté qui fait face au plus grand angle est le plus grand du triangle. Reprenant le dessin du triangle rectangle, il fait varier l'angle droit vers un angle obtus et prolonge le côté associé, montrant que ce côté devient plus long (). Il transforme ensuite le même angle en un angle aigu pour voir si le côté associé à cet angle devient plus court (figure 5).

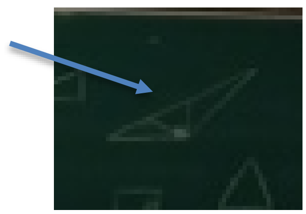


Figure 5 : Variation de l'angle et son effet sur le côté « hypoténuse » du triangle

L'enseignant demande alors aux élèves si, avec cet angle aigu, leur « théorie » du côté opposé à l'angle est toujours valide. Plusieurs élèves font alors référence aux triangles isocèles et équilatéraux.

> Un élève dit que tout fonctionne pour le triangle isocèle, avec deux côtés égaux face à deux angles égaux.
>
> Un autre élève souligne que c'est aussi le cas pour le triangle équilatéral, car « c'est partout pareil » : mêmes angles et mêmes longueurs de côtés.

L'enseignant revient par la suite sur la question des diagonales des carrés-unités et la stratégie voulant qu'on puisse trouver la distance en les comptant. Pour faire suite aux explications des élèves voulant que la diagonale du carré est plus grande que le côté du même carré, il souligne que dans cette stratégie il suffit de compter les diagonales, c'est-à-dire le nombre de diagonales franchies par le segment d'un point à l'autre. Il ajoute que ceci représente une mesure possible, qui donnerait 4 diagonales dans l'exemple de la figure 4. Il écrit alors au tableau qu'il est possible d'exprimer la distance entre les deux points par la valeur de 4 diagonales ou celle de 5 côtés de carrés-unités, ce qui donne deux mesures différentes pour la même distance[14].

> Un élève ajoute que si on connait la valeur en unités de la diagonale du carré, on peut trouver le nombre de carrés-unités pour ce segment en le multipliant par ce « facteur ».

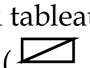
[14] À noter la confusion chez l'enseignant à propos de l'exemple donnant 4 diagonales, qui n'est pas celui de la distance entre (0,0) et (4,3).

L’enseignant écrit donc 1,2 comme valeur fictive de cette diagonale, en insistant sur le fait que chacune des deux mesures obtenues est acceptable, mais qu’elles n’auraient tout simplement pas les mêmes unités (carré-unité ou diagonale-unité).

Stratégie D : Un élève propose alors une autre solution en faisant appel à la loi des sinus, affirmant que l’angle du triangle est de 45°. L’enseignant demande alors à cet élève comment ce dernier sait que l’angle est de 45°. Comme celui-ci ne peut pas répondre, certains élèves acceptent l’affirmation alors que d’autres expriment une réticence. Face aux divergences d’opinion entre les élèves, l’enseignant leur demande de prendre quelques minutes, seuls ou en équipe et avec leur matériel scolaire au besoin, pour explorer la question à savoir si l’angle du triangle est de 45° ou non, et d’élaborer un argument permettant de convaincre les autres élèves. Après cinq à six minutes de travail, l’enseignant demande aux élèves de reprendre leurs places et de faire part de leurs trouvailles à la classe.

> Une élève explique que sur sa feuille aide-mémoire, donnée pour les aider aux examens, il y a un triangle rectangle isocèle qui possède des angles de 45°. Toutefois, avec le triangle de 4 et 3 unités de côté, il n’est pas possible d’affirmer directement que l’angle est de 45°, car ce n’est pas un triangle isocèle étant donné que les côtés ne sont pas égaux.

L’enseignant mentionne qu’il s’agit d’une sorte de raisonnement inversé : puisque le triangle rectangle isocèle de la feuille aide-mémoire a des angles de 45° et que le triangle en question n’est pas un triangle isocèle rectangle, alors il n’est pas possible d’affirmer directement que son angle est de 45°.

> Une autre élève s’avance au tableau et à partir du triangle formé des points (0,0) et (4,3) complète un rectangle ( , figure 6). Elle explique que l’hypoténuse est la diagonale de ce rectangle, qui le coupe en deux et donc coupe aussi l’angle de 90° en deux, donnant un angle de 45°.

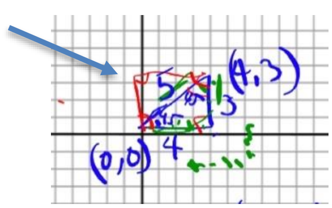


Figure 6 : Rectangle, en rouge, complété à partir du triangle

L’enseignant reprend ici l’argument de l’élève pour la classe, à savoir que puisque la diagonale coupe le rectangle en deux parties égales, elle coupe aussi l’angle de 90° en deux parties égales.

> Une autre élève affirme son désaccord et dessine au tableau un rectangle avec une diagonale en disant que bien qu’elle divise le rectangle en deux rien n’assure que l’angle soit lui aussi divisé en deux parties égales (figure 7).

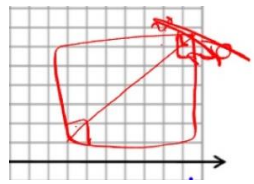


Figure 7 : Rectangle dessiné en réponse à l’affirmation selon laquelle l’angle de 90° est coupé en deux parties égales

L’enseignant reformule le désaccord de l’élève, expliquant qu’avec son exemple, qui fait ici office de contre-exemple, elle avance que même si la diagonale coupe le rectangle en deux parties égales, les angles eux ne sont pas nécessairement divisés en deux parties égales.

> Une autre élève complète cette idée en ajoutant que puisque les côtés du triangle ne sont pas égaux (soit de 3 et de 4), la diagonale ne coupe pas l’angle de 90° en deux angles de 45°.

L’enseignant reformule l’affirmation de l’élève en disant qu’étant donné que les côtés du triangle ne sont pas égaux, les angles ne seront pas nécessairement égaux non plus, compte tenu de la théorie précédente, acceptée par tous, selon laquelle le plus grand côté du triangle fait face au plus grand angle du même triangle. Ici, un côté plus grand ferait face à un angle plus grand.

> L’élève ayant fait référence à sa feuille aide-mémoire affirme qu’il leur arrive tous dans un examen de voir des triangles rectangles qui n’ont pas d’angles de 45°, par exemple des angles de 32° et 58°. Elle trace alors au tableau un exemple de ce triangle, qu’elle complète pour former un rectangle (figure 8), expliquant que la diagonale coupe le rectangle en deux, mais sans que les angles obtenus soient de 45°.

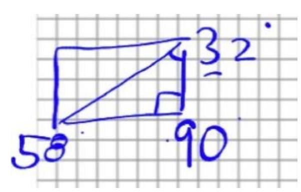


Figure 8 : Triangle contre-exemple avec angles de 32 et 58 degrés

L’enseignant affirme alors que l’élève offre ici un contre-exemple, avec un type de triangle rectangle qu’ils rencontrent fréquemment et qui n’a pas deux angles de 45°, faisant en sorte que les angles du triangle précédent ne sont pas nécessairement de 45°.

> Un élève propose ensuite d'appliquer la loi des sinus avec les données actuelles du triangle, soit sin90°/5=sin?/4 obtenant ainsi un angle de 58,1° [résultat qui sera corrigé à 53,1° et 36,9° par la suite].

Après la formulation de toutes ces idées, l'enseignant demande aux élèves comment ils se positionnent concernant l'angle de 45°.

> Un des élèves ayant proposé la stratégie de la loi des sinus se rend alors au tableau et explique que, du fond de la classe, visuellement et sans mesures d'angles, l'hypoténuse du triangle semble passer directement par les points des diagonales (et couper les carrés-unités en deux), donnant l'impression de former des angles de 45°. Il ajoute que, toutefois, lorsque rendu au tableau, il devient clair que ce n'est pas le cas.

Maintenant convaincus que l'angle n'est pas de 45°, les élèves expriment leur désaccord avec cette dernière affirmation. L'enseignant ré-explique la position de l'élève en affirmant que ce dernier fait un certain *mea culpa* pour avoir insisté sur l'angle de 45° et que c'était uniquement une erreur visuelle. Les élèves demeurent toutefois en désaccord.

> Un élève reprend et complète ensuite un argument précédent sur les mesures des côtés du triangle, à savoir que puisque les trois côtés du triangle sont différents, leurs angles associés seront aussi différents, reprenant ainsi la théorie du plus grand côté faisant face au plus grand angle, et donc que des côtés différents entraînent des angles différents.

En vue de conclure, l'enseignant souligne qu'un élève a préalablement proposé dans son cahier de former un carré pour évaluer la question de l'angle de 45°. Cet élève, trop timide pour s'exprimer devant toute la classe, demande au chercheur-enseignant d'expliquer son raisonnement aux autres. Ce dernier dessine alors un triangle de 3, 4 et 5 unités de côté et prolonge la cathète de 3 unités vers une de 4 unités pour former un carré de 4 unités de côté. Reprenant les propos de l'élève et reliant ce dessin au carré-unité utilisé auparavant pour comparer la mesure de la diagonale à celle du côté du carré, l'enseignant fait valoir que ce même dessin est présent dans le carré de 4 unités de côté nouvellement dessiné. Par conséquent, si les deux angles sont de 45° dans le carré-unité initial, alors ils le sont aussi dans le carré de 4 unités de côté, donnant un triangle rectangle avec deux cathètes de 4 unités et deux angles de 45° : montrant par le fait même qu'avec le triangle de 4 et 3 unités de côté il n'est pas possible d'obtenir la même chose et que les angles sont nécessairement différents. L'enseignant trace ensuite des arcs de cercles pour marquer les angles (un en rouge pour le triangle de mesures 4 et 3 unités et un en vert pour le triangle de 4 et 4 unités; figure 9).

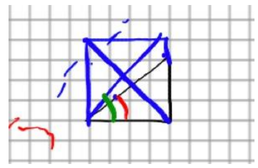


Figure 9 : Comparaison des triangles à partir du carré

Après avoir entendu ces divers arguments, les élèves se disent d’accord avec le fait que l’angle n’est pas de 45°. Les stratégies pour résoudre le problème initial ayant toutes été explorées, la séance se continue avec la résolution d’un autre problème.

L'interprétation et le dépistage des difficultés d'apprentissage en mathématiques au primaire : apports de l'approche anthropo-didactique

Thomas RAJOTTE
Université du Québec à Rimouski
Thomas_Rajotte@uqar.ca
Dominic SIMARD
Université du Québec à Rimouski
Dominic_Simard@uqar.ca
Marie-Paule GERMAIN
Université du Québec à Rimouski
Marie-Paule_Germain@uqar.ca
Sylvain BEAUPRÉ
Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue
Sylvain.Beaupre@uqat.ca

Résumé : Cette étude a pour but d'explorer de quelle manière les différentes perspectives explicatives des difficultés d'apprentissage teintent le discours des professionnels en éducation lorsque ceux-ci se positionnent par rapport aux fondements des difficultés d'apprentissage en mathématiques. Par le biais d'entretiens semi-dirigés, 14 professionnels en éducation ont partagé leur expérience et leur vision concernant l'interprétation des difficultés d'apprentissage en mathématiques. De plus, ceux-ci ont discuté des différentes modalités permettant d'effectuer le dépistage de ces difficultés. Les résultats dégagés par le biais de l'analyse des discours formulés mettent en lumière les différents thèmes se rapportant à trois perspectives explicatives (cognitiviste, didactique et sciences sociales). Les résultats permettent aussi de relever l'apport complémentaire de l'approche anthropo-didactique se rapportant à la perspective des sciences sociales qui, par sa récente apparition dans les écrits scientifiques québécois, est peu fréquemment considérée par les chercheurs et les professionnels œuvrant dans le milieu de l'éducation.

Mots clés : mathématiques, primaire, difficultés d'apprentissage, dépistage, approche anthropo-didactique, perspectives explicatives

Revue québécoise de didactique des mathématiques, 2020, *vol 1*, p. 110-152.
https://doi.org/10.71403/7jbm0c44

Interpreting and screening learning difficulties in mathematics: advantages of the anthropo-didactic approach

Abstract: The aim of this study is to explore how different explanatory perspectives on learning difficulties influence the discourse of educational specialists when they take a position on the foundations of learning difficulties in the field of mathematics. Through semi-structured interviews, 14 educational specialists shared their experience and their vision regarding the interpretation of learning difficulties in mathematics. Moreover, they discussed the different methods for screening those difficulties. The results obtained through analysis of their discourse highlight different themes connected to three explanatory perspectives (cognitivist, didactic and social science). In addition, the results reveal the complementary contribution of the anthropo-didactic approach (related to the social science perspective) which, owing to its recent emergence in the Quebec scholarly research, is rarely considered by researchers and professionals working in the field of education.

Keywords: Mathematics, Elementary School, Learning Difficulties, Screening, Anthropo-Didactic Approach, Explanatory Perspectives.

Introduction

Cette recherche s'inscrit dans la lignée des travaux sur les difficultés d'apprentissage en mathématiques (Ahmad, 2014; Chopin et Sarrazy, 2014; Giroux, 2013; Roiné, 2009). Au courant du vingtième siècle, les recherches ayant approfondi cette thématique ont principalement adopté un cadre explicatif relevant des sciences cognitives. Fondamentalement, ces études considéraient que les difficultés d'apprentissage étaient intrinsèques à l'élève (Giroux, 2013; Lemoyne et Lessard, 2003). Par la suite, les tenants d'une deuxième perspective, puisant essentiellement ses fondements du champ de recherche en didactique des mathématiques, ont contribué à approfondir le rôle des pratiques d'enseignement, des interactions entre le pédagogue et les élèves ainsi que la nature des tâches en mathématiques afin d'expliquer dans quels contextes émergent les difficultés d'apprentissage (Giroux, 2013). Finalement, au cours des dernières années, une troisième perspective issue des travaux européens (Ahmad, 2014; Chopin, 2007, 2011; Najar, 2010; Roiné, 2012) s'est jointe au débat concernant l'explication de la nature des difficultés d'apprentissage. Cette perspective, qui relève essentiellement du domaine des sciences sociales, s'appuie sur l'approche anthropo-didactique afin d'expliquer les difficultés d'apprentissage en mathématiques. Cette approche considère la nécessité d'adopter un point de vue anthropologique permettant de traiter des variables culturelles (valeurs sociales et influences institutionnelles) dans l'explication des difficultés des élèves en mathématiques (Sarrazy, 2006).

Par le biais de la présente étude, nous souhaitons contribuer à documenter de quelle manière les différentes perspectives explicatives influent sur le discours des professionnels en éducation lorsque ceux-ci se positionnent concernant les modalités d'interprétation des difficultés d'apprentissage en mathématiques ainsi que sur les modalités de dépistage de celles-ci. De plus, par le biais de cette recherche, nous avons mis à l'épreuve l'approche anthropo-didactique dans le but de vérifier si la considération de celle-ci engendre un apport complémentaire aux deux perspectives traditionnelles quant à l'interprétation de la nature de ces difficultés telle que réalisée par des professionnels issus du milieu de l'éducation[1].

1. Problématique

Vers la fin des années 1990, dans la lignée des travaux de la Commission des États généraux sur l'éducation, le ministère de l'Éducation du Québec s'est fixé un défi de taille, soit celui de prendre « le virage du succès » pour reprendre l'expression consacrée (Charland, 2005; Gouvernement du Québec, 1997, 1999; Proulx et Charland, 2009). Essentiellement, cette nouvelle orientation visait la mise en place d'actions concertées des différents acteurs issus du milieu de l'éducation afin de passer de l'accès du plus grand nombre d'apprenants québécois au système d'éducation vers le succès du plus grand nombre (Gauthier et Saint-Jacques, 2002; Gouvernement du Québec, 1999). Tel qu'indiqué dans le rapport Pour une école riche de tous ses élèves s'adapter à la diversité des élèves de la maternelle à la 5e année du secondaire du Conseil supérieur de l'éducation (2017), les gestes posés afin d'atteindre cette cible avaient comme principale finalité de délaisser les situations où l'élève s'adapte à la norme afin d'implanter progressivement des situations d'inclusion à l'intérieur desquelles c'est l'école qui s'adapte à l'élève.

Pour atteindre cet objectif rassembleur, une série d'actions ciblées a été mise en place auprès des élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage (EHDAA), et ce, afin de promouvoir la réussite de cette population d'élèves identifiée comme étant la plus à risque d'échec scolaire (Gouvernement du Québec, 1999; Rajotte, 2014). Malgré les efforts déployés par les acteurs du système scolaire depuis cette prise de position ministérielle, la nécessité de poursuivre les interventions auprès des EHDAA demeure un enjeu important en 2020. En effet, le taux de décrochage de ce groupe d'élèves (46,8 %) est près de trois fois plus élevé que celui observé pour l'ensemble

---

[1] Cette recherche a été financée par le biais du programme Développement Savoir du Conseil de recherches en sciences humaines du Canada (CRSH). Dans le cadre de cet écrit, nous présentons le volet qualitatif d'une étude mixte. Par ailleurs, il est possible de consulter la contribution de Rajotte et al. (2018) afin d'accéder aux résultats issus du volet quantitatif de la présente recherche.

du Québec (16,2 %) (Gouvernement du Québec, 2015). Ce constat est corroboré par Homsy et Savard (2018) dans le rapport Décrochage scolaire au Québec : dix ans de surplace, malgré les efforts de financement qui met en lumière une corrélation modérée (r = 0,4), entre le taux d'élèves HDAA et le décrochage scolaire. Selon ces auteurs, bien que les EHDAA constituent environ un cinquième (20,5 %) de la population étudiante, ce groupe représente près de la moitié des élèves qui décrochent du système scolaire (46,7 %). Cette situation s'explique en partie par le fait que le modèle d'intégration des EHDAA au sein des classes régulières ne répondrait pas aux besoins d'apprentissage de ceux-ci (Legault, 2013). Dans le but de prévenir les difficultés scolaires des EHDAA, une attention particulière doit être portée à l'enseignement et à l'apprentissage des mathématiques (Rajotte, 2018). Cela se justifie par le fait que la société contemporaine exige des compétences mathématiques qui vont au-delà de la maîtrise d'un ensemble d'habiletés techniques (Mary et al., 2008; Rajotte, 2014, 2018).

De manière à favoriser la réussite de cette population d'élèves, le ministère de l'Éducation du Québec a publié un cadre de référence visant à faciliter l'application, par les enseignants et intervenants, de politiques institutionnelles en matière d'enseignement auprès des élèves en difficulté d'apprentissage (Giroux, 2013; Gouvernement du Québec, 2003). À cet effet, depuis la dernière réforme de l'éducation du système québécois, il est maintenant demandé aux enseignants d'adapter leurs interventions pédagogiques aux caractéristiques et aux besoins des EHDAA (Gouvernement du Québec, 1999, 2000, 2007; Proulx et Charland, 2009). Concrètement, dans le domaine des mathématiques, cette requête se traduit par la mise en œuvre d'interventions distinctes qui doivent être adaptées aux élèves ayant des besoins particuliers (par exemple, élèves handicapés [déficience auditive, visuelle ou organique], élèves « dyspraxiques » ou « dyscalculiques », élèves ayant un trouble déficitaire de l'attention, élèves ayant un trouble du spectre de l'autisme) (Rajotte, 2014).

1.1 Difficultés d'apprentissage : deux approches traditionnelles et leurs limites

Un regard sur les écrits scientifiques des 30 dernières années permet de relever que deux grandes perspectives permettent d'expliquer les difficultés d'apprentissage en mathématiques des élèves du primaire (Rajotte, 2014; Roiné, 2009). La première perspective (cognitiviste) est essentiellement centrée sur l'identification et la description des dysfonctionnements propres à l'élève, tandis que la seconde perspective (didactique) s'intéresse plutôt au fonctionnement du système didactique et aux phénomènes qui caractérisent les relations entre la production de l'élève, la situation effective d'enseignement et la spécificité du savoir (Giroux, 2010).

À cet effet, les travaux scientifiques adoptant un cadre explicatif se rapportant aux domaines de la psychologie développementale, de la neuropsychologie, ainsi que des sciences cognitives sont rattachés à la première perspective (Martin et Mary, 2010; Rajotte et al., 2014). Les tenants de cette approche attribuent les difficultés d'apprentissage directement à l'élève (Rajotte, 2014) en prenant en compte ses traits personnels (Ayala et Roditi, 2014). En fait, ces difficultés paraissent intrinsèquement liées aux caractéristiques fonctionnelles, cognitives, émotives ou même encore aux processus inconscients de l'apprenant (Ayala et Roditi, 2014; Lemoyne et Lessard, 2003). En adoptant ce point de vue, l'élève est perçu comme étant un sujet pour lequel les caractéristiques personnelles peuvent être mesurées au moyen d'instruments d'évaluation standardisés. Toujours selon cette perspective, le rôle de l'enseignant consiste à aider l'élève à pallier ses difficultés par le biais d'interventions remédiatives visant à modifier ses processus cognitifs (Rajotte et al., 2014).

D'un autre côté, les travaux adoptant un cadre explicatif se rapportant à la didactique des mathématiques relèvent de la deuxième perspective explicative (Roiné, 2009). Au sein de cette perspective, les difficultés d'apprentissage sont présentées comme étant la résultante de l'interaction de l'élève avec le système scolaire et les dimensions didactiques qui caractérisent celui-ci (Perrin-Glorian, 1993; Rajotte et al., 2014). Conséquemment, l'enseignement est considéré du point de vue de la mise en place des conditions favorables à l'apprentissage par le biais d'interventions didactiques qui prennent en compte à la fois les connaissances mathématiques de l'élève, la spécificité du savoir ainsi que les caractéristiques de la relation didactique qui définit la relation entre l'apprenant et le pédagogue (Martin et Mary, 2010).

Lorsqu'il est question des difficultés des élèves en mathématiques, l'évolution des législations et des politiques propres à l'adaptation scolaire tend à positionner l'orientation du ministère dans la première perspective explicative (celle relevant des sciences cognitives) (Rajotte, 2014). Cette position se dégage de la Politique de l'adaptation scolaire (Gouvernement du Québec, 1999) qui vise à recadrer les grandes orientations de la réforme de l'éducation à l'égard des besoins particuliers et des caractéristiques propres aux EHDAA. Cette politique comprend une prescription ministérielle à l'égard des enseignants afin qu'ils adaptent leur enseignement aux caractéristiques et aux besoins des élèves (Giroux, 2013; Gouvernement du Québec, 1999, 2000; Proulx et Charland, 2009). Bien que la Politique de l'adaptation scolaire (Gouvernement du Québec, 1999) s'est avérée fort utile pour aider à reconnaître les besoins spécifiques des élèves ayant des besoins particuliers, celle-ci date de plusieurs années et n’a pas encore fait l’objet de modification à la suite des avancées dans le domaine des sciences de l’éducation (Authier, 2010; Gaudreau et al., 2008; Rajotte, 2014).

À ce sujet, il importe de mentionner que des écrits gouvernementaux, tel le Référentiel d’intervention en mathématique (Gouvernement du Québec, 2019), se sont appuyés sur les connaissances issues de la recherche afin de documenter les pistes d’actions à mettre en place afin de soutenir notamment le développement des compétences en mathématiques des élèves qui éprouvent des difficultés à l’égard de cette discipline. Par ailleurs, bien que ce type de document offre des balises aux équipes-écoles afin de réfléchir à leur pratique, de préciser leurs actions et, ainsi de mieux répondre aux besoins des élèves en mathématiques (Gouvernement du Québec, 2019), les postulats issus de ces écrits n’ont toujours pas engendré de modifications à la Politique de l’adaptation scolaire (Gouvernement du Québec, 1999) qui prévaut au Québec. Concernant l’application des prescriptions découlant de cette politique, Giroux (2013) mentionne que la complexité du phénomène des difficultés et de l’échec scolaire ainsi que les divergences fondamentales entre les perspectives disciplinaires rendent peu probable une différenciation de l’intervention pédagogique en fonction de la nature des difficultés.

Ainsi, il est pertinent d’interroger les fondements de la prescription ministérielle relative à l’adaptation de l’enseignement aux caractéristiques spécifiques des élèves (Rajotte et al., 2014). D’une part, l’application de cette recommandation est ardue puisque les enseignants disposent de peu d’appuis théoriques et de moyens didactiques permettant de réaliser cette adaptation en fonction des différents profils d’EHDAA. D’autre part, les recherches récentes ayant adopté un cadre explicatif propre aux sciences cognitives ont obtenu peu de résultats empiriques (Giroux, 2013; Lemoyne et Lessard, 2003).

Concernant la deuxième perspective explicative rattachée directement à la didactique des mathématiques, certaines limites ont aussi été mises en lumière. En effet, bien que les travaux issus de cette seconde perspective aient permis de documenter les particularités de l’enseignement dispensé aux EHDAA, les recherches en didactique des mathématiques produisent avant tout des analyses détaillées traduisant la réalité d’un groupe restreint d’individus. Par conséquent, les écrits issus de ce domaine de recherche permettent difficilement de généraliser des résultats auprès d’une vaste population d’élèves (Giroux, 2013).

Confrontée à ce constat, Giroux (2013) mentionne que la problématique de l’échec et des difficultés scolaires est d’une telle complexité qu’elle requiert des outils d’analyse provenant des sciences sociales. Conséquemment, il est pertinent de considérer les thèses sociologiques explicatives de l'échec scolaire dont l'origine remonte à près de 50 ans (Bourdieu et Passeron, 1985; Giroux, 2013). Les travaux issus de ces thèses adoptent un double ancrage théorique. Ceux-ci relèvent principalement du courant des sciences sociales, mais empruntent partiellement des postulats se rapportant au domaine de la didactique (seconde perspective). De ce fait, ces travaux permettent de repérer toute une classe de phénomènes qui n'auraient pu être perçus seulement dans l'un ou l'autre cadre pris isolément (Sarrazy, 2006).

Si plusieurs résultats empiriques ont émergé de recherches européennes s'appuyant sur l'approche anthropo-didactique qui relève de la perspective des sciences sociales (Chopin et Sarrazy, 2014; Roiné, 2015), en termes de nombre de travaux réalisés, cette dernière a été supplantée par celle des sciences cognitives dans la plupart des écrits scientifiques québécois sur les difficultés scolaires. Dans ce contexte, le besoin de mettre à l'épreuve la perspective des sciences sociales au sein du système scolaire québécois se fait criant (Ayala et Roditi, 2014; Rajotte, 2014).

1.2 Interpréter les difficultés d'apprentissage : apports de l'approche anthropo-didactique

Dans la foulée des débats qui se sont opérés au cours des dernières années entre les tenants des deux principales approches explicatives, une troisième perspective a émergé des travaux européens s'intéressant aux difficultés d'apprentissage en mathématiques (Ahmad, 2014; Chopin, 2007, 2011; Najar, 2010; Roiné, 2012; Sarrazy, 2001). Cette approche, qui relève de la perspective des sciences sociales concernant l'explication des difficultés d'apprentissage, permet de considérer l'élève au premier plan pour ses appartenances sociofamiliales et culturelles qui dessinent, en partie, sa place et ses attentes au sein de l'institution scolaire (Ayala et Roditi, 2014). Cela permet d'approfondir les dispositions du sujet dans son rapport au savoir tout en tenant compte de son identité et de son histoire (Mamas Mavoungou, 2016). Pour ce faire, cette perspective propose d'adopter un double ancrage théorique (combinant l'anthropologie et la didactique) en relevant principalement des sciences sociales, mais en empruntant quelques postulats, concepts ou théories (telle la théorie des situations) propres à la troisième perspective.

L'approche promue par cette troisième perspective, dite anthropo-didactique, se situe donc au carrefour de deux champs théoriques : l'un didactique qui étudie les phénomènes d'enseignement en considérant le rôle central que joue la structure du savoir mathématique ainsi que les modalités concernant l'enseignement et l'apprentissage (Brousseau, 1998; Giroux, 2013) et l'autre, anthropologique, qui situe son objet d'étude sur les dimensions culturelles relevant des différents contextes d'enseignement qui président aux pratiques des enseignants et des élèves. Ce champ anthropologique permet notamment de considérer l'arrière-plan culturel qui relève du processus de socialisation d'un individu tout au long de son développement (Roiné, 2012; Sarrazy, 2002). Cet arrière-plan est teinté par les « connaissances et les croyances » (Crahay et al., 2010) que les enseignants ont de leurs élèves, de leur métier, de l'enseignement aux élèves en difficultés en mathématiques. Il influe, de manière inconsciente, sur l'acte d'enseigner (Roiné, 2012). À cet effet, Lessard (2014) met en lumière le fait que l'historique scolaire de l'apprenant a une influence notable sur la dynamique des difficultés d'enseignement et d'apprentissage.

En ce qui a trait à l'explication des difficultés d'apprentissage des EHDAA, cette approche considère trois dimensions (Chopin et Sarrazy, 2010). La première est de l'ordre didactique, en conformité aux savoirs que le pédagogue est tenu d'enseigner selon le curriculum scolaire; la deuxième est institutionnelle, en référence aux mœurs et coutumes qui relèvent de la culture d'appartenance des élèves et de l'enseignant; finalement, la dimension est pédagogique. Cette dernière dimension réfère à l'influence d'arrière-plans pédagogiques sur les comportements des enseignants (l'influence de la pédagogie différenciée pour favoriser le succès du plus grand nombre d'élèves, par exemple).

Se référant aux théories de Bourdieu (2002), l'approche anthropo-didactique met en relation les inégalités scolaires et les positions sociales (Ayala et Roditi, 2014; Rajotte, 2018). De ce fait, elle s'intéresse aussi aux mécanismes par lesquels l'institution scolaire agit comme système de reproduction sociale des inégalités (Van Haecht, 2006). L'une des explications fournies par les adhérents à cette troisième perspective est que l'institution scolaire transforme le classement social des élèves en classement scolaire (Giroux, 2013). En d'autres mots, elle transformerait les différences de classes sociales en différences d'intelligence (Rajotte et al., 2018). Au fil des générations, ce mécanisme amènerait les classes supérieures à préserver leur statut privilégié (Van Haecht, 2006).

Par ailleurs, la pertinence de considérer l'approche anthropo-didactique découle du fait que celle-ci permet de repérer toute une classe de phénomènes explicatifs des difficultés qui ne pourraient pas être dégagées dans l'un ou l'autre des deux cadres (perspective cognitiviste et perspective didactique) pris isolément. En effet, les difficultés d'apprentissage peuvent être appréhendées, non seulement à l'aune des spécificités qui relèvent de l'enseignement, des savoirs et des interactions didactiques qui s'opèrent dans la classe, mais aussi en fonction des caractéristiques individuelles de l'élève qui sont éventuellement influencées par son histoire personnelle, sa dynamique familiale ainsi que par des facteurs liés à son appartenance sociale (Ayala et Roditi, 2014).

1.3 Synthèse des postures des différentes perspectives explicatives

Afin de décrire la perspective adoptée par les différentes disciplines qui étudient les difficultés d'apprentissage en mathématiques, Giroux (2015) a proposé un schéma permettant d'organiser ces disciplines en fonctions de leur finalité ou de leur posture épistémologique. Tel que représenté au sein de la figure 1, ce schéma permet de refléter les finalités des différentes disciplines sur un axe transversal. Sur cet axe, un déplacement vers la gauche se traduit par un intérêt croissant pour l'étude du fonctionnement cognitif et une centration sur les caractéristiques de l'élève dans l'explication de ses difficultés. Par ailleurs, un déplacement vers la droite de l'axe transversal représente un intérêt croissant pour l'étude du fonctionnement du savoir en situation d'enseignement ou d'apprentissage ainsi qu'un regard sur les causes environnementales susceptibles de faire émerger les difficultés.

À la lumière des propos de Giroux (2015), il est possible de relever que les tenants de la première perspective (perspective cognitive), qui comprend notamment les recherches issues de la psychologie développementale, de la neuropsychologie et des sciences cognitives, se situent à la gauche de l'axe. Cela se justifie par le fait que le cadre explicatif des difficultés d'apprentissage adopté par les chercheurs œuvrant au sein de cette discipline se caractérise par une centration sur les caractéristiques individuelles des élèves. Par ailleurs, les tenants de la seconde perspective, sous-jacente à la didactique des mathématiques, se situent au centre droit du continuum puisque ceux-ci centrent leur objet d'étude sur les interactions entre l'élève et le système didactique. Finalement, les chercheurs qui adoptent la troisième perspective explicative (perspective des sciences sociales) se positionnent à l'extrême droite du continuum. Cela se justifie par le fait que les tenants associés à cette perspective expliquent les difficultés d'apprentissage en portant un regard simultané sur la structure du savoir mathématique en jeu ainsi qu'en fonction des dimensions socioculturelles susceptibles de favoriser l'émergence de ces difficultés.

<table>
<tr><th colspan="3">PERSPECTIVE COGNITISTE</th><th>PERSPECTIVE DIDACTIQUE</th><th>PERSPECTIVE SOCIOLOGIQUE</th></tr>
<tr><th colspan="2">Sciences cognitives</th><th rowspan="2">Psychologie développementale</th><th rowspan="2">Didactique des mathématiques</th><th rowspan="2">Anthropo-didactique</th></tr>
<tr><th>Neuropsychologie</th><th>Psychologie cognitive</th></tr>
<tr><td>Étude du siège cérébral des fonctions mentales</td><td>Étude des processus cognitifs/ formation des connaissances</td><td>Étude du développement cognitif de l'enfant</td><td>Étude des conditions didactiques</td><td>Étude de la fabrication des inégalités scolaire (conditions non didactique)</td></tr>
<tr><td colspan="5">CARACTÉRISTIQUES DES INVIDIDUS ⟷ TRANSMISSION/ ACQUISITION DE SAVOIRS</td></tr>
<tr><td colspan="2">DYSCALCULIE ET TROUBLES D'APPRENTISSAGE</td><td>DIFFICULTÉS D'APPRENTISSAGE</td><td colspan="2">(DYS/FONCTIONNEMENTS DES SYSTÈMES DIDACTIQUES)</td></tr>
<tr><td colspan="2">- MÉCANISMES DE TRAITEMENT DE L'INFORMATION (MANIPULATION DE SYMBOLES)
- FONCTIONNEMENT COGNITIF
- DÉFICITS COGNITIFS</td><td>- FONCTIONNEMENT DU SAVOIR EN SITUATION
- TRANSFORMATION DES CONNAISSANCES</td><td>-FONCTIONNEMENT DU SAVOIR EN SITUATION
- SPÉCIFICITÉ DU SAVOIR</td><td>- CULTURES SCOLAIRES
- IDÉOLOGIES
- RAPPORT AU SAVOIR</td></tr>
</table>

Légende
Ligne 1 : Perspective explicative
Ligne 2 : Discipline
Ligne 3 : Objet d'étude
Ligne 4 : Continuum sur lequel se positionnent les disciplines en fonction de leur finalité
Ligne 5 : Terminologie, principaux concepts utilisés
Ligne 6 : Pistes explicatives du rendement en mathématiques

Figure 1 : Adaptation du schéma de Giroux concernant l'organisation des disciplines qui étudient les difficultés d'apprentissage selon Giroux (2015)

Dans le cadre de cet article, nous considérons que les trois perspectives présentées par Giroux (2015) sont de nature explicative lorsque celles-ci réfèrent au domaine scientifique ainsi qu'à la finalité de recherche adoptée par les chercheurs qui étudient le thème des difficultés d'apprentissage en mathématiques. Par ailleurs, ces perspectives peuvent devenir interprétatives pour les professionnels de l'éducation lorsque ceux-ci adoptent les postulats sous-jacents à l'une de celles-ci afin d'intervenir auprès d'un élève ayant un faible rendement en mathématiques.

1.4 Objectifs de recherche

L'objectif général de l'étude est d'explorer de quelle manière les trois perspectives explicatives des difficultés d'apprentissage que nous venons de présenter se traduisent dans les interprétations des professionnels issus du milieu de l'éducation lorsque ceux-ci se positionnent quant à la nature des difficultés d'apprentissage ainsi qu'en fonction des modalités permettant d'effectuer le dépistage de celles-ci.

De plus, à notre connaissance, aucune étude n'a approfondi la façon dont l'approche anthropo-didactique, qui relève de la perspective des sciences sociales, se manifeste dans les propos des professionnels de l'éducation quant à l'interprétation et au dépistage des difficultés d'apprentissage en mathématiques en contexte québécois. À partir de ce constat, un objectif spécifique de recherche a émergé. En fait, cette étude vise aussi à documenter de quelle manière les pistes explicatives sous-jacentes à l'approche anthropo-didactique se retrouvent dans les types d'interprétation réalisés par les professionnels concernant les difficultés de leurs élèves. Cette démarche est réalisée dans le but de vérifier si la considération de ces difficultés engendre un apport complémentaire aux deux perspectives explicatives traditionnelles quant à l'étude des conceptions des professionnels de l'éducation lorsque ceux-ci prennent position concernant les modalités d'interprétation et l'acte de dépistage des difficultés d'apprentissage en mathématiques au primaire.

2. Méthodologie

2.1 Devis de recherche

Pour réaliser notre objectif de recherche, nous avons mis en œuvre un devis qualitatif permettant l'étude et l'interprétation du phénomène des difficultés d'apprentissage en mathématiques dans le milieu scolaire. Pour ce faire, nous nous sommes appuyés sur les significations et les descriptions que les professionnels en éducation attribuent à ces difficultés. En effet, la méthode retenue vise avant tout l'exploration et la description d'un phénomène du point de vue des participants afin d'en comprendre le sens (Godin, 2017). Pour ce faire, nous avons analysé le discours de professionnels issus du milieu de l'éducation quant à leur interprétation des difficultés d'apprentissage en mathématiques ainsi qu'en fonction des modalités de dépistage de ces difficultés auprès d'élèves québécois inscrits à l'école primaire. La visée de cette recherche n'est pas directement pratique. La contribution de celle-ci se rapporte plutôt aux savoirs existants (Fortin, 2010; Godin, 2017).

2.2 Méthode de collecte

Puisque l'objectif de la recherche était d'étudier les perceptions d'intervenants en éducation sur la problématique de la recherche, les entrevues semi-dirigées ont été choisies comme outil de collecte de données. Lors de ces entrevues, nous avons utilisé un guide d'entretien (voir en Annexe) dans lequel nous disposions d'une série de questions se rapportant à quatre thématiques distinctes[2], soit :

1) l'interprétation des difficultés d'apprentissage (4 questions);
2) le dépistage des difficultés d'apprentissage (7 questions);
3) la mise en œuvre d'un diagnostic (8 questions);
4) l'intervention pédagogique auprès des élèves en difficultés (8 questions).

Il importe de mentionner que le guide d'entretien comportait d'autres sections permettant d'établir le profil socioprofessionnel des répondants ainsi que de décrire la nature des expériences professionnelles vécues auprès des élèves caractérisées comme ayant des difficultés d'apprentissage en mathématiques. Le profil des répondants est mis en lumière à l'intérieur de la section suivante.

Les échanges verbaux entre le chercheur et les participants ont été enregistrés à l'audio. Tous les entretiens ont été identifiés par un numéro afin de conserver l'anonymat des participants. Ensuite, les fichiers audio ont été retranscrits sous forme de verbatims. Les enregistrements et les verbatims ont été écoutés et lus à plusieurs reprises afin de permettre une compréhension approfondie du sens des énonciations des participants et pour en dégager des significations particulières (Beaud et Weber, 2010). L'ensemble des données issues de la recherche a été coanalysé par deux assistants de recherche.

2.3 Participants

Notre échantillon se compose de huit enseignants du primaire et six professionnels en éducation (trois orthopédagogues et trois conseillers pédagogiques œuvrant au primaire) provenant des régions de Québec et de l'Abitibi-Témiscamingue. Le tableau 1 présente la codification utilisée afin d'assurer l'anonymat des participants.

---

2 Dans le cadre de cet article, nous traiterons seulement des deux premières thématiques. Les données relatives au diagnostic et à l'intervention pédagogique seront approfondies au sein d'une publication ultérieure.

Tableau 1 : Codification des participants

Statut professionnel et lieu de résidence des participants	Code numérique des participants
Enseignants région de Québec	Informateurs n° 01, 02, 03, 04, 05
Enseignants de l'Abitibi-Témiscamingue	Informateurs n° 06, 07, 08
Professionnels région de Québec	
Orthopédagogues	Informateurs n° 09, 10
Conseiller pédagogique	Informateur n° 12
Professionnels de l'Abitibi-Témiscamingue	
Orthopédagogue	Informateur n° 11
Conseillers pédagogiques	Informateurs n° 13, 14

À la suite des entrevues, un modèle de base pour les enseignants et pour les professionnels a été élaboré en repérant les récurrences et les singularités dans les discours des participants. Le modèle de base repose sur la méthode structurale (Godin, 2017; Lévi-Strauss, 1958) et réunit les caractéristiques moyennes des participants issus de notre échantillon. Le tableau 2 présente le modèle de base regroupant les informations sociodémographiques des enseignants :

Tableau 2 : Modèle de base pour l'enseignant moyen issu de l'échantillon

Profil personnel	Est âgé de 33 ans; Caucasien francophone; Considère qu'il appartient à la classe moyenne.
Profil professionnel	Détient un baccalauréat en éducation préscolaire et en enseignement primaire; Possède 11 ans et deux mois d'expérience; A enseigné à presque tous les niveaux scolaires avant d'avoir son poste actuel.
Rapports professionnels avec élèves ayant des difficultés d'apprentissage	Adopte de bons rapports avec les élèves HDAA; Identifie l'importance de trouver l'origine des difficultés afin d'intervenir adéquatement; Souligne un manque au niveau de la formation initiale pour dépister les difficultés d'apprentissage.

Le tableau 3 présente le modèle de base regroupant les informations sociodémographiques des professionnels de l'éducation.

Tableau 3 : Modèle de base pour le professionnel moyen issu de l’échantillon

Profil personnel	Est âgé de 39 ans; Est caucasien francophone; Considère qu’il fait partie de la classe moyenne-aisée.
Profil professionnel	Détient, selon les régions, soit un baccalauréat et une formation autodidacte (Abitibi), ou un diplôme de cycles supérieurs (Québec); Possède 15 ans et 11 mois d’expérience; Est intervenu à presque tous les niveaux scolaires.
Rapports professionnels avec élèves en difficultés	Identifie ses rapports auprès des élèves ayant des difficultés d’apprentissage comme étant similaires à ceux entretenus avec les autres élèves; Sécurise et réconforte les élèves pour favoriser leurs apprentissages.

2.4 Analyse de données

Afin d’analyser les données issues de cette recherche, une analyse de discours a été réalisée (Hess et al., 2000). Ce type d’analyse permet de décrire et d’expliquer un phénomène par la découverte de thèmes, de catégories et de modèles de références. C’est donc par une démarche discursive de reformulation et d’explicitation de témoignages que les données ont été analysées, organisées et traitées, de sorte qu’elles puissent contribuer à mieux décrire et comprendre le phénomène (Fortin, 2010).

L’analyse des données, de type inductif délibéré, a été réalisée en référant aux différentes phases proposées par L’Écuyer (1990). Cette analyse était délibérée puisque le cadre de référence propose déjà une certaine catégorisation préconstruite ainsi qu’inductive du fait que certaines catégories émergentes ont été induites par les données collectées. Le codage des données a été fait par le biais du logiciel NVivo. En référant à Deslauriers (1997), le processus inductif d’analyse des données a été amorcé par la mise en œuvre d’une description détaillée des différentes modalités d’interprétation des difficultés d’apprentissage telle que formulée par un groupe de professionnels en éducation. À la suite de cette analyse approfondie, il a été possible d’extraire des propriétés signifiantes du discours des participants à l’étude et de décomposer celles-ci de manière à les regrouper sous la forme de thèmes principaux. Comme mentionné par Miles et Huberman (2003), cette démarche d’analyse a ainsi permis d’étudier le phénomène de l’interprétation et du dépistage des difficultés d’apprentissage en mathématiques à partir de ses composantes fondamentales, mais aussi par le biais d’une analyse des relations logiques entre ces mêmes composantes.

3. Résultats

3.1 Nature des difficultés d'apprentissage en mathématiques

Après avoir questionné les participants afin de caractériser la nature fondamentale des difficultés d'apprentissage, l'ensemble des éléments de réponse a été regroupé pour faire émerger les quatre principaux thèmes suivants :

- Facteurs explicatifs relevant des savoirs mathématiques;
- Facteurs explicatifs relevant des fonctions cognitives de l'élève;
- Facteurs explicatifs relevant de l'enseignement;
- Facteurs explicatifs relevant du contexte social de l'apprenant.

Parmi ces thèmes, certains ont été mentionnés par un plus grand nombre de participants. Pour chacun des grands thèmes, la figure 2 permet d'établir la fréquence de propos rapportés par les participants.

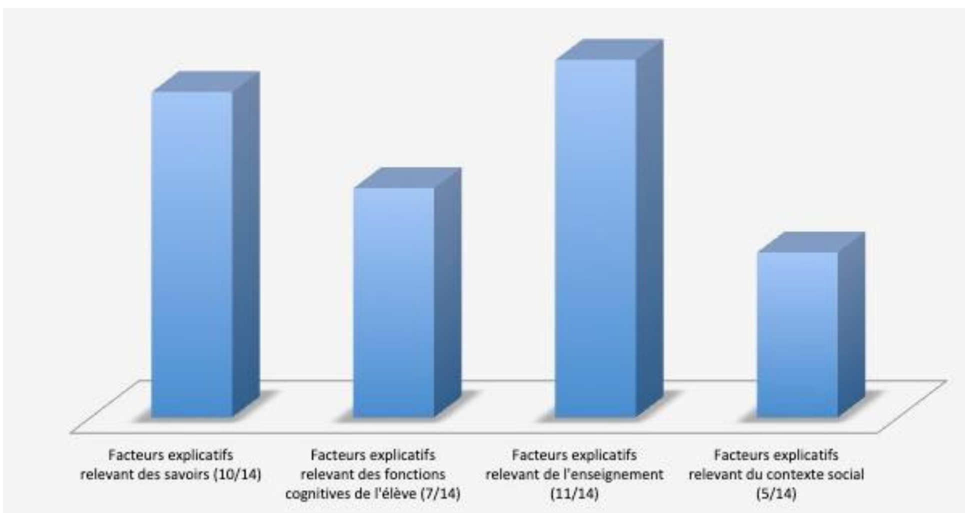


Figure 2 : Facteurs explicatifs des difficultés d'apprentissage en mathématiques et fréquences de réponses

On constate que les thèmes dont les facteurs explicatifs relèvent de l'enseignement (11/14) et des savoirs mathématiques (10/14) ont chacun été soulevés par plus des deux tiers des participants afin d'expliquer l'origine des principales difficultés observées chez les élèves en mathématiques. Vient ensuite le thème qui attribue les difficultés d'apprentissage à l'élève et plus précisément aux fonctions cognitives intrinsèques à celui-ci. Ce thème est soulevé par la moitié des participants (7/14). Enfin, pour cinq participants sur les 14 questionnés, les difficultés d'apprentissage en mathématiques s'expliquent aussi par le biais de variables sociales.

Les différents thèmes relevés seront approfondis successivement à l'intérieur des sections suivantes en débutant par celui ayant été abordé par le plus grand nombre de répondants. Afin de détailler la vision des participants concernant la nature de ces difficultés, différents sous-thèmes ayant émergé des éléments de réponse seront mis de l'avant.

3.1.1 Facteurs explicatifs des difficultés relevant de l'enseignement (11 répondants sur 14)

Trois principaux sous-thèmes se dégagent des propos des participants qui identifient les facteurs possibles des difficultés à l'enseignement dispensé dans le milieu scolaire. En correspondance avec leur ordre d'importance selon le nombre d'éléments de réponses fournies lors des entretiens, ceux-ci sont présentés consécutivement :

- Activités de manipulation;
- Méthodes d'enseignement;
- Curriculum et programme de formation.

Tout d'abord, pour sept participants, les difficultés d'apprentissage en mathématiques liées à l'enseignement sont attribuables à des manquements concernant les activités de manipulation. À cet effet, un premier répondant affirme que les activités de manipulation ne sont pas suffisamment mises en œuvre dans le milieu scolaire : « C'est sous-utilisé […] souvent, on escamote cette partie-là » (informateur n° 12). Un autre participant ajoute : « Les enseignants passent trop vite de l'addition à la soustraction, puis à la multiplication, et ce, au lieu de faire comprendre, de faire manipuler » (informateur n° 11). Un dernier répondant explique qu'il faut « dépasser le stade traditionnel du papier/crayon […] Il faut les faire manipuler, pour permettre de décortiquer et de leur faire comprendre avant de tomber en exerciseur » (informateur n° 01).

Outre les lacunes découlant des activités de manipulation, quelques participants (3/11) abordent comme deuxième sous-thème les difficultés d'apprentissage liées à des méthodes d'enseignement. Selon eux, la difficulté à identifier une méthode d'enseignement précise se fait surtout sentir en contexte de résolution de problèmes : « En résolution, le fait de ne pas donner de ligne de conduite, de ne pas avoir de méthode-école et de méthode-cycle pose problème » (informateur n° 05). Un autre participant mentionne que « la réso est utilisée comme évaluation et non comme levier aux apprentissages [...] Ça, c'est un gros problème surtout pour les EHDAA » (informateur n° 10). Les besoins de « constance » et de « varier le matériel utilisé » (informateur n° 11) figurent aussi parmi les réponses de ces participants.

Le dernier sujet abordé concerne le curriculum scolaire et le programme de formation. Deux participants sont d'avis que celui-ci est « trop gros », « trop difficile » (informateur n° 9), ou encore, mal adapté :

> Il faut aller vite, toujours trop vite [...] Les directions nous demandent même d'adapter le matériel didactique, car les exigences sont trop élevées pour le niveau enseigné. Ça crée de la lourdeur pour l'enseignant qui continue de vouloir aller vite pour voir tout le programme. (informateur n° 08)

Parmi les autres réponses, on trouve le nombre trop élevé d'évaluations et les difficultés en lecture qui influent sur la réussite en mathématiques.

Le tableau 4 met de l'avant une brève synthèse des principaux facteurs décrits ci-haut.

Tableau 4 : Facteurs explicatifs des difficultés relevant de l'enseignement

Sous-thèmes	Principaux facteurs
Activités de manipulation	Manque de manipulation pour saisir le sens de certains concepts mathématiques; Manque de concret dans les activités de manipulation.
Méthodes d'enseignement	Manque de procédures claires et consensuelles pour enseigner les résolutions de problème; Importance de la constance, des consignes claires et d'un matériel diversifié.
Curriculum et programme de formation	Programme trop chargé et mal adapté. Conséquence : les enseignants doivent aller vite; Trop d'évaluations.

En approfondissant les données issues du discours des répondants, il est possible de relever que le thème plus fréquemment abordé concernant l'explication de la nature des difficultés d'apprentissage en mathématiques se rapporte principalement à la perspective didactique. Par ailleurs, un constat se dégage des principaux facteurs explicatifs des difficultés relevant de l'enseignement. En fait, les pistes explicatives mises de l'avant découlent de contraintes externes sous-jacentes à l'enseignement (par exemple, les contraintes associées au programme de formation, à une diminution du temps didactique étant donné la quantité d'évaluations à mettre en œuvre ainsi que le manque de balises institutionnelles pour enseigner la résolution de problèmes sont des facteurs extrinsèques aux professionnels). Ce constat est surprenant puisqu'à l'échelle internationale, tout comme à l'échelle provinciale, les écrits scientifiques documentent le faible sentiment de compétence des pédagogues concernant l’enseignement des mathématiques (Lajoie et Bednarz, 2014; Peker, 2016), ce qui correspond à un facteur intrinsèque propre aux enseignants du primaire.

3.1.2 Facteurs explicatifs relevant de la nature des savoirs (10 répondants sur 14)

Le second grand thème permet de considérer les facteurs explicatifs des difficultés d’apprentissage en mathématiques en lien avec la nature des savoirs. Tout comme le thème précédent, trois sous-thèmes se dégagent des propos des participants. En référant à la fréquence de réponses, ceux-ci sont présentés selon leur ordre d’importance respectif :

- Compréhension partielle des savoirs de base;
- Sens du nombre;
- Difficultés associées à la résolution de problèmes.

Concernant le grand thème liant les difficultés d’apprentissage aux savoirs mathématiques, la moitié des éléments de réponses proposés par les participants gravite autour d’un même sujet, soit la compréhension partielle des savoirs de base. Plusieurs participants (6/10) s'inquiètent en effet du « manque de bases solides » (informateur n° 01) et certains attribuent ce problème au rythme accéléré à partir duquel ils doivent enseigner : « Les élèves passent trop vite sur les apprentissages avant que ce soit solide [...], ensuite ça crée des difficultés, par exemple, des élèves de 6e qui ne savent pas quand additionner » (informateur n° 08). Lorsqu’ils sont questionnés sur la nature des concepts pour lesquels les élèves démontrent une compréhension partielle des savoirs de base, les participants nomment les fractions (« c'est toujours difficile » [informateur n° 01]) et les structures multiplicatives (« c'est vraiment ce qui fait le plus défaut » [informateur n° 10]). Enfin, deux participants soulignent quant à eux les difficultés à comprendre le système de regroupement en base 10. L’un de ceux-ci approfondit ses propos en s’expliquant de la manière suivante : « Le système dans la base 10 n'est pas là [...] La représentation du nombre est à la base du problème » (informateur n° 12).

Les autres éléments de réponses sont partagés entre les deux sujets suivants : le sens du nombre (abordé par quatre participants) et la résolution de problèmes (souligné par trois répondants). Tout d'abord, par « sens du nombre », un participant entend « la flexibilité et la fluidité à se représenter et à manipuler les nombres » (informateur n° 14). Selon celui-ci, de nombreux élèves ne développent pas cette compréhension avant d’opérer sur les nombres. Un autre participant ajoute : « les élèves ne comprennent pas bien le sens et les différentes formes d’écriture d’un même nombre, par exemple les nombres naturels, les fractions, les nombres décimaux » (informateur n° 03).

Le dernier sous-thème, soit les difficultés associées aux savoirs impliqués dans l'activité de résolution de problèmes, aborde deux principales idées. Selon un participant, les élèves ont de la difficulté à justifier leur démarche : « En résolution, dès qu'on arrive à l'étape de la justification, c'est là qu'on les perd » (informateur n° 05). Pour un autre participant, les difficultés d'apprentissage sont attribuables à l'aspect linguistique impliqué dans les énoncés de résolution de problèmes contenant trop de mots : « L'élève doit alors réussir à lire la situation, à la déchiffrer […] Quand le problème n'est pas si compliqué, c'est déjà un défi. Alors, c'est le français qui entre en ligne de compte » (informateur n° 03). Un autre participant met en lumière les difficultés en résolution de problème sous-jacentes à l'aspect linguistique : « En résolution, les élèves doivent sélectionner les informations travaillées en français puis transférées en math [...] ça peut être très difficile [...] au fond c'est de l'inférence au max, les résos! » (informateur n° 01).

Le tableau 5 met de l'avant une brève synthèse des principaux facteurs abordés au sein des précédents paragraphes.

Tableau 5 : Facteurs explicatifs relevant des savoirs mathématiques

Sous-thèmes	Principaux facteurs
Compréhension partielle des savoirs de base	Compréhension partielle de certains concepts mathématiques (fractions, mesure, règles de multiplication, numération en général).
Sens du nombre	Manque de flexibilité et de fluidité pour manipuler les nombres; Mauvaise compréhension du sens et de la représentation du nombre (nombres naturels, fractions, etc.); Manque de compréhension du sens de certaines opérations de base (regroupement en base 10, structures multiplicatives).
Résolution de problèmes	Difficultés à l'étape de la justification; Difficultés en compréhension de lecture.

L'analyse des données a permis de mettre en lumière différents facteurs explicatifs des difficultés d'apprentissage qui relèvent des savoirs mathématiques. Comme mentionné par Mazzocco et Thompson (2005), une mauvaise compréhension du sens du nombre peut ultérieurement engendrer des difficultés concernant l'apprentissage de divers concepts mathématiques promus au sein du curriculum scolaire. À ce sujet, nous dégageons que les répondants à l'étude considèrent que les facteurs explicatifs des difficultés d'apprentissage se rapportant aux savoirs mathématiques relèvent principalement du domaine de l'arithmétique ainsi que de l’activité de résolution de problèmes. Ce constat est peu surprenant puisque la majorité du temps, la didactique dédiée à l’enseignement des mathématiques vise l’apprentissage de concepts et de processus issus du domaine de l’arithmétique ainsi que la mise en œuvre d’activités de résolution de problèmes. Par ailleurs, cette situation permet de relever une sous-valorisation des autres domaines des mathématiques dans l’explication des difficultés vécues au sein de l’école primaire (géométrie, mesure, probabilités et statistiques)

3.1.3 Facteurs explicatifs relevant des fonctions cognitives intrinsèques à l’élève (7 répondants sur 14)

Le troisième grand thème abordé par les répondants est celui des difficultés d’apprentissage en mathématiques attribuables aux fonctions cognitives de l’élève. Deux sous-thèmes sont dégagés. Ceux-ci sont présentés selon leur ordre d’importance respectif :

- Limitations cognitives en contexte de résolution de problèmes;
- Limitations cognitives concernant la mémoire et la capacité d'abstraction.

Concernant le grand thème liant les difficultés d’apprentissage en mathématiques aux fonctions cognitives de l’élève, six participants ont soulevé le sujet précis des limitations cognitives en contexte de résolution de problèmes. Pour ces répondants, les difficultés se situent au niveau de l'organisation et de la planification telles que mises en œuvre par les élèves : « En résolution, on leur explique la structure à suivre, mais c'est difficile de leur faire comprendre [...] on montre l'arbre, la liste d'épicerie [...] mais ça reste dur » (informateur n° 01). Un autre participant ajoute : « Ils sont capables de sortir les infos importantes, de sortir les termes mathématiques (+, -, etc.) mais ensuite ça bloque » (informateur n° 05).

Par la suite, trois participants ont formulé des propos se rapportant à un autre sous-thème des difficultés liées aux fonctions cognitives des élèves. Selon ces participants, les limitations cognitives concernant la mémoire et la capacité d'abstraction peuvent être considérées pour expliquer les difficultés des élèves. Un participant émet le constat selon lequel pour certains élèves, « La mémorisation est plus difficile. On a beau dire qu'on ne veut plus être juste sur la rétention des procédures, mais un élève qui ne mémorise rien, c'est sûr que c'est difficile » (informateur n° 12). Pour un autre participant, les difficultés découlent de la capacité d'abstraction : « Il y a des élèves qui ont des difficultés à établir des liens entre les concepts mathématiques [...], l'imagerie mentale et l'abstraction sont beaucoup plus difficiles » (informateur n° 09).

Le tableau 6 fournit une brève synthèse des principaux éléments de réponses mis en lumière dans les paragraphes précédents.

Tableau 6 : Facteurs explicatifs relevant des fonctions cognitives intrinsèques à l'apprenant

Sous-thèmes	Principaux facteurs
Limitations cognitives en contexte de résolution de problèmes	Difficultés dans l'organisation, la planification, la sélection des informations; Difficultés en compréhension de lecture.
Limitations cognitives concernant la mémoire et la capacité d'abstraction	Difficultés à mémoriser la démarche à suivre pour résoudre un énoncé de problème; Difficultés à établir des liens entre les concepts mathématiques.

Concernant les facteurs explicatifs relevant des fonctions cognitives en lien avec l'explication des difficultés d'apprentissage, il est possible de relever que les sous-thèmes issus de l'analyse des données se rapportent principalement aux écrits scientifiques propres au champ de la psychologie cognitive. Par ailleurs, en référant aux travaux de Barrouillet (2006), nous dégageons que les répondants n'ont pas abordé directement la piste des limitations associées aux habiletés visuospatiales, un sous-type de difficultés documenté par les chercheurs cognitivistes (outre les sous-types de limitation qui relèvent de la mémoire et des fonctions cognitives). Ce constat nous amène à inférer qu'en contexte québécois, les professionnels de l'éducation focalisent sur le domaine de l'arithmétique et sur la capacité de l'élève à résoudre des problèmes pour expliquer les difficultés des élèves en mathématiques. Par ailleurs, les conséquences de cette centration peuvent se traduire par une sous-valorisation des connaissances géométriques et spatiales des élèves dans l'explication de leurs difficultés.

3.1.4 Facteurs explicatifs relevant du contexte social de l'élève (5 répondants sur 14)

Afin de documenter le rôle de l'environnement de l'apprenant sur le niveau de réussite de celui-ci, le dernier grand thème soulevé met de l'avant les facteurs associés au contexte social de l'élève. À cet effet, trois sous-thèmes ont été dégagés des propos des participants. Ceux-ci sont présentés selon leur ordre d'importance respectif :

- Environnement familial;
- Attentes sociales et image de soi;
- Habitudes de vie des jeunes.

Tout d'abord, pour trois participants, les difficultés d'apprentissage en mathématiques peuvent être attribuables à l'environnement familial de l'élève. Un participant explique que plusieurs difficultés peuvent provenir de la non-valorisation des devoirs à la maison et de l'étude : « Sans jeter tout le blâme sur les parents, je pense que c'est un facteur important » (informateur n° 02). Le manque de soutien familial peut aussi causer de l'anxiété et ainsi engendrer des difficultés d'apprentissage. Ce constat est mis de l'avant par un autre participant : « Selon le sujet, toutes les familles des élèves de ma classe ne soutiennent pas leurs enfants, ne sont pas là pour eux. C'est un triste constat et ça joue dans la balance côté difficultés d'apprentissage » (informateur n° 08). Un troisième participant souligne des « manques de stimulation à la maison », par exemple, le fait que « les parents jouent de moins en moins, ou plus du tout, à des jeux de société avec leurs enfants » (informateur n° 14). Pour lui, c'est un phénomène social qui peut avoir des conséquences importantes sur la réussite éducative de certains élèves.

Un autre sous-thème abordé par deux participants est celui des attentes sociales et son impact sur l'image de soi chez certains apprenants : « Les élèves se donnent un rôle très tôt dans leur parcours, soit : bon ou mauvais en math, en français, etc. [...] ensuite, ça devient la base de la conception qu'ont les élèves d'eux-mêmes » (informateur n° 02). Un autre participant renchérit en soulignant une « sorte d'effet Pygmalion du facteur social quant au rôle que se font les élèves d'eux-mêmes […] par exemple, plusieurs croient que les filles sont moins bonnes en math […] ça crée des problèmes de confiance » (informateur n° 03).

Le dernier sous-thème concerne certaines habitudes de vie des jeunes. Celui-ci a été soulevé par un seul participant. En effet, selon un répondant, les difficultés d'apprentissage peuvent être expliquées notamment par le biais d'un manque de repos, par l'« horaire super chargé » des élèves ainsi que l'exposition constante des élèves à des appareils numériques (« beaucoup trop d'écrans et trop de télé ») (informateur n° 04).

Le tableau 7 met en lumière une brève synthèse des principaux facteurs explicatifs soulignés dans les paragraphes précédents.

Tableau 7 : Facteurs explicatifs relevant du contexte social de l'élève

Sous-thèmes	Principaux facteurs
Environnement familial	Sous-valorisation des devoirs à la maison et de l'étude;
	Manque de soutien des parents;
	Manque de stimulation à la maison.
Attentes sociales et image de soi	Conception biaisée qu'ont certains élèves par rapport à leur capacité de réussir en mathématiques;
	Effet Pygmalion concernant le rendement des filles en mathématiques.
Habitudes de vie des jeunes	Horaire chargé créant un état de fatigue;
	Exposition constante aux appareils numériques (téléphone, télévision, etc.).

Concernant les facteurs explicatifs relevant du contexte social de l'élève permettant d'expliquer dans quels contextes émergent les difficultés d'apprentissage, le rôle prépondérant des parents est mis en lumière. À cet effet, en évitant d'aborder la piste explicative sous-jacente au rôle de l'héritabilité tel que documenté par les écrits scientifiques (American Psychiatric Association, 2015; Institut national de la santé et de la recherche médicale, 2007), les professionnels de l'éducation délaissent la perspective cognitiviste d'interprétation des difficultés d'apprentissage. Les propos rapportés relèvent plutôt une centration sur le rôle des compétences professionnelles des pédagogues, notamment en ce qui a trait à la collaboration avec les parents et l'équipe-école. À la lumière de l'analyse des discours, on note un pouvoir d'action des professionnels de l'éducation pouvant se traduire par une implication accrue des parents dans le processus d'apprentissage, par la mise en place d'interventions visant à favoriser le développement affectif et l'image de soi de l'apprenant ainsi que par le biais d'une sensibilisation à l'importance d'adopter de saines habitudes de vie.

3.2 Dépistage des difficultés d'apprentissage en mathématiques

En complémentarité à l'approfondissement des principaux facteurs explicatifs sous-jacents à l'interprétation des difficultés d'apprentissage en mathématiques, cette étude a aussi permis d'explorer le thème du dépistage de ces difficultés. Conséquemment, les deux sections suivantes permettent de présenter, sous forme de fréquences, les principaux outils utilisés par les professionnels de l'éducation pour dépister des élèves ayant des difficultés d'apprentissage en mathématiques ainsi que le professionnel identifié comme étant le responsable du dépistage dans chacun des milieux. Finalement, en référant à l'analyse des discours mis de l'avant par les répondants, la dernière partie de cette section met en lumière les caractéristiques des élèves perçus comme étant le plus à risque d’être diagnostiqués lors des activités de dépistage.

3.2.1 Outils d’évaluation et moyens utilisés pour le dépistage

Les participants ont été questionnés sur les principaux outils de dépistage employés auprès des élèves ayant des difficultés d’apprentissage en mathématiques. L’analyse des entretiens a permis d’identifier certains outils utilisés soit par les enseignants ou par les professionnels en éducation. Parmi les outils identifiés, nous relevons notamment : la grille d’observation, l’entrevue, les jeux en mathématiques, les instruments standardisés, les exercices routiniers ou encore, les outils issus de la commission scolaire d’appartenance des répondants.

Le tableau 8 présente, en ordre d’importance, la fréquence à laquelle les répondants ont mentionné utiliser un outil pour dépister des difficultés d’apprentissage en mathématiques chez les élèves du primaire. Étant donné que les éléments de réponse mis de l’avant varient en fonction du statut des participants, la présentation des résultats tient compte du statut professionnel de ceux-ci.

Tableau 8 : Outils de dépistage utilisés, en ordre d’importance et selon le statut du répondant

Outil de dépistage	Nombre de répondants	Nombres d’enseignants	Nombre de professionnels
Entrevue	10	6 (no 01, 02, 03, 04, 07, 08)	4 (no 09, 10, 11, 12)
Grille d’observation	7	4 (no 01, 03, 07, 08)	3 (no 09, 10, 11)
Outils issus de la commission scolaire d’appartenance	5	2 (no 04, 05)	3 (no 11, 12, 13)
Outils standardisés	4	1 (no 05)	3 (no 09, 10, 11)
Jeux mathématiques	3	1 (no 03)	2 (no 09, 10)
Outils d’évaluation personnels (outils « maison »)	3	3 (no 02, 03, 06)	-
Évaluations formatives	3	2 (no 04, 06)	1 (no 10)
Exercices	3	1 (no 07)	2 (no 09, 10)

Note : Parmi les outils ou moyens de dépistage nommés par un total de deux participants ou moins, on trouve les questions posées par les élèves (2), les petits travaux (2), les jetons et dessins (2), la carte à tâche (1), la variation des contextes (1), les observations au quotidien (1), la manifestation des erreurs des élèves (1) et les outils construits avec les enseignants (1).

Tous les participants identifient au moins un outil permettant de dépister les difficultés d'apprentissage en mathématiques. Comme on peut le voir dans le tableau ci-dessus, l'entrevue est l'outil de dépistage le plus utilisé par les répondants. Six enseignants et quatre professionnels ont mentionné utiliser cet outil. La grille d'observation constitue aussi un outil de dépistage envisagé par les participants, notamment chez les orthopédagogues (les trois orthopédagogues interviewés ont mentionné utiliser cet instrument). Les outils produits ou fournis par la commission scolaire sont utilisés par deux enseignants, trois orthopédagogues et un conseiller pédagogique.

Quant aux outils standardisés (*Keymath* et *Prime*), ceux-ci sont utilisés par trois orthopédagogues et un seul enseignant. Trois répondants utilisent les jeux de mathématiques afin de dépister les élèves en difficulté. Enfin, un orthopédagogue souligne que l'autoévaluation peut être utilisée pour dépister les élèves inscrits à l'école secondaire.

3.2.2 Identification des professionnels responsables du dépistage

Un consensus se dégage des propos des répondants concernant l'identification du professionnel responsable du dépistage des élèves ayant des difficultés en mathématiques. En effet, 12 participants sur 14 identifient l'enseignant titulaire d'une classe du primaire comme étant la ressource de première ligne responsable de l'activité de dépistage. Par ailleurs, deux répondants considèrent que ce sont les orthopédagogues qui sont responsables du dépistage.

Plus précisément, ce sont sept des huit enseignants qui nomment l'enseignant comme étant le principal et premier responsable du dépistage des difficultés d'apprentissage en mathématiques. À cet effet, il importe de souligner qu'un seul enseignant identifie l'orthopédagogue comme premier responsable de cette tâche professionnelle. Du côté des professionnels en éducation, un orthopédagogue s'identifie lui-même comme étant le premier responsable du dépistage (ce répondant ajoute que l'enseignant a un rôle de soutien dans la réalisation de cette tâche), alors que cinq des six professionnels identifient l'enseignant comme principal responsable.

3.2.3 Caractéristiques des groupes d'élèves les plus à risque

Selon les participants, certains élèves issus d'une population particulière sont plus à risque que d'autres d'être identifiés en tant qu'apprenants ayant des difficultés d'apprentissage en mathématiques, et ce, avant même d'amorcer la tâche de dépistage. À ce sujet, l'analyse du discours des répondants a permis de relever sept caractéristiques des apprenants qui sont susceptibles d'influencer l'activité du professionnel lors du dépistage des difficultés d'apprentissage en mathématiques, soit : le sexe, le statut d'immigration (immigrants de première ou de deuxième génération), la présence d'un diagnostic concomitant, la classe socioéconomique, la scolarité des parents, le soutien parental ainsi que l'estime de soi.

Le tableau 9 présente, en ordre d'importance, la fréquence à laquelle les répondants ont mentionné des caractéristiques qui permettent de cibler des élèves lors du dépistage des difficultés d'apprentissage en mathématiques au primaire.

Tableau 9 : Caractéristiques à considérer lors du dépistage des élèves ayant des difficultés d'apprentissage en mathématiques

Caractéristiques	Nombre de participants
Faible soutien parental	13
Scolarité des parents	11
Classe socioéconomique	11
Mauvaise estime de soi	9
Genre	5
Origine ethnoculturelle	5
Diagnostic concomitant aux difficultés d'apprentissage en mathématiques (TDA/H, TSA, SDNV, etc.)	5

À la lumière des réponses mises de l'avant par les participants, on remarque un éventail de facteurs socioculturels susceptibles d'influencer l'activité de dépistage des élèves ayant des difficultés d'apprentissage en mathématiques. En effet, cinq caractéristiques sur les sept qui ont été recensées se rapportent à des facteurs socioculturels (à l'exception de l'estime de soi et de la présence d'un diagnostic concomitant). Celles-ci seront détaillées successivement en fonction de la fréquence à laquelle elles ont été considérées au sein des propos des répondants.

Tout d'abord, la qualité du soutien parental arrive au premier rang parmi les caractéristiques qui permettent de cibler un élève avant d'amorcer l'activité de dépistage (13 répondants sur 14). Un consensus se dégage des propos mis de l'avant par les participants à cet effet : « Cela est majeur » (informateur n° 02), « C'est très important » (informateurs n° 01, 06, 10 et 11). Un participant explique : « Le manque de soutien et de stimulation à la maison peut engendrer des difficultés de toutes sortes au niveau de l'encadrement, mais aussi de la motivation » (informateur n° 02). À l'opposé, un soutien parental positif peut devenir un facteur de protection : « Le fait de valoriser les efforts de l'enfant, pas seulement mettre une signature au bas d'un examen, ça peut faire une grosse différence » (informateur n° 08).

Toujours dans le champ des facteurs socioculturels, la seconde caractéristique jugée la plus déterminante pour cibler un élève en difficulté lors du dépistage est celle de la scolarité des parents (11 répondants). Pour ces participants, cette caractéristique est fréquemment observée chez les élèves ayant des difficultés d'apprentissage en mathématiques lorsque les parents, en particulier la mère, détiennent un faible niveau de scolarité. Un participant souligne que

> Beaucoup d'études démontrent que la scolarité de la mère est un facteur pour prédire le succès scolaire […] La mère non scolarisée a un impact énorme sur ses enfants […] les enfants, par exemple, sont plus susceptibles d'avoir des difficultés en lecture par manque d'exposition, etc. (informateur n° 12)

Ces propos sont approfondis par un autre répondant : « Je pense qu'en général, plus les parents sont scolarisés, plus ils vont vouloir que les enfants performent bien aussi à l'école » (informateur n° 03). Concernant la scolarité des parents, certains participants apportent des nuances, citant l'exemple de parents peu scolarisés qui valorisent l'école et supportent leur enfant.

Par rapport à la caractéristique de la classe socioéconomique, les participants y relèvent un lien avec les difficultés d'apprentissage (11 répondants). Un participant fait part de son expérience en mentionnant que « La classe socioéconomique semble avoir un grand effet » (informateur n° 03), alors qu'un autre répondant précise sa pensée concernant les élèves provenant de milieux défavorisés : « Ces élèves ne sont pas moins intelligents, c'est plutôt que selon le lieu, certains enfants ont moins de stimulation » (informateur n° 12). Un dernier participant (informateur n° 04) nuance ces propos en soutenant que le lien qu'entretient la classe socioéconomique avec les difficultés d'un élève en mathématiques vient avant tout de l'importance que les parents vont accorder à l'école et non pas de leurs revenus.

Ensuite, deux dernières caractéristiques socioculturelles (le genre et l'origine ethnoculturelle) sont mentionnées par près d'un tiers des participants. Par rapport au genre, cinq participants considèrent que les filles sont plus à risque d'être identifiées comme ayant une difficulté d'apprentissage. Un participant explique ses propos de la manière suivante : « L'impact social se fait sentir […] J'ai l'impression que ça va avoir un impact négatif sur les filles qui vont se dire : une fille c'est moins bon en mathématiques donc, c'est normal si j'ai de la difficulté » (informateur n° 03).

Pour ce qui est du facteur associé à l'origine ethnoculturelle, les participants qui y voient une association avec les difficultés d'apprentissage en mathématiques (5 répondants) considèrent que celle-ci relève principalement de la langue : « Je dirais que c'est surtout au niveau de la barrière de la langue que ça peut avoir un impact, lorsqu'un élève a des besoins en francisation » (informateur n° 04). Un autre participant ajoute : « La langue crée des difficultés en mathématiques, surtout en résolution de problèmes » (informateur n° 05).

Par ailleurs, près des deux tiers des participants (9 répondants) considèrent que la mauvaise estime de soi joue un rôle dans l'émergence des difficultés d'apprentissage en mathématiques chez les élèves du primaire. Un participant explique qu'un « enfant avec une bonne estime va essayer, va lever la main, alors qu'un enfant avec une mauvaise estime va moins tenter de trucs et va parfois accumuler des retards » (informateur n° 05). Un autre participant ajoute que « de façon générale, le rapport à la perception de soi des élèves semble avoir un impact majeur, surtout sur les filles » (informateur n° 04). À cet effet, il importe de mentionner que ce facteur, de nature affective, se rapporte aux caractéristiques intrinsèques à l'élève.

Finalement, il est important de souligner que la présence d'un diagnostic concomitant, tels le trouble déficitaire de l'attention avec ou sans hyperactivité (TDA/H), le trouble du spectre de l'autisme (TSA), les troubles du langage ainsi que le syndrome de dysfonction non verbal (SDNV), peut permettre de cibler plus aisément les élèves en difficulté lors de l'activité de dépistage. Cette dernière caractéristique permettant de faciliter le dépistage est liée intimement aux fonctions cognitives qui sont intrinsèques à l'apprenant (informateurs n° 1, 03, 10, 11, 13).

À la lumière de l'analyse du discours des répondants, il est possible de relever que les professionnels de l'éducation réfèrent majoritairement à la perspective des sciences sociales pour cibler des groupes d'élèves à risque d'être identifiés lors de l'activité de dépistage. Cela se dégage par le fait que les principales caractéristiques à considérer lors du dépistage se rapportent à des facteurs sociodémographiques. Pour interpréter ce constat, nous émettons l'hypothèse selon laquelle les propos des répondants se rapportent essentiellement à leur expérience professionnelle (en moyenne 11 années d'expérience pour les enseignants et 15 années d'expérience pour les professionnels) plutôt qu'aux savoirs issus de leur formation universitaire. Autrement, si les répondants avaient référé aux savoirs issus de leur formation initiale, ceux-ci auraient proposé principalement des caractéristiques se rapportant aux manuels diagnostiques utilisés dans le milieu scolaire. Par exemple, le DSM-V : Manuel diagnostique et statistique des troubles mentaux (American Psychiatric Association, 2015) fait mention des facteurs de risques suivants concernant l'émergence des troubles d'apprentissage (difficultés persistantes) en mathématiques : la génétique, le genre ainsi que les différents troubles concomitants susceptibles d'interférer sur la qualité des apprentissages.

Une autre piste de réflexion découle de l'influence probable des enquêtes internationales, telles le PISA et le TIMSS, sur le discours des professionnels de l'éducation. En référant à Bodin et Grapin (2018) ainsi qu'à De Lange (2007), il a été démontré que les résultats de l'enquête PISA ont amené certains pays à modifier le contenu de certaines parties de leurs curricula. Bien que cela ne soit toujours pas documenté, il est possible d'envisager que les résultats issus des enquêtes internationales influent sur les conceptions ainsi que sur les pratiques des enseignants qui interviennent en mathématiques (Bodin et Grapin, 2018).

4. Synthèse des résultats et discussion

4.1 Des explications diversifiées concernant la nature des difficultés d'apprentissage en mathématiques

À la lumière des données obtenues, quatre grands thèmes se dégagent des propos des participants concernant leur interprétation de la nature des difficultés d'apprentissage en mathématiques. La première piste explicative des difficultés d'apprentissage émane de facteurs sous-jacents à l'enseignement. Essentiellement, afin d'aborder cette prise de position, les répondants ont soutenu que les difficultés des élèves en mathématiques découlaient de lacunes concernant les activités de manipulation qui permettent difficilement aux élèves de donner du sens à certains concepts de mathématiques. De plus, les méthodes d'enseignement, parfois peu efficaces pour aborder un concept spécifique, ainsi que le curriculum scolaire en place contribuent à sous-valoriser certaines portions du programme de formation en mathématiques. Cela risque éventuellement d'engendrer des difficultés dans l'acquisition des savoirs propres à cette discipline scolaire.

Ensuite, le deuxième grand thème qui a émergé de l'analyse des données relie les fondements des difficultés d'apprentissage en mathématiques à la nature des savoirs. À ce sujet, les éléments de discours des participants se rapportant principalement à ce grand thème soutiennent que les difficultés des élèves s'expliquent majoritairement par une compréhension partielle des savoirs mathématiques qui sont à la base d'une hiérarchisation de concepts qui progressent graduellement en complexité. Par ailleurs, selon les participants, l'acquisition du sens du nombre ainsi que les difficultés ressenties par certains élèves concernant les exigences de mobilisation des savoirs mathématiques en contexte de résolution de problèmes constituent des pistes non négligeables pour expliquer la nature fondamentale des difficultés des élèves dans cette discipline.

Il importe de mentionner que les deux premiers grands thèmes mis en lumière lors de notre collecte de données concernant l'explication des fondements des difficultés d'apprentissage se rapportent principalement à la perspective explicative de la didactique. En effet, les éléments de discours de ces deux grands thèmes attribuent essentiellement la nature des difficultés d'apprentissage au fonctionnement du système didactique ainsi qu'à la spécificité des savoirs sous-jacents aux tâches proposées. Par ailleurs, il faut aussi souligner que les troisième et quatrième grands thèmes qui ont émergé de notre analyse concernant l'explication de la nature des difficultés d'apprentissage se rapportent aux deux autres perspectives explicatives, soit celles relevant des sciences cognitives ainsi que du champ des sciences sociales.

En effet, le troisième grand thème qui a été dégagé de l'analyse des données attribue les difficultés des élèves en mathématiques à des fonctions cognitives défaillantes. À ce sujet, une incapacité des élèves en difficulté à mémoriser, à organiser ainsi qu'à sélectionner l'information pertinente au sein d'une tâche permet d'expliquer leur faible rendement en mathématiques. En référant aux propos des répondants, ces dysfonctionnements cognitifs se traduiraient particulièrement dans l'activité de résolution de problèmes ainsi que dans la capacité des élèves à faire preuve d'abstraction et à modéliser une tâche en mathématiques. Les facteurs explicatifs de ce grand thème se rapportent directement à la perspective des sciences cognitives puisque les difficultés d'apprentissage sont considérées à partir de facteurs intrinsèques à l'élève.

Finalement, le quatrième grand thème qui a émergé du projet englobe les propos des répondants qui attribuent les difficultés d'apprentissage en mathématiques au contexte social des élèves. Contrairement, aux propos mis de l'avant au sein du précédent paragraphe, les difficultés d'apprentissage ne sont pas considérées sous un angle des caractéristiques intrinsèques à l'apprenant, mais plutôt par le biais d'un regard à l'environnement de l'apprenant (en référence au mésosystème, tel que proposé par la théorie de l'écologie du développement humain de Bronfenbrenner [2004]). En fait, certains professionnels en éducation considèrent que les difficultés s'expliquent essentiellement par le milieu familial de l'élève ainsi que par le soutien parental offert dans la réalisation de différentes tâches scolaires. De plus, les attentes sociales ainsi que les habitudes de vie des élèves représenteraient d'autres facteurs à considérer afin d'expliquer dans quel contexte émergent les difficultés d'apprentissage. Ces propos se rapportent directement à la perspective des sciences sociales concernant l'explication des difficultés en mathématiques puisque le rendement de l'élève dans cette discipline scolaire est considéré par le biais de facteurs sous-jacents à l'environnement de l'élève.

4.2 Des positions fermes, mais fluctuantes

Un regard approfondi aux résultats issus de la présente recherche met en lumière une posture ferme et définitive dans les propos des professionnels de l'éducation lorsqu'ils se positionnent concernant la nature des difficultés d'apprentissage des élèves en mathématiques. Par ailleurs, bien que le positionnement des professionnels soit catégorique, nous relevons qu'un même individu peut justifier sa vision de la nature des difficultés d'apprentissage en référant simultanément à des pistes explicatives se rapportant aux sciences cognitives, à la didactique ainsi qu'aux sciences sociales. L'explication ainsi formulée est teintée par l'arrière-plan culturel de ces intervenants (Roiné, 2012) et se fonde sur un amalgame d'expériences antérieures issues de leur socialisation, de leur pratique professionnelle tout comme de leur formation initiale.

La diversité des grands thèmes dégagés et la nature qui y est sous-jacente nous amènent à penser qu'il serait possible d'effectuer des rapprochements entre les modalités d'interprétation des difficultés d'apprentissage en mathématiques et le modèle théorique de Processus de production du handicap (PPH) élaboré par l'anthropologue Fougeyrollas et al. (1998). En effet, ce modèle propose de considérer le handicap d'un individu par le biais d'une interaction constante impliquant des facteurs personnels et environnementaux (micropersonnel, masocommunautaire et mésosociétal). La complexité sous-jacente à l'interprétation des difficultés d'apprentissage en mathématiques pourrait peut-être appeler à la mise en œuvre d'un modèle théorique similaire permettant de prendre en considération une diversité de facteurs, ainsi que la dynamique découlant de leurs constantes interactions, dans l'explication de la nature de celles-ci.

Par ailleurs, dans l'attente d'un modèle théorique permettant de considérer cette diversité de facteurs, il est aussi possible pour le chercheur de mettre en œuvre un devis méthodologique multiniveaux s'inspirant des travaux de Roiné (2015). En réalisant, de manière séquentielle, des analyses approfondies et indépendantes sur chacun des différents facteurs propres à un phénomène complexe, telle l'étude des difficultés d'apprentissage en mathématiques des élèves du primaire, il est possible d'envisager de fusionner les analyses ainsi réalisées de manière à mieux saisir la nature et la dynamique du phénomène en question.

4.3 Une vision des difficultés d'apprentissage en rupture avec les pratiques de dépistage

L'analyse du discours des enseignants concernant les procédures de dépistage met en lumière des constats pertinents sur le plan de la recherche. En effet, l'analyse des données a permis de documenter les principaux outils utilisés et les professionnels responsables du dépistage dans différents milieux scolaires. Par ailleurs, il importe de mentionner que la majorité des répondants se distancie de leur position avancée au moment de l'explication de la nature des difficultés d'apprentissage (en référence à la première section du guide d'entretien) lorsqu'ils donnent leur point de vue sur les populations à risque d'être diagnostiquée comme ayant des difficultés d'apprentissage en mathématiques. Cela pourrait s'expliquer par le fait qu'un seul groupement de caractéristiques, soit celui des facteurs socioculturels, a émergé des propos des participants lorsque ceux-ci se positionnaient sur le sujet. En fait, lors du dépistage des difficultés d'apprentissage, les répondants ont mis en lumière un éventail de facteurs socioculturels qui contribuent à identifier les élèves à risque sur le plan des apprentissages en mathématiques, soit : la qualité du soutien parental, le niveau de scolarité des parents, la classe socioéconomique, le genre ainsi que l'origine ethnoculturelle.

Comme mentionné par Giroux (2013), la complexité des difficultés d'apprentissage en mathématiques est telle qu'elle nécessite l'utilisation de cadres théoriques provenant du domaine des sciences sociales. Par ailleurs, en considérant les différentes sections des entretiens, nous sommes étonnés de remarquer une rupture dans le discours des participants interviewés. En effet, nous anticipions un arrimage dans les propos des participants concernant la perspective explicative des difficultés d'apprentissage sur laquelle ils s'appuient afin d'expliquer la nature fondamentale de ces difficultés ainsi que les populations à risque d'être dépistées. Par exemple, si un répondant a initialement mentionné que les difficultés d'apprentissage se traduisent par une utilisation limitée de la mémoire de travail de manière à organiser adéquatement l'information issue d'une tâche de mathématiques, nous aurions pensé que l'activité de dépistage devrait s'opérer prioritairement auprès des élèves démontrant une faible capacité à organiser ce type d'information.

Or, les résultats du projet mettent en lumière des disparités dans les propos des répondants lorsqu'ils se positionnent concernant l'interprétation et le dépistage des difficultés d'apprentissage en mathématiques. Cela se justifie principalement par le fait que de nombreux participants soutiennent d'abord que les difficultés d'apprentissage doivent prioritairement être considérées par le biais de modalités relevant de l'enseignement, des savoirs mathématiques ainsi que des fonctions cognitives de l'apprenant. Toutefois, ceux-ci mentionnent ensuite que les populations à prioriser lors du dépistage devraient idéalement être identifiées par le biais de facteurs socioculturels, et ce, sans référer à la nature des difficultés qui a été annoncée en amont. Pour interpréter ce constat, nous émettons l'hypothèse selon laquelle les professionnels de l'éducation sont en mesure de prendre position sur la nature fondamentale des difficultés en mathématiques en s'appuyant principalement sur le discours des spécialistes dans le domaine ainsi que sur des acquis issus de leur cheminement académique. Cependant, lorsque ces participants sont questionnés en lien avec les populations à risque d'être diagnostiquées au terme de l'activité de dépistage, ceux-ci réfèrent essentiellement à leur expérience empirique dans le milieu de l'enseignement et suggèrent de se rapporter aux facteurs socioculturels pour identifier les élèves en difficulté sur le plan des apprentissages en mathématiques.

4.4 L'apport de l'approche anthropo-didactique sur l'interprétation et le dépistage des difficultés d'apprentissage

À la lumière des résultats obtenus, on remarque que l'interprétation et le dépistage des difficultés d'apprentissage en mathématiques par les professionnels en éducation chez les élèves du primaire peuvent difficilement être réalisés en référant exclusivement aux cadres explicatifs relevant des sciences cognitives et de la didactique des mathématiques. Dans cette optique, nous soulignons la pertinence d'adopter un point de vue complémentaire, s'appuyant sur l'approche anthropo-didactique, afin de traiter des variables socioculturelles dans l'explication des difficultés des élèves en mathématiques. Les résultats issus de cette étude révèlent en quelque sorte un arrière-plan culturel, teinté par les « connaissances et les croyances » (Crahay et al., 2010) que les enseignants ont de leurs élèves, de leur métier et de l'enseignement aux élèves en difficultés en mathématiques.

Afin de saisir de quelle manière les professionnels de l'éducation interprètent et dépistent les difficultés d'apprentissage en mathématiques, un regard à cet arrière-plan culturel s'avère fort pertinent pour le chercheur en éducation. En effet, la mise à l'épreuve de l'approche anthropo-didactique a permis de documenter un éventail de facteurs susceptibles d'influer sur la nature des interventions et des interactions qu'entretiennent ces professionnels auprès des élèves en difficultés. Les facteurs socioculturels relevés proviennent de différents ordres, tels la cellule familiale, l'origine ethnique, le niveau socioéconomique, le genre, les attentes sociales à l'égard de l'élève ainsi que la présence des outils technologiques dans l'apprentissage et la socialisation. Ces facteurs méritent d'être pris en considération dans l'étude des modalités d'interprétation des difficultés d'apprentissage en mathématiques au primaire.

Sur le plan de la recherche, l'apport de l'approche anthropo-didactique se dégage aussi des propos des participants quant au dépistage des élèves en difficulté. En effet, l'étude a permis de mettre en lumière un second éventail de facteurs socioculturels extrascolaires, lié principalement au contexte social et à l'environnement familial de l'élève, qui influe sur le processus d'identification des élèves à risque en mathématiques. La considération de cet ensemble de facteurs socioculturels est non négligeable puisqu'il est susceptible de moduler les interventions pédagogiques tout au long du cheminement scolaire d'un apprenant perçu comme étant en difficulté. À cet effet, dans le cadre de recherches ultérieures, il serait pertinent d'effectuer un prolongement de l'étude de Cherel (2005) afin d'observer si le contrat didactique est différencié en fonction des caractéristiques socioculturelles associées à un groupe d'apprenants.

Limites à considérer

Il importe de mentionner que certaines modalités associées à la réalisation de la recherche peuvent avoir contribué à altérer les résultats issus du projet ainsi que leur interprétation. En effet, puisque les assistants de recherche ayant œuvré à titre d'intervieweurs connaissaient l'objet et les visées de la présente étude, il est possible que le déroulement de l'entretien ait été altéré. Plus spécifiquement, ce constat se traduit par le fait que le caractère adaptatif propre aux entretiens semi-structurés ait amené les intervieweurs à demander des approfondissements lorsque les répondants abordaient des propos relevant de la perspective des sciences sociales concernant l'interprétation des difficultés d'apprentissage.

Cela se traduit notamment au niveau des questionnements en lien avec l'activité de dépistage des professionnels de l'éducation et de l'identification des populations à risque d'être caractérisées comme ayant des difficultés d'apprentissage en mathématiques. En effet, lors des entretiens, les intervieweurs avaient une liste de caractéristiques individuelles permettant d'alimenter les discussions et d'approfondir les propos des répondants concernant cette thématique. Conséquemment, il est possible que la connaissance des assistants quant à l'objet de recherche ait contribué à documenter davantage les facteurs socioculturels susceptibles d'intervenir dans le dépistage des élèves caractérisés comme étant à risque sur le plan des mathématiques.

Conclusion

Cette étude visait à explorer de quelle manière les trois différentes perspectives explicatives des difficultés d'apprentissage en mathématiques présentées en amont se traduisent dans les propos et les interprétations des professionnels de l'éducation lorsque ceux-ci se positionnent sur la nature des difficultés d'apprentissage et sur les modalités permettant de réaliser le dépistage de celles-ci. Les résultats issus de la présente recherche ont contribué à mettre en lumière la présence de facteurs explicatifs sous-jacents à l'ensemble des perspectives explicatives lorsque les professionnels en éducation se sont positionnés à l'égard de la nature des difficultés d'apprentissage en mathématiques.

Par ailleurs, la présente recherche a permis de mettre en avant-plan l'importance d'envisager des facteurs reliés à la perspective des sciences sociales lorsque les participants se positionnent concernant les modalités de réalisation du dépistage des élèves en difficulté sur le plan des mathématiques. De plus, par rapport aux propos formulés afin d'expliquer de quelle manière l'activité de dépistage est réalisée, une rupture concernant les assises théoriques sur lesquelles s'appuient quelques répondants a été relevée dans l'analyse de leur discours sur les modalités d'interprétation des difficultés d'apprentissage. En référant aux trois perspectives explicatives des difficultés d'apprentissage, il serait intéressant de documenter la cohérence du discours des professionnels non seulement concernant l'interprétation et le dépistage de ces difficultés, mais aussi en fonction des modalités relevant de l'attribution d'un diagnostic ainsi que de la mise en œuvre d'une séquence d'interventions pédagogiques.

Références

Ahmad, F. (2014). *Étude des déterminants anthropo-didactiques de l'usage des jeux à l'école maternelle dans l'enseignement des mathématiques* [thèse de doctorat, Université de Bordeaux]. TEL. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01132569/document

American Psychiatric Association. (2015). *DSM-V : Manuel diagnostique et statistique des troubles mentaux.* Elsevier Masson.

Authier, J. (2010). *Perceptions d'élèves en difficulté d'apprentissage quant à leurs conditions d'intégration scolaire au primaire* [mémoire de maitrise, Université du Québec à Montréal]. Archipel. https://archipel.uqam.ca/2684/1/M11293.pdf

Ayala, J. et Roditi, E. (2014). Inégalités sociales et apprentissages en mathématiques : les énoncés et les exercices seraient-ils eux-mêmes des différenciateurs? *Recherches en didactiques, 17*, 45-64. https://doi.org/10.3917/rdid.017.0045

Barrouillet, P. (2006). Les troubles de l'arithmétique et la dyscalculie. Dans P. Barrouillet et V. Camos (dir.), *La cognition mathématique chez l'enfant* (p. 181-210). Solal.

Beaud, S. et Weber, F. (2010). *Le guide de l'enquête de terrain*. Éditions La Découverte.

Bodin, A. et Grapin, N. (2018). Un regard didactique sur les évaluations du PISA et de la TIMSS : mieux les comprendre pour mieux les exploiter. *Mesure et évaluation en éducation, 41*(1), 67-96. https://doi.org/10.7202/1055897ar

Bourdieu, P. (2002). *Intervention, 1961-2001, Science sociale et action politique*. Agone.

Bourdieu, P. et Passeron, J. C. (1985). *Les héritiers : les étudiants et la culture.* Éditions de Minuit.

Bronfenbrenner, U. (2004). *Making human being human. Bioecological perspectives on human development*. Sage Publications.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Éditions la Pensée sauvage.

Charland, J.- P. (2005). *Histoire de l'éducation au Québec : de l'ombre du clocher à l'économie du savoir*. Éditions du renouveau pédagogique.

Cherel, C. (2005). *Deux élèves en difficulté s'intègrent à une classe ordinaire le temps … des mathématiques*. Éditions de la Bande didactique.

Chopin, M. P. (2007). *Le temps didactique dans l'enseignement des mathématiques. Approches des modes de régulation des hétérogénéités didactiques* [thèse de doctorat, Université Victor Segalen Bordeaux 2]. TEL. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00542524

Chopin, M. P. (2011). *Le temps de l'enseignement. L'avancée du savoir et la gestion des hétérogénéités dans la classe*. Presses universitaires de Rennes.

Chopin, M. P. et Sarrazy, B. (2010). Contribution à l'évaluation de l'individualisation de l'enseignement : une étude anthropo-didactique des fonctions des interactions phatiques dans l'enseignement de l'arithmétique en cycle 3. Dans L. Mottier Lopez, C. Martinet et V. Lussi (dir.), *Actes du congrès de l'actualité de la recherche en éducation et en formation (AREF)* (p. 1-8). Université de Genève.

Chopin, M. P. et Sarrazy, B. (2014). Contribution anthropo-didactique à l'étude des effets de l'individualisme sur la création des inégalités scolaires. *Éducation et Didactique, 8*(2), 9-24. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.1919

Conseil supérieur de l'éducation. (2017). *Pour une école riche de tous ses élèves : s'adapter à la diversité des élèves de la maternelle à la 5e année du secondaire.* Gouvernement du Québec.

Crahay, M, Wanlin, P., Issaeiva, É et Laduron, I. (2010). Fonctions, structuration et évolution des croyances (et connaissances) des enseignants. *Revue française de pédagogie, 172*, 85-129. https://doi.org/10.4000/rfp.2296

De Lange, J. (2007). Large-scale assessment and mathematics education. Dans F. K. Lester (dir.). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 1111-1142). National Council of Teachers of Mathematics.

Deslauriers, J.-P. (1997). L'induction analytique. Dans J. Poupart, J.-P. Deslauriers, L.-H. Groulx, A. Laperrière, R. Mayer et A. P. Pires (dir.), *La recherche qualitative : Enjeux épistémologiques et méthodologies* (p. 293-332). Gaëtan Morin Éditeur.

Fortin, M. F. (2010). *Fondements et étapes du processus de recherche : Méthodes quantitatives et qualitatives (2e éd.)*. Chenelière Éducation.

Fougeyrollas, P., Cloutier, R., Bergeron, H., Côté, J. et St-Michel, G. (1998). *Classification québécoise : Processus de production du handicap*. Réseau international sur le processus de production du handicap.

Gaudreau, L., Legault, F., Brodeur, M., Hurteau, M., Dunberry, A., Séguin, S. P et Legendre, R. (2008). *Rapport d'évaluation de l'application de la Politique de l'adaptation scolaire*. Direction de l'Adaptation scolaire.

Gauthier, C. et Saint-Jacques, D. (2002). *La réforme des programmes scolaires au Québec*. Presses de l'Université Laval.

Giroux, J. (2010). Pour une différenciation de la dyscalculie et des difficultés d'apprentissage en mathématiques. Dans V. Freiman, A. Roy et L. Theis (dir.), *L'enseignement de mathématiques dans et à travers des contextes particuliers : quel support didactique privilégier? Actes du colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec* (p. 148-158). Université de Moncton.

Giroux, J. (2013). Étude des rapports enseignement/apprentissage des mathématiques dans le contexte de l'adaptation scolaire : problématique et repères didactiques. *Éducation et Didactique, 7*(1), 59-86. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.1573

Giroux, J. (2015, 1er octobre). *Difficultés des élèves en mathématiques : apports de la didactique* [conférence]. Haute école pédagogique du Canton de Vaud. Unité d'enseignement et de recherche : Didactique des mathématiques et sciences de la nature.

Godin, J. (2017). *L'analyse réflexive en enseignement : les enseignants du secondaire de l'école d'Iberville* [mémoire de maitrise, Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue]. Depositum. https://depositum.uqat.ca/id/eprint/736/

Gouvernement du Québec. (1997). *Réaffirmer l'école. Prendre le virage du succès. Rapport du groupe de travail sur la réforme du curriculum.* Ministère de l'Éducation.

Gouvernement du Québec. (1999). *Une école adaptée à tous ses élèves : Politique de l'adaptation scolaire.* Ministère de l'Éducation.

Gouvernement du Québec. (2000). *Élèves handicapés ou élèves en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage (EHDAA) : définitions*. Ministère de l'Éducation.

Gouvernement du Québec. (2003). *Les difficultés d'apprentissage à l'école : Cadre de référence pour soutenir l'intervention*. Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport.

Gouvernement du Québec. (2007). *L'évaluation des apprentissages au secondaire. Cadre de référence.* Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport.

Gouvernement du Québec. (2015). *Bulletin statistique de l'éducation, 43*. Ministère de l'Éducation, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche.

Gouvernement du Québec. (2019). *Référentiel d'intervention en mathématique*. Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur.

Hess, U., Senécal, S. et Vallerand, R. J. (2000). Les méthodes quantitative et qualitative de recherche en psychologie. Dans R. J. Vallerand et U. Hess. (dir.), *Méthodes de recherche en psychologie* (p. 507-529). Gaëtan Morin Éditeur.

Homsy, M. et Savard, S. (2018). *Décrochage scolaire au Québec : dix ans de surplace, malgré les efforts de financement*. Institut du Québec.

Institut national de la santé et de la recherche médicale [INSERM]. (2007). *Dyslexie, dysorthographie, dyscalculie : bilan des données scientifiques*. Institut national de la santé et de la recherche médicale.

Lajoie, C. et Bednarz, N. (2014). La résolution de problème en mathématiques au Québec : évolution des rôles assignés par les programmes et les conseils donnés aux enseignants. *Éducation et francophonie, 42*(2), 7-23. https://doi.org/10.7202/1027903ar

L'Écuyer, R. (1990). *Méthodologie de l'analyse développementale de contenu*. Presses de l'Université du Québec.

Legault, F. (2013). *Analyse du modèle d'intégration des élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage*. Syndicat de l'enseignement du Haut-Richelieu.

Lemoyne, G. et Lessard, G. (2003). Les rencontres singulières entre les élèves présentant des difficultés d'apprentissage en mathématiques et leurs enseignants. *Éducation et francophonie, 21*(2), 13-44. https://doi.org/10.7202/1025772ar

Lessard, G. (2014). L'accroissement de la pertinence institutionnelle de dispositifs didactiques d'enseignement des mathématiques afin de s'extirper des mécanismes de réduction des exigences auprès des « élèves en difficulté ». Dans C. Mary, H. Squalli, L. Theis et L. DeBlois (dir.), *Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques : regard didactique* (p. 113-131). Presses de l'Université du Québec.

Lévi-Strauss, C. (1958). *Anthropologie structurale*. Plon.

Mamas Mavoungou, E. L. (2016). *Les rapports personnels des enseignants du primaire aux objets « variation » et « covariation » comme conséquence des choix institutionnels* *pour leur formation initiale* [mémoire de maitrise, Université de Montréal]. Papyrus. http://hdl.handle.net/1866/19014

Martin, V. et Mary, C. (2010). Particularités de l'enseignement des mathématiques à des élèves en classes régulières ou spéciales. Dans V. Freiman, A. Roy et L. Theis (dir.), *L'enseignement de mathématiques dans et à travers des contextes particuliers : quel support didactique privilégier? Actes du colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec* (p. 229-240). Université de Moncton.

Mary, C., Squalli, H. et Schmidt, S. (2008). Mathématiques et élèves en difficulté grave d'apprentissage : Contexte favorable à l'intégration et au raisonnement mathématique. Dans J. M. Bisaillon et N. Rousseau (dir.), *Les jeunes en difficulté : Contextes d'intervention favorables* (p. 169-192). Presses de l'Université du Québec.

Mazzocco, M. M. et Thompson, R. E. (2005). Kindergarten predictors of math learning disability. *Learning Disabilities Research & Practice, 20*(3), 142-155. https://doi.org/10.1111/j.1540-5826.2005.00129.x

Miles, M. B. et Huberman, A. M. (2003). *Analyse des données qualitatives*. De Boeck.

Najar, R. (2010). *Effets des choix institutionnels d'enseignement sur les possibilités d'apprentissage des étudiants* [thèse de doctorat, Université Paris Diderot (Paris 7)]. http://pf-mh.uvt.rnu.tn/43/1/These.pdf

Peker, M. (2016). Mathematics teaching anxiety and self-efficacy beliefs toward mathematics teaching: A path analysis. *Education Research and Reviews, 11*(3), 97-104. http://doi.org/10.5897/ERR2015.2552

Perrin-Glorian, M.-J. (1993). Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes « faibles ». *Recherche en didactique des mathématiques, 13*(1/2), 5-18.

Proulx, J. P. et Charland, J. P. (2009). *Le système éducatif du Québec : De la maternelle à l'université.* Chenelière Éducation.

Rajotte, T. (2014). *La résolution de problèmes de proportionnalité chez les élèves de sixième année du primaire avec ou sans TDA/H identifié* [thèse de doctorat, Université du Québec à Rimouski]. Archipel. https://archipel.uqam.ca/7152/

Rajotte, T. (2018). Apports et limites de trois perspectives interprétatives des difficultés d'enseignement et d'apprentissage en mathématiques des élèves du primaire. *Trabalho (En)cena*, *3*(1), 19-37. https://doi.org/10.20873/2526-1487V3N1

Rajotte, T., Germain, M.-P., Beaupré, S. et Beaudoin, D. (2018). The Influence of Social Factors on Learning Difficulties in Mathematics: Testing the Anthropo-

Didactic Approach. *International Journal of Elementary Education. 7*(1), 13-22. https://doi.org/10.11648/j.ijeedu.20180701.13

Rajotte, T., Giroux, J. et Voyer, D. (2014). Les difficultés des élèves du primaire en mathématiques, quelle perspective d'interprétation privilégier? *Revue des sciences de l'éducation de McGill, 49*(1), 67-87. https://doi.org/10.7202/1025772ar

Roiné, C. (2009). *Cécité didactique et discours noosphériens dans les pratiques d'enseignement en S.E.G.P.A : une contribution à la question des inégalités* [thèse de doctorat, Université Victor Segalen Bordeaux 2]. Sudoc. http://www.sudoc.fr/139722432

Roiné, C. (2012). Analyse anthropo-didactique de l'aide mathématique aux « élèves en difficulté » : l'effet Pharmakéia. *Carrefours de l'éducation, 1*, 131-147. https://doi.org/10.3917/cdle.033.0131

Roiné, C. (2015). La fabrication de l'élève en difficulté. *Éducation et socialisation*, 37. https://doi.org/10.4000/edso.1138

Sarrazy, B. (2001). Les interactions maître-élèves dans l'enseignement des mathématiques. Contribution à une approche anthropo-didactique des phénomènes d'enseignement. *Revue française de pédagogie, 136*, 117-132. https://doi.org/10.3406/rfp.2001.2832

Sarrazy, B. (2002). Pratiques d'éducation familiale et sensibilité au contrat didactique dans l'enseignement des mathématiques chez des élèves de 9-10 ans. *La revue internationale de l'éducation familiale, 6*(1), 103-130.

Sarrazy, B. (2006). Fondements épistémologiques et ancrages théoriques d'une approche anthropo-didactique des phénomènes d'enseignement des mathématiques. Dans A.-C. Mathé et É. Mounier (dir.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (p. 79-99). IREM de Paris.

Van Haecht, A. (2006). *L'école à l'épreuve de la sociologie : La sociologie de l'éducation et ses évolutions*. Éditions De Boeck Université.

Annexe

Grille d'entretien utilisée dans le cadre de la recherche

Présentation de la recherche, de la marche à suivre durant l'entretien et signature du formulaire de consentement.

1. Profil professionnel du répondant

a) Quels sont tous les emplois effectués jusqu'à présent dans le domaine scolaire (durée de l'emploi et lieu de travail)?[3]
b) Quel est votre emploi actuel et depuis combien de temps?
c) Quelles sont vos motivations à exercer ce dernier emploi?
d) Quelle est votre formation académique? Expliquez votre cheminement académique.
e) Comment jugez-vous votre niveau de performance durant vos études? Avez-vous éprouvé des difficultés académiques? Si oui, quelles en sont les causes selon vous?

2. Rapports professionnels avec les élèves

a) Quelles sont vos stratégies d'intervention? Adhérez-vous à une théorie/paradigme, démarche particulière? (Philosophie d'intervention?)
b) Quels sont vos rapports professionnels avec les élèves HDAA (élèves handicapés ou ayant des difficultés d'adaptation ou d'apprentissage)?
c) Quels sont vos rapports professionnels avec les élèves ayant des troubles de comportement (TC)? Éprouvez-vous des difficultés particulières?
d) Quels sont vos rapports professionnels avec les élèves ayant des difficultés d'apprentissage (DA)? Éprouvez-vous des difficultés particulières?
e) Quelles sont les principales difficultés d'apprentissage (DA) que vous avez détectées dans un ou dans plusieurs disciplines du programme de formation?
f) Selon vous, quelle est la prévalence (fréquence) des difficultés d'apprentissage en mathématiques, en français, ainsi que dans les autres disciplines?

3. Difficultés d'apprentissage en maths [4 questions]

a) Quelle est la nature (cause) des principales difficultés rencontrées chez les élèves en mathématiques?

[3] La réponse doit permettre de comptabiliser le nombre d'années effectuées par le répondant dans le domaine scolaire.

[question d'approfondissement si cela est pertinent] – Dans quelles conditions ces difficultés émergent-elles?
[question d'approfondissement si cela est pertinent] – Considérez-vous que ces difficultés sont liées aux fonctions cognitives de l'élève? Si c'est le cas, précisez votre point de vue.
[question d'approfondissement si cela est pertinent] – Considérez-vous que ces difficultés découlent des pratiques enseignantes? Si c'est le cas, précisez votre point de vue.

b) Dans quels domaines des mathématiques (arithmétique, géométrie, mesure, etc.) les élèves rencontrent-ils difficultés d'apprentissage?
c) Quelles sont les répercussions de ces difficultés sur le cheminement scolaire de l'élève?
d) Pouvez-vous identifier d'autres difficultés ou causes des difficultés d'apprentissage en mathématiques [pistes de suggestion : logico-spatiale, dysphasie, dyslexie, troubles d'attention]?

4. Dépistage des difficultés d'apprentissage en maths [7 questions]

a) Qui est le principal professionnel dédié au dépistage au sein de votre établissement scolaire?
b) Quels sont les outils de dépistage employés : [pistes de suggestions à proposer : autoévaluation, grille d'observation, entrevue, jeux en maths, etc.]?
c) Lors du dépistage, quelles clientèles sont les plus à risque d'être identifiées : [pistes de caractéristiques à proposer au besoin : sexe, lieu d'habitation (quartier, rural/urbain), origine ethnoculturelle (1re ou 2e génération), classe socioéconomique, scolarisation des parents, soutien des parents, mauvaise estime de soi, etc.?]
d) Quelle clientèle d'élèves vous occasionne davantage de problèmes (fréquence, lourdeur des cas…)?
e) Pour quelles raisons éprouvez-vous davantage de difficultés auprès de cette clientèle d'élèves?
f) En fonction des différents domaines des mathématiques (arithmétique, géométrie, mesure, etc.), procédez-vous différemment pour réaliser l'activité de dépistage?
g) Selon vous, y a-t-il une association entre le type d'élèves et le type de difficulté rencontrée dans le milieu scolaire?

5. Mise en œuvre d'un diagnostic [8 questions]

- Section non considérée dans le cadre du présent article

6. L'intervention pédagogique auprès des élèves en difficulté [8 questions]

- Section non considérée dans le cadre du présent article

7. Profil personnel du répondant

Âge.
État civil.
Enfant(s).
Sexe (on le devine ordinairement…).
Classe socioéconomique.
Classe socioéconomique des parents.
Groupe ethnoculturel.
Lieu de résidence (quartier, rural/urbain).

Remerciements

Analyse en théorie des situations didactiques d’une ingénierie visant une première approche de la notion de limite finie d’une suite

Patrick GIBEL
Université de Bordeaux
Lab-E3D – Laboratoire épistémologies et didactiques des disciplines

Résumé : Cet article a pour finalité d’étudier, en théorie des situations didactiques (TSD), la pertinence d’une ingénierie didactique visant à faire découvrir aux élèves de première scientifique la notion de limite finie d’une suite réelle. Les effets de cette ingénierie – comportant une dimension recherche – sur les apprentissages des élèves seront étudiés grâce à une analyse spécifique des raisonnements produits par les élèves et par l’enseignant. Le modèle d’analyse des raisonnements, élaboré à partir de la théorie des situations didactiques de Brousseau et de la sémiotique de Peirce, offre la possibilité d’analyser les raisonnements élaborés en situations d'action, de formulation et de validation.

Mots clés : Raisonnement, formulation, preuve, analyse, suite, limite, TICE

A Theory of Didactic Situations analysis of didactic engineering aimed at introducing the finite limit of a sequence

Abstract: This paper adopts a Theory of Didactic Situations (TSD) standpoint to examine the relevance of didactic engineering aimed at helping science students in high school to discover the concept of the finite limit of a real sequence. The outcomes of this engineering – including a research dimension – on student learning will be studied through a specific analysis of reasoning produced by the students and by the teacher. The reasoning analysis model, developed from Brousseau's Theory of Didactical Situations and Peirce’s Semiotics, offers the possibility of analyzing the reasoning processes developed in situations of action, formulation and validation.

Keywords: Reasoning processes, situation of formulation, proof, calculus, sequence, limit, ICTs

Revue québécoise de didactique des mathématiques, 2020, *vol 1*, p. 153-189.
https://doi.org/10.71403/kft8yh29

Introduction

La construction du concept de limite est un élément important dans l'enseignement de l'analyse dans l'enseignement supérieur à l'université et en classes préparatoires aux grandes écoles. De nombreux chercheurs se sont intéressés à l'enseignement du concept de limite d'une suite ou d'une fonction réelle; citons parmi eux Bloch et Gibel (2011), Chorlay (2019), Ghedamsi (2008), Grenier-Boley et al. (2015), Job (2011) et Lecorre (2015). De plus, l'étude d'ingénieries didactiques en mathématiques et en physique, au lycée et à l'entrée à l'université, concernant le concept de limites de suites et de fonctions numériques, a fait l'objet en France d'une publication (Bloch et al., 2017), par la commission inter-IREM Université (Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques).

Dans cet article, nous souhaitons analyser l'intérêt et la pertinence d'une situation d'enseignement-apprentissage élaborée et mise en œuvre en France afin de permettre aux élèves de première scientifique (élèves âgés de 16 à 17 ans) d'effectuer une première approche de la notion de limite finie d'une suite réelle. Il s'agit d'une approche dont l'originalité repose principalement sur le fait qu'elle permet l'articulation de différents cadres : géométrique, algébrique et numérique.

Nous étudierons l'appropriation de la notion de limite finie en nous attachant à analyser les connaissances et les savoirs mobilisés par les élèves, mais également leurs capacités à élaborer des raisonnements en vue d'établir la croissance et la majoration de la suite, ainsi que leur capacité à s'approprier et à utiliser la notion de « seuil ».

La première partie de cet article présente la séquence étudiée et notre questionnement de recherche. La deuxième partie expose la théorie qui supporte notre recherche et vise à définir les caractéristiques des « raisonnements » en classe de mathématiques (Gibel, 2004, 2018). Dans la troisième partie, nous expliciterons la méthodologie utilisée en présentant d'une part l'ingénierie produite et d'autre part le modèle d'analyse des raisonnements (Bloch et Gibel, 2011; Gibel, 2018). Ce dernier constitue l'élément central de notre méthodologie. Cet outil d'analyse nous permettra d'effectuer une analyse a priori des raisonnements susceptibles d'être élaborés dans une situation à dimension adidactique. Dans la quatrième partie, nous réaliserons, par la mise en œuvre du modèle, une analyse a posteriori détaillée de plusieurs épisodes extraits des situations de formulation et de validation en vue d'étudier précisément les différents raisonnements produits par les élèves et par l'enseignant. Cette analyse, qui précise les formes et les fonctions des raisonnements, valides et erronés, nous permettra de déterminer l'adéquation de cette séquence avec l'objectif visé : faire vivre aux élèves une séquence permettant d'étudier expérimentalement le comportement asymptotique d'une suite ayant une limite finie. Nous terminerons cette partie par une présentation synthétique des principaux résultats de l'étude et nous ouvrirons sur une discussion relative à l'apprentissage de la notion de limite en classe de première scientifique.

1. Présentation de la séquence étudiée

Le programme de la classe de première scientifique (Bulletin officiel de l'éducation nationale, 2010) mentionne que l'étude de phénomènes discrets fournit un moyen d'introduire les suites et leur génération en s'appuyant sur des registres différents et en faisant appel à des logiciels. Le texte précise que le tableur, les logiciels de géométrie dynamique et de calcul sont des outils adaptés à l'étude des suites, en particulier pour l'approche expérimentale de la notion de limite. D'un point de vue didactique, la production et l'analyse par les élèves d'un ensemble « fini » de valeurs approchées des termes d'une suite, obtenues pas l'usage du calcul instrumenté, ne permet pas de comprendre la notion de limite finie d'une suite.

Nous tenons à souligner que le principal intérêt de la séquence présentée ici réside dans le fait que les élèves abordent la notion de suite numérique, puis étudient son comportement asymptotique en travaillant dans trois cadres distincts et complémentaires : les cadres géométrique, algébrique et numérique.

La suite, objet de la séquence, a pour terme général la somme partielle des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme 1. Les élèves vont commencer la séquence par construire, sur papier millimétré, une succession de 4 carrés. Le premier carré a pour côté 1 et est déjà construit sur le graphique, le deuxième carré est tel que la mesure de ses côtés est égal à $\frac{3}{4}$ de la mesure du carré précédent et qu'il est juxtaposé au précédent conformément à la figure 1 ci-dessous. Pour tracer les trois carrés suivants, les élèves vont devoir itérer ce processus de construction.

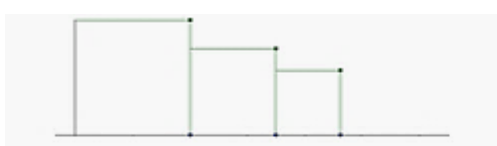


Figure 1 : Processus de construction

Grâce à la construction réalisée, les élèves pourront mettre en relation l'écriture algébrique du n-ième terme ($1 \leq n \leq 5$) de la suite étudiée avec la représentation graphique en faisant référence au n-ième carré construit. Ainsi les élèves vont pouvoir effectuer des liens entre les cadres algébrique et géométrique afin de calculer les premiers termes de la suite et ainsi d'en contrôler la validité.

Les élèves vont ensuite être conduits à établir la majoration de la suite en produisant une preuve mathématique, dont l'élaboration repose sur la production d'énoncés relevant principalement des cadres algébrique et géométrique. La construction géométrique des premiers carrés permet également aux élèves de prendre conscience de la croissance de la suite.

Les élèves ayant établi la croissance et la majoration de la suite ne sont cependant pas en mesure d'en déduire – à ce niveau d'enseignement – sa convergence vers une limite finie. Aussi, c'est le recours à des ressources numériques, qui permettra aux élèves d'effectuer une étude expérimentale du comportement asymptotique de la suite numérique.

Cette étude permet aussi aux élèves de découvrir la notion de seuil en référence à une suite convergente ayant pour limite l : pour un seuil s fixé, il existe un rang à partir duquel l'ensemble des termes de la suite appartiennent à l'intervalle $[s\,;l]$ où l désigne la limite de la suite. Le cadre géométrique joue un rôle déterminant : il permet de mettre en évidence le fait que l'ensemble des valeurs appartiennent à cet intervalle et approchent d'aussi près que l'on veut la valeur de la limite l.

À ce niveau d'enseignement, aucune preuve mathématique formelle de la convergence de la suite ne sera produite par les élèves conformément aux programmes. Pour cette même raison, la formalisation de la définition ne sera pas enseignée aux élèves. Cette expérimentation constitue ainsi une première approche de la notion de limite finie d'une suite.

L'ingénierie expérimentée a été construite en vue de confronter les élèves à des situations à dimension adidactique (Bloch, 1999) assimilables à des situations d'action, de formulation, de validation et de décision au sens de Balacheff (1987). Ainsi, les élèves vont devoir, en situation : décider de connaissances à mobiliser, contrôler leurs actions sur les objets, conjecturer, valider ou infirmer leur(s) conjecture(s) par l'élaboration de preuves, mettre en débat leur(s) formulation(s), déduire des informations à partir des résultats obtenus par le calcul instrumenté. Par conséquent, cette ingénierie vise à offrir aux élèves la possibilité d'élaborer de nombreux raisonnements par confrontation aux différents milieux et recouvrant les fonctions citées précédemment.

Afin de déterminer les effets de cette ingénierie sur le développement des connaissances des élèves de première scientifique et leur représentation de la limite finie d'une suite, nous effectuerons une analyse détaillée des raisonnements produits lors des phases d'action, de formulation, de validation et de décision.

Nous chercherons à répondre à la question : en quoi l'étude détaillée des raisonnements des élèves, confrontés tout au long de la séquence à des situations à dimension adidactique, nous fournit-elle des indications précises sur les effets de cette ingénierie sur la construction par les élèves de la notion de limite finie d'une suite?

2. La théorie des situations didactiques : un cadre théorique pour l'analyse des situations d'enseignement-apprentissage et l'étude des raisonnements produits

2.1 La détermination d'un raisonnement produit par un sujet : la notion de « situation »

Comme indiqué dans Gibel (2004), en classe de mathématiques, le terme « raisonnement » tend à couvrir un champ beaucoup plus vaste que celui des raisonnements formels, logiques ou mathématiques. C'est pour cette raison que nous avons choisi comme définition initiale celle proposée par Oléron (1977) : « Un raisonnement est un enchaînement, une combinaison ou une confrontation d'énoncés ou de représentations respectant des contraintes susceptibles d'être explicitées, et conduit en fonction d'un but » (p. 10).

Pour affirmer que tel observable est l'indice d'un raisonnement dont les éléments sont parfois en partie implicites, il est nécessaire de dépasser la définition formelle, pour examiner les conditions dans lesquelles le « raisonnement supposé » peut être considéré, par le chercheur, comme un « raisonnement effectif ». Dans le cadre d'une recherche sur l'usage et le traitement des raisonnements des élèves par les enseignants (Brousseau et Gibel, 2005), nous avons mis en évidence que, souvent, dans le contexte d'une situation didactique, le professeur relève, dans les formulations des élèves, des indices et les interprète davantage en fonction de leur utilité pour le déroulement de la leçon que du point de vue du projet initial de l'élève qui en est l'auteur. Par conséquent pour pouvoir déterminer et analyser objectivement les raisonnements produits par les élèves, le chercheur doit donc suivre une autre voie. Il convient qu'il montre que tel raisonnement complet, dont il ne perçoit parfois qu'une partie ou que des indices, est bien celui qu'il convient d'attribuer à son auteur.

Le chercheur doit donc montrer que la production du raisonnement prêté au sujet est motivée par une intention de la part de ce dernier, qu'elle répond à un but, qu'elle lui apporte un avantage dans les conditions qu'il perçoit, et avec les connaissances dont il dispose.

Ainsi, comme nous l'avons explicité (Brousseau et Gibel, 2005),

> Parmi toutes les conditions qui accompagnent la production d'un supposé raisonnement, quelques-unes seulement – le moins possible – peuvent servir à le déterminer et à le justifier. Ces conditions ne sont pas quelconques. Elles forment un ensemble cohérent qui est appelé « situation » dans la TSD. La situation est une partie seulement du contexte, ou de l'environnement de l'action de l'élève ou du

> professeur et elle comprend, mais pas seulement, une sorte de question à laquelle le raisonnement de l'élève est une réponse. Elle n'est réduite ni à l'action du sujet ni à la connaissance qui la motive, mais elle les met en relation rationnelle. Une situation peut expliquer pourquoi un raisonnement faux a été produit par d'autres causes qu'une erreur ou une insuffisance du sujet. (p. 16)

Ce point de vue est un peu différent de celui qui prévaut légitimement chez les professeurs où les seuls raisonnements vraiment utilisables sont les raisonnements entièrement corrects d'un point de vue syntaxique. Un raisonnement faux ou incomplet n'est qu'assez exceptionnellement un objet d'étude. La théorie des situations didactiques (TSD) a pour objet l'étude et la modélisation des situations ainsi définies. Elle est un instrument pour rechercher les explications minimales des faits observés, qui sont compatibles avec les faits connus.

2.2 Les raisonnements effectifs

Les raisonnements que nous étudierons dans le cadre de l'apprentissage des mathématiques sont essentiellement modélisables par des inférences. Mais cette caractérisation doit être complétée, car nous voulons pouvoir distinguer les raisonnements effectifs des citations et intégrer des raisonnements qui se manifestent par des activités non verbales aussi bien que par des assertions, ce qui nous amène à formuler la définition suivante (Brousseau et Gibel, 2005) :

Un « raisonnement » est donc une relation R entre deux éléments A et B tels que :

- A désigne une condition ou un fait observé, contingent;
- B est une conséquence, une décision ou un fait prévu;
- R est une relation, une règle, plus généralement une connaissance empruntée à un répertoire considéré comme connu, accepté. La relation R conduit l'actant, dans la circonstance A, à prendre la décision B ou à prévoir le fait B ou à énoncer que le fait B est vrai.

Un « raisonnement effectif » comprend, de plus, un agent E, élève ou professeur, qui utilise la relation R ainsi qu'un projet déterminé par une situation dont la réalisation exige l'usage de cette relation.

On peut dire que pour réaliser le projet déterminé par la situation, le sujet utilise la relation R qui permet d'inférer B de la condition A. Ce projet peut être convenu et explicité par l'agent ou il peut lui être prêté par le chercheur à partir d'indices.

En conclusion du paragraphe précédent, un raisonnement est identifié par sa fonction dans une situation, par le rôle qu'il y joue. Cependant, un raisonnement peut avoir des fonctions différentes, par exemple décider d'une action à effectuer, informer, convaincre, expliquer. Elles sont différenciées par des modèles de situations mathématiques (situation d'action, situation de formulation, situation de validation) généraux, mais différents. Pour une présentation plus détaillée, nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Brousseau (1998).

2.3 L'identification des raisonnements

Afin de pouvoir étudier les moyens utilisés par l'enseignant pour gérer les raisonnements apparaissant dans les productions des élèves, il convient de définir ce qui, pour le chercheur, est assimilable à un « raisonnement », pour cela il faut (Brousseau et Gibel, 2005) :

- identifier des observables (textes, gestes, paroles, dessins, etc.) produits par un élève, par plusieurs élèves en interaction ou par l'enseignant;
- relier ces observables par une relation « rationnelle » telle que cette relation s'exprime dans le langage du chercheur, différent *a priori* de celui des protagonistes;
- identifier un actant : professeur, élève ou groupe d'élèves à qui est attribué l'établissement de la relation dans le cadre d'un projet qui lui est prêté;
- s'il s'agit d'une hypothèse, établir qu'elle est valide, en montrant, éventuellement à l'aide d'autres indices, qu'elle est la moins improbable des explications.

Il est à noter que parmi les raisonnements détectés par le chercheur, certains d'entre eux peuvent être attribués à un ou à plusieurs des protagonistes, bien que ces derniers ne les aient pas nécessairement identifiés comme tels.

2.4 La théorie des situations didactiques comme fondement de notre modèle

L'analyse fine des raisonnements produits en situation de validation ne peut se restreindre à une analyse en termes de calcul propositionnel basée sur la logique dialogique de Lorenzen, comme l'indique Durand-Guerrier (2007). Cette didacticienne met en évidence que le modèle de Lorenzen ne suffit pas pour comprendre et analyser l'activité mathématique en situation de validation et elle fait l'hypothèse que ce modèle :

> contribue à donner de l'activité mathématique une image déformée, en exacerbant le travail sur les énoncés au détriment du travail sur les objets, leurs propriétés et les relations mutuelles qu'ils entretiennent. (Durand-Guerrier, 2007, p. 23)

Barrier (2008), s'appuyant sur cette précédente recherche, met à son tour en évidence la limite du modèle de Lorenzen pour l'analyse de situation de validation explicite et justifie ainsi la nécessité de proposer un modèle qui tienne compte de la dimension sémantique des raisonnements produits par les élèves.

Cette nécessité de tenir compte, lors de l'analyse des raisonnements, de la dimension sémantique a contribué à conforter et justifier notre décision de prendre la TSD comme fondement de notre modèle. En effet cette dernière permet d'analyser les actions du sujet sur les différents milieux, permettant ainsi de rendre compte de la dimension sémantique et de la dimension syntaxique des raisonnements.

Un postulat de notre travail est que la TSD fournit un cadre privilégié pour cette étude, et notamment que l'analyse des fonctions du raisonnement dans les niveaux de milieux permet une catégorisation des raisonnements. Ce cadre doit cependant être nécessairement complété par des outils d'analyse locale, et par une analyse des fonctions des raisonnements (Bloch et Gibel, 2011) et des signes, formels et langagiers, qui le soutiennent. Pour cette dernière fonction, nous utilisons les outils d'analyse issus de la sémiotique peircienne que nous allons nous attacher à justifier et à caractériser dans le paragraphe suivant.

2.5 Dimension sémiotique de l'analyse des raisonnements

Les raisonnements apparaissant en situation de classe peuvent se traduire sous des formes très diverses : éléments langagiers, calculatoires, scripturaux, graphiques que nous nous devons d'interpréter en référence à différents registres de représentation (Duval, 2006). Par conséquent l'analyse sémiotique constitue l'une des dimensions de notre modèle, complétant naturellement celles précédemment exposées : d'une part la fonction des raisonnements, d'autre part, le niveau de milieu correspondant, autrement dit les conditions dans lesquelles le raisonnement a été élaboré. Les représentations sémiotiques ne sont mobilisées et développées que dans la mesure où elles peuvent être transformées en d'autres représentations sémiotiques comme le souligne Duval (2006) : « Ce sont ces transformations sémiotiques qui sont importantes et non les relations fondamentales explicitées dans les différentes théories sémiotiques » (p. 49).

La sémiotique de Peirce est particulièrement appropriée à notre projet. En effet, elle nous permettra d'étudier plus précisément l'évolution et les transformations des signes utilisés par les différents acteurs, en lien avec les différentes situations d'action, de formulation et de validation.

Everaert-Desmedt (2011) formule, de façon claire et concise, trois caractéristiques de la sémiotique de Pierce en montrant que cette dernière est à la fois générale, triadique et pragmatique.

Selon Peirce (1995), trois catégories sont nécessaires pour rendre compte de l'expérience humaine. Elles sont désignées comme « priméité », « secondéité » et « tiercéité ». La priméité est de l'ordre du possible : les signes peuvent être vus comme des « icônes ». La secondéité peut être assimilée à la catégorie de l'expérience, du fait de l'action-réaction, les signes en sont des « indices ». La tiercéité est le régime de la règle et de la loi, de la médiation et les signes apparaissent avec un statut de « symbole-argument ».

Dans notre usage de la sémiotique peircienne, nous utiliserons les trois désignations : icône, indice et symbole-argument. Par exemple dans notre étude, lorsque les élèves doivent déterminer une expression explicite du terme général de la suite, une icône ou interprétation iconique est de l'ordre d'une intuition formulée par un élève à partir du cadre géométrique: « l'expression algébrique de a_n peut être obtenue en effectuant la somme des mesures des côtés des n premiers carrés ». Cette déclaration peut être assimilée à une « icône », sa formulation traduit et manifeste une intuition du sujet confronté à la formulation explicite du terme général de la suite.

Un « indice » est de l'ordre d'une proposition; c'est par exemple l'écriture algébrique du terme général de la suite, objet de notre étude, formulée par un élève comme la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme 1 :

$$a_n = 1 + \frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2 + \cdots + (\frac{3}{4})^{n-1}$$

Un « symbole-argument » est de l'ordre d'une preuve mathématique permettant par exemple de valider ou d'invalider l'écriture algébrique explicite du terme général a_n, en fonction de n, qu'il s'agisse d'une preuve de nature sémantique ou syntaxique comme c'est le cas ici :

$$a_n = \frac{1 - (\frac{3}{4})^n}{1 - \frac{3}{4}} = 4\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$$

Sa validité repose sur l'usage adéquat de la formule générale correspondant à la somme des N premiers termes d'une suite géométrique et enseignée précédemment aux élèves :

$$\sum_{k=0}^{N} q^k = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

On note ici, au passage, la pertinence de cette ingénierie qui, en favorisant les changements de cadres, permet aux élèves de construire des raisonnements algébriques et d'en contrôler la validité dans le cadre géométrique. Cette forme de raisonnement permet ainsi d'articuler les dimensions sémantique et syntaxique.

Comme le souligne Everaert-Desmedt (1990), l'interprétation d'un signe par un interprétant est étroitement liée à l'expérience, formée par d'autres signes toujours antécédents. Par conséquent, l'analyse sémiotique nécessite de prendre en compte les signes en lien avec les connaissances et les savoirs antérieurs, c'est la raison pour laquelle nous allons définir, dans le paragraphe suivant, les notions de « répertoire didactique » et de « répertoire de représentation ».

2.6 Répertoire didactique et répertoire de représentation

L'ensemble des moyens, connaissances et savoirs, que le professeur met en œuvre, et ceux qu'il pense pouvoir attendre des élèves, par suite de son enseignement lors des phases de validation et d'institutionnalisation, constitue le « répertoire didactique » de la classe défini dans Gibel (2004).

Les situations choisies par l'enseignant, en vue de permettre l'apprentissage d'une connaissance, déterminent la capacité de l'élève à organiser et élaborer, en confrontation au(x) milieu(x) de la situation, ses propres procédures de résolution et, par conséquent, jouent un rôle essentiel dans l'élaboration du répertoire didactique de la classe. La fonction principale du répertoire didactique de la classe est de faciliter la communication dans la classe, en donnant à l'élève les moyens de produire ou de retrouver, et donc de mettre en œuvre, au moment voulu, une suite d'actions, une formulation ou une justification (Gibel, 2004). Le répertoire didactique de la classe est donc identifiable à la part du répertoire mathématique que l'enseignant a choisi d'expliciter, notamment pour la validation et lors de l'institutionnalisation.

Notre méthodologie vise à identifier et à interpréter les observables, assimilables à des signes, qu'il s'agisse d'icônes, d'indice ou de symbole-argument, afin de déterminer les connaissances du répertoire didactique de l'élève utilisées pour produire le raisonnement, valide ou erroné, comme une réponse à la situation.

Le répertoire de représentation de la classe et de chaque élève est une composante du répertoire didactique. Il est constitué de signes, schémas, symboles, figures; nous y incluons également les outils et leur(s) usage(s). Il convient également d'y adjoindre les éléments langagiers (énoncés oraux ou écrits), permettant de nommer les objets rencontrés, de formuler les propriétés et les résultats.

Le répertoire de représentation comporte deux composantes liées à la chronogenèse pour la première, et au milieu de la situation pour la seconde :

- la composante liée au répertoire antérieur, c'est-à-dire les différentes formules énoncées et les différents usages liés aux connaissances antérieures;
- une composante qui apparaît lorsque l'enseignant dévolue aux élèves une situation d'apprentissage : l'élève mobilise, par confrontation aux différents milieux, des connaissances de son répertoire didactique. Cette utilisation des connaissances lui permet de manifester et de construire de nouvelles représentations, liées à la situation, à partir des éléments de représentation dont il dispose.

3. Méthodologie de l'étude

3.1 Sujets

L'étude a été menée dans une classe de première scientifique (élèves âgés de 16 à 17 ans) d'un lycée. Cet établissement est situé dans une ville de province dans le sud-ouest de la France.

Les élèves ont accepté d'être observés et filmés durant la séquence qui s'est déroulée en avril 2016 sur deux séances consécutives de 50 minutes chacune.

L'enseignant décrit ses élèves comme étant d'un bon niveau en mathématiques et habitués à être confrontés à des situations comportant une dimension recherche nécessitant l'utilisation de TICE, qu'il s'agisse de calculatrices, de logiciels, de tableurs, etc. L'enseignant s'est porté volontaire pour participer à l'expérimentation. L'enseignant a des connaissances en didactique des mathématiques sans pour autant disposer d'une formation spécifique dans ce domaine; on peut par conséquent considérer que l'expérimentation se déroule dans une classe ordinaire.

3.2 Instrumentation

3.2.1 La séquence objet d'étude

La situation « La suite de carrés » a été proposée à des élèves d'une classe de première scientifique. On construit une « suite » de carrés juxtaposés de la manière suivante : le côté du premier carré est de longueur 1 (en référence à une unité donnée), puis chaque carré a pour mesure de côté $\frac{3}{4}$ de la mesure du côté du carré précédent (voir figure 2, page suivante).

Dans cette situation, les élèves doivent tout d'abord déterminer s'il est ou non possible de construire un « n-ième » carré, dont a_n, l'abscisse du point A_n — correspondant à la mesure OA_n, où O désigne l'origine du repère — est strictement supérieure à 4.

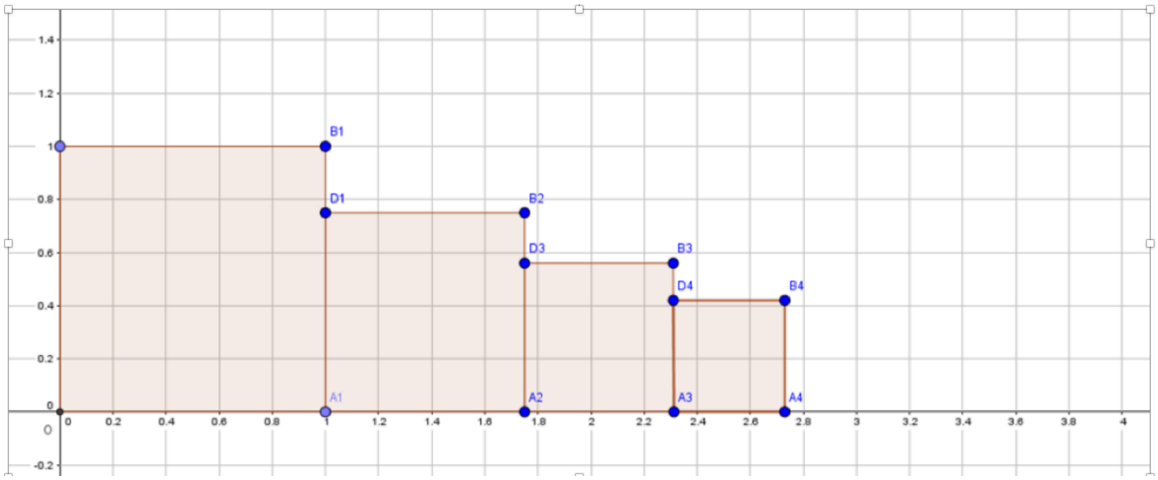


Figure 2 : Les quatre premiers carrés obtenus par le procédé de construction

L'objectif de la séquence est de permettre aux élèves de se confronter à une situation leur permettant une première approche de la notion de limite finie d'une suite réelle. Nous souhaitons préciser que quelques semaines auparavant, les élèves ont été confrontés à l'étude expérimentale d'une suite croissante non majorée, autrement dit une suite dont la limite est infinie. Cette suite numérique résultait de la modélisation d'un phénomène de propagation d'une bactérie, dont le nombre doublait chaque heure. Les élèves ont ainsi modélisé ce phénomène de propagation par la formulation d'une suite géométrique de raison 2 dont le premier terme correspondait au nombre initial de bactéries. Ils ont constaté expérimentalement, par le recours au calcul instrumenté et à la programmation, que pour tout entier M fixé, il existe un rang n – correspondant à un nombre d'heures à partir duquel toutes les valeurs approchées des termes de la suite sont strictement supérieures à M.

Cette situation d'apprentissage est une situation à dimension adidactique, visant à confronter les élèves à la notion de limite finie. Cette dernière est obtenue ici comme le résultat du processus de construction des carrés itéré à l'infini.

D'un point de vue mathématique, nous cherchons à déterminer dans un premier temps si la suite (a_n) est croissante et majorée, ensuite – par l'usage des TICE – si elle admet une limite finie.

En classe de première scientifique, la valeur de la limite de cette suite, associée à l'abscisse du point A_n, assimilable à une suite de sommes partielles d'une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$, ne peut s'obtenir qu'à l'issue de l'étude expérimentale de son comportement asymptotique.

L'enjeu de la situation est que les élèves puissent avoir l'idée « intuitive » du résultat de ce processus de construction de carrés itéré à l'infini. Cependant, ils ne pourront accéder seuls aux arguments mathématiques justifiant la valeur de cette limite. D'un point de vue numérique, le professeur devra permettre l'utilisation d'outils TICE, afin que les élèves élaborent des éléments de justification, acceptables à ce moment-là de la scolarité compte-tenu des programmes de la classe de première scientifique.

La situation prévoit l'introduction de la notion de limite finie, à partir de conjectures sur des grandeurs relatives à des objets géométriques : ainsi les élèves disposent d'une entrée dans le milieu matériel qui leur permet de s'appuyer sur des représentations initiales d'ordre figural. Cette « entrée » permet de faciliter la dévolution et l'appropriation du problème. Les éléments de preuve devront cependant être fournis, en partie, par le professeur dans un épisode didactique, au cours duquel l'enseignant définira la notion de seuil, car les élèves n'ont, à ce stade, pas d'outils de définition et de preuve de ce qu'est une limite finie dans le cadre de l'étude d'une suite. En ce sens, il s'agit d'une situation à dimension adidactique (Bloch, 1999; Mercier, 1995).

Cette ingénierie a été élaborée conjointement avec l'enseignant de la classe de première scientifique dans laquelle il a mis en œuvre la séquence.

L'ingénierie a été produite afin de satisfaire les conditions suivantes :

- elle permet aux élèves de se confronter à une situation permettant une première approche de la notion de limite finie d'une suite, en articulant trois cadres distincts et très complémentaires : algébrique, géométrique et numérique;
- elle favorise le développement de la pratique du raisonnement, au travers de ses différentes fonctions en situation d'action, de formulation et de validation.

3.2.2 Les données recueillies pendant la séquence observée

Lors de la mise en œuvre de la séquence, une caméra mobile nous a permis de recueillir des enregistrements vidéo Ainsi, nous avons pu filmer l'intégralité du déroulement de la séquence et prendre des photographies du tableau blanc. De plus nous avons pu effectuer des photocopies des travaux d'élèves produits durant et à l'issue de la séquence.

3.3 Déroulement et analyse a priori de la séquence

3.3.1 Principaux éléments d'analyse a priori en TSD

L'objectif de la séquence est ici relativement ambitieux. En effet, les divers moyens d'investigation doivent permettre de conjecturer que : quel que soit le nombre n de carrés construits, la mesure de la longueur OA_n (notée a_n) ne peut excéder une certaine valeur numérique (4). Il s'agira ensuite de mettre les élèves en situation de prouver, grâce notamment aux outils de géométrie analytique nouvellement acquis (vecteurs et équations de droites) que la suite est croissante et nécessairement majorée par la valeur (4).

La problématique initiale dévolue aux élèves est formulée ainsi : En répétant le processus de construction des carrés un nombre n de fois suffisant, peut-on obtenir un carré dont l'abscisse du sommet A_n dépasse 4?

L'enseignant questionnera ensuite les élèves dans l'optique d'un prolongement de l'étude comme indiqué dans l'annexe 1, rubrique « Problématique pour aller plus loin » sur la possibilité pour s appartenant à l'intervalle [1 ; 4] de construire un n-ième carré dont l'abscisse soit dans l'intervalle [s ; 4], ainsi l'ensemble des valeurs de la suite – à partir du rang n – seront comprises dans cet intervalle.

- Élément de différenciation : l'enseignant envisage d'aider, si nécessaire, certains élèves en difficulté pour expliciter a_n directement en fonction de n; il leur proposera la démarche suivante en vue d'exprimer (a_n) sous la forme d'une suite récurrente :

On note a_n l'abscisse du point A_n.

Ainsi, on a la suite numérique $a_1 = 1$, $a_2 = 1{,}75$, a_3 = ………, a_4 = ………, etc.

- Procédures de résolution attendues

1) Calculs des abscisses $a_2, \ldots, a_5$ (tableau 1)

Tableau 1 : Les valeurs des premiers termes de la suite (a_n)

Étape n =	1	2	3	4	5
Côté $n^{\text{ième}}$ carré	1	0,75			
Abscisse a_n	1	1,75			

2) Conjecture à l'aide de logiciels

On établit en s'appuyant sur la logique de construction des carrés que

$$a_{n+1} = a_n + \frac{3}{4}(a_n - a_{n-1})$$

- Conjecture à l'aide d'un tableur

En entrant la formule notée ci-dessus dans un tableur, on peut calculer les 100 premiers termes de la suite (a_n) avec une précision de 14 décimales et on observe que les termes a_n se rapprochent de la valeur 4. On constate que, à partir de $n = 82$, le tableur affiche la valeur 4 compte tenu des approximations de calcul réalisées par le tableur.

- Conjecture à l'aide d'un algorithme

Les élèves peuvent rédiger un programme en utilisant Algobox ou élaborer un code en utilisant le langage de programmation Python ou en ayant recours à la calculatrice. En procédant ainsi, ils observent de même une « stagnation » à la valeur 4, qui ne peut s'expliquer que par les limites de la puissance de calcul des outils numériques.

Les outils numériques permettent donc de conjecturer l'existence d'une valeur « limite » des valeurs des abscisses des points A_n, notées a_n, qui semble être 4.

- Démonstration de la majoration de la suite

Pour tous sommets B_n et B_{n+1} de deux carrés consécutifs, l'abscisse de B_{n+1} est celle de B_n augmentée de $\frac{3}{4}$ de la longueur A_nB_n correspondant au côté du $n^{\text{ième}}$ carré, et l'ordonnée de B_{n+1} est celle de B_n diminuée $\frac{1}{4}$ de la même longueur A_nB_n.

Pour tout entier n, le coefficient directeur de la droite (B_nB_{n+1}) est donc :

$$\frac{-\frac{1}{4}A_nB_n}{\frac{3}{4}A_nB_n} = -\frac{1}{3}$$

Toutes les droites passant par des couples de points consécutifs ont même coefficient directeur $-\frac{1}{3}$, elles sont donc parallèles entre elles. Une autre façon de le voir est que tout vecteur $\overrightarrow{B_nB_{n+1}}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}\left(\frac{3}{4}\ ;\ -\frac{1}{4}\right)$.

Comme ces droites ont toujours un point en commun (deux à deux), elles sont confondues. Les points B_n sont donc alignés. La droite qui les joint a pour équation

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

Il est alors possible de démontrer que cette droite coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 4.

Or, tout point B_n a une ordonnée positive (fraction de la longueur de départ). Comme ses coordonnées vérifient l'équation de la droite, alors son abscisse a_n (qui, bien sûr, est aussi celle de A_n) vérifie

$$-\frac{1}{3}a_n + \frac{4}{3} \geq 0$$

Ce qui conduit à l'inégalité $a_n \leq 4$.

Par conséquent, quel que soit l'entier n, a_n ne peut donc pas dépasser la valeur 4.

Le caractère borné de la suite est « accessible » aux élèves de première scientifique par la mise en œuvre d'un raisonnement adéquat, de même que le fait que la suite soit croissante (par définition même de la suite). Cependant, à ce niveau de la scolarité, ils ne disposent pas du théorème leur permettant d'en déduire que la suite est convergente. Ils seront donc conduits à étudier expérimentalement la convergence de la suite en utilisant les TICE (calculatrices, tableur, programmation, etc.).

3.3.2 Déroulement envisagé

Le lecteur trouvera en annexe 3 les différentes phases du déroulement de chacune des séances.

Séance 1. Après l'exposé de la situation initiale, l'appropriation de la situation se fera par le tracé des cinq premiers carrés sur le papier quadrillé fourni par l'enseignant. Ensuite, en binôme, les élèves devront rédiger une première conjecture à propos des points B_1, B_2 et B_3. Les élèves devront valider ou invalider leur conjecture. L'enseignant effectuera une mise en commun dans le but d'établir l'alignement des points B_1, B_2 et B_3 en répertoriant les différentes méthodes utilisées (de nature scalaire ou de nature vectorielle). La séance se poursuivra par la recherche d'une conjecture générale, à propos des points $B_1, B_2, \ldots, B_N$ (où N désigne un entier quelconque fixé) que les élèves devront ensuite prouver. La mise en commun permettra d'établir une preuve mathématique de l'alignement des points.

Lors de la dernière phase, les élèves s'efforceront de produire des éléments de réponse à la problématique relative à l'existence d'une valeur « limite » de la suite (a_n). Les élèves pourront choisir de s'appuyer sur l'alignement des sommets B_n afin de montrer que la suite (a_n) est majorée. Ils pourront exprimer a_n soit directement en fonction de n (en étudiant la suite de sommes partielles associée à une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$, soit en fonction de a_{n-1} et a_{n-2} (en étudiant la suite définie par récurrence); ils pourront étudier le comportement asymptotique de l'une ou l'autre de ces suites en mettant en œuvre les outils numériques de leur choix.

Séance 2. En début de séance 2, les élèves poursuivront en binôme leur recherche en mettant en œuvre les outils numériques : calculatrice ou tableur ou programmation d'algorithme afin d'étudier le comportement de la suite : variation, majoration de la suite et notion de seuil.

La valeur limite apparaîtra et sera aussi l'occasion de souligner les « approximations » liées à l'usage des outils numériques. En effet, la convergence étant rapide, Excel comme Algobox ou Python, ou bien les calculatrices arrondissent rapidement le résultat à 4, d'où l'incohérence : on ajoute un nouveau carré, si petit soit-il, et la longueur reste identique.

La phase suivante vise à mettre en débat les éléments de réponse à la problématique. Il faudra alors revenir au tracé initial des carrés, et à l'alignement des sommets B_n, afin d'en déduire, à partir des valeurs numériques obtenues par les outils numériques l'existence et la valeur de la limite. L'enseignant introduira, à la fin de la séance 2, la notion de seuil (cf. annexe 3) durant la phase 12 et demandera aux élèves de déterminer expérimentalement pour différents seuils s donnés le rang de la suite à partir duquel les valeurs expérimentales appartiennent à l'intervalle [s ; 4].

3.4 Méthode d'analyse des données

3.4.1 Le modèle d'analyse des raisonnements

Nous avons justifié dans la partie 2 le choix de notre cadre théorique – la théorie des situations didactiques – par le fait qu'elle permet d'analyser, d'une part, les conditions dans lesquelles le raisonnement a été produit par le sujet (en identifiant le niveau de milieu correspondant à chacune des situations emboîtées), d'autre part, en prenant en compte la fonction du raisonnement. Nous avons également complété cette analyse en TSD par une analyse sémiotique, car celle-ci nous offre la possibilité d'étudier des raisonnements susceptibles d'apparaitre sous des formes très variées (textes, énoncés écrits ou oraux, dessins, gestes, etc.).

Une fréquente justification de la construction de situations d'enseignement issues de situations fondamentales d'un savoir dans la TSD a été donnée par le bénéfice de ce type de situations sur les possibilités d'amener les élèves à entrer dans une démarche de preuve (Legrand, 1997). L'élaboration et l'analyse *a priori* de ces situations se basent sur l'étude des niveaux de milieux organisés; l'analyse *a posteriori* permet au chercheur de déterminer s'il y a ou non une concordance du déroulement effectif avec la situation anticipée.

Le modèle de structuration du milieu utilisé lors de l'élaboration du modèle est celui de Bloch (2006), issu précédemment du modèle de Margolinas (1994) modifié afin de tenir compte du rôle du professeur dans les niveaux adidactiques de milieux. Dans ce travail nous nous intéressons à l'analyse des fonctionnalités des différents niveaux de milieux et aux résultats de la mise en œuvre dans la contingence (Bloch, 2006).

Le tableau 2 résume les niveaux de milieux – de M1 à M-3 – correspondants à la situation expérimentale. Les niveaux associés aux indices strictement négatifs sont ceux qui nous intéressent tout particulièrement dans la configuration que nous étudions, c'est-à-dire l'apparition d'un processus de preuve dans la mise en œuvre d'une situation à dimension adidactique (Bloch, 1999). En effet c'est au niveau de l'articulation entre le milieu objectif (qu'il vaudrait peut-être mieux appeler « milieu heuristique ») et le milieu de référence que nous nous attendons à voir apparaitre et se développer les raisonnements attendus.

Tableau 2 : La structuration du milieu (Bloch, 2006)

M1 Milieu didactique	E1 : E réflexif	P1 : P projeteur	S1 : situation de projet	
M0 Milieu d'apprentissage : institutionnalisation	E0 : élève	P0 : professeur enseignant	S0 : situation didactique	Didactique
M-1 Milieu de référence : situation de formulation et situation de validation	E-1 : E apprenant	P-1 : P régulateur	S-1 : situation d'apprentissage	
M-2 Milieu objectif : situation d'action Milieu heuristique	E-2 : E agissant	P-2 : P dévolueur et observateur	S-2 : situation de référence	Adidactique
M-3 Milieu matériel	E-3 : E objectif		S-3 : situation objective	

Dans la structure précédente, nous savons que des étapes de la situation peuvent être à l'origine de raisonnements mathématiques (Bloch et Gibel, 2011) : la confrontation à un milieu heuristique (milieu objectif) pour leur élaboration, le passage à un milieu de référence pour établir la généricité des méthodes ou le caractère de nécessité des propriétés trouvées. Les interventions de l'enseignant (P-régulateur), dans la situation d'apprentissage, sont destinées le plus souvent à maintenir le caractère adidactique de la situation en relançant l'activité par un éventuel retour à une situation de jeu (situation d'action) ou par la « formulation » d'une explication nécessaire à la compréhension d'une proposition formulée par un élève. Bloch (1999) dans son article sur l'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève précise le rôle de l'enseignant :

> Dans la mesure où le milieu de la situation n'assure pas de façon suffisamment adidactique la production de connaissances, nous nous tournons vers l'activité du professeur et les connaissances qu'il met en œuvre, pour comprendre le fonctionnement de la situation pour l'élève. (p. 4)

Dans Bloch et Gibel (2011) et Gibel (2015, 2018), nous avons décidé de privilégier trois axes qui orientent et structurent notre analyse des raisonnements dans chacune des situations décrites précédemment. Ces axes réfèrent à des niveaux de modélisation différents des raisonnements en jeu dans le déroulement de la situation : modélisation globale relative aux niveaux de milieux, ou modélisation locale au niveau des arguments produits dans le travail et les échanges en classe, ainsi qu'au niveau des signes émergents de ce travail.

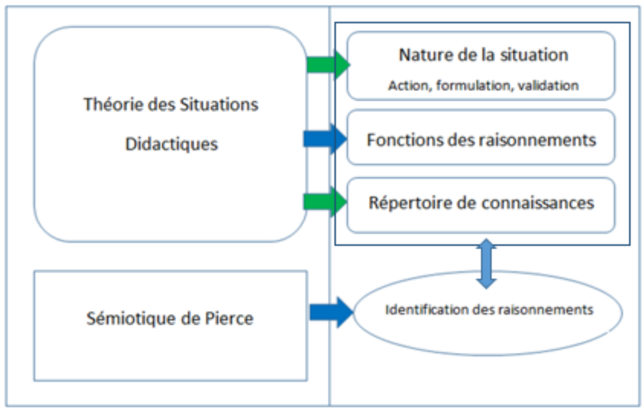


Figure 3 : Schéma du modèle d'analyse des raisonnements (Gibel, 2018, p. 49)

Dans une situation comportant une dimension adidactique, les élèves donnent à voir des raisonnements qui dépendent fortement du niveau de milieu où ils se situent, ce que nous illustrerons dans la dernière partie, lors de l'analyse a posteriori de différents épisodes de la séquence.

- Le premier axe de l'analyse est lié au milieu de la situation.
- Le deuxième axe est l'analyse des fonctions du raisonnement, pointée ci-dessus comme nécessaire. Nous nous attacherons à montrer comment les fonctions du raisonnement sont liées à des niveaux de milieux et comment ces fonctions « manifestent » aussi ces niveaux de milieux, de sorte qu'ils peuvent servir au repérage de la position des élèves dans chacun de ces niveaux.
- Le troisième axe est celui des signes et des représentations observables. Ces observables se donnent à voir dans des formes différentes qui affectent le déroulement de la situation. La nature des signes et le statut logique du raisonnement sont à prendre en compte pour l'efficacité, l'idonéité aux attendus et le rôle dans la situation. L'analyse des signes est réalisée au regard du répertoire de représentation mobilisé par l'auteur du raisonnement. Il s'agit de prendre pour objet d'étude l'usage du répertoire didactique et de son niveau d'actualisation.

Ces trois axes apparaissent nécessaires et complémentaires pour effectuer une analyse très précise des différentes formes de raisonnements qui sont susceptibles d'être produits en regard de leur(s) fonction(s) et des conditions de leur production par les élèves (ou par l'enseignant au niveau M0). Ils constituent les dimensions de notre modèle d'analyse des raisonnements (figure 3).

3.4.2 Analyse ascendante des différents niveaux de milieu

Nous allons à présent expliciter dans l'ingénierie étudiée les différents niveaux de milieu correspondant au tableau 2.

- La situation objective : l'acteur objectif et le milieu matériel

Le milieu matériel est constitué des cinq premiers carrés qui ont été construits par les élèves en début de séance. L'enseignant a initialement construit sur le papier millimétré (distribué aux élèves) le premier carré et leur a communiqué le processus de construction.

- La situation de référence : sujet agissant et milieu objectif

Le milieu objectif est constitué des *n* premiers carrés (*n* quelconque) résultant du processus de construction. Ces figures fonctionnent ici véritablement comme un indice de la figure « finale ».

Les actions du sujet agissant ont pour objet de :

- Conjecturer et prouver l'alignement des sommets (B_i, $1 \leq i \leq N$) pour tout N entier.

D'un point de vue géométrique, les élèves doivent conjecturer et ensuite prouver que tous les sommets B_n, $n \in$ IN – obtenus pas le processus de construction des carrés – appartiennent à une même droite (B_1B_2). Le coefficient de cette droite étant strictement négatif, elle coupe l'axe des abscisses en un point I. Les élèves peuvent ainsi démontrer que tous les points B_n ($n \in$ IN) appartiennent à l'intervalle [B_1 ; I]. En conséquence, quel que soit $n \in$ IN les abscisses des points B_n – correspondant aux termes a_n de la suite étudiée – appartiennent à l'intervalle [1 ; l] où l désigne l'abscisse du point I.

- Calculer l'abscisse du point A_n, notée a_n, pour n quelconque.

D'un point de vue géométrique, quel que soit n, les élèves peuvent déterminer a_n, correspondant à la mesure de [OA_n], en effectuant la somme des mesures des côtés des n premiers carrés.

- La situation d'apprentissage : élève apprenant et milieu de référence

Le milieu de référence est constitué des preuves inhérentes à la majoration de (a_n) et des conjectures sur le comportement asymptotique de la suite (a_n). Les élèves vont produire des calculs et des raisonnements assimilables à des éléments de preuve. Les élèves vont ensuite être amenés à débattre de la validité des raisonnements produits pour répondre à la problématique. Il s'agit ici d'une situation de validation.

3.4.3 Mise en œuvre du modèle d'analyse des raisonnements

Les raisonnements susceptibles d'apparaitre au cours de la séquence « La suite des carrés » sont explicités dans le tableau 3. Nous indiquons ainsi pour chaque niveau de milieu : les fonctions des raisonnements attendus, les niveaux d'utilisation des symboles, les niveaux d'actualisation du répertoire.

Tableau 3. Tableau des raisonnements susceptibles d'être produits selon les niveaux de milieux

	Milieu M-2	**Milieu M-1**	**Milieu M0**
Fonctions des raisonnements	R1.1 SEM - Décision de calcul - Conjectures - Intuition sur un dessin ou calcul	R1.2 SYNT/SEM - Calculs génériques Conjectures - Décision sur un objet mathématique - Décision sur un outil numérique	R1.3 SYNT/SEM - Preuves sémantique et syntaxique - Généralisation
Niveau d'utilisation des symboles	R2.1 SEM - Icônes ou indices dépendant du contexte	R2.2 SYNT/SEM - Arguments « locaux » ou plus génériques : indices, calculs	R2.3 SYNT - Arguments formels spécifiques
Niveau d'actualisation du répertoire	R3.1 SYNT/SEM - Utilisation ponctuelle de connaissances anciennes - Enrichissement au niveau heuristique	R3.2 SYNT/SEM - Enrichissement au niveau arguments des énoncés	R3.3 SYNT - Formalisation des preuves - Ostensifs organisés - Intégration des éléments théoriques notion de seuil
Type de raisonnement	R.4.1 Abductif, déductif, inductif	R.4.2 Déductif, inductif	R.4.3 Déductif

4. Principaux résultats : analyse des raisonnements produits en situation de formulation et de validation

La finalité de cette partie est de montrer que le modèle permet d'effectuer une analyse des raisonnements produits au cours des différentes phases de la séquence.

4.1 Résultats obtenus au cours de la première séance

Lors de la première séance, les élèves après avoir effectué la construction des cinq premiers carrés sur la fiche distribuée (cf. annexe 1) sont conduits à formuler une conjecture à propos des points B_1, B_2 et B_3 obtenus par construction des trois premiers carrés. Les énoncés produits par les élèves sont :

(c1) Les points B_1, B_2 et B_3 sont alignés.

(c2) $\overrightarrow{B_2B_3} = \frac{3}{4}\ \overrightarrow{B_1B_2}$

L'enseignant a rédigé les énoncés au tableau et a interrogé les élèves sur le lien logique existant entre ces deux énoncés en vue de leur faire prendre conscience que (c2) implique (c1). Certains élèves ont démontré la validité de (c1) en produisant des raisonnements visant à établir que les droites (B_1B_2) et (B_2B_3) ont même coefficient directeur et ont un point commun donc elles sont confondues, d'autres ont établi (c1) en montrant que B_3 appartient à la droite (B_1B_2). Certains élèves ont choisi de démontrer que la conjecture (c2) était vérifiée en établissant la relation de proportionnalité liant les coordonnées des vecteurs. À la suite de la mise en commun des preuves permettant de démontrer la validité des conjectures (c1) et (c2), les élèves ont produit des conjectures relatives à l'alignement des points B_n ($n \in$ IN) et ont proposé des raisonnements dont la validité a été mise en débat. L'enseignant, en s'appuyant sur les raisonnements des élèves, a établi une démonstration de l'alignement des points.

Les élèves ont ensuite cherché à élaborer des éléments de réponse à la problématique de recherche formulée en annexe 1 : « en répétant le processus un nombre n de fois suffisant, on peut obtenir un carré dont l'abscisse du sommet A_n est strictement supérieure à 4 ? ».

4.2 Analyse des raisonnements produits au cours de la deuxième séance

Nous nous attacherons à présent à étudier les raisonnements produits en situation de formulation et en situation de validation au début de la séance 2, en référence au déroulement de la séquence (annexe 3).

4.2.1 Épisode 1 : Détermination du point d'intersection de la droite (d) passant par les sommets (B_n) et l'axe des abscisses

Analyse d'un épisode extrait de la séance. Au cours de la séance 2, l'élève 1 au tableau (Hugues) note le calcul qu'il a effectué afin de déterminer quel est le point d'intersection de la droite (d) passant par les sommets B_n (dont l'alignement a été démontré à la séance 1).

Il a effectué un calcul basé sur la connaissance du coefficient directeur de la droite (d) calculé précédemment, il a noté initialement $X(x\,;0)$ le point d'intersection de la droite (d) avec l'axe des abscisses. Il effectue une dénotation des calculs rédigés au tableau (présenté en annexe 2) en vue de déterminer l'abscisse du point X.

Nous allons présenter le script de ces épisodes.

> Professeur : Bien ! Alors c'est très bien ce que tu fais. Je pense que ça nécessite quelques explications sur une partie de la classe au moins sur l'idée, en fait que tu utilises. L'idée est vraiment intéressante, très originale et je pense que ça nécessite quelques explications.
>
> Élève 1 (Hugues) : En fait, on a une partie des coordonnées vu que X est sur l'axe de x, son ordonnée c'est forcément 0; et on recherche son autre coordonnée, enfin son abscisse. On a déjà les coordonnées de B_1 et donc en gros, ici [en montrant sur le graphique] on connaît tout sauf x, donc ça donne juste une équation à résoudre.

Élément d'analyse. Du point de vue du niveau de milieu, nous nous situons ici au niveau (M-2), en effet l'élève 1 fournit une explication, assimilable à un raisonnement, quant à la procédure de calculs utilisée, basée sur la mise en œuvre de connaissances antérieures (R3.1, voir tableau 3).

Il indique les raisons qui l'ont guidé dans la mise en œuvre de sa manière de calculer de deux façons différentes le coefficient directeur de la droite. Sa procédure de calcul est originale, elle est associée à une fonction du raisonnement dénommée « décision de calcul » (R1.1).

Sa présentation, au tableau, lui offre la possibilité de donner un « éclairage » de la conduite de son calcul, en délivrant les explications adéquates. L'élève a produit un calcul algébrique, la représentation géométrique lui permet de contrôler la validité de son calcul et ainsi de mettre en relation les dimensions sémantique et syntaxique.

> Professeur : Oui. Est-ce que c'est clair pour tout le monde, ça? Ce qui est assez malin là, c'est qu'ici on détourne la formule du calcul du coefficient directeur; d'habitude on l'utilise nous pour avoir le coefficient directeur. Sauf qu'ici le coefficient directeur on le connaît et on utilise cette formule entre guillemets à l'envers pour obtenir une des coordonnées que l'on cherche; sur les 4 on en connaît déjà 3, donc il y en a qu'une seule qu'on ne connaît pas et du coup on peut utiliser

> cette formule entre guillemets à l'envers pour obtenir la coordonnée cherchée. Au final tu trouves du coup que cette droite (d) coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées (4 ; 0). Quelle est ta conclusion?
>
> Élève 1 : (en regardant sa feuille) Bah, le … la … du coup l'abscisse des points B_n et A_n ça ne dépassera jamais 4; ça sera au plus grand 4.

Élément d'analyse. Nous nous situons ici toujours au niveau (M-2) : l'élève a produit un raisonnement « original » en mobilisant ses connaissances anciennes relatives aux équations de droites et il est parvenu à un enrichissement heuristique (R3.1). L'élève rend compte du résultat de son calcul et de la lecture-interprétation du schéma. Cependant, la conclusion qu'il tire de son calcul et de son schéma « ça ne dépassera jamais 4; ça sera au plus grand 4 » ne repose pas sur une justification « consistante », autrement dit, suffisamment argumentée. En effet il n'avance pas les raisons pour lesquelles 4 est un majorant de la suite (a_n). Du point de vue de l'analyse sémiotique, sa proposition s'apparente à un indice (R2.1), basé sur une lecture de certains éléments du graphique. En effet, la droite coupe l'axe des abscisses en X(0 ; x), cependant elle se « prolonge » dans le demi-plan inférieur (délimité par l'axe des abscisses), les ordonnées de ses points sont alors strictement négatives.

4.2.2 Épisode 2 : Débat relatif à la majoration de la suite (a_n)

> Professeur : Oui… au mieux 4, oui? [le professeur s'adressant à un autre élève qui lève la main])
>
> Élève 2 (Gatien) : Il manque que …du fait que … en fait ça peut dépasser 4, mais si ça dépassait 4 on aurait une abscisse négative étant donné que l'abscisse on dit que c'était 0,75 fois celui d'avant, c'est une multiplication de nombres positifs, donc l'abscisse ne pourra pas être négatif, donc ça s'arrêtera à 4.

Analyse des raisonnements produits. Le niveau de milieu correspondant est le niveau (M-1). Les échanges s'inscrivent dans le cadre de la situation de validation.

On note du point de vue langagier une confusion entre abscisse et ordonnée.

L'argument avancé par Gatien est valide et consistant (R2.2), c'est un argument « générique » (R2.2) qui permet d'effectuer le lien entre les dimensions « syntaxique » et « sémantique ». En effet, Gatien articule le résultat du calcul précédent et son interprétation au regard du schéma de construction de la suite des carrés.

Le raisonnement résulte de l'articulation du cadre algébrique et du cadre graphique inhérents à l'étude de la suite. On perçoit ainsi la richesse de cette situation qui conduit tour à tour à une situation de formulation et à une situation de validation.

Le raisonnement produit permet d'établir que la suite (a_n) est majorée par 4, puisque les ordonnées des sommets B_n sont nécessairement positives. On identifie ici, du point de vue de l'analyse sémiotique, la production d'un symbole-argument (R2.2) que l'on peut identifier à une preuve.

Le raisonnement produit par cet élève met en lumière l'articulation des dimensions sémantique et syntaxique.

On note ici qu'il s'agit d'un raisonnement par l'absurde.

> Professeur : Oui, c'est vrai qu'il faut... [S'adressant à l'élève E1 toujours au tableau] Tu pourrais nous faire un petit schéma avec les droites, qu'on ait une image sous les yeux. Alors dessine-nous la droite d, c'est pas évident sur le dessin.

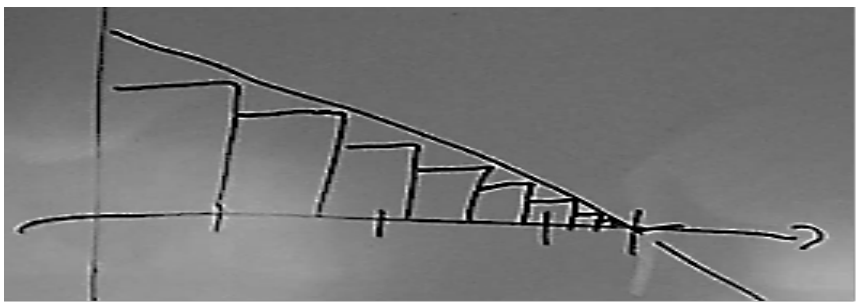


Figure 4 : Dessin réalisé au tableau par l'élève 1

> Professeur : Donc, on sent bien que finalement ce nombre « 4 » va jouer un rôle dans le graphe [éternuement]. On sent bien que le nombre « 4 » joue une sorte de rôle de barrière, qu'on n'a pas le droit de dépasser. En faisant ça, finalement, tu viens de répondre à la problématique : est-ce qu'on peut dépasser 4, et la réponse est non. Alors et si on allait un peu plus loin : quelle est la question qui suit ? On sait qu'on ne peut pas dépasser 4; quelle autre question je me suis posée?

Élément d'analyse. La construction du graphique, produite à la demande de l'enseignant, est destinée à faciliter la compréhension de l'argument établi par l'élève 2 (Gatien), elle a une fonction explicative. En effet le schéma réalisé par l'élève 1 (figure 4) illustre le comportement de la suite de points constitués par les sommets (B_n).

L'enseignant, en reconnaissant la pertinence de la réponse, institutionnalise le fait que « 4 » soit un majorant de la suite (a_n).

On est ici au niveau (M0) correspondant à la situation didactique.

4.2.3 Épisode 3 : Étude du comportement de la suite croissante et majorée

> Élève 3 : Est-ce qu'on va atteindre 4?

> Professeur : Voilà, est-ce qu'on va atteindre 4? Alors est-ce que vous avez un avis? [S'adressant à l'élève E1 toujours au tableau]) Merci beaucoup Hugues, très bien.

> Alors je laisse à chacun le temps de se faire sa propre opinion. D'après vous, est-ce que la limite 4, cette barrière qu'on ne peut pas dépasser, est-ce qu'on peut l'atteindre? …Est-ce qu'on va s'arrêter avant ou finalement on va aller jusqu'à 4. Alors maintenant tout le monde a eu le temps de réfléchir à ça … Oui?
>
> Élève 4 : On va l'atteindre, mais pas à une étape donnée, à la fin de …, quand on aura fini de faire tous les carrés. […]
>
> Professeur : Donc... À une étape donnée, on ne sera pas à 4, mais...
>
> Élève 2 : À la fin on sera à 4.

Analyse des raisonnements produits. L'idée émise par l'élève 4 est particulièrement intéressante, il conjecture sur le fait qu'il n'est pas envisageable d'identifier un rang pour lequel la valeur de la suite sera égale à 4, mais que le processus itératif débouchera sur la valeur 4, et donc que potentiellement il sera possible d'approcher la valeur 4 d'aussi près qu'on le souhaite. On se situe ici au niveau (M-1). Le raisonnement avancé est générique, d'un point de vue sémiotique il s'apparente à un « indice » (R2.2).

> Professeur : À la fin on sera à 4? Est-ce que tu as des ... une preuve?
>
> Élève 2 : Ben … y aura toujours … On pourra toujours continuer à faire des doubles de carrés donc à la fin on va finir pour y arriver jusqu'à à arriver jusqu'à 4.
>
> Professeur : Je suis d'accord, mais est-ce que tu as quelque chose de quantifiable?
>
> Élève 2 : Ben non justement … C'est l'infini … Quand on aura fini l'infini.
>
> Professeur : Est-ce que, à une étape donnée, on ne peut pas quantifier quelle est l'abscisse du point A_n?

Analyse des raisonnements. L'enseignant fait dévolution aux élèves d'une nouvelle tâche, déterminer si la valeur « 4 » va être ou non « atteinte ». L'élève 2 au tableau a effectué un raisonnement inductif, qui s'apparente à une conjecture.

Afin de déterminer la validité de cette dernière, l'enseignant invite les élèves à exprimer (a_n) pour une valeur n quelconque.

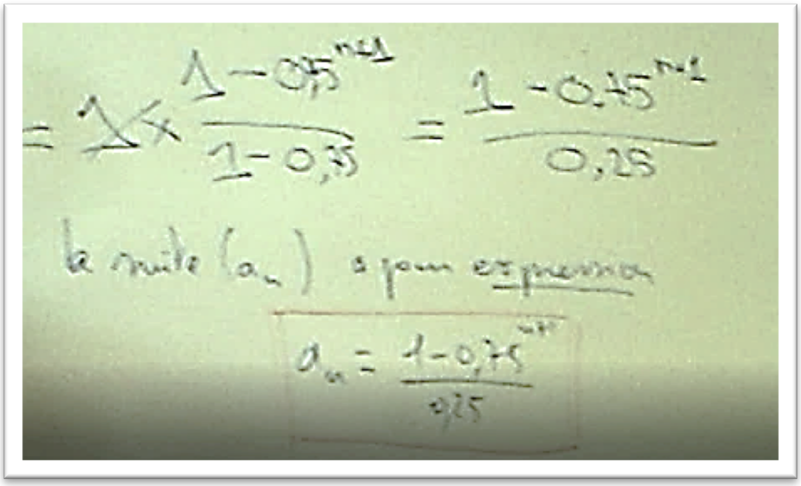


Figure 5 : Expression algébrique du terme général de (a_n)

Une dizaine de minutes plus tard, un élève est envoyé au tableau afin de présenter le calcul effectué lui ayant permis de déterminer la formulation explicite du terme général de la suite. L'expression obtenue est présentée à la figure 5. Cette expression fait désormais partie du répertoire didactique de la classe.

L'enseignant a fait ensuite dévolution à ses élèves de l'étude du comportement asymptotique de (a_n) par l'usage de ressources numériques. Certains élèves ont utilisé la formulation explicite de a_n précédemment obtenue, et ont recours à l'usage de la calculatrice pour calculer les valeurs de a_n, d'autres encore font usage du tableur en utilisant l'expression de a_n, en fonction de a_{n-1} et a_{n-2}.

4.2.4 Épisode 4 : les approximations des termes de la suite (a_n) obtenues par la mise en œuvre des outils numériques

Professeur : Et alors, à partir de 80, il y a vraiment écrit 4?

Élève : oui

Professeur : Alors, d'où vient ce … Est-ce vraiment un 4 qu'on a ...Noémie?

Noémie : …?

Professeur : Toi tu as 4 à partir de 40. Ça veut dire que tu n'as pas le même modèle... La question est, est-ce que ce 4 que vous voyez, c'est un 4 théorique, on a atteint la limite, ou pas? Déjà, le fait que Noémie l'atteigne à 40 et le fait que Maxime l'atteigne à 80, ça nous donne une information. Mathilde?

Mathilde : Ça nous donne un arrondi ...[inaudible] décimales?

Professeur : Ouais, c'est un arrondi que fait la calculatrice. On sait déjà au moins que la machine compte. Alors question : l'ordinateur qui est un peu plus puissant en calcul que la machine, est-ce que elle, il lui arrive la même chose?

> Ben déjà le 40, on voit qu'on est pas loin, on est à 3,999959. Et là, la TI elle a fait son arrondi, elle a déjà basculé à 4. La Casio, c'est à 80, alors [il regarde sur son ordi] c'est cette ligne-là, on voit qu'on est en effet à 3,9999999920 (à confirmer).
>
> Élève : [en aparté] La Casio est plus puissante.
>
> Professeur : Ça veut dire qu'elle est plus puissante. L'ordinateur lui, pour moi, il tient plus. Il finit par … lui aussi; il est à 120 où il affiche 4. Bon, mais ça, on sait que c'est lié à la machine, c'est pas lié à la théorie; c'est lié à la machine. D'abord la machine a une mémoire finie avec un certain nombre de décimales et après, elle arrondit. Bon, en tout cas, ce nombre 4, on l'atteint ou on ne l'atteint pas?

Analyse du propos de l'enseignant. L'enseignant avance une explication quant aux résultats obtenus en s'appuyant sur la proposition d'un élève qui indique que les résultats obtenus sont des approximations. Il indique que la variation de l'indice à partir duquel chacun des moyens de calculs affiche la valeur 4 suffit à mettre en défaut l'exactitude de la valeur affichée (R2.2) par les instruments utilisés.

> Gatien : On ne sait pas trop … c'est ce que vous nous aviez dit sur les limites.
>
> Professeur : Eh oui. La seule chose que, nous, on peut dire, c'est que on peut donner...
>
> Gatien : [doucement] On ne l'atteindra pas.
>
> Professeur : le comportement de cette suite… Quel est ce comportement? On dit que [il écrit au tableau] la suite (a_n) converge vers 4. On se rapproche de plus en plus du nombre 4 et les machines ajoutent derrière, elles sont tellement près qu'à un moment, elles finissent par arrondir à 4. Ce qui nous donne (il écrit au tableau sans le dire : $\lim a_n = 4$). Donc ce qui est aussi intéressant à voir, c'est qu'on répète un processus à l'infini et en fait, on sait qu'on s'arrête; on ne peut pas dépasser 4, on s'arrête à 4.

Analyse du raisonnement. L'enseignant distingue ici l'itération infinie du processus lié à la construction des carrés successifs, et les valeurs de la suite (a_n) qui sont majorées par 4 et « stagnent » — du point de vue de leur représentation « instrumentée » – compte-tenu des arrondis utilisés pour produire le calcul. Toutes les valeurs de la suite sont incluses dans un intervalle dont la borne supérieure est la limite de la suite (a_n).

L'enseignant va ensuite terminer la séquence en définissant la notion de seuil et proposer à ses élèves de déterminer expérimentalement – pour plusieurs valeurs numériques de seuils $s_i (1 \leq i \leq 4)$ – les rangs à partir desquels les valeurs de la suite sont toutes contenues dans l'intervalle $[s_i ; 4]$.

4.3 Résultats et discussion

L'analyse a priori réalisée par le chercheur a permis de définir chacun des niveaux de milieu et de préciser pour chacun d'eux, les cadres dans lesquels les élèves travaillent, les questions auxquelles ils tentent d'apporter des réponses et les formes et les fonctions des raisonnements qu'ils sont susceptibles de produire.

L'analyse a priori vise également à établir que pour répondre aux questions, les élèves vont pouvoir décider librement des connaissances et des savoirs à mobiliser afin d'élaborer des raisonnements (valides ou erronés) en réponse à la situation; c'est en ce sens que les situations proposées sont à dimension adidactique. Lorsque les rétroactions du milieu sont insuffisantes, l'enseignant organise une présentation des propositions et met en débat la pertinence et la validité des raisonnements. L'ingénierie a été élaborée de sorte qu'elle favorise chez les élèves, l'élaboration, la formulation et la mise en débat de raisonnements qui permettent d'articuler les dimensions sémantique et syntaxique.

L'analyse des raisonnements effectuée en mettant en œuvre le modèle d'analyse des raisonnements (Bloch et Gibel, 2011; Gibel, 2018) a permis de mettre en évidence les conditions de production des raisonnements en référence au niveau de milieu correspondant et aussi de préciser la fonction des raisonnements. Outre cela, le modèle vise à identifier par une analyse des signes : d'une part, les connaissances mobilisées en référence au registre correspondant, d'autre part, l'évolution du répertoire de représentation en justifiant les éléments qui ont contribué à son enrichissement. Cette analyse sémiotique est difficile à réaliser parce qu'elle nécessite une connaissance des situations précédentes ayant contribué à la construction du répertoire de représentation, et aussi parce qu'elle nécessite d'analyser les signes produits et de repérer précisément les registres mobilisés. Dans cette étude, nous nous sommes efforcés de mettre en évidence, dans l'analyse des raisonnements produits par les élèves, la manière dont les élèves convoquent les différents registres sémiotiques. C'est en ce sens que l'étude – par l'usage du modèle d'analyse des raisonnements – contribue à nous renseigner sur les difficultés et les habiletés des élèves à établir des liens :

- entre les registres graphique et algébrique pour définir de façon explicite la suite objet d'étude, établir sa croissance, construire la preuve que cette suite est majorée par 4,
- entre les registres algébrique, numérique et graphique pour analyser, le comportement des valeurs de la suite obtenues par le calcul instrumenté et ensuite mettre en évidence leur capacité à déterminer, pour un seuil s quelconque fixé, le rang de la suite à partir duquel l'ensemble des termes de la suite est contenu dans [s ; 4].

L'établissement de ces liens afin de justifier la validité et la pertinence d'un raisonnement constitue pour nous un indicateur de l'appropriation de la notion de limite d'une suite et contribue ainsi à apporter des éléments de réponse à la problématique.

L'analyse de la dernière partie de l'étude – inhérente à la notion de seuil – n'a pas pu être intégrée dans l'article, mais elle constitue un élément important dans l'analyse de cette séquence en vue de permettre une première approche de la notion de limite finie d'une suite.

À la suite de cette séquence, à la demande du chercheur, les élèves ont rédigé individuellement les étapes de l'étude du comportement asymptotique de la suite. Ce recueil des productions constitue une donnée très pertinente, il permet de rendre compte du fait que pour une très grande majorité des élèves, les raisonnements produits – lors de chacune des étapes du déroulement – mettent en lumière leur capacité à élaborer des raisonnements qui mettent en correspondance les différents registres. On constate également que pour un tiers des élèves, le réinvestissement de la notion de seuil demeure complexe à réaliser.

La notion de limite d'une suite est particulièrement difficile à appréhender et nécessite de confronter les élèves à un ensemble de situations. Par ailleurs, cette analyse didactique des productions devrait constituer le point de départ d'une nouvelle étude.

Conclusion

L'analyse a priori de la séquence nous a permis non seulement de formuler les raisons pour lesquelles nous avons élaboré cette situation d'apprentissage, mais encore d'expliciter les formes de raisonnements susceptibles d'apparaître lors des différentes phases de la séquence.

Certains éléments de cette analyse a priori ont été communiqués à l'enseignant en vue de faciliter la mise en œuvre de la séquence, notamment en le préparant à envisager un traitement adéquat des raisonnements des élèves, produits au cours de chacune des situations (situation d'action, de formulation, de validation et de décision). Par ailleurs, l'analyse a priori a mis en évidence la nécessité d'articuler les différents cadres (numériques, algébriques et géométriques) durant chacune des phases de la séquence afin de permettre aux élèves une première approche expérimentale de la notion de limite finie d'une suite. Cette même analyse prépare également l'enseignant à gérer les résultats numériques – en tant qu'approximations des termes de la suite – obtenus par l'usage des TICE en vue de faire acquérir à ses élèves une attitude critique vis-à-vis des résultats numériques produits par les instruments de calculs.

Une analyse a posteriori détaillée de la séquence mise en œuvre, basée sur l'analyse de différents épisodes, réalisée à l'aide de notre modèle d'analyse des raisonnements nous a conduit à mettre en lumière les différentes formes de raisonnements mis en œuvre par les élèves. Nous avons mis ainsi en évidence les différentes fonctions des raisonnements : décision de calcul, conjecture, décision sur un objet mathématique, décision sur un outil numérique, interprétation, établissement d'une preuve sémantique, élaboration d'une preuve syntaxique. Ceci nous a permis de mettre en lumière la richesse de cette séquence du point de vue de la pratique du raisonnement en classe de première scientifique.

Notre modèle d'analyse des raisonnements semble donc être un outil pertinent pour élaborer une analyse des formes de raisonnements susceptibles d'être produits au cours de chacune des phases et ensuite pour produire une analyse a posteriori détaillée du déroulement de la séquence, mettant en lumière les connaissances et les savoirs mobilisés par les élèves ainsi que leur capacité à mettre en relation les différents registres de représentation.

Cette étude nous a permis de rendre compte de la pertinence et de l'adéquation de cette situation d'apprentissage pour permettre une première approche de la notion de limite finie d'une suite, qui sera étudiée de façon détaillée l'année suivante en classe de Terminale.

Références

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situation de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(2) 147-176. https://doi.org/10.1007/BF00314724

Barrier, T. (2008). Sémantique selon la théorie des jeux et situations de validation en mathématiques. *Éducation et didactique*, *2*(3), 35-58. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.350

Bloch, I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en Première scientifique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(2), 135-193.

Bloch, I. (2006). *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur* [note de synthèse pour une habilitation à diriger des recherches, Université Paris 7]. TEL. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00012153

Bloch, I. et Gibel, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en didactique des mathématiques, 31*(2), 191-228.

Bloch, I., Bridoux, S., Durand-Guerrier, V., Grenier, D., Frétigné, P., Mac Aleese, J., Madec, G., Menini, C., Rogalski, M., Sénéchaud, P. et Vandebrouck, F. (2017). *Limites de suites réelles et de fonctions numériques d'une variable réelle : constats, pistes pour les enseigner*. Commission inter-IREM Université, Université Paris-Diderot.

Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques.* Éditions la Pensée sauvage.

Brousseau, G. et Gibel, P. (2005). Didactical handling of students' reasoning processes in problem solving situations. *Educational Studies in Mathematics*, *59*, 13-58. https://doi.org/10.1007/0-387-30451-7_2

Chorlay, R. (2019). A pathway to a student-worded definition of limits at the secondary-tertiary transition. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *5*(3), 267-314. https://doi.org/10.1007/s40753-019-00094-5

Durand-Guerrier, V. (2007). Retour sur le schéma de la validation explicite dans la théorie des situations didactiques. Dans A. Rouchier (dir.), *Actes du colloque Didactiques : quelles références épistémologiques?* [Cédérom]. IUFM d'Aquitaine.

Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME, 9*(Numéro spécial), 45-81.

Everaert-Desmedt, N. (1990). *Le processus interprétatif : introduction à la sémiotique de Ch. S. Peirce.* Mardaga Éditeur.

Everaert-Desmedt, N. (2011), La sémiotique de Peirce. Dans L. Hébert (dir.), *Signo. Site Internet de théorie sémiotiques.* http://www.signosemio.com/peirce/semiotique.asp

Ghedamsi, I. (2008). *Enseignement du début de l'analyse réelle à l'entrée à l'université : articuler contrôles pragmatiques et formels* [thèse de doctorat, Université virtuelle de Tunis et Université Victor-Segalen Bordeaux 2,]. TEL. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00361848

Gibel, P. (2004). *Fonctions et statuts des différentes formes de raisonnement dans la relation didactique en classe de mathématiques* [thèse de doctorat inédite]. Université de Bordeaux 2.

Gibel, P. (2015). Mise en œuvre d'un modèle d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques à l'école primaire. *Éducation et didactique 9*(2), 51-72. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.2278

Gibel, P. (2018). *Élaboration et usages d'un modèle multidimensionnel d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques* [note de synthèse pour une habilitation à diriger des recherches, Université de Pau et des Pays de l'Adour]. TEL. https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01919188

Grenier-Boley, N., Bridoux, S., De Vleeschouwer, M., Durand-Guerrier, V., Grenier, D., Menini, C., Rogalski, M., Sénéchaud, M., Vandebrouck, F. (2015). Introduction aux concepts de limite de fonction et de suite : adaptation de deux ingénieries. Dans L. Theis (dir.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015 – GT7* (p. 666-676). Université d'Alger.

Job, P. (2011). *Étude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations fondamentales adidactiques* [thèse de doctorat, Université de Liège]. Orbi. https://orbi.uliege.be/handle/2268/98996

Lecorre, T. (2015). Définir : une nécessité à construire. Le cas de la définition de la limite d'une fonction. *Repères IREM, 100*, 51-80.

Legrand, M. (1997). La problématique des situations fondamentales. *Recherches en didactique des mathématiques*, *16*(2), 221-279.

Margolinas, C. (1994). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. Dans C. Margolinas (dir.), *Les débats de didactique des mathématiques* (p. 89-102). Éditions la Pensée sauvage.

Mercier, A. (1995), Les effets de l''intervention enseignante dans le milieu des situations adidactiques. Dans C. Margolinas (dir.), *Les débats de didactique de mathématiques* (p. 157-168). Éditions la Pensée sauvage.

Oléron, P. (1977). *Le raisonnement.* Presses Universitaires de France.

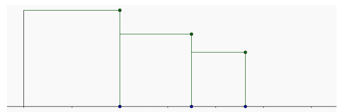
Peirce, C. S. (1995). *Le raisonnement et la logique des choses* (traduit par C. Chauviré, P. Thibaud et C. Tiercelin). Éditions du Cerf.

République française *(2010). Bulletin officiel spécial n° 9 du 30 septembre 2010. Programmes d'enseignement du lycée*. Ministère de l'Éducation Nationale.

Annexe 1

Suite de carrés – énoncé distribué aux élèves

On construit une suite de carrés juxtaposés comme sur le schéma ci-dessous.



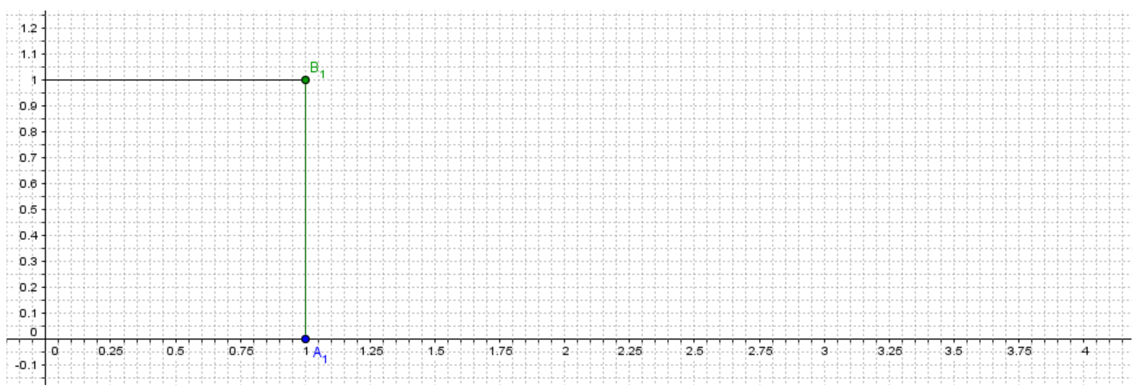
Le côté du premier carré a pour mesure 1. Le côté du deuxième carré mesure $\frac{3}{4}$ du premier. Et ainsi de suite, le côté du carré suivant mesure $\frac{3}{4}$ du côté du carré précédent.

1. Construire les cinq premiers carrés sur le repère ci-dessous. Qu'observe-t-on?

2. On note B_1, B_2, B_3, … les **sommets** « en haut à droite » de chaque carré (la suite $(B_n)_{n \geq 1}$ est une suite de points).

- **a)** Quelle **conjecture** peut-on émettre concernant les points B_1, B_2 et B_3? Valider ou invalider votre conjecture par un raisonnement mathématique.
- **b)** En répétant le processus un **grand nombre *n*** de fois, quelle conjecture peut-on émettre concernant les points B_1, B_2, B_3, …, B_n? Valider ou invalider votre conjecture par un raisonnement mathématique.

3. On note A_1, A_2, A_3, … les **sommets** « en bas à droite » de chaque carré (la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite de points).



<u>**Problématique**</u> : on se demande si, en répétant le processus un nombre *n* de fois suffisant, on peut obtenir un carré dont l'abscisse du sommet A_n est strictement supérieure à 4.

En mobilisant les outils que vous jugerez appropriés, élaborez des éléments de réponse à la problématique

Problématique pour aller plus loin : soit un nombre $s \in [1;4[$. En itérant le processus de construction défini ci-dessus, peut-on construire un carré tel que $a_n \geq s$? Si oui, quel pourrait être son numéro?

Annexe 2

Calcul effectué par l'élève 1

Au tableau, l'élève 1 a noté :

On note X(x;0) le point d'intersection entre (0_x) l'axe des abscisses et d (droite passant par les sommets B_n).

$$r=\frac{-1}{3};\quad B_1(1;1)\in d;$$

$$r=\frac{y_X-y_{B1}}{x_X-x_{B1}}=\frac{0-1}{x-1}$$

$$\frac{-1}{x-1}=\frac{-1}{3}$$

$$-1=\frac{-1}{3}(x-1)$$

$$-1=\frac{-1}{3}x+\frac{1}{3}$$

$$\frac{-4}{3}=\frac{-1}{3}x$$

$$x=\frac{\frac{-4}{3}\times 3}{-1}$$

$$x=4$$

Annexe 3

Déroulement de la séquence constituée de 2 séances de 50 minutes

Séance 1 (en demi-groupe)

Phase 1 : Présentation de la situation – Consigne relative à la construction des 5 premiers carrés.

Phase 2 : Construction sur papier millimétré des 5 premiers carrés

Phase 3 : Consigne relative à l'émission de conjecture(s) relatives à B_1, B_2, B_3.

Phase 4 : Mise en commun des conjectures – Communication des preuves

Phase 5 : Consigne relative à l'émission de conjecture(s) B_1, B_2, …B_N

Phase 6 : Mise en commun des conjectures – Communication des preuves

Phase 7 : Formulation de la problématique

Phase 8 : Recherche Utilisation des TICE (Tableur, Algobox, calculatrices, etc.

Séance 2 (en groupe-classe)

Phase 9 : Recherche Utilisation des TICE (Tableur, Algobox, calculatrices, etc.

Phase 10 : Recueil des résultats

Phase 11 : Majoration de la suite Situation de formulation des expressions de (a_n)

Phase 11 : Situation de validation

Phase 12 : Phase visant à étudier expérimentalement la notion de seuil

Phase 13 : Situation d'institutionnalisation