

Revue québécoise de didactique des mathématiques

volume 2 (2021)

DOI : [10.71403/rjb4nb46](https://doi.org/10.71403/rjb4nb46)

Comité éditorial

Patricia Marchand, éditrice en chef

Claudia Corriveau, éditrice adjointe

Vincent Martin, éditeur adjoint

Izabella Oliveira, éditrice adjointe

Coordonnatrice

Marianne Homier

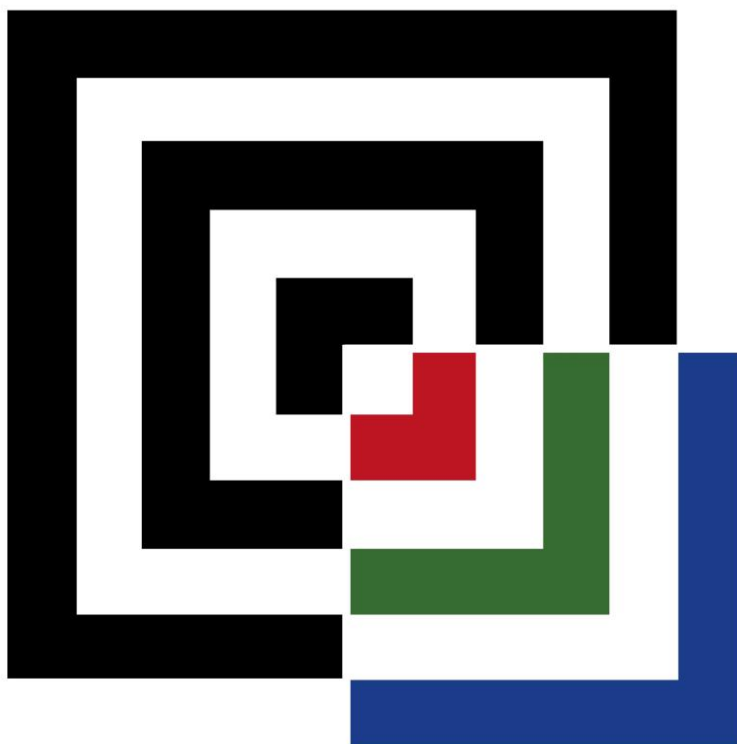


Table des matières

Mot éditorial

Patricia Marchand, Claudia Corriveau, Vincent Martin et Izabella Oliveira 1

ARTICLES

Développement de l'activité algébrique à l'entrée au lycée tunisien

Slimane Hassayoune 3

L'intégration, par une enseignante, d'une ressource visant le développement de la pensée algébrique chez des élèves du 1er cycle du secondaire

Audrey B. Raymond et Hassane Squalli 49

Réflexion autour du rôle du symbolisme littéral dans le développement de la pensée algébrique au primaire

Steve Tremblay, Elena Polotskaia et Valériane Passaro 78

Université Laval, Québec

ISSN : 2563-6995

Mot éditorial du deuxième numéro de la RQDM

Patricia MARCHAND

Université de Sherbrooke

patricia.marchand@usherbrooke.ca

Claudia CORRIVEAU

Université Laval

claudia.corriveau@fse.ulaval.ca

Vincent MARTIN

Université de Sherbrooke

vincent.martin@usherbrooke.ca

Izabella OLIVEIRA

Université Laval

izabella.oliveira@fse.ulaval.ca

Introduction

Le comité éditorial a le plaisir de vous proposer trois articles pour ce deuxième numéro de la RQDM. Ces articles traitent tous du développement de la pensée algébrique, mais à des ordres d'enseignement différents et selon des angles d'analyse distincts. Nous présentons d'ailleurs ces similarités et divergences dans les lignes qui suivent.

Le premier article, écrit par Slimane Hassayoune, traite du développement de la pensée algébrique à l'entrée au lycée tunisien. Il propose d'abord une caractérisation de l'activité algébrique d'un point de vue épistémologique et conceptuel. Plusieurs cadres, entre autres celui de Douady (1987), de Kieran (1996, 2004), de Radford (2013), de Chevallard (1989) et de Hitt et al. (2016), lui permettent de caractériser l'activité algébrique en cinq composantes. Celles-ci sont analysées sous l'angle de la théorie anthropologique du didactique. Cette caractérisation de nature théorique lui permet ensuite d'analyser des situations qui favorisent le développement de la pensée algébrique.

Le deuxième article, proposé par Audrey B. Raymond et Hassane Squalli, rapporte les résultats d'une recherche-action menée en contexte québécois. Il aborde plus précisément l'intégration d'une ressource visant le développement de la pensée algébrique par une enseignante du premier cycle du secondaire. L'analyse de ce processus d'intégration d'une ressource spécifique est traitée à l'aide de l'approche documentaire du didactique de Gueudet et Trouche (2008), de la notion de schème de Vergnaud (1966) et de la typologie du niveau de complexité des problèmes d'algèbre de Bednarz et Janvier (1996).

Finalement, l'article de Steve Tremblay, Elena Polotskaia et de Valériane Passaro nous propose une réflexion sur le rôle du symbolisme littéral dans le développement de la pensée algébrique au primaire au Québec. Ils abordent le rôle de la lettre comme outil mathématique et comme outil d'apprentissage en prenant appui sur deux courants de pensée, le *Early Algebra* et la pensée théorique de Davydov (2008).

Les différents contextes, cadres et méthodologies dans ces trois articles rejoignent tout à fait notre visée de partager des textes d'horizons variés en didactique des mathématiques. Puisque les articles pour le présent numéro traitent de la pensée algébrique montrant l'importance de ce thème en didactique des mathématiques, nous en profitons pour souligner qu'un numéro thématique de la RQDM est en préparation en collaboration avec l'Observatoire international de la pensée algébrique (OIPA).

Bonne lecture!



Développement de l'activité algébrique à l'entrée au lycée tunisien

Slimane HASSAYOUNE

Université virtuelle de Tunis

slimhass@gmail.com

Résumé : Malgré l'adoption par le système éducatif tunisien d'une démarche didactique de résolution de problèmes, plusieurs professeurs du début de l'enseignement secondaire continuent à introduire l'algèbre en tant qu'une arithmétique généralisée, focalisent sur le calcul algébrique formel hors contexte et ne se préoccupent pas davantage du développement du raisonnement algébrique. Ceci pourrait avoir pour effet de masquer le sens et la raison d'être des objets mathématiques manipulés et d'engendrer pour les élèves des difficultés à réinvestir leurs acquis en contexte. L'objet de cet article est de caractériser l'activité algébrique à la fois sur les plans épistémologique et conceptuel, et de concevoir et mettre en œuvre des situations didactiques susceptibles de favoriser son développement à l'entrée au lycée tunisien.

Mots-clés : activité algébrique, processus d'algébrisation, praxéologie, situation didactique.

The development of algebraic activity at the beginning of Tunisian secondary school

Abstract: Despite the Tunisian education system's adoption of a didactic approach to problem-solving, many teachers at the beginning of secondary school continue to introduce algebra as a generalized arithmetic, to focus on formal algebraic calculus out of context, and to put little emphasis on developing algebraic reasoning. This may obscure the meaning and purpose of the mathematical objects that students manipulate, and make it harder for them to reinvest their learning in context. The aim of this article is to describe algebraic activity on the epistemological and conceptual levels and to design and implement didactic situations that could promote the development of this activity at the beginning of secondary school in Tunisia.

Keywords: algebraic activity, algebraic process, praxeology, didactic situation.

Introduction

Des travaux de recherche portant sur l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre à l'entrée au cycle secondaire tunisien (Ben Nejma, 2009;

Revue québécoise de didactique des mathématiques, 2021, vol 2, p. 3-48.

<https://doi.org/10.71403/48760645>

Hassayoune, 2014; Kouki, 2008) ont relevé, dans les programmes et les manuels scolaires actuellement en vigueur, plusieurs préconisations floues et insuffisamment suivies d'effets, concernant le projet épistémologique et didactique que l'institution compte mettre en place. Ceci transparaît au niveau des écarts remarquables entre les injonctions mathématiques et didactiques de l'institution et la réalité des pratiques enseignantes. En effet, malgré l'adoption officielle d'une démarche de résolution de problèmes, il est apparu, dans les faits, que l'enseignement de l'algèbre, à ce niveau scolaire, est essentiellement centré sur l'acquisition des techniques du calcul formel sans préoccupation du développement du raisonnement algébrique. Ceci pourrait engendrer, pour les élèves, des difficultés d'apprentissage récurrentes et, pour les enseignants, des hésitations didactiques entravant l'élaboration et la mise en œuvre de situations mathématiques pertinentes et conformes au projet éducatif exigé par l'institution.

Par ailleurs, les difficultés inhérentes au changement de la langue d'enseignement des mathématiques en première année du secondaire et les modestes performances de nos élèves en algèbre dans l'enquête PISA (OCDE, 2014) nous ont interpellés et nous ont incités à investiguer les caractéristiques épistémologiques et conceptuelles de l'activité algébrique en explicitant ses processus, ses contextes et ses outils. Nous faisons l'hypothèse qu'une explicitation claire de ce que l'on entend par activité algébrique auprès des enseignants et par son développement fonctionnel in situ chez les élèves pourrait améliorer sensiblement l'enseignement de l'algèbre à ce niveau scolaire.

Ainsi, pour étudier la problématique soulevée et retenue pour cet article, nous nous sommes posé successivement les questions suivantes :

- Quelles sont les caractéristiques épistémologiques et conceptuelles de l'activité algébrique?
- Quelles propositions didactiques pourrait-on suggérer, à la lumière de ces caractéristiques, en vue d'améliorer l'enseignement de l'algèbre en première année du secondaire en Tunisie?

Nous nous proposons donc de cerner quelques caractéristiques épistémologiques et conceptuelles de l'activité algébrique et de proposer des situations didactiques susceptibles de favoriser son développement chez les élèves à l'entrée au lycée tunisien.

La première partie de l'article est consacrée à l'examen de ce que les didacticiens de l'algèbre entendent par « activité algébrique » en vue d'en préciser les conditions, les contextes et les supports de développement chez les élèves du début de l'enseignement secondaire tunisien (15-16 ans).

Pour étayer et mettre en pratique nos résultats théoriques, nous présenterons dans la deuxième partie de l'article, une alternative didactique à ce qui est ordinairement proposé dans le manuel scolaire et dans les cours des enseignants, permettant de favoriser un apprentissage de l'algèbre porteur de sens et de raison d'être pour les objets mathématiques manipulés. Nous proposerons, à travers une présentation d'un corpus de situations didactiques et l'analyse de l'une d'entre elles, un exemple de mise en fonctionnement des connaissances génératrices de résolution de problèmes et de construction de savoirs algébriques.

1. Ancrages théoriques

Dans cette section, nous présenterons les caractéristiques épistémologiques et conceptuelles de l'algèbre en tant qu'objet de savoir enseigné à l'entrée au lycée tunisien. Après une revue de littérature portant sur le sens, les outils et les processus de l'activité algébrique, nous en présenterons un cadre de référence susceptible de circonscrire nos suggestions didactiques.

Définir ce que l'on entend par activité algébrique, délimiter ses principales composantes et appréhender ses manifestations en précisant les types de tâches, les techniques et les éléments technologiques et théoriques qui leur sont liés nous permet de mettre en place un cadre épistémologique d'analyse des différentes praxéologies algébriques et de proposer un modèle et des dispositifs de leur développement en situation d'apprentissage.

L'activité algébrique se déploie par la mobilisation finalisée des savoirs algébriques conformément à leurs deux dimensions « outil » et « objet » (Douady, 1987). Dans la dimension outil des savoirs, l'activité algébrique se déploie comme un processus de résolution de problèmes par la voie de leur modélisation sous forme d'équations ou de relations fonctionnelles. Dans sa dimension objet, elle se déploie essentiellement et structuralement par la reconnaissance et le traitement des objets algébriques pour en préciser le sens et la dénotation (Frege, 1882).

Notons également que ce traitement des objets de l'algèbre permet de mettre en jeu leurs différents aspects : l'aspect sémantique, relatif aux sens susceptibles d'être conférés aux expressions rhétoriques, numériques et littérales traduisant les relations et les variations; l'aspect sémiotique, se rapportant aux registres de représentation et au symbolisme utilisé; et l'aspect syntaxique, propre aux modes de formation des expressions du langage algébrique ainsi qu'aux règles qui les régissent. Nous nous proposons de caractériser l'activité algébrique en nous appuyant sur les résultats des recherches en didactique de l'algèbre liées à la rupture épistémologique entre les deux activités arithmétique et algébrique, à la pensée algébrique et à la représentation sémiotique des objets de l'algèbre.

1.1 La rupture épistémologique entre l'activité arithmétique et l'activité algébrique

Malgré la ressemblance des signes opératoires et des domaines de fonctionnement des deux processus arithmétique et algébrique, ceux-ci sont en réalité totalement différents en termes d'outils et de raisonnements mathématiques. Une rupture épistémologique devrait alors être assumée si l'on veut surmonter les fausses continuités (Kieran, 2004) et faciliter la transition de l'arithmétique à l'algèbre à l'entrée au lycée tunisien.

Pour une meilleure transition de l'arithmétique à l'algèbre, les élèves ont besoin d'un apprentissage spécifique qui les amène progressivement à acquérir les nouvelles aptitudes méthodologiques et techniques propres à l'activité algébrique, car même dans le cas où ils sont aptes à résoudre des problèmes arithmétiques, ils ont tendance à rencontrer des difficultés inhérentes au mode de traitement algébrique : analyse, choix des inconnues, symbolisation, modélisation algébrique des situations, etc. (Marchand et Bednarz, 2000). Ben Nejma (2010) a montré que cet ancrage dans le processus arithmétique tend à subsister même au terme de la première année du lycée tunisien, ce qui demanderait alors des interventions didactiques lourdes si l'on veut remédier à cette situation. Nous faisons l'hypothèse que cet état de fait est dû principalement à l'introduction tardive du raisonnement algébrique dans le cursus scolaire tunisien : la modélisation algébrique des situations et la résolution de problèmes par la voie de leur mise en équations ne sont abordées qu'à la fin de la 9^e année de l'enseignement de base (14-15 ans).

Pour aider les élèves à surmonter l'obstacle épistémologique engendré par la rupture entre l'arithmétique et l'algèbre, plusieurs auteurs (Gascon, 1993; Kieran, 1996, 2004; Vergnaud, 1988) proposent de les amener à :

- Focaliser sur la nature et les propriétés des relations et pas simplement sur les calculs numériques;
- Saisir le sens des nombres et des opérations;
- Donner de l'importance à la modélisation algébrique des problèmes en plus de leurs solutions;
- Distinguer les différents statuts des lettres, selon les contextes et les usages : inconnues, variables, indéterminées ou paramètres;
- Accepter des expressions littérales comme réponses à certains problèmes;
- Considérer le signe « = » en tant que signe annonçant une équivalence entre deux expressions.

Par ailleurs, pour remédier aux difficultés de l'apprentissage de l'algèbre engendrées par les différences cognitives inhérentes aux deux processus

arithmétique et algébrique, plusieurs chercheurs s'inscrivent, de nos jours, dans une nouvelle optique didactique induite par le récent avènement *early algebra* (Hitt et al., 2016; Kaput, 1995; Kieran, 2004) et appellent à familiariser les élèves, dès leur jeune âge, au raisonnement algébrique. Ces auteurs contestent également les approches de l'enseignement de l'algèbre se basant sur la rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre. Ils suggèrent une approche de continuité articulant la modélisation des problèmes et les calculs algébriques avec des contrôles et des instanciations numériques contextualisés, permettant de donner sens aux expressions symboliques manipulées.

Dans le cas tunisien, l'institution a fait le choix de séparer les activités arithmétiques des activités algébriques en provoquant une transition « brutale » du numérique à l'algébrique (République tunisienne, 2005). Ceci pose effectivement la question de possibles difficultés d'apprentissage inhérentes à la rupture épistémologique entre les deux approches arithmétique et algébrique dans la résolution de problèmes. L'institution devrait alors assumer ce choix sur le plan didactique en atténuant ces difficultés par l'édition de documents d'accompagnement des programmes, de ressources didactiques et des dispositifs de formation des enseignants visant la gestion de cette rupture épistémologique. Compte tenu des récentes recherches en la matière, on pourrait très bien mener, de pair et assez tôt, le développement des activités numériques et algébriques. Il serait alors question d'instaurer une initiation précoce, dès la fin de l'école primaire, au raisonnement algébrique en développant les processus de modélisation et de généralisation et en focalisant sur les structures des relations quantitatives tout en réinvestissant les acquis numériques dans le contrôle sémantique de ces relations (Carraher, Martinez et Schliemann, 2008; Carraher, Schliemann et Schwarz, 2008).

1.2 La pensée algébrique

S'engager dans une activité algébrique, c'est réaliser des tâches (relevant de certains types de tâches) à l'aide de techniques susceptibles d'être justifiées par des technologies et des théories propres au domaine de l'algèbre (Chevallard, 1999). Mais pour que cet engagement soit cognitivement significatif et finalisé, il faut qu'il soit sous-tendu par des habiletés intellectuelles qui orientent les actions entreprises. En outre, l'apprentissage de l'algèbre étant avant tout une activité humaine consciente et raisonnée, il est alors beaucoup plus qu'une simple accumulation de connaissances déclaratives et procédurales éparses et parcellaires. Il est plutôt un processus complexe de développement d'aptitudes cognitives et comportementales qui suppose la mobilisation d'habiletés à la fois pratiques (des savoir-faire ou « praxis » composés de types de tâches et des techniques servant à les accomplir) et intellectuelles (des savoirs ou « logos » composés d'éléments technologiques et théoriques du domaine algébrique). Ces

dernières habiletés ainsi sollicitées nous amènent à nous intéresser à ce que plusieurs auteurs épistémologues ou didacticiens appellent « pensée algébrique ».

Pour Kieran (1996), la pensée algébrique se construit, se développe et se manifeste essentiellement à travers :

- Les activités de généralisation;
- Les activités de transformation d'expressions symboliques;
- Les activités globales de métaniveau.

Le premier type d'activités algébriques, selon l'auteure, a trait aux activités de généralisation, lesquelles sont à la base de la formation d'expressions algébriques et d'équations qui sont les principaux objets de l'algèbre. Les équations dérivent du processus de modélisation des situations intramathématiques et extramathématiques, tandis que les expressions algébriques proviennent souvent de généralisations de termes de suites numériques ou de motifs géométriques « patterns » ou de règles traduisant des relations entre grandeurs. D'autres objets de l'algèbre sont aussi introduits tels que les concepts d'inconnue, de variable, de solution, ou de signes « +, -, x, =, (), etc. ».

Le second type d'activités algébriques préconisé par Kieran (1996) concerne le processus transformationnel d'expressions symboliques incluant les opérations de réduction, de factorisation, de développement, de substitution ou de résolution d'équations.

Le troisième type d'activités algébriques est nommé *global meta-level activity of algebra*. Il concerne les processus mathématiques transversaux où l'algèbre est utilisée comme outil et où les habiletés cognitives mobilisées ne sont pas exclusives au domaine algébrique comme la résolution de problèmes, la modélisation, la reconnaissance ou l'établissement de structures, la généralisation, la preuve, ou la prédiction.

Le symbolisme alphanumérique, mobilisé de nos jours au cours de l'activité algébrique, est une invention relativement récente dans l'histoire de la genèse et du développement de l'algèbre. Pourtant, la pensée algébrique n'a cessé d'évoluer depuis la nuit des temps, preuve que la naissance de l'algèbre en tant que démarche de l'esprit ne coïncide visiblement pas avec celle du symbolisme algébrique.

Même après avoir été initiés au formalisme algébrique, certains élèves procèdent encore numériquement et par essais-erreurs pour résoudre des problèmes algébriques (Oliveira et al., 2017) ou des équations dont l'inconnue figure dans les deux membres, telles que l'équation : $2x + 1 = 7x - 3$ dont la résolution repose sur la conservation de l'égalité ce qui rend inopérantes les méthodes arithmétiques

(Grugeon, 1997). Ils recourent ainsi à des techniques de nature arithmétique malgré la disponibilité du symbolisme et du calcul littéral. Ceci prouve que cette disponibilité apparente du symbolisme algébrique ne suffit pas, à elle seule, à accéder à une pensée algébrique susceptible de lever l'obstacle induit par les problèmes algébriques déconnectés (Marchand et Bednarz, 2000) ou par la présence de l'inconnue dans les deux membres d'une équation.

Notons, enfin, que l'usage des lettres par les élèves n'est pas nécessairement un indicateur de la mobilisation d'une pensée algébrique. L'utilisation d'exemples génériques ou d'une démarche mentale évoquée dans la langue naturelle peut également indiquer l'entrée dans une pensée algébrique.

Se référant à des travaux antérieurs, Radford (2013) suggère trois aspects caractérisant les problèmes dont la résolution nécessite une mobilisation de la pensée algébrique :

- Indétermination : le problème à résoudre fait intervenir des quantités non connues (inconnues, variables, indéterminées, paramètres, etc.);
- Représentativité : les indéterminées du problème sont susceptibles d'être représentées symboliquement (par des signes alphanumériques, langage naturel, signes non conventionnels, etc.);
- Raisonnement analytique : les indéterminées du problème sont traitées comme des quantités connues. Elles sont nommées, mises en relations et manipulées. L'analyse est ce cheminement de ce que l'on cherche vers ce qui est donné.

En conclusion, il apparaît que la pensée algébrique est une activité intellectuelle appuyée par une mobilisation finalisée des éléments technologico-théoriques des praxéologies algébriques (notamment, les règles du calcul algébrique et les structures des ensembles des nombres mis en jeu). Elle se manifeste et se développe dans la résolution de problèmes complexes à caractère quantitatif à travers la mobilisation et le déploiement de savoirs algébriques et des processus intellectuels spécifiques.

Les principaux processus de fonctionnement de la pensée algébrique sont :

- Le processus de la modélisation et la résolution de problèmes faisant intervenir des données, des relations ou des variations quantitatives;
- Le processus de la généralisation argumentée (de relations, de propriétés, de structures, etc.);
- Le processus de preuve algébrique.

De notre point de vue, mettre l'accent sur le rôle clé du développement de la pensée algébrique dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre nous permet de repenser les situations proposées aux élèves en adoptant une nouvelle

logistique didactique centrée sur la résolution algébrique des problèmes. Le but est de mettre en avant le caractère intellectuel de l'activité algébrique et de lui procurer encore plus de sens et de raison d'être.

1.3 La représentation sémiotique des objets de l'algèbre

Le philosophe et mathématicien allemand Frege (1848 - 1925) s'est particulièrement intéressé au formalisme mathématique. En 1879, il écrit « L'Idéographie », ouvrage dans lequel il expose son idée d'un nouveau langage précis et rigoureux ne tolérant aucune éventualité d'imperfection ou d'erreurs d'interprétation comme c'est souvent le cas dans le langage ordinaire. Dans un article intitulé « Que la science justifie le recours à l'Idéographie », Frege (1882) explique pour quelles raisons les écritures idéographiques (symboliques) sont nécessaires au développement des sciences abstraites et empiriques (mathématiques, sciences physiques, biologie, etc.).

Il avance, entre autres, les arguments suivants :

- Le langage ordinaire est source d'erreurs d'interprétation car il est régi non pas par des lois logiques, mais plutôt par des considérations grammaticales;
- Le langage ordinaire ne permet pas de raisonner précisément, rapidement et de façon concise. Il est aussi très lourd à manier;
- Les signes et les mots sont des éléments clés dans le développement de la pensée, dans la mesure où ils permettent le détachement du monde sensible par le biais de diverses représentations des objets manipulés.

Dans cet ordre d'idées, Frege (1882) écrit : « Les signes donnent présence à ce qui est absent, invisible et le cas échéant inaccessible aux sens » (p. 63).

Afin de délimiter de façon précise la signification des énoncés, Frege porte son attention à la signification des expressions et des pensées portées par ces expressions. Pour cela il commence par distinguer ce qu'il appelle sens et dénotation d'une expression « *Sinn und Bedeutung* ».

Il définit la dénotation (signification, référence) d'un nom ou d'une expression par l'objet même désigné par ce nom ou cette expression, et son sens par le mode de dénotation de la dénotation de cette expression, c'est-à-dire la fonction mentale qui nous permet de relier l'expression à sa dénotation.

Conformément à ce point de vue, les trois expressions littérales suivantes :

$$4n, (2n + 1) + (2n - 1) \text{ et } (n + 1)^2 - (n - 1)^2,$$

où n désigne un nombre entier naturel, ont même dénotation (le quadruple du nombre n), mais ont des sens successifs différents : multiple de 4, somme de deux entiers impairs successifs et différence de deux carrés.

Le sens d'une expression n'est donc pas subjectif comme la représentation personnelle – appelée par Frege « connotation » – que chacun peut avoir de cette expression. Le sens pourrait être partagé par une communauté de locuteurs, c'est lui qui nous renseigne sur le référent de l'expression du point de vue sémantique. Remarquons pour terminer ce succinct aperçu sur le sens et la dénotation d'une expression que la considération des dénotations seules nous ramène à des tautologies ($a = a$), alors que l'établissement de l'équivalence des sens d'une expression a une valeur informative et accroît nos connaissances, ce qui est extrêmement avantageux et important et donne une raison d'être aux transformations des expressions algébriques.

La mise en évidence précédente des faits et phénomènes didactiques et épistémologiques nous a révélé des caractéristiques cognitives de l'activité algébrique dont nous allons préciser les composantes et les manifestations dans les lignes qui suivent.

1.4 L'activité algébrique : composantes et manifestations

Compte tenu des résultats des recherches précédemment évoqués, il apparaît que l'activité algébrique se mobilise et se développe de façon optimale en contexte de résolution de problèmes faisant intervenir des relations et des variations quantitatives et nécessitant des capacités de modélisation de situations et d'aptitudes cognitives analytiques.

Pour favoriser le développement de l'activité algébrique chez les élèves, nous gagnons particulièrement à leur proposer des situations d'apprentissage les amenant à :

- Généraliser des situations en pressentant des régularités et des formules générales et en les justifiant;
- Reconnaître et identifier des variables, des inconnues ou des indéterminées et formuler d'éventuelles relations entre elles;
- Introduire le langage algébrique comme une nécessité fonctionnelle à la modélisation de situations mathématiques ou extramathématiques et à l'expression de relations, de variations ou de généralisations.

L'activité algébrique est sous-tendue par un raisonnement spécifique, le raisonnement analytique, et des aptitudes de preuve, de modélisation, de généralisation et de traitement d'expressions algébriques.

Compte tenu des caractéristiques de l'algèbre relevées dans la précédente revue de littérature, nous repérons ainsi cinq principales composantes génératrices de l'activité algébrique apparemment non indépendantes et susceptibles de s'activer mutuellement pour l'engendrer. Il s'agit d'aptitudes cognitives et techniques complémentaires, pointées et mises en avant par les auteurs cités et couramment

mobilisées lors de la résolution algébrique de problèmes. Nous nous proposons, dans ce qui suit, de définir ces composantes de l'activité algébrique et d'en préciser les manifestations, les contextes ainsi que les types de tâches et les techniques qui leur sont associés.

Les composantes¹ algébriques retenues de l'activité sont :

- Reasonner analytiquement;
- Modéliser algébriquement des situations mathématiques ou extramathématiques;
- Traiter des expressions algébriques;
- Généraliser et valider algébriquement des conjectures;
- Prouver algébriquement un résultat.

Par ailleurs, il faut dire tout de suite que notre choix de présenter ces composantes séparément résulte d'un souci méthodologique et n'implique pas qu'elles interviennent de façon isolée et indépendamment les unes des autres lors de la mobilisation et du développement de l'activité algébrique. En réalité, ces cinq composantes sont mutuellement interreliées et solidaires car, par exemple, on ne peut pas modéliser et gérer algébriquement une situation intramathématique ou extramathématique sans déployer un raisonnement analytique, comme on ne peut pas généraliser et valider une propriété ou une structure algébrique sans s'aider d'un traitement fonctionnel et ajusté à ses fins des expressions rhétoriques, numériques, graphiques ou symboliques traduisant ces propriétés ou ces structures.

1.4.1 Reasonner analytiquement

Ce raisonnement a apparemment immigré de la géométrie à l'algèbre à l'époque de Viète (1540-1603) et de Descartes (1596-1650). Il est souvent appelé « méthode du problème résolu ». Au IV^e siècle de notre ère, Pappus d'Alexandrie l'avait utilisé dans son œuvre « Collections mathématiques » pour résoudre des problèmes de construction géométrique à la règle et au compas.

Cela consiste à supposer le problème résolu, à analyser la situation et à dégager des propriétés qui serviront, par la suite et selon un processus de synthèse, à construire la solution. En algèbre, le raisonnement analytique nous permet, contrairement à la démarche arithmétique, de partir de l'inconnue et de ses relations avec les données du problème pour aboutir à la solution.

¹ Certaines de ces composantes (raisonner analytiquement, généraliser, prouver) ne sont pas propres au domaine algébrique. Elles sont transversales et interviennent dans les différents domaines mathématiques, à un métaniveau global au sens de Kieran (1996).

Pour déployer ce raisonnement analytique, on part de ce que l'on veut obtenir en se demandant d'où il peut provenir, et on procède ainsi de proche en proche, jusqu'à arriver à un résultat connu ou admis qui constitue à son tour un point d'ancrage pour amorcer une synthèse permettant de résoudre le problème. La synthèse en question part des résultats de l'analyse et remonte pas à pas et en sens inverse de ceux-ci jusqu'à la rencontre des données du problème posé. (Hintikka et Rems, 1974, cité dans Squalli, 2000).

La figure 1 ci-dessous schématise les deux démarches algébrique (analyse) et arithmétique (synthèse).

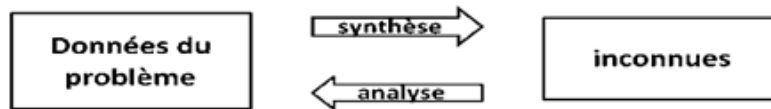


Figure 1 : Schématisation des deux démarches algébrique (analyse) et arithmétique (synthèse)

La résolution algébrique des problèmes par un raisonnement analytique se déroule généralement en trois étapes successives avec, éventuellement, des possibilités d'allers-retours :

- Supposer le problème résolu et analyser la situation obtenue : exploration des inconnues, des données, des relations, etc.;
- Dégager les propriétés caractéristiques de la situation : symboliser les inconnues et éventuellement les données (paramètres) et traduire algébriquement les relations;
- Synthétiser des résultats et élaborer une solution : résoudre algébriquement puis contrôler la validité des solutions trouvées au regard de la situation du problème posé.

1.4.2 Modéliser algébriquement des situations

Chevallard (1989) définit le processus de modélisation comme une schématisation représentant un système mathématique ou extramathématique et un modèle de ce système. Pour lui, un modèle est « un schéma simplifié qui suppose essentiellement deux registres d'entités : un système mathématique ou non mathématique et un modèle (mathématique) de ce système » (Chevallard, 1989, p. 53). Burgermeister et Dorier (2013) vont plus loin et exigent pour le processus de modélisation, outre la construction du modèle, la discussion et l'étude de la correspondance entre le système et son modèle en mettant l'accent sur la dynamique et les rétroactions du processus. Ils précisent que « modéliser signifie : construire, discuter et étudier une correspondance entre deux systèmes incluant des objets, des relations et des questions » (Burgermeister et Dorier, 2013, p. 7).

Descartes (1596-1650) explicite davantage la modélisation algébrique, par sa règle XIX pour la direction de l'esprit (Cousin, 1826), en insistant sur la possibilité

d'exprimer certaines grandeurs de deux manières différentes en nombre égal au nombre des termes inconnus.

Grâce à cet apport méthodologique de Descartes, le schéma du processus de modélisation s'explicité davantage comme le montre la figure 2 ci-dessous.

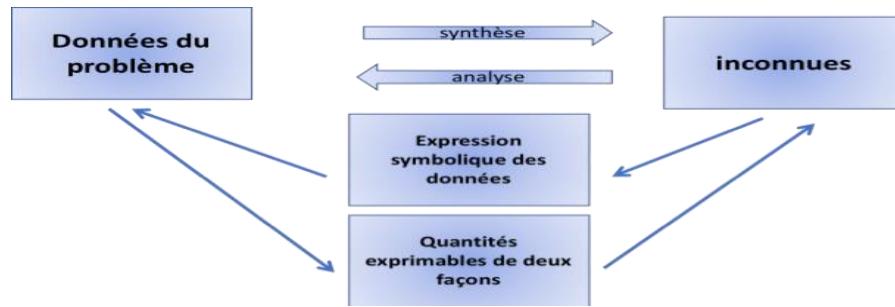


Figure 2 : Schéma du processus de modélisation tenant compte de la règle XIX pour la direction de l'esprit, inspiré de Gascon (1993)

Conformément au programme scolaire actuellement en vigueur, la modélisation algébrique des problèmes posés aux élèves entrant au lycée tunisien se réduit, la plupart du temps, à une simple mise en équation. Ce choix est dicté vraisemblablement par l'importance que l'institution attribue à l'apprentissage par problèmes.

En outre, la modélisation par une mise en équation est particulièrement sollicitée et elle est algébriquement efficace dans la résolution de problèmes du premier degré conformément à ce niveau scolaire. Parmi les éléments de la technique associée au type de tâches « Mettre un problème en équation », nous pouvons citer les suivants :

- Élaborer un modèle pseudo-concret en ne considérant que les données, les relations et les contraintes pertinentes vis-à-vis du contexte et des questions posées par la situation;
- Formuler des relations en langage mathématique;
- Traiter le modèle mathématique;
- Contrôler la validité de la solution du modèle mathématique vis-à-vis des conditions et des contraintes de la situation.

Notons enfin que la modélisation algébrique des situations permet au raisonnement analytique de se déployer pleinement compte tenu de l'obtention des expressions symboliques traduisant les données par la voie du premier processus, et de l'opérationnalisation sur les symboles par le biais du deuxième, ce qui rend ces deux processus solidaires et complémentaires. C'est la mise en œuvre associée de la modélisation et du raisonnement analytique qui permet la résolution de problèmes par une méthode algébrique.

1.4.3 Traiter des expressions algébriques

Les expressions algébriques sont les principaux objets de l'algèbre, car elles sont à la base de la construction de tous les autres objets de l'algèbre (équations, inéquations, formules, etc.). Elles sont généralement construites à partir des différents symboles (signes opératoires, nombres, lettres, etc.) lors des processus de modélisations de problèmes faisant intervenir des relations et des variations. Le traitement formel de ces objets s'effectue par l'application rigoureuse de procédures algébriques et conformément à des règles syntaxiques bien établies. Ce traitement permet au langage algébrique d'être précis, fonctionnel et productif en faisant apparaître les différents sens d'une expression symbolique modélisante.

Par ailleurs, considérer une expression algébrique comme une symbolisation d'un programme de calcul permet également de l'enrichir sémantiquement tout en lui conférant un renouveau syntaxique. Une expression algébrique apparaît ainsi comme une chaîne d'opérations à effectuer, ce qui la rend étroitement liée aux problèmes arithmétiques familiers aux élèves et pouvant être résolus par une chaîne d'opérations à partir des données du problème (Chevallard, 2007).

Notons enfin que par des modélisations successives, Ruiz-Munzón et al. (2012) élargissent cette conception de l'algèbre comme processus d'algébrisation de programmes de calcul en en spécifiant trois étapes imbriquées et susceptibles de modéliser algébriquement différents niveaux de problèmes, ce qui explique la force de l'algèbre « en tant qu'outil de modélisation et de preuve » (p. 90).

La première étape porte sur l'explicitation de la structure du programme de calcul en prenant en compte les opérations, les règles de priorité et les parenthèses mises en jeu. Cette étape conduit à la formulation du programme de calcul par une expression algébrique et à l'émergence d'un environnement technologico-théorique permettant de traiter et d'établir l'équivalence des programmes de calcul.

La deuxième étape se rapporte à la résolution de problèmes où il est demandé de déterminer les valeurs pour lesquelles deux programmes de calcul envoient le même résultat ou des résultats dans un ordre donné, ce qui requiert de nouvelles règles de calcul équationnel éventuellement paramétré.

La troisième étape est entamée lorsqu'on décide de ne plus distinguer les inconnues des paramètres et que l'on travaille avec plusieurs variables, ce qui induit la production, le traitement et l'utilisation des formules et des fonctions à plusieurs variables.

1.4.4 Généraliser et valider algébriquement des conjectures

Généraliser et valider algébriquement des conjectures est une composante de l'activité algébrique fructueuse en matière de production de savoirs, car c'est en

généralisant des formules, des propriétés et des méthodes qu'on aboutit à des connaissances mathématiques générales, transférables à d'autres contextes et applicables dans d'autres situations.

Partant de l'étude de quelques cas particuliers, la généralisation permet d'exprimer des propriétés générales par le biais d'une conjugaison harmonieuse d'un raisonnement inductif et d'un symbolisme approprié. Radford (2004) postule que l'entrée des élèves dans une activité de généralisation exige d'eux un engagement dans un processus d'objectivation rendant leur intention perceptible, ce qui suppose la disponibilité et la maîtrise de moyens sémiotiques adaptés (discours, signes, artefacts, etc.). En effet, pour qu'il puisse voir le général dans le particulier, le mathématicien (novice ou confirmé) a recours au signe en tant que représentation adéquate du signifié. Se situant dans le cadre d'une approche anthropologique, l'auteur explique les difficultés des élèves par la rupture, existant entre les généralisations présymboliques, qu'il qualifie de généralisations « factuelles ou contextuelles », et la généralisation algébrique « symbolique », qu'ils doivent surmonter.

La généralisation factuelle est une généralisation d'actions débouchant sur un schème opérationnel objectivé par des ostensifs sémiotiques déictiques tels que le langage, les gestes et le rythme. Cette généralisation est, par exemple, illustrée par les premières productions numériques des élèves travaillant en groupe (en interagissant avec leurs pairs, pointant des figures particulières et faisant usage d'imagination et de prédiction) en vue de découvrir le terme général d'un pattern.

La généralisation contextuelle est un schème opérationnel dont les arguments sont des objets généraux caractérisés par le contexte spatio-temporel de la situation dont ils dérivent. Son objectivation sémiotique est composée de termes génériques. Cette généralisation présymbolique se manifeste, par exemple, lorsque les élèves progressent dans leur raisonnement en utilisant les termes : figure quelconque, figure suivante, etc. En procédant ainsi, ils accèdent à un deuxième niveau de généralisation plus abstrait mais qui reste en deçà du niveau de la généralisation algébrique car il est contextualisé par les propriétés spatiales et temporelles de la situation (Radford, 2004).

Le processus de généralisation algébrique peut être efficacement favorisé par un engagement des élèves dans des activités de recherche de régularité ou de prédiction telles que l'activité suivante (figure 3), où les élèves sont invités à analyser les relations entre les termes consécutifs du pattern et conjecturer des formules permettant de déterminer le nombre d'allumettes nécessaires à la construction d'un motif quelconque de rang n tout en contrôlant algébriquement la validité des formules équivalentes ainsi obtenues par différents raisonnements.

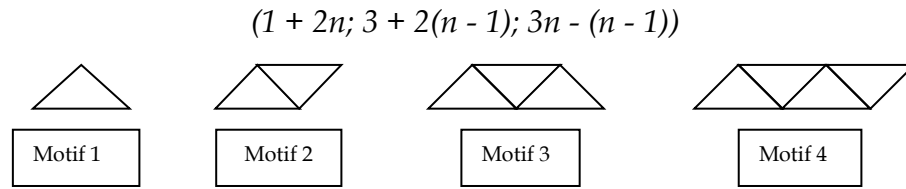


Figure 3 : Exemple de pattern, les triangles accolés

Le processus de généralisation sollicité par l'activité algébrique se déroule généralement en trois étapes :

- Expérimenter en étudiant des cas particuliers, en procédant par essais et erreurs, en exhibant des exemples génériques, etc.;
- Conjecturer une formule ou une propriété générale;
- Valider algébriquement² la conjecture obtenue.

1.4.5 Prouver algébriquement un résultat

La composante « Prouver algébriquement un résultat » est une composante essentielle de l'activité algébrique. Bien que la preuve mathématique ne soit pas une composante propre à l'algèbre, elle confère à l'activité algébrique une raison d'être liée à l'argumentation, au jugement et à l'exercice de l'esprit critique. Elle intervient également dans le processus de la construction de la rationalité mathématique chez les élèves.

Cette composante se manifeste et se développe progressivement, tout au long de la scolarité et dès la première année du collège à travers la sensibilisation des élèves à :

- Contrôler un résultat (dans le cas du numérique, par exemple);
- Construire une preuve pragmatique (par induction, par exemples génériques, par référence au contexte sémantique, etc.);
- Élaborer une preuve intellectuelle par application de règles algébriques formelles (Balacheff, 1987).

Concernant les outils mobilisés dans les situations de preuve intellectuelle, Barallobres (2004) note que certains critères de validité ainsi que les règles du débat interélèves ne doivent pas se construire préalablement, hors contexte et de façon détachée de l'activité mathématique, mais on gagne à les considérer comme objets de construction dans la dynamique du processus de preuve. De ce fait, ils ne peuvent pas être institutionnalisés préalablement dans le cadre d'un système

² Après modélisation algébrique, étant entendu que les composantes de l'activité algébrique ne sont pas indépendantes. Elles sont susceptibles de s'activer parfois simultanément. Les étudier séparément nous est dicté uniquement par souci méthodologique.

axiomatique mais ils se développent en cours de travail en classe où ils sont sujets à des accords sociaux et culturels.

Les élèves construisent tout au long de leur scolarité un système de normes de travail mathématique conforme à l'institution à laquelle ils sont assujettis. Ce qui fait que, pour plusieurs élèves entrant au lycée tunisien, les activités de preuve et de démonstration sont souvent perçues comme des tâches techniques à exécuter mécaniquement, voire des méthodes institutionnalisées à suivre « c'est comme ça qu'on procède en mathématiques » et, de ce fait, ces activités sont généralement déconnectées des nécessités de la preuve mathématique.

Construire la preuve algébrique et la faire accepter par les élèves en tant qu'outil d'argumentation et de levée de contradiction contribue à son développement et ne manque pas de procurer du sens et de donner une raison d'être à l'activité algébrique.

Notons enfin que le développement du processus de preuve algébrique nécessite également de redonner une place de choix aux éléments technologico-théoriques dont la mobilisation semble être en constante réduction dans les manuels scolaires tunisiens de la première année du secondaire (Kouki et Hassayoune, 2015), car ceux-ci constituent les principaux moyens de contrôle et de justification des calculs algébriques conduits dans les processus de preuve. Nous rejoignons ainsi Assude et al. (2012) dans leur quête des raisons d'être et des finalités de l'enseignement de l'algèbre en redonnant une place importante aux activités de justification des étapes du calcul algébrique.

2. Propositions didactiques

Dans la pratique enseignante courante, au deuxième cycle de l'enseignement de base et au début de l'enseignement secondaire tunisien, le calcul algébrique est généralement mobilisé de façon décontextualisée et coupé des problèmes qui en montrent l'intérêt et qui lui donnent du sens. Dans les programmes et les manuels scolaires, des connexions sont établies entre calcul algébrique et calcul numérique dans une optique assimilant en quelque sorte l'algèbre à une arithmétique généralisée (Hassayoune, 2014). Les activités algébriques sont, de ce fait, réalisées dans le prolongement du calcul numérique (en remplaçant les nombres par des lettres, en guise de généralisation) et sont exclusivement basées sur l'application formelle de règles préalablement mémorisées. Ce constat n'est pas propre au cas tunisien, Chevallard (1989) constate que « la manipulation des expressions algébriques au cours du premier apprentissage [...] n'est tendue vers aucun but (mathématique) extérieur au calcul algébrique, lequel doit alors trouver en lui-même la source de ses propres exigences » (Chevallard, 1989, p. 47).

Il est avéré aujourd'hui que de telles pratiques sont inefficaces. Il faudrait plutôt construire du sens aux notions mathématiques étudiées à travers la résolution de problèmes par la voie de la modélisation des situations, la mobilisation des savoirs sous leurs deux formes « outil » et « objet » et l'usage de jeux de cadres adéquats (Douady, 1987).

Dans cette optique, la résolution algébrique des problèmes ne doit pas constituer, comme c'est le cas aujourd'hui dans les systèmes scolaires privilégiant le paradigme de la visite des savoirs (Chevallard, 1999), uniquement un aboutissement de l'enseignement de l'algèbre. Au lieu de considérer qu'une fois les élèves équipés d'aptitudes et d'habiletés algébriques préalables, ils seront à même de pouvoir s'engager a posteriori dans la résolution de problèmes, il serait plutôt question de faire de cette dernière activité le point d'ancrage, voire le support de toute œuvre didactique visant le développement de la pensée algébrique chez les élèves (Marchand et Bednarz, 2000).

Par ailleurs, les programmes scolaires tunisiens ne cessent de rappeler, tout au long de leurs libellés, la nécessité de la mise en fonctionnement des connaissances algébriques acquises en vue de résoudre des problèmes familiers et non familiers, y compris des problèmes d'optimisation. « Les élèves résolvent des problèmes algébriques dans des situations mathématiques ou en rapport avec leur environnement [...] Les élèves modélisent des situations réelles [...] Les élèves résolvent des problèmes d'optimisation » (République tunisienne, 2005, p. 10).

En nous inscrivant dans cette optique didactique de résolution de problèmes et en tenant compte des résultats de nos investigations épistémologiques et conceptuelles, nous avons élaboré un « Document-ressource » constitué d'un corpus de dix situations didactiques³ en vue de le mettre à la disposition des enseignants. En guise de contrôle de la validité de ce document, nous avons proposé les situations à un échantillon d'élèves de première année du secondaire et à leurs professeurs pour en apprécier la pertinence en matière de développement de l'activité algébrique telle qu'elle a été caractérisée dans la première partie de cet article. Nous décrivons dans ce qui suit, la méthodologie suivie dans l'élaboration, l'analyse a priori, l'expérimentation et l'analyse a posteriori des situations proposées, ensuite nous présentons à titre d'exemple la mise en œuvre de cette méthodologie dans l'analyse de l'une de ces situations.

2.1 Méthodologie

La théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1991, 1992, 1999) constitue le cadre théorique principal de nos investigations didactiques expérimentales. Cette théorie didactique a l'avantage de situer les activités mathématiques dans

³ Voir leurs énoncés en annexe 1.

l'ensemble des activités humaines habituellement accomplies en les modélisant par des praxéologies ou organisations praxéologiques. Une praxéologie est composée dans sa forme ponctuelle primitive d'un type de tâches, d'une technique servant à l'accomplir, d'une technologie justifiant l'utilisation de cette technique et d'une théorie étayant la technologie. Ainsi, ce cadre d'analyse nous convient dans notre travail d'investigation et s'adapte bien à ce que nous comptons proposer comme alternative didactique. En effet, la modélisation des œuvres mathématiques en termes de praxéologies nous permet de délimiter efficacement les composantes et les manifestations de l'activité algébrique étudiée et d'envisager des conditions et des supports pour son développement.

Nous empruntons également à la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1988), les concepts d'a-didacticité, de milieu, d'ostension assumée ou déguisée et de contrat didactique dans l'analyse des situations didactiques que nous proposons comme support de développement de l'activité algébrique.

Par ailleurs, plusieurs variables ont été prises en compte et opérationnalisées pour faire réussir l'élaboration et la mise en œuvre des situations proposées. Ces variables constituent tout autant des indicateurs de leur validité didactique que des leviers sur lesquels l'enseignant peut s'appuyer pour les gérer en contextes d'enseignement, d'apprentissage et/ou d'évaluation.

Nous citons, ci-dessous, celles que nous avons retenues pour mener nos analyses didactiques :

V₁ : La formulation de l'énoncé de la situation (champ lexical utilisé, ordre d'introduction des informations, mode de questionnement, place de la question dans l'énoncé, interconnexions des notions mobilisées, enjeux heuristiques, etc.);

V₂ : L'accessibilité (la situation et le questionnement du problème sont conçus de façon qu'un élève moyen puisse s'engager dans sa résolution avec les ressources linguistiques et cognitives dont il dispose);

V₃ : La mobilisation de la dialectique outil/objet;

V₄ : Le champ et la nature des objets mathématiques sollicités (domaine numérique, domaine algébrique, statut d'outil, statut d'objet, etc.);

V₅ : Les composantes de l'activité algébrique mobilisées;

V₆ : Les praxéologies algébriques prescrites dans le programme d'algèbre de la première année du lycée tunisien;

V₇ : La conversion des registres sémiotiques et les jeux de cadres sollicités;

V₈ : Le système de représentation symbolique susceptible d'être utilisé lors de l'exécution des tâches par l'élève (lettres, signes opératoires, expressions

algébriques, équations, inéquations, systèmes, fonctions, tableaux de valeurs, graphes, etc.).

Nous avons également respecté un certain nombre de conditions permettant aux situations didactiques proposées de constituer de véritables opportunités d'apprentissage. Ces conditions sont inspirées de Brousseau (1988) et Douady (1994); nous les exposons ci-dessous :

- La tâche proposée n'est pas réduite à une simple application des règles ou des méthodes connues. Les connaissances disponibles ne permettent pas à elles seules de résoudre le problème;
- Les nouveaux savoirs déclaratifs (théoriques), procéduraux (savoir-faire) et conditionnels (stratégiques) à construire ou à développer, qui constituent les enjeux de l'apprentissage, sont les outils de la résolution du problème (Tardif, 1992);
- La situation du problème est susceptible de s'exprimer dans au moins deux cadres ou registres sémiotiques.

Sur le plan de l'expérimentation des situations, nous avons pris comme base d'analyse, les composantes et la structure de l'œuvre didactique prévue ou mise en œuvre en termes de moments de l'étude (Chevallard, 2009).

Selon la théorie anthropologique du didactique, pour être efficace, le cheminement de l'étude doit comporter six phases didactiques appelées « moments de l'étude » : le moment de la première rencontre avec le type de tâches T , le moment de l'exploration du type de tâches T et de l'émergence d'une technique τ , le moment de l'élaboration de l'environnement technologico-théorique $[\theta, \Theta]$, le moment du travail de la technique, le moment de l'institutionnalisation et le moment de l'évaluation. Sans qu'ils soient nécessairement successifs sur le plan chronologique, ces moments doivent avoir lieu aux instants opportuns avec des possibilités d'aller-retour, le cas échéant.

Pour avoir une idée d'ensemble du corpus des situations didactiques suggérées, nous consignons dans les tableaux 1 et 2 suivants, leurs principales caractéristiques mathématiques et didactiques. En raison du manque d'espace, nous nous restreindrons, dans le premier tableau, à la considération des trois variables V_1 , V_2 et V_3 et nous n'exposerons pas de façon détaillée toutes les analyses, mais uniquement quelques résultats de celles-ci.

Tableau 1 : Caractérisation des dix situations au regard des variables V_1 , V_2 et V_3

Variables →			
Situations ↓	V1 : Formulation de l'énoncé de la situation	V2 : Accessibilité de la situation	V3 : Mobilisation de la dialectique Outil/objet dans la gestion de la situation
S1	- Langage simple, vocabulaire à la portée. - Phrases courtes. - Questionnement heuristique.	Engagement facile par l'entremise des connaissances arithmétiques disponibles.	Pour le concept d'expression algébrique : des programmes de calcul, outils pour modéliser et objets d'étude à travers leur traitement.
S2	- Questionnement varié et direct. - Énoncés falsifiables.	Possibilité de preuve, par exemples génériques, à la portée de tous les élèves.	Règles du calcul algébrique : - Outils en situation de preuve. - Objets d'étude et de revue en cas d'utilisation maladroite, de remédiation ou d'approfondissement.
S3	Formulation en langage algébrique et questionnement heuristique.	Présentation claire et détaillée des étapes du raisonnement algébrique étudié, convenablement accessible aux élèves.	- Contrôle du résultat de chaque étape. - Retour sur les justifications technologico-théoriques en réexaminant les traitements algébriques réalisés.
S4	- Questionnement clair. - Introduction de mots techniques spécifiques à l'épargne (intérêt composé, taux, etc.)	Un possible démarrage numérique accessible à tous les élèves.	- Règles de transformation de l'expression modélisant le montant final obtenu (factorisation, puissances, etc.). - Outils pour mener une résolution algébrique.
S5	- Présentation en langue naturelle accessible. - Problème d'optimisation.	Une entrée possible par essais et erreurs, ce qui favorise l'expérimentation et l'engagement de tous les élèves.	La technologie : [si $x + y = c$, où c est une constante donnée, alors le produit $x.y$ est maximal lorsque $x = y = c/2$] est en même temps objet d'étude et outil de résolution.

Développement de l'activité algébrique à l'entrée au lycée tunisien

S6	- Formulation langagière simple et concise. - Pourrait s'accompagner de figures géométriques illustratives.	Accessibilité facile par l'intermédiaire de la manipulation des configurations géométriques élémentaires familières.	Le théorème de Pythagore dans sa forme algébrique est un outil de résolution du problème. Il devient un objet d'étude sous des formulations géométriques.
S7	Problème déconnecté : pas de pont apparent entre les données et les inconnues.	Engagement préalable par voie numérique.	-Système de 3 équations linéaires à trois inconnues ramené à un système de 2 équations à 2 inconnues. -Outil de résolution algébrique.
S8	Énoncé langagier étayé par deux tableaux de valeurs.	Les connaissances sur la proportionnalité, disponibles depuis l'école primaire permettent aux élèves de s'engager dans la résolution au moins numériquement.	Équations, inéquations, fonctions linéaires, fonctions affines : outils de résolution mais aussi objets d'étude in situ.
S9	-Toutes les données sont fournies. Questionnement direct.	Accessible, vu la disponibilité de la formule $v = d/t$.	Outils/objets algébriques et vectoriels (équation, repérage sur une droite orientée)
S10	Formulation adaptée au niveau langagier des élèves du point de vue du vocabulaire et des mots techniques.	Assez bonne accessibilité eu égard à la mise en situation adoptée.	Équations, inéquations, fonctions linéaires et affines : outils de modélisation et objets d'étude en contexte.

Tableau 2 : Objets et processus algébriques susceptibles d'être mobilisés dans la gestion des dix situations

 Objets et processus algébriques mobilisés Situations 	Expressions algébriques et identités remarquables	Équations et inéquations, Systèmes d'équations et d'inéquations	Fonctions linéaires et affines	Composantes de l'activité algébrique mobilisées
S ₁	Produit (résultat) et processus du programme de calcul.	Prolongement : - Recherche du nombre pensé pour que deux programmes de calcul donnent deux résultats égaux, dans un ordre donné, etc. - Considération de deux nombres pensés.	Prolongement : en considérant la variation du produit du programme de calcul en fonction du nombre pensé.	<i>c₁, c₂, c₃, c₄, c₅</i>
S ₂	Modélisation des propriétés arithmétiques à l'aide d'expressions algébriques.	X	X	<i>c₁, c₂, c₃, c₄, c₅</i>
S ₃	- Équivalence d'égalités algébriques. - Identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$	X	X	<i>c₃, c₅</i>
S ₄	Établissement d'une formule générale régissant l'épargne à intérêt annuel composé.	Outils potentiels pour répondre à des questions subsidiaires concernant la détermination de certains paramètres (<i>t</i> , <i>c₀</i> , <i>n</i>), les autres étant fixés. $C_n = C_0(1 + t \cdot 10^{-2})^n$		<i>c₁, c₂, c₃, c₄</i>

Développement de l'activité algébrique à l'entrée au lycée tunisien

S ₅	- Identités remarquables. - Complétion d'un début de carré. - Majoration d'expressions algébriques.	$2(l + L) = a \Leftrightarrow L = \frac{a}{2} - l$	$S(l) = \frac{al}{2} - l^2$	C ₁ , C ₂ , C ₃ , C ₅
S ₆	- Théorème de Pythagore. - Règles d'équivalence d'égalités algébriques.	X	X	C ₂ , C ₃ , C ₅
S ₇	Expressions à l'aide d'une inconnue opérationnelle.	Système de 3 équations linéaires du premier degré à trois inconnues.	Ramené à un système de 2 équations à 2 inconnues, une résolution graphique deviendrait possible.	C ₁ , C ₂ , C ₃ , C ₅
S ₈	Expressions des coûts C et C' en fonction de la distance à parcourir.	Équations et inéquations utilisées dans la résolution algébrique.	Graphes des fonctions définies par : $C(x) = 1/3 \cdot x$ et $C'(x) = 1/5 \cdot x + 31$ $(x \geq 90)$	C ₁ , C ₂ , C ₃ , C ₄ , C ₅
S ₉	Expressions des équations horaires.	Équation : $v_1 \cdot t = 90 - v_2 \cdot t$	En cas de résolution graphique.	C ₁ , C ₂ , C ₃ , C ₄ , C ₅
S ₁₀	Expressions des propositions des deux agences.	$60 + 4x = 5x$ $60 + 4x < 5x$	En cas de modélisation fonctionnelle à l'aide de fonctions affines	C ₁ , C ₂ , C ₃ , C ₄ , C ₅

c₁ : Reasonner analytiquement, c₂ : Modéliser des situations, c₃ : Traiter des expressions algébriques, c₄ : Généraliser et valider algébriquement une conjecture, c₅ : Prouver algébriquement.

L'analyse didactique du corpus des dix situations proposées, dont les deux tableaux précédents présentent quelques éléments, met en évidence les faits saillants suivants :

- La gestion des situations proposées favorise le développement de toutes les composantes de l'activité algébrique ainsi que la consolidation des savoirs et des processus algébriques du programme d'une manière efficace et équilibrée. En effet, tout en privilégiant la construction et le traitement finalisés des modèles algébriques, cette gestion ne manque pas d'activer *in situ* des processus transformationnels, équationnels, fonctionnels et graphiques pertinents;
- Notre proposition didactique semble satisfaire aux conditions théoriques retenues pour sa construction. Elle offre des ressources et des outils d'apprentissage qui permettent de rompre avec les pratiques fortement axées sur l'acquisition des techniques algébriques hors contexte et se basant souvent sur l'usage des contrats didactiques d'ostension assumée ou déguisée (Brousseau, 1996) qui laissent une place réduite à la construction des connaissances et ne favorise pas le déplacement topogénétique vers les élèves;
- En privilégiant l'entrée dans l'activité algébrique essentiellement par l'entremise de modélisation de situations mathématiques ou extramathématiques, notre proposition se veut également porteuse d'une intention d'accompagnement des élèves pour surmonter leurs difficultés en langue française, particulièrement accentuées par le changement de la langue d'enseignement des mathématiques de l'arabe au français à partir de ce niveau scolaire;
- La conversion des registres de représentation (rhétorique, numérique, algébrique, géométrique, graphique et fonctionnel) permet de consolider la maîtrise des deux processus sémiotique et sémantique et d'appréhender le sens et la structure des expressions algébriques par l'intermédiaire des transformations syntaxiques appropriées.

2.2 L'expérimentation des situations didactiques

L'expérimentation des situations est réalisée dans un contexte scolaire d'apprentissage au cours de l'année scolaire 2018/2019 et dans deux lycées du Commissariat régional de l'éducation de Monastir (Tunisie).

Nous avons convenu avec les enseignants associés à la recherche que l'expérimentation des situations proposées soit réalisée sous forme de devoir à la maison et que la correction des productions écrites et la séance de compte-rendu en classe soient des occasions propices à l'analyse didactique desdites situations et

à l'évaluation de l'impact de leur mise en œuvre sur l'activité mathématique des élèves. Plusieurs raisons nous ont amenés à faire ce choix :

- Le programme scolaire, chargé en contenus disciplinaires (République tunisienne, 2005), laisse peu de place aux activités de recherche et d'approfondissement. Le temps scolaire (4 h/semaine) ne suffit même pas à couvrir ce programme;
- La préconisation par l'institution des devoirs à la maison n'a pas été suivie de dispositifs d'accompagnement étayant sa consistance, son contenu et ses objectifs. Notre proposition didactique s'inscrit donc également dans cette perspective explicative de ce qui pourrait être préconisé en termes de développement d'attitudes de recherche, d'initiation à la rédaction des solutions et de gestion de situations non familières;
- Le choix de proposer ces situations en devoirs à la maison permet de laisser aux élèves plus de temps à la réflexion, la résolution et la rédaction soignée des solutions. Les analyses didactiques de leurs acquis s'en trouveraient ainsi améliorées d'autant plus que ceux-ci sont susceptibles de transparaître sous deux formes, l'une écrite (à la maison) et l'autre orale et présenteielle (en séance de correction).

Les activités sont proposées aux élèves de trois classes de première année du secondaire au fur et à mesure de l'avancement du programme d'algèbre et en accompagnement des cours ordinaires, sous forme de devoirs à la maison. Cette modalité fait en sorte que le temps scolaire puisse être consacré à la gestion des erreurs et à la remédiation aux insuffisances qui seront éventuellement constatées.

Participent à cette expérimentation 89 élèves scolarisés dans trois classes d'effectifs respectifs 32, 35 et 22, ainsi que leurs enseignants. Nous avons tenu à informer ces derniers, à temps, de l'objectif et des supports de la recherche et à les convier à les étudier avant l'expérimentation. Ceci leur a permis de programmer des interventions pédagogiques (proposition de situations selon la progression dans l'application du programme et en fonction des besoins ressentis, correction et annotations des productions écrites, déroulement des séances de correction, etc.) adaptées du point de vue du calibrage du travail demandé, des plages horaires et de l'orchestration de la mise en œuvre. La réponse au questionnaire qui leur a été adressé nous a révélé leurs avis sur la pertinence didactique des situations et leur a permis également de prévoir et d'anticiper les comportements de leurs élèves dans la gestion des situations.

Parmi les dix situations proposées, une situation semble particulièrement pertinente de par son aspect non familier, son contexte géométrico-algébrique et son caractère général et évolutif. Nous la choisissons comme exemple pour

illustrer notre démarche d'analyse didactique du corpus des situations. Les raisons de notre choix étant les suivantes :

- Cette situation d'optimisation est recommandée par le programme scolaire et est non familière aux élèves de la première année du secondaire qui sont souvent exposés aux activités de calcul algébrique formel hors contexte;
- La gestion de cette situation fait appel à plusieurs registres de représentation ce qui permet de donner sens aux différentes manipulations par l'entremise de leur mutuelle conversion in situ;
- Le paramétrage des données de la situation lui confère un caractère général. De ce fait elle engendre toute une famille de situations dont la modélisation par une expression paramétrée favorise l'émergence de nouvelles questions et l'accroissement des connaissances.

Nous présenterons dans les sections suivantes, nos analyses a priori et a posteriori de cette situation, en discutant sa potentielle efficacité dans le développement de l'activité algébrique chez les élèves à l'entrée au lycée tunisien.

2.3 Analyse a priori de la situation choisie

La situation didactique, intitulée « Problème d'optimisation » a pour objectif d'établir une propriété remarquable des rectangles isopérimétriques. Elle porte sur l'optimisation de l'aire d'une parcelle de terrain rectangulaire à périmètre fixé en permettant aux élèves d'investir leurs connaissances algébriques pour répondre, dans un contexte idoine, à la question « Comment optimiser une quantité dépendante d'une autre quantité? ». Cette situation s'inscrit également dans le vif des injonctions institutionnelles relatives à la mobilisation des savoirs algébriques construits dans la résolution de problèmes (République tunisienne, 2005).

2.3.1 Analyse a priori du point de vue mathématique

Cette situation fait partie d'une famille de situations engendrée par ce que Chevallard appelle « question génératrice » au sens de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 2009, p. 27). La situation répond, dans un contexte donné, à la question « Comment optimiser une quantité dépendant d'une autre? ».

La gestion de cette situation génère une activité mathématique relative au type de tâches T : « Optimiser algébriquement une quantité dépendante d'une autre quantité »; selon le contexte et le niveau scolaire, plusieurs techniques τ_k attendues par l'institution sont susceptibles d'être convoquées pour accomplir ces tâches. L'activité mathématique à déployer peut donc être symbolisée en dernière instance, par $[T, \tau_k, \theta_k, \Theta_k]_{1 \leq k \leq 3}$ où, suivant l'avancement dans le cursus scolaire, les τ_k sont :

τ_1 : « Majoration algébrique de la quantité à optimiser »;

τ_2 : « Détermination graphique des extremums d'une fonction modélisant la quantité à optimiser »;

τ_3 : « Détermination des extremums d'une fonction en utilisant sa fonction dérivée ».

Le niveau scolaire étudié restreint notre analyse à la considération de la technique τ_1^4 .

Tel qu'il est posé, ce problème appelle la construction d'un modèle algébrique et à l'engagement dans un processus de résolution s'appuyant sur un minimum de connaissances mathématiques (formules donnant l'aire et le périmètre d'un rectangle et identités remarquables).

La présence d'un paramètre (a périmètre du rectangle) confère à l'étude un caractère général permettant de gérer, dans un même élan, toute une famille de situations faisant intervenir l'aire, le périmètre et les dimensions d'un rectangle donné. Cette paramétrisation de la situation permet d'élargir les aspects de son étude au-delà de la question posée en poussant le processus d'algébrisation entrepris dans sa modélisation jusqu'à sa dernière étape (Ruiz-Munzón et al., 2012) à travers la manipulation de formules à plusieurs variables (toutes équivalentes à la relation $2l^2 - al + 2S = 0$).

Enfin, l'aspect significatif et finalisé de la situation (contexte géométrique d'optimisation) ne manque pas de susciter la motivation des élèves à relever le défi et à s'engager dans la résolution en mobilisant, en contexte, leurs savoirs et savoir-faire algébriques.

Si l'on désigne par l et L les dimensions du rectangle et S son aire, on aura successivement les écritures suivantes :

$$2(l + L) = a \Leftrightarrow L = \frac{a}{2} - l \quad (1)$$

$$\text{or } S = lL \text{ donc } S = l\left(\frac{a}{2} - l\right) \quad (2)$$

$$S = \frac{al}{2} - l^2 \quad (3)$$

⁴ Conformément au programme de la première année du secondaire actuellement en vigueur en Tunisie, l'analyse fonctionnelle porte uniquement sur les fonctions linéaires et affines. Il est donc hors de question, pour ce niveau scolaire, d'envisager l'étude des variations des fonctions autres que celles-ci.

$$S = \frac{al}{2} - l^2 - \frac{a^2}{16} + \frac{a^2}{16} \quad (4)$$

$$S = -(l^2 - \frac{al}{2} + \frac{a^2}{16}) + \frac{a^2}{16} \quad (5)$$

$$S = \frac{a^2}{16} - (l - \frac{a}{4})^2 \quad (6)$$

L'égalité (6) montre que l'aire S est maximale lorsque $l - \frac{a}{4} = 0$; elle est alors égale à : $\frac{a^2}{16}$. Dans ce cas on a : $l = L = \frac{a}{4}$, ce qui veut dire que la surface clôturée est un carré de côté $\frac{a}{4}$.

Notons enfin que le nombre a est susceptible de jouer le rôle d'une variable didactique sur laquelle l'enseignant peut jouer pour gérer le travail des techniques de transformation des expressions algébriques à l'aide d'une identité remarquable. Ainsi, celui-ci pourrait par exemple commencer par traiter des cas particuliers où le réel a est donné numériquement avant d'aborder le cas général.

Notons également que c'est dans ce même ordre d'idées que nous avons choisi un rectangle de périmètre a afin que le début du développement d'un carré ne soit pas visible du premier coup par les élèves.

Les écritures (1) et (2) sont obtenues par application directe des formules donnant le demi-périmètre et l'aire d'une surface rectangulaire.

L'écriture (3) est obtenue par un développement de l'expression algébrique précédente.

Les écritures (4) et (5) ne sont pas, a priori, évidentes pour un élève moyen du niveau scolaire étudié. Elle nécessite une bonne observation de la structure de l'expression (3) qui permet de faire apparaître un début du développement d'un produit remarquable. La technique sous-jacente est d'ailleurs utilisée pour établir la forme canonique d'un trinôme du second degré et ouvre ainsi la porte à plusieurs applications algébriques.

La dernière étape du processus d'optimisation prévu consiste à voir dans l'expression (6) une différence d'une quantité constante ($\frac{a^2}{16}$) et d'une quantité variable dépendant de l , à savoir $(l - \frac{a}{4})^2$ et de déployer un raisonnement analytique qui fournit la condition sur la variable l pour que l'aire S soit maximale.

La composante « Traiter des expressions algébriques » de l'activité algébrique est ainsi sollicitée et mobilisée in situ. Chaque pas de la chaîne du raisonnement algébrique est validé et motivé par un but, une preuve et une technologie spécifique.

Notons que malgré la modélisation de l'aire S du rectangle par l'expression d'une fonction polynôme du second degré de variable l ($S(l) = \frac{a}{2}l - l^2$), il n'est malheureusement pas possible d'accomplir le type de tâches proposé en utilisant une technique d'optimisation fonctionnelle, et ce, conformément au programme scolaire de la première année du secondaire qui limite l'étude des variations fonctionnelles aux seules fonctions linéaires et affines. Cette technique pourra alors être mise en œuvre l'année scolaire suivante (deuxième année du secondaire) pour traiter le type de tâches considéré.

Le tableau 3 ci-dessous fait état des connaissances mathématiques mises en jeu, des composantes de l'activité algébrique à mobiliser et des représentations sémiotiques susceptibles d'être convoquées.

Tableau 3 : Aspects sémantiques et sémiotiques de la situation

Objets mathématiques mis en jeu	Composantes de l'activité algébrique convoquée	Formulation de l'énoncé de la situation	Les systèmes de représentation symbolique mobilisés
- Formules donnant le périmètre et l'aire d'un rectangle. - Identités remarquables. - Optimisation de la valeur d'une grandeur variable.	- Modéliser une situation. - Reasonner analytiquement. - Traiter des expressions algébriques. - Prouver algébriquement un résultat.	- Présentation de l'énoncé en langue naturelle accessible. - Données relationnelles non explicitées. - Questionnement d'optimisation. - Aucune indication sur le processus de résolution à suivre.	- Algébrique. - Géométrique. - Rhétorique.

2.3.2 Analyse a priori du point de vue didactique

Compte tenu des résultats de l'analyse a priori de l'activité mathématique et du niveau des élèves auxquels s'adresse la situation, nous prévoyons que l'action didactique réservera une place de choix au moment de la première rencontre avec le type de tâches projeté. Ainsi, la compréhension de l'enjeu du problème, la distinction de ce qui a été donné de ce qui ne l'est pas, l'exemplification à l'aide de données numériques, etc., constituent des arrêts clés dans ce moment didactique de l'étude.

Dans le moment de l'exploration du type de tâches et l'émergence de la technique susceptible de l'accomplir, la modélisation algébrique de la situation jouera un rôle prépondérant; c'est elle qui traduira la situation en termes d'objets algébriques (expressions littérales, inégalités et égalités) manipulables et se prêtant à des transformations porteuses de nouveaux sens et productrices de nouvelles connaissances. Nous prévoyons des interventions décisives et calibrées de la part de l'enseignant ainsi qu'une activité soutenue des élèves au cours de ces deux moments de l'exploration du type de tâches et de l'émergence de la technique compte tenu du caractère non familier de la situation et des difficultés de réinvestissement des connaissances disponibles en contexte de résolution de problèmes.

La mobilisation des éléments du bloc technologico-théorique, étayant la technique sollicitée, s'accomplira alors au fur et à mesure de l'avancée dans le processus d'algébrisation (expression de l'aire S en fonction d'une dimension du rectangle et son écriture sous une forme permettant de conclure).

Deux composantes d'une technique concluante pourraient particulièrement être travaillées et institutionnalisées au cours des deux moments didactiques « Travail de la technique » et « Institutionnalisation », la première a trait au traitement des expressions qui se présentent comme début du développement d'un carré et la deuxième concerne le processus d'optimisation d'une grandeur dépendante d'une variable en recourant à une majoration adéquate de l'expression algébrique modélisante de cette grandeur.

Enfin, dans le moment de l'évaluation, l'enseignant pourrait revenir sur la même situation mais en changeant les données du problème (en jouant sur la variable « périmètre a ») ou encore proposer d'autres situations de la même famille (recherche de deux ou trois nombres de somme constante et de produit maximal, par exemple). Dans cet ordre d'idées, une situation particulièrement intéressante de par les contraintes supplémentaires qu'elle induit, pourrait alors être proposée :

Soit (C) un cercle de rayon r donné. Déterminer, en fonction de r , les dimensions d'un rectangle d'aire maximale inscrit dans (C).

Le carré de côté $r\sqrt{2}$, répondant à la question pourrait alors s'obtenir soit en appliquant la règle permettant de maximiser le produit de deux nombres positifs de somme constante, soit en calculant le carré de l'aire du rectangle en fonction de r et de l'une de ses dimensions et majorer l'expression obtenue par $4r^4$.

En conclusion, on constate que la situation proposée possède un potentiel a-didactique non négligeable. L'intention d'enseigner des nouveaux savoir-faire n'est pas explicite, l'enjeu est heuristique et vise l'investigation algébrique du sens des variations des aires des rectangles isopérimétriques.

De plus, l'accessibilité à la gestion de la situation est grandement facilitée eu égard à son support géométrique et aux outils mathématiques élémentaires requis. En fait, ce que l'on veut faire apprendre aux élèves ce ne sont point des savoirs déclaratifs (théoriques) tout court, mais c'est un processus d'optimisation lequel processus constitue le moyen et l'outil de résolution du problème proposé. En outre le contrôle que peut exercer chaque élève sur ses propres réponses est également facilité par de possibles vérifications ad hoc portant sur des calculs simples d'aires de surfaces rectangulaires.

Pour terminer cette analyse a priori, notons que la situation considérée se prête également à une gestion informatique favorisant l'intégration des TICE dans l'apprentissage des mathématiques. Deux possibilités sont ainsi offertes :

1. À l'aide de logiciels de géométrie dynamique à l'instar de Cabri-Géomètre ou GeoGebra, il est possible de modéliser la situation par la construction d'un rectangle de périmètre fixé et l'affichage de son aire, et procéder, par déformation du rectangle, à des conjectures portant sur le sens des variations de cette aire;
2. À l'aide d'un tableur (Excel, par exemple), en calculant le produit P de deux nombres a et b dont la somme est constante, en observant le sens de variation de P et en émettant des conjectures portant sur la valeur maximale de P .

Cette opportunité permet aux élèves, en les familiarisant avec l'environnement informatique pour l'apprentissage humain (EIAH), d'expérimenter, de visualiser l'état maximal d'une grandeur variable et de contrôler les résultats obtenus. Cela serait alors une occasion propice à l'outillage de la classe d'un support technologique pendant les deux moments de la première rencontre avec le type de tâches et de l'évaluation.

2.3.3 Conclusion de l'analyse a priori de la situation choisie

L'analyse a priori de la situation permet de souligner sa richesse à la fois sur les plans mathématique et didactique. Sa gestion favorise la mobilisation et la consolidation des connaissances ainsi que des processus algébriques visés par le programme d'enseignement. Ainsi le traitement des expressions algébriques, les identités remarquables et les techniques de majoration et d'optimisation de quantités dépendantes sont mobilisés.

L'articulation des deux cadres géométrique et algébrique et la conversion des registres sémiotiques dans chacun d'eux ont permis de conférer du sens aux activités qui seront entreprises lors des moments de l'étude. Les composantes « Modéliser des situations », « Traiter des expressions algébriques », « Raisonner analytiquement » de l'activité algébrique sont susceptibles d'être principalement mobilisées et développées.

2.4 Analyse a posteriori de la situation choisie

La situation articule les deux cadres géométrique et algébrique et pose le problème d'optimisation de l'aire d'une surface rectangulaire de périmètre constant. Elle s'inscrit dans le cadre du développement des aptitudes algébriques stipulées dans le programme scolaire en vigueur.

2.4.1 Analyse des productions écrites des élèves

L'analyse des productions écrites des élèves (réalisées à la maison) montre que la majorité d'entre eux (80 %) se sont engagés dans la résolution du problème, mais rares sont ceux (10 %) qui ont efficacement traité le problème proposé.

Certains élèves (20 %) procèdent par essais et erreurs, en considérant des cas particuliers ($l = a/3$, $L = a/6$; $l = a/5$, $L = 3a/10$; $l = a/4$, $L = a/4$) ou en donnant au paramètre a une valeur numérique.

D'autres modélisent algébriquement la situation, mais commettent des erreurs de calcul algébrique, ce qui les a empêchés de trouver la bonne réponse. Le tableau 4 suivant résume les niveaux de réussite et le genre des démarches adoptées dans la gestion de cette situation par les 89 élèves testés.

Tableau 4 : Niveaux de réussite des élèves testés

	Adoption d'une méthode inductive en envisageant des cas particuliers	Adoption d'une modélisation algébrique		Non-réponse
		Concluante	Non concluante	
Nombre d'élèves	18	9	44	18

De par son caractère inhabituel et non familier, cette situation a engendré des réticences et des non-réponses de la part des élèves (20 %), mais elle n'a pas manqué de favoriser le recours à la modélisation algébrique par 60 % des élèves et à la mobilisation des connaissances disponibles (formules du périmètre et de l'aire d'un rectangle, traitement d'expressions algébriques, identités remarquables, inégalités, etc.) en contexte de résolution de problème.

2.4.2 Analyse de la séance de correction du devoir à la maison

Au vu des modestes résultats des élèves relevés dans leurs productions écrites, l'enseignant décide de réserver la majeure partie de l'apprentissage à l'explication de l'enjeu du problème posé et à la modélisation algébrique de la situation (moments de la première rencontre avec le type de tâches et de l'émergence d'une technique).

En s'adressant à toute la classe et par des questions ciblées, l'enseignant amène ses élèves à dégager des hypothèses, les éléments variables (les dimensions de la surface rectangulaire) et l'élément constant (le périmètre a , où a désigne un nombre réel strictement positif donné). La symbolisation des dimensions variables n'a pas soulevé de difficultés, les élèves se sont habitués à les noter l (pour largeur) et L (pour longueur).

Après l'écriture au tableau, par un élève, des expressions littérales donnant le périmètre et l'aire du rectangle en fonction de l , L et a , un travail de groupes s'est vite mis en place. Le professeur circule dans les rangs s'empêchant de suggérer une quelconque réponse, mais toujours disponible et prêt à encourager ses élèves à persévérer dans leur recherche en relançant le débat au sein des groupes par des questions du genre : « où en êtes-vous? », « êtes-vous sûrs de ce résultat? », « comment comptez-vous maximiser cette expression? », « comment allez-vous le prouver? », etc. Bref, tout en s'interdisant de répondre à la place des élèves, l'enseignant tient à les encourager et à ne pas les laisser sans aide.

À ce stade, un silence s'installe dans les groupes qui sont toujours en possession des deux formules initiales et qui s'activent à les exploiter à bon escient :

$$a = 2(l + L) \text{ et } S = l.L$$

Remarquant une initiative particulièrement intéressante émanant d'un groupe qui est arrivé à écrire l'aire en fonction d'une seule variable (l), le professeur invite l'élève rapporteur du groupe à faire part de la découverte :

$$S = l\left(\frac{a}{2} - l\right)$$

Celui-ci écrit alors :

$$S = l\left(\frac{a}{2} - l\right) = -l^2 + \frac{al}{2}$$

L'enseignant intervient alors et demande à l'élève d'écrire cette dernière expression de façon à faire apparaître un carré, une identité remarquable. Mais la présence du signe « - » devant l^2 n'a pas facilité la tâche et un nouveau moment de silence s'installe dans la classe.

L'enseignant intervient de nouveau et débloque la situation en suggérant :

$$S = l\left(\frac{a}{2} - l\right) = -l^2 + \frac{a}{2}l = -\left[l^2 - \frac{al}{2}\right]$$

Arrivé à ce stade, l'élève au tableau, accompagné de quelques camarades, et aidé par l'enseignant termine le travail en écrivant :

$$S = l\left(\frac{a}{2} - l\right) = -l^2 + \frac{al}{2} = -\left[l^2 - \frac{al}{2}\right] = -\left[\left(l - \frac{a}{4}\right)^2 - \frac{a^2}{16}\right] = \frac{a^2}{16} - \left(l - \frac{a}{4}\right)^2 \leq \frac{a^2}{16}$$

Cela montre que l'aire est maximale lorsque $l = a/4$ et $L = a/4$, c'est-à-dire lorsque la surface clôturée est un carré de côté $a/4$.

L'enseignant adopte une démarche d'apprentissage qui met en œuvre une intervention didactique prenant en charge principalement les deux moments exploratoire et technologico-théorique. Un tel choix semble orienter ses interventions didactiques vers des pratiques constructivistes qui sont caractérisées par la contextualisation des activités de résolution de problèmes proposées et par la construction de connaissances à travers la mobilisation des acquis antérieurs sous des contraintes déterminées (Bosch et Gascon, 2002).

En guise de travail de la technique et d'institutionnalisation de cette technique utilisée dans la réalisation de ce type de tâches (moments du travail de la technique et d'institutionnalisation), l'enseignant pose ensuite à ses élèves le problème général suivant :

Soit deux nombres réels positifs de somme constante c donnée. Déterminer ces nombres de façon que leur produit soit maximum.

Les élèves n'ont pas rencontré de difficultés majeures dans le processus de la modélisation algébrique de la situation. Ils ont proposé une symbolisation littérale des nombres cherchés en les notant x et y et ont écrit successivement les relations :

$$x + y = c \quad \text{et} \quad xy \text{ maximal.}$$

C'est à partir de ce moment que l'enseignant est intervenu pour accompagner la réflexion de ses élèves en les invitant à utiliser la première relation et à écrire autrement le produit xy .

Le processus algébrique est alors déclenché et la classe obtient successivement les écritures suivantes :

$$\begin{aligned} xy &= x(c - x) \\ &= xc - x^2 \\ &= -(x^2 - xc) \\ &= -\left[\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{c^2}{4}\right] \\ &= \frac{c^2}{4} - \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 \leq \frac{c^2}{4}. \end{aligned}$$

Le produit est alors maximal lorsqu'il est égal à $c^2/4$; dans ce cas on a :

$$x = c/2 \text{ et } y = c/2.$$

Le professeur fait remarquer aux élèves qu'on pourrait également raisonner autrement en soulignant que la dernière expression est une différence de deux quantités qui prend une valeur maximale lorsque la quantité positive à retrancher $(x - c/2)^2$ est minimale, c'est-à-dire, dans ce cas, nulle. On aura alors : $x - c/2 = 0$, ce qui implique que : $x = y = c/2$.

Malgré un encadrement très rapproché de la part du professeur, l'espace des responsabilités des élèves est resté assez important. La relance répétée de leur activité a ainsi permis de circonscrire leur travail mathématique dans le vif du but poursuivi, à savoir « optimiser une grandeur variable à l'aide de l'outil algébrique ».

Par ailleurs, il semble également que les élèves se sont trouvés, par moments, désarmés devant cette situation non familière, non par déficit de connaissances théoriques, mais par manque de fonctionnalité effective des savoirs appris.

2.4.3 Avis des enseignants sur la pertinence didactique de la situation choisie

La réponse au questionnaire qui a été adressé aux enseignants associés à l'expérimentation nous a révélé leurs avis sur la pertinence didactique de la situation et leur a permis également de prévoir et d'anticiper les comportements de leurs élèves face au travail proposé.

Les avis des enseignants questionnés sont très divers, voire parfois divergents. Certains d'entre eux apprécient l'activité mathématique susceptible d'être convoquée et soulignent son potentiel a-didactique. Ils perçoivent également sa portée à rendre fonctionnels les acquis algébriques disponibles, à travers les activités de résolution de problèmes.

D'autres pensent que les élèves seront rebutés par les difficultés rencontrées et ne fourniront, de ce fait, aucun effort de réinvestissement des connaissances algébriques construites.

Quatre des dix enseignants questionnés doutent des apports didactiques de la situation et vont même jusqu'à affirmer que les élèves ne disposent pas, à ce niveau scolaire, des outils nécessaires pour résoudre ce problème d'optimisation.

Ceci rend probable l'hypothèse selon laquelle les élèves concernés par notre étude ne sont pas suffisamment exposés aux situations complexes dont la gestion nécessite une modélisation et un traitement algébrique, et justifie notre intention de contribuer, par ce travail, à mettre à la disposition des enseignants des supports didactiques susceptibles de développer une véritable activité algébrique à ce

niveau scolaire. Le tableau 5 résume ces avis partagés des enseignants (leurs réponses sont transcrites en italique) :

Tableau 5 : Appréciation par les enseignants de la pertinence didactique de la situation

Solution (concise) attendue de la part des élèves :			
- Majoration de l'aire du rectangle exprimée en fonction d'une dimension. - Écriture de l'expression donnant l'aire du rectangle sans arriver à la maximaliser. - L'élève de première année du secondaire n'a aucun moyen pour déterminer la valeur maximale d'une expression algébrique du second degré en l, où l désigne une variable réelle [sic].			
Appréciation de la situation en termes de conformité avec le programme en vigueur, de clarté de l'énoncé et de potentiel d'activité algébrique :			
Mettre une croix dans la case correspondant à votre appréciation (0 : non pertinente; 1 : peu pertinente; 2 : pertinente; 3 : très pertinente).			
0	1	2	3
4/10	2/10	4/10	0/10
Commentaires (pertinence didactique de l'activité en matière de mobilisation de contenus, de raisonnements et de processus algébriques) :			
- Situation difficile pour un élève de première année du secondaire. - Le programme scolaire en vigueur ne fournit pas les outils théoriques et méthodologiques pour résoudre le problème. - La situation est conforme au programme et est utile à la mise en fonctionnement des connaissances algébriques disponibles.			

2.4.4 Conclusion de l'analyse a posteriori de la situation choisie

Compte tenu de leurs productions écrites à la maison et de leur comportement en séance de correction, les élèves ont fait preuve d'attitude de recherche et de connaissances mathématiques relativement suffisantes leur permettant d'entrer dans la gestion de la situation. Inversement, eu égard au pourcentage relativement faible des non-réponses, la situation proposée est apparue convenablement accessible à la diversité des profils cognitifs des élèves de ce niveau scolaire.

Par ailleurs, l'analyse des praxéologies algébriques que la situation sollicite montre qu'elle dispose d'un fort potentiel de développement de l'activité algébrique chez les élèves au début de l'enseignement secondaire tunisien. Elle dispose d'un milieu didactique riche permettant aux élèves d'interagir et de participer activement à la résolution du problème d'optimisation posé. Elle permet également de mettre en

évidence l'efficacité de la démarche algébrique dans la résolution de ce genre de problèmes par la voie d'une modélisation appropriée et d'une mobilisation à bon escient des techniques et des règles du calcul algébrique.

Conclusion

Par l'entremise d'une revue de littérature, nous nous sommes d'abord intéressés au décryptage de l'essence et des caractéristiques épistémologiques et conceptuelles de l'activité algébrique, ce qui nous a conduits à délimiter ses composantes cognitives ainsi que les types de tâches et les techniques qui lui sont associés.

Ainsi, nous avons constaté que l'activité algébrique se mobilise et se développe de façon optimale en contexte de résolution de problèmes faisant intervenir des relations et des variations quantitatives et nécessitant des aptitudes de modélisation et de raisonnement analytique. De plus, l'activité algébrique est sous-tendue par des aptitudes de traitement d'expressions algébriques, de généralisation et de preuve.

Nous avons ensuite présenté un ensemble de conditions et de critères servant à élaborer et analyser des supports didactiques susceptibles de favoriser le développement de l'activité algébrique chez les élèves à l'entrée au lycée tunisien. Dix situations didactiques sont ainsi élaborées et analysées en vue d'être proposées aux enseignants pour les aider à faire évoluer leurs pratiques et rendre leurs élèves plus aptes à mobiliser leurs acquis algébriques pour résoudre des problèmes.

L'expérimentation et les analyses a priori et a posteriori d'une situation d'optimisation nous ont alors permis de confronter, sur un exemple, nos propositions didactiques aux principales caractéristiques épistémologiques et conceptuelles de l'activité algébrique mises en évidence dans la première partie de cet article.

Ainsi les constats suivants sont relevés :

- L'expérimentation a permis aux élèves de gérer une situation problématique en faisant appel à des praxéologies algébriques pertinentes et conformes au programme scolaire actuellement en vigueur. La fonctionnalité et la raison d'être des connaissances mobilisées sont en grande partie, dégagées et mises en lumière in situ;
- Les difficultés rencontrées par les élèves dans la gestion de la situation font apparaître leur incapacité à travailler le modèle algébrique par l'intermédiaire d'un traitement qui permet de conclure. Les remédiations apportées par l'enseignant à ces difficultés lors de la séance de correction du devoir ont permis de parfaire leurs pratiques de modélisation et

d'analyse des situations, et de développer chez eux l'aptitude à articuler les deux aspects sémantique et syntaxique des écritures algébriques.

Nous estimons que ce que nous suggérons pourrait constituer des éléments de contenu scientifique et didactique en matière de formation initiale et continue des enseignants. En effet, sans l'association et la conviction de ceux-ci à cette alternative, rien ne sera possible et tout restera lettre morte comme c'était malheureusement le cas pour plusieurs initiatives didactiques innovantes récemment mises en place dans le système éducatif tunisien et vite abandonnées (l'approche par compétences, l'enseignement optionnel interdisciplinaire, l'approche par projets, etc.).

Par ailleurs, comme toute initiative personnelle de recherche, ce travail n'est pas dépourvu d'insuffisances et présente certaines limites.

Malgré la diversité de nos références épistémologiques et théoriques ainsi que la prise en compte des apports récents de la recherche en didactique de l'algèbre, notre cadre de référence de l'activité algébrique reste, tout de même, une construction théorique falsifiable en la confrontant davantage à la contingence de l'enseignement de l'algèbre dans les différents niveaux scolaires.

Un approfondissement de cette initiative et des perspectives de recherches pourrait concerner l'instauration à grande échelle des alternatives didactiques proposées sur le terrain de l'enseignement de l'algèbre au lycée tunisien. Des prolongements porteraient alors sur l'étude de l'impact des suggestions didactiques sur les pratiques ordinaires des enseignants en les accompagnant dans l'analyse réflexive de leurs interventions et dans l'appropriation de supports didactiques plus robustes.

Références

Assude, T., Coppé, S. et Pressiat, A. (2012). Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège. Atomisation et réduction. *Recherches en didactique des mathématiques, Hors-série*, 41-62.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situation de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2) 147-176. <https://doi.org/10.1007/BF00314724>

Barallobres, G. (2004). La validation intellectuelle dans l'enseignement introductif de l'algèbre. *Recherches en didactique des mathématiques*, 24(2.3), 285-328.

Ben Nejma, S. (2009). *D'une réforme à ses effets sur les pratiques enseignantes. Une étude de cas : l'enseignement de l'algèbre dans le système scolaire tunisien* [thèse de doctorat, Université Paris VII et Université de Tunis]. TEL. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01267461>

Ben Nejma, S. (2010). Les difficultés rencontrées dans la résolution algébrique des problèmes du premier degré. *Revue Africaine de Didactique des Sciences et des Mathématiques RADISMA*, 5.

Bosch, M. et Gascon, J. (2002). Organiser l'étude 2. Théories & empiries. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot et R. Floris (dir.), *Actes de la 11^e école d'été de didactique des mathématiques* (p. 23-40). Éditions la Pensée sauvage.

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique : Le milieu. *Recherche en didactique des mathématiques*, 9(3), 309-336.

Brousseau, G. (1996). L'enseignement dans la théorie des situations didactiques. Dans R. Noirfalise et M.-J. Perrin-Glorian (dir.), *Actes de la 8^e école d'été de didactique des mathématiques* (p. 3-46). IREM de Clermont Ferrand.

Burgermeister, P.-F. et Dorier, J.-L. (2013). La modélisation dans l'enseignement des mathématiques en Suisse romande. *Petit x*, 91, 5-24.

Carraher, D. W., Martinez, M. V. et Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, 40, 3-22. <https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7>

Carraher, D. W., Schliemann, A. D. et Schwarz, J. L. (2008). Early algebra is not the same as Algebra early. Dans J. Kaput., D. Carraher et M. Blanton (dir.), *Algebra in the Early Grades* (p. 235-272). Erlbaum.

Chevallard Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège, deuxième partie, perspectives curriculaires : La notion de modélisation. *Petit x*, 19, 43-72.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné* (2^e éd.). Éditions la Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12(1), 73-112.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 28(2), 135-182.

Chevallard, Y. (2007). *Séminaire de didactique des mathématiques PLC2, année universitaire 2006/2007*. IUFM d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (2009). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. Dans C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F.

Vandebrouck et F. Wozniak (dir.), *Actes de la XV^e école d'été de didactique des mathématiques* (p. 81-108). Éditions la Pensée sauvage.

Cousin, V. (1826). *Œuvres de Descartes, Tome onzième* (p. 201- 329). F. G. Levrault.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 5-31.

Douady, R. (1994). Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. *Repères Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques*, 15, 37-61.

Frege, G. (1882). *Écrits logiques et philosophiques* (traduction et introduction par Claude Imbert). Éditions du Seuil.

Gascon, J. (1993). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée ». *Petit x*, 37, 43-63.

Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, 17(2), 167-210.

Hassayoune S. (2014). *L'enseignement de l'algèbre en Tunisie, à la jonction classe du tronc commun/classe d'orientation du cycle secondaire : analyse praxéologique multidimensionnelle* [mémoire de maîtrise inédit]. Université virtuelle de Tunis.

Hitt, F., Saboya, M. et Cortés Zavala, C. (2016). An arithmetic-algebraic work space to promote free transit between the arithmetic and algebraic thinking: triangular numbers. *ZDM Mathematics Education*, 48(6), 775-791.
<https://doi.org/10.1007/s11858-015-0749-5>

Kaput, J. J. (1995). A research base supporting long term algebra reform. Dans D. T. Owens, M. K. Reed, et G. M. Millsaps (dir.), *Proceedings of the 17th Annual Meeting of North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-NA). Volume 1* (p. 71-94). ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. Dans C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde et A. Pérez (dir.), *Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education* (p. 271-290). Sociedad Andaluza de Educación Matemática. Thales.

Kieran C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139-151.

Kouki, R. (2008). *Enseignement et apprentissage des équations, inéquations et fonctions au secondaire : entre syntaxe et sémantique* [thèse de doctorat, Université de Lyon 1 et

Université de Tunis]. TEL. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00346287v2/document>

Kouki, R. et Hassayoune, S. (2015). Développement de la pensée algébrique dans le curriculum tunisien : Analyse épistémologique et institutionnelle. Dans L. Theis (dir.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes du colloque EMF2015* (p. 290-312). Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene.

Marchand, P. et Bednarz N. (2000). Développement de l'algèbre dans un contexte de résolution de problèmes. *Bulletin AMQ (Association mathématique du Québec)*, XL(4), 15-25.

République tunisienne. (2005). *Programmes de mathématiques. 1^{re} et 2^e années du secondaire*. Ministère de l'Éducation et de la Formation. https://www.sigmaths.net/Reader.php?var=Programme%20math_1_2anne.pdf

Oliveira, I., Rhéaume, S. et Geerts, F. (2017). Apprentissage de l'algèbre : procédures et difficultés rencontrées lors de la résolution de problèmes. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 20(3), 157-180. <https://doi.org/10.7202/1055732ar>

OCDE (2014), *Résultats du PISA 2012. Savoirs et savoir-faire des élèves : Performance des élèves en mathématiques, en compréhension de l'écrit et en sciences. Volume 1*. Éditions OCDE. <http://dx.doi.org/10.1787/9789264208827-fr>

Radford, L. (2004). La généralisation mathématique comme processus sémiotique. Dans G. Arrigo (dir.), *Atti del Convegno di didattica della matematica 2004* (p. 1-27). Divisione della Scuola.

Radford, L. (2013). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Group of Australia*, 26, 257-277. <https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2>

Ruiz-Munzón, N., Matheron, Y., Bosch, M. et Gascón, J. (2012). Autour de l'algèbre : les entiers relatifs et la modélisation algébrique-fonctionnelle. *Recherches en didactique des mathématiques, Hors-série*, 81-101.

Squalli, H. (2000). *Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base* [thèse de doctorat, Université Laval]. Corpus. <https://corpus.ulaval.ca/jspui/handle/20.500.11794/51025>

Tardif, J. (1992). *Pour un enseignement stratégique. L'apport de la psychologie cognitive*. Éditions Logiques.

Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. Dans C. Laborde (dir.), *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique* (p. 189-99). Éditions La Pensée sauvage.

Annexe 1 : Corpus des situations didactiques proposées

1- Le problème du prestidigitateur

- Pense à un nombre.
- Ajoute-lui 2.
- Élève le résultat au carré.
- Multiplie ce que tu trouves par 2.
- Retranché le double du carré du nombre auquel tu as pensé.
- Divise le résultat par 8.
- Retranché le nombre auquel tu as pensé.
- Que trouves-tu? Ce résultat est-il le même pour tout nombre auquel tu peux penser? Justifie ta réponse.

2- Problèmes de preuve

A- Les cinq assertions suivantes sont-elles vraies? Si oui justifie-les, sinon donnes-en un contre-exemple:

- 1- La différence des carrés de deux entiers consécutifs est un nombre impair.
- 2- Le carré d'un entier impair est impair.
- 3- La différence des carrés de deux entiers impairs consécutifs est un multiple de 8.
- 4- Tout nombre multiple de 4 s'écrit comme somme de deux entiers impairs consécutifs.
- 5- Tout nombre entier impair s'écrit comme différence des carrés de deux entiers consécutifs.

B- La somme de deux entiers impairs est-elle toujours multiple de 4? Dans quels cas l'est-elle?

3- Où est l'erreur?

Soient a et b deux nombres réels non nuls tels que : $a = b$ (1)

- En multipliant par b les deux membres de cette égalité on obtient : $ab = b^2$ (2)

- Retranchons a^2 aux deux membres, nous aurons : $ab - a^2 = b^2 - a^2$ (3)

- Cette dernière égalité s'écrit aussi : $a(b - a) = (b - a)(b + a)$ (4)

- En simplifiant par $(b-a)$ on aura : $a = b + a$ (5)

- Or : $a=b$ donc : $b = 2b$ (6)

- En simplifiant de nouveau par b , il vient finalement : $1 = 2$ (7)

Où est l'erreur?

4- Problème d'épargne

On place un capital C_0 à un intérêt composé au taux annuel de t % où t désigne un nombre entier compris entre 1 et 10.

Développement de l'activité algébrique à l'entrée au lycée tunisien

- Le taux d'intérêt étant fixé à 10 %, au bout de combien d'années peut-on doubler ce capital?
- Quel taux permet de tripler le capital en 15 ans?
- Quel capital permet d'obtenir 1000 dinars après cinq années d'épargne à un taux de 10 %?

5- Problème d'optimisation

On veut clôturer une parcelle de terrain de forme rectangulaire à l'aide d'un grillage de longueur a , où a est un nombre réel strictement positif. Quelle surface d'aire maximale peut-on ainsi clôturer?

6- Une autre formulation du théorème de Pythagore

Le théorème de Pythagore dit qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un triangle soit rectangle est que l'aire du carré construit sur son hypoténuse soit égale à la somme des aires des carrés construits sur ses côtés de l'angle droit.

Ce théorème reste-t-il vrai si l'on remplace les carrés par des triangles équilatéraux? Par des demi-cercles?

7- Problème de dénombrement

550 élèves venant de Tunisie, de l'Algérie et du Maroc participent à un concours. Mais le nombre d'Algériens dépasse de 164 le nombre de Marocains et il y a trois fois plus d'Algériens que de Tunisiens.

Trouver le nombre d'élèves participants de chaque pays.

8- Location d'une voiture

Voulant louer une voiture, une personne s'adresse à deux agences de location. Une agence A demande un taux fixe par kilomètre parcouru tandis qu'une autre agence B demande un taux fixe par kilomètre parcouru et une majoration d'un montant de frais fixes. Les deux agences pratiquent les tarifs indiqués dans les tableaux de valeurs ci-dessous pour le même type de modèle d'automobile et exigent que la distance parcourue soit supérieure ou égale à 90 km.

Distance parcourue en km	90	180	270
Coût de location demandé par l'agence A en dinars tunisiens	30	60	90

Distance parcourue en km	90	180	270
Coût de location demandé par l'agence B en dinars tunisiens	49	67	85

On vous demande de déterminer la distance pour laquelle les deux agences A et B proposent le même coût et de préciser laquelle des deux est la plus avantageuse.

9- Problème de rencontre de deux trains

Deux trains T_1 et T_2 roulant sur des rails parallèles et en sens contraires partent au temps t_0 , respectivement de deux villes A et B distantes de 90 Km.

- En supposant les vitesses moyennes, v_1 et v_2 des deux trains constantes, déterminer le temps et le lieu de leur rencontre.
- Que se passe-t-il lorsque les vitesses v_1 et v_2 sont dans un rapport r donné?
- Quelles conditions doivent remplir les vitesses v_1 et v_2 pour que la rencontre des deux trains ait lieu en un point donné? En un temps donné?

10- Organisation d'une visite à un site industriel

Conformément à notre projet d'établissement et dans le cadre de son ouverture sur l'environnement économique, notre classe se propose d'organiser une visite à un site industriel. En consultant deux agences de location de bus, elles nous présentent les choix suivants :

- L'agence A demande : 60 dinars pour la réservation et 4 dinars pour chaque kilomètre parcouru.
- L'agence B demande : 5 dinars pour chaque kilomètre parcouru avec une réservation gratuite.

Tâches : Il s'agit d'explorer les deux propositions (suivant les distances à parcourir), de préciser pour quelle distance leurs propositions sont équivalentes, de déterminer le choix le plus économique puis de prospecter les médias pour explorer d'autres alternatives et les comparer à ce qui été déjà proposé.

Annexe 2 : Extraits du programme de la première année du secondaire

Démarche et raisonnement mathématique

1. Les élèves développent leur aptitude à chercher et cultivent leur persévérance.

- Les élèves utilisent les instruments de dessin, la calculatrice ou un logiciel en vue de faire des essais ou une expérimentation sur des cas simples ou particuliers.

2. Les élèves développent des raisonnements.

- Ils émettent des conjectures en utilisant un raisonnement inductif, un raisonnement déductif ou un raisonnement par l'absurde ;
- Ils produisent un argument pour valider une affirmation en utilisant des inférences et des déductions ;
- Ils développent des chaînes de raisonnement déductif pour prouver une conjecture ou un résultat ;
- Ils produisent un contre-exemple pour montrer qu'une assertion est fausse ;
- Ils vérifient des résultats et jugent s'ils sont raisonnables ;
- Ils distinguent entre une conjecture et un résultat démontré ;
- Ils distinguent entre une implication et une équivalence.

3. Les élèves développent une méthodologie de résolution de problèmes.

- Ils élaborent des stratégies pour résoudre un problème en :
 - établissant des connexions entre le problème et des situations déjà rencontrées ;
 - utilisant leur pensée intuitive ;
 - se représentant des stratégies de résolution.
- Ils élaborent une solution au problème en :
 - faisant appel à un répertoire de connaissances, de techniques, de procédures appropriés ;
 - développant des raisonnements appropriés ;
 - validant la solution du problème.
- Ils procèdent à une vérification en :
 - confrontant leur solution avec les données du problème ;
 - exerçant leur esprit critique pour juger si les résultats sont raisonnables.

Figure 4 : Démarche et raisonnement mathématique (République tunisienne, 2008, p. 7)

Activités algébriques

Contenu disciplinaire

- ✓ Identités remarquables.
- ✓ Fonctions linéaires – Fonctions affines.
- ✓ Equations et inéquations linéaires du premier degré à une inconnue réelle.
- ✓ Systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues réelles.

Aptitudes à développer

- 1. Les élèves mobilisent les règles et les techniques de calcul algébrique pour :**
 - Additionner, soustraire et multiplier des expressions algébriques ;
 - Calculer la valeur numérique d'une expression littérale ;
 - Développer, factoriser et simplifier des expressions algébriques en utilisant les produits remarquables ;
 - Résoudre des équations et des inéquations linéaires du premier degré à une inconnue ;
 - Résoudre des systèmes linéaires de deux équations du premier degré à deux inconnues.
- 2. Les élèves mobilisent un algorithme ou une procédure de calcul algébrique pour :**
 - Déterminer le signe d'un binôme du premier degré ;
 - Résoudre des équations et des inéquations se ramenant à des équations et des inéquations du premier degré à une inconnue ;
 - Déterminer l'expression d'une fonction linéaire connaissant l'image d'un réel ;
 - Déterminer l'expression d'une fonction affine connaissant les images de deux réels distincts.
- 3. Les élèves résolvent des problèmes algébriques dans des situations mathématiques ou en rapport avec leur environnement dans des contextes familiers ou non familiers.**

En particulier,

- les élèves modélisent des situations réelles menant à des équations, des inéquations ou des fonctions linéaires ou affines ;
- les élèves résolvent des problèmes d'optimisation ou de point de rencontre de deux mobiles.

Figure 5 : Activité algébrique (République tunisienne, 2008, p. 10)



L'intégration, par une enseignante, d'une ressource visant le développement de la pensée algébrique chez des élèves du 1^{er} cycle du secondaire

Audrey B. RAYMOND

Université de Sherbrooke

audrey.b.raymond@usherbrooke.ca

Hassane SQUALLI

Université de Sherbrooke

hassane.squalli@usherbrooke.ca

Résumé : La recherche présentée dans ce texte se situe dans le contexte d'un collectif de travail formé de didacticiens, de conseillers pédagogiques et d'enseignants. Ce collectif vise l'implantation au Québec d'un enseignement favorisant le développement de la pensée algébrique au primaire et au secondaire. En convoquant le cadre de l'approche documentaire du didactique de Gueudet et Trouche (2008) et la notion de schème de Vergnaud (1996), nous présentons quelques résultats d'analyse du processus d'intégration dans la pratique d'une enseignante du premier cycle du secondaire d'une ressource visant le développement de la pensée algébrique. L'analyse porte sur des données provenant de différentes sources : documents de formation, entrevues et expérimentation en classe.

Mots clés : pensée algébrique, raisonnement analytique, genèse documentaire du didactique, travail de l'enseignant

One teacher's integration of a resource for developing algebraic thinking in lower secondary school students

Abstract: The research presented in this text was carried out in a working group comprised of didacticians, educational consultants and teachers. The aim of this collective was to establish teaching practices in Quebec that promote the development of algebraic

thinking in primary and secondary schools. The study sought to analyze how a resource for developing algebraic thinking in students was incorporated by a (first cycle) secondary teacher. To this end, we drew on the didactic documentary approach of Gueudet and Trouche (2008) and the notion of schema set forth by Vergnaud (1996). The analysis focuses on data from different sources, namely educational materials, interviews and classroom experimentation.

Keywords: algebraic thinking, analytical reasoning, Didactic Documentary Approach, teacher's work

Introduction

Au Québec, le passage de l'arithmétique vers l'algèbre est un sujet qui intéresse plusieurs acteurs du milieu de l'éducation. Dans le cadre d'une rencontre sur le sujet, tenue à l'Université de Sherbrooke au printemps 2013, une collaboration entre des didacticiens provenant de quatre universités québécoises, des conseillers pédagogiques de plusieurs commissions scolaires¹ a permis l'émergence d'un collectif soutenu par le Ministère de l'Éducation. Ce dernier se donne comme objectif de soutenir le développement de la pensée algébrique dans une trajectoire continue entre les ordres d'enseignement primaire et secondaire. Le moyen choisi par le collectif est la mise en œuvre d'un dispositif de formation-action permettant à des conseillers pédagogiques ainsi qu'à des enseignants du primaire et du secondaire des commissions scolaires de la province, de perfectionner leurs compétences professionnelles à intégrer dans leur pratique d'enseignement des mathématiques des moyens, reconnus par la recherche, pour favoriser le développement de la pensée algébrique.

La recherche présentée ici s'inscrit dans un projet de recherche-formation financé par le Ministère de l'Éducation et réalisé de septembre 2013 à août 2015. Les participants à cette recherche forment un groupe de travail composé de conseillers pédagogiques, d'enseignants du primaire et/ou du secondaire ainsi que de deux ou trois didacticiens des mathématiques. La formation-action s'est déroulée en trois étapes. La première consiste à former les enseignants sur le développement de la pensée algébrique et sur des situations porteuses. Ensuite, les enseignants expérimentent en classe une ressource particulière. Cette dernière peut être conçue par les enseignants, ou adaptée à partir d'une situation porteuse utilisée en formation, ou d'un manuel scolaire. Finalement, un retour réflexif en groupe de travail est effectué sur les connaissances développées à propos de cette ressource.

Ce groupe de travail vise principalement à développer des connaissances professionnelles chez les enseignants en lien avec le développement de la pensée

¹ Maintenant réformées sous forme de Centres de services scolaires.

algébrique et à créer une communauté de pratique (Wenger, 1998). Dans ce groupe de travail, chacun des acteurs joue un rôle particulier. Les didacticiens ne prescrivent pas la pratique. Leur rôle est d'accompagner, d'aider les enseignants à penser leur enseignement. Ils assument le rôle de guide, de facilitateur et de conseiller lors des discussions à propos des différentes situations visant le développement de la pensée algébrique. Ils aident à comprendre le potentiel didactique de celles-ci. De plus, ils participent à la mise en valeur et à l'explicitation des connaissances-en-acte (Vergnaud, 1996) développées par les enseignants qui n'en sont souvent pas conscients et s'en servent pour enrichir les discussions.

Les conseillers pédagogiques exercent une fonction d'intermédiaire entre les didacticiens et les enseignants et jouent un rôle tampon. Ils recrutent et sensibilisent les enseignants à propos de la problématique du développement de la pensée algébrique. Leur rôle est d'amener les enseignants à expérimenter des situations en classe, à les accompagner dans l'expérimentation et à partager les connaissances développées avec la communauté. Les enseignants, quant à eux, s'impliquent dans le groupe de travail pour découvrir de nouvelles situations, enrichir celles qu'ils utilisent et en développer de nouvelles. Par la suite, les connaissances développées sur ces ressources sont partagées avec la communauté, et les enseignants ont donc l'occasion d'améliorer leurs pratiques suite aux rencontres avec les didacticiens et les conseillers pédagogiques.

Dans ce texte, nous nous intéressons au processus d'intégration dans la pratique d'une enseignante – faisant partie de ce groupe de travail – d'une ressource visant le développement de la pensée algébrique. Le texte présentera d'abord les éléments de problématique, les assises conceptuelles ainsi que la méthodologie. Par la suite, quelques résultats de notre recherche seront présentés suivis d'une discussion sur ceux-ci.

1. Éléments de problématique

Au Québec, la dernière réforme des programmes mise en œuvre au secondaire du début des années 2000 n'a pas apporté de changements importants dans les contenus mathématiques à enseigner au primaire et au secondaire (Squalli et al., 2011). L'enseignement de l'algèbre reste marqué par les choix faits dans la réforme précédente celle de 1993 (Squalli et al., 2011). Selon ces auteurs, l'approche d'introduction de l'algèbre au début du secondaire consiste à faire passer les élèves d'un mode de pensée arithmétique (forgé essentiellement au primaire) à un mode de pensée algébrique. Pour cela, le programme privilégie deux voies : la généralisation et la résolution de problèmes se ramenant à la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue. En première année

du premier cycle du secondaire (élèves de 12-13 ans), par des activités de généralisation, on cherche à introduire le symbolisme algébrique en tant que moyen pour exprimer la généralité. En effet, comme l'expliquent les concepteurs du programme actuellement en vigueur :

Pour construire sa pensée algébrique, l'élève observe des régularités issues de situations diverses et représentées de différentes façons, comme des dessins, des tables de valeurs et des graphiques. Pour introduire les idées de variable, de dépendance entre des variables et de généralisation à l'aide d'une règle, l'utilisation de suites de nombres constitue un moyen privilégié. Par exemple, on peut utiliser les nombres polygonaux ou différentes situations géométriques pour généraliser à l'aide d'une ou de plusieurs règles équivalentes. (Gouvernement du Québec, 2006, p. 254)

La raison d'être de ces activités est de « favoriser chez l'élève l'acquisition de préalables à l'apprentissage de l'algèbre » (Gouvernement du Québec, 2006, p. 23). L'introduction de l'algèbre va surtout s'affirmer en deuxième année du premier cycle du secondaire (élèves de 13-14 ans), et ce, dans un contexte de résolution de problèmes, se ramenant à la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue, avec le souci de faire voir la pertinence du recours au symbolisme algébrique conventionnel (Marchand et Bednarz, 1999 ; Squalli et al., 2011). En effet, la tendance à généraliser et la tendance à raisonner sur l'inconnue favorisent la tendance à symboliser (Squalli, 2000).

Malgré le fait que le programme valorise une approche par la généralisation, le travail de Denis (1997, dans Marchand et Bednarz, 1999) a mis en évidence le glissement qui s'est opéré dans l'application de ce programme, en particulier à travers les manuels, et qui sape la richesse et l'essence même de la pensée algébrique :

On peut à cet effet observer, à travers l'interprétation donnée à cette orientation du programme, un glissement qui s'est opéré de l'idée d'exploitation de situations qui se voulaient prétexte à une généralisation et à l'introduction du symbolisme algébrique, à un enseignement devenu avant tout celui des suites numériques. (Marchand et Bednarz, 1999, p. 31)

De plus, le programme préconise une approche par la résolution de problèmes, mais le passage des élèves d'une démarche arithmétique de résolution à une démarche algébrique de résolution est difficile. Cette difficulté réside dans le fait que les raisonnements arithmétiques et algébriques sont de nature différente. Le raisonnement arithmétique est de nature non analytique; la valeur de l'inconnue est déterminée en opérant sur des données et sur des relations connues. Dans une démarche arithmétique de résolution, on fait simplement une suite de calculs sur des quantités connues, on n'opère jamais sur des inconnues (Squalli, 2000). En

revanche, plusieurs chercheurs soulignent le caractère analytique du raisonnement algébrique (Bednarz et al., 1996 ; Lins, 1992; Radford, 2010 ; Squalli, 2000). Dans la démarche algébrique de résolution, on raisonne de manière analytique : on procède de l'inconnu vers le connu, en opérant sur l'inconnue comme si c'était un nombre connu. La distinction entre un mode de raisonnement arithmétique et un mode de raisonnement algébrique réside précisément dans le caractère analytique du raisonnement et non dans l'utilisation des signes alphanumériques (Radford, 2018 ; Squalli et al., 2020). La présence des signes alphanumérique n'est pas un signe du caractère algébrique du raisonnement. Réciproquement, leur absence n'est pas signe du caractère non algébrique du raisonnement. Dans Squalli et al. (2020), sont rapportés plusieurs raisonnements d'élèves qui illustrent ces affirmations, dont certains sont présentés dans la section 4.1.

Le développement du raisonnement analytique, avant l'introduction du langage littéral de l'algèbre, est le véritable enjeu du passage des élèves d'un mode de pensée arithmétique à un mode de pensée algébrique dans le cadre d'activités de résolution de problèmes se ramenant à la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue. Or, l'introduction de la méthode algébrique conventionnelle de résolution est souvent enseignée par une série de consignes : identifie l'inconnue principale et représente-la par x , exprime les relations à l'aide de x , isole le x dans l'équation pour trouver sa valeur, déduis les valeurs des autres inconnues, lesquelles ne favorisent pas le développement du raisonnement analytique.

La perspective de développement du raisonnement analytique avant l'introduction du langage littéral de l'algèbre nécessite une formation des enseignants (Carraher, 2007). Cela exige en particulier que les enseignants intègrent dans leurs pratiques des ressources, au sens de Gueudet et Trouche (2010), visant le développement du raisonnement analytique. Or, mettre des ressources à la disposition des enseignants ne suffit pas pour modifier leurs pratiques (Gueudet et Trouche, 2010). Une ressource ne devient intégrée dans l'activité de l'enseignant qu'au prix d'une genèse instrumentale (processus d'instrumentation et d'instrumentalisation). Cette idée émane de l'ergonomie cognitive (Verillon et Rabardel, 1995); elle est fondée sur la distinction entre l'artefact en tant qu'objet physique ou abstrait, et l'instrument en tant que construction psychologique du sujet. Dans ce sens, l'enseignant doit développer des schèmes, au sens de Vergnaud (1996), d'utilisation de la ressource. Il devient donc important d'étudier le processus de cette intégration.

2. Contexte de l'étude

Cette recherche s'inscrit dans le contexte d'un projet de formation-action regroupant deux didacticiennes des mathématiques, une conseillère pédagogique Lili² et des enseignants du secondaire de la région de Québec.

Les enseignants faisant partie de ce groupe ont participé au projet pour la première fois en septembre 2015. Pour des questions de clarté, dans cette recherche, lorsqu'il est question des chercheuses, des formatrices ou des didacticiennes, nous faisons référence aux mêmes deux personnes. Les enseignants ont expérimenté diverses ressources avec leurs élèves, visant le développement de la pensée algébrique par la résolution de problèmes écrits se ramenant à la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue. La présente recherche a pour but d'analyser le document construit par une enseignante à partir d'une ressource, Arsène Ponton (présentée dans la section 4.1), en considérant autant la dimension ressource que les schèmes d'utilisation.

3. Assises conceptuelles

Pour documenter le processus d'intégration, par une enseignante, d'une ressource visant le développement du raisonnement analytique chez les élèves, l'approche documentaire du didactique de Gueudet et Trouche est la principale assise conceptuelle de notre recherche. Elle fait d'ailleurs référence à la notion de schème de Vergnaud qui nous servira à préciser les objectifs spécifiques. Des éclaircissements sur des concepts de la pensée algébrique en contexte de résolution de problèmes se ramenant à la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue seront également apportés.

3.1 L'approche documentaire du didactique

Dans cette recherche, nous convoquons le cadre de l'approche documentaire du didactique développé par Gueudet et Trouche (2008, 2010) qui place le travail sur les ressources au cœur du développement professionnel. Ce cadre est une adaptation de l'approche instrumentale de Rabardel (1995, 1999a, 1999b) au domaine de l'enseignement. Il vise, entre autres, à étudier le travail de l'enseignant à travers le processus d'intégration d'une ressource dans sa pratique. Ce cadre repose sur la distinction entre deux notions clés : ressource et document³. Dans la même optique qu'Adler (2010), nous entendons par ressource tout ce qui est susceptible de re-sourcer le travail de l'enseignant. Gueudet et Trouche (2008)

² Nom fictif.

³ Les notions de ressource et de document font référence aux notions d'artefact et d'instrument dans la théorie de l'approche instrumentale de Rabardel (1995).

définissent les documents comme des « entités hybrides, composées de ressources réorganisées et de schèmes d'utilisation structurés par des invariants opératoires » (Gueudet et Trouche, 2008, p. 22). Le document est le résultat du travail documentaire de l'enseignant, dont le moteur est la genèse documentaire, le processus par lequel l'enseignant transforme la ressource en document. Un document ne peut donc exister seul puisque l'intégration de la ressource dans la pratique ne va pas de soi et exige la construction de schèmes d'utilisation. Un schème, au sens de Vergnaud, « est une organisation invariante de l'activité, qui comporte notamment des règles d'action, et est structurée par des invariants opératoires qui se forment au cours de cette activité » (Vergnaud, 1996, dans Gueudet et Trouche, 2008, p. 9). Une règle d'actions réfère à une série d'actions stables et reproductibles qui organise l'activité. Ces règles seront formulées à l'aide de verbes d'action et seront des actes que les enseignants ont réalisés en lien avec la ressource en vue d'atteindre un certain but. Les invariants opératoires peuvent être de deux types : théorèmes-en-acte et concepts-en-acte. Les théorèmes-en-acte sont des propositions et peuvent être vrais ou faux (Vergnaud, 1996). Les concepts-en-acte, quant à eux, sont des fonctions propositionnelles qui ne sont pas susceptibles d'être vraies ou fausses, mais elles sont indispensables à la construction des propositions.

Lorsque les enseignants font face à de nouvelles ressources, ils puisent dans leur répertoire d'invariants et les transforment pour s'adapter et se modifier pour ainsi en créer de nouveaux. Ainsi, comme Gueudet et Trouche (2008) le mentionnent, nous pouvons écrire l'équation suivante, un peu simpliste, mais qui le résume bien : document = ressource + schèmes d'utilisation.

La genèse documentaire est représentée dans la figure 1. Au départ, il y a un ensemble de ressources disponibles et un enseignant qui possède déjà une expérience et des invariants. À travers un double processus d'intégration qui prend du temps⁴, l'enseignant crée le document. Rabardel identifie deux processus qui lient la ressource au sujet : l'instrumentation et l'instrumentalisation. D'une part, lors de l'instrumentation, il y a émergence et évolution des schèmes d'utilisation (Rabardel, 1999a). C'est le processus par lequel la ressource influence la pratique et soutient l'activité du sujet. Le regard est donc tourné vers l'évolution du sujet. D'autre part, lors de l'instrumentalisation, il y a apparition et transformation de la portion ressource du document. Le sujet met à sa main les ressources, et les connaissances professionnelles évoluent par ce travail (Gueudet

⁴ Étant donné la période de temps relativement courte pendant laquelle s'est déroulée la recherche et la relative nouveauté de la ressource pour l'enseignante, objet de cette recherche, nous parlerons de schèmes en construction.

et Trouche, 2008). Le regard est alors tourné vers la ressource qui se modifie selon le rôle qu'elle joue dans l'action.

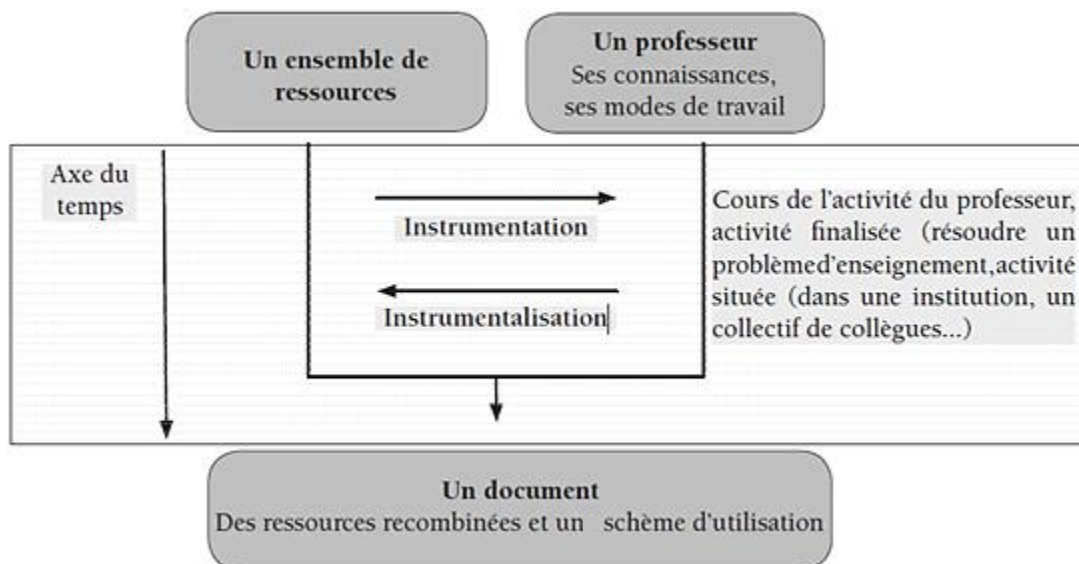


Figure 1 : Représentation schématique de la genèse d'un document (Gueudet et Trouche, 2008, p. 4).

3.2 Éclairages conceptuels de la pensée algébrique

Nous utilisons ici la conceptualisation développée par Squalli (2000, 2015). L'algèbre peut être vue comme un ensemble d'activités mathématiques où interviennent des opérations (lois de composition, internes ou externes, binaires ou n-aires) pouvant être de nature quelconque (addition, multiplication, rotation, composition, etc.), mais répétées un nombre fini de fois (Squalli, 2000, 2015). Ces activités sont marquées par une manière de penser, une pensée algébrique. Sur le plan opératoire, la pensée algébrique se déploie au moyen :

- d'un ensemble de raisonnements particuliers (comme généraliser, raisonner de manière analytique, symboliser et opérer sur des symboles; exprimer, interpréter, raisonner sur des relations entre variables, en particulier des relations fonctionnelles, etc.);
- de manières d'approcher des concepts en jeu dans les activités algébriques (comme voir l'égalité comme une relation d'équivalence, laisser les opérations en suspens, voir une expression numérique comme un objet en soi et non uniquement comme une chaîne de calcul, etc.); et
- de modes de représentation et de manières d'opérer sur ces représentations.

Raisonner de manière analytique consiste à considérer les inconnues, les représenter, non nécessairement avec des lettres, représenter les relations entre ces

inconnues, opérer sur ces représentations pour formuler l'équation modélisant le problème et trouver la valeur des inconnues (Squalli et al., 2013).

Les travaux de Bednarz et ses collaborateurs (Bednarz et Janvier, 1992,1996; Bednarz et al., 1996) ont montré que, pour initier les élèves au raisonnement analytique, il convient de privilégier des problèmes qui ne se prêtent pas facilement à une démarche de résolution arithmétique, soit des problèmes dits déconnectés. La résolution de ces problèmes nécessite d'opérer sur l'inconnue pour trouver sa valeur, à moins de raisonner par essais-erreurs.

Suite à des recherches qui présentaient différents types de problèmes aux élèves, Bednarz et Janvier (1996) ont développé une typologie de problèmes et les ont classés selon leur degré de complexité. Elles ont identifié trois types de problèmes : les problèmes de partage inéquitable, de transformation et les problèmes impliquant un taux. Nous nous intéressons ici seulement aux problèmes de type partage inéquitable puisque la ressource Arsène Ponton est de ce type. Dans leurs résultats de recherche, on y retrouve notamment les éléments qui sont susceptibles de déterminer le degré de complexité des problèmes (Marchand et Bednarz, 1999) : le nombre de relations de comparaisons, la nature des relations, l'enchaînement des relations.

4. Méthodologie

Rappelons d'abord que l'objectif spécifique de notre recherche est d'analyser le document construit par une enseignante, nommée Gabrielle⁵, à partir de la ressource Arsène Ponton. Après avoir décrit la ressource, il s'agira de mettre en évidence les schèmes d'utilisation individuels de Gabrielle.

4.1 Présentation de l'enseignante Gabrielle

Gabrielle a une quinzaine d'années d'expérience en enseignement. Elle travaille depuis maintenant dix ans dans une commission scolaire de la région de Québec. Dans le cadre du groupe de travail, Gabrielle a reçu la formation décrite plus haut par deux didacticiennes.

Elle a choisi d'expérimenter la situation Arsène Ponton avec ses élèves de deux de ses groupes qui sont en deuxième année du premier cycle du secondaire (environ 45 élèves âgés de 13 à 14 ans).

4.2 Présentation de la ressource Arsène Ponton

La tâche Arsène Ponton a été présentée aux enseignants dans le cadre du groupe de travail auquel a participé Gabrielle pour se pencher sur des problèmes écrits de

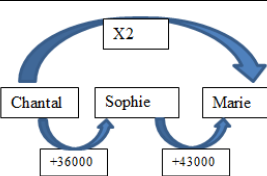
⁵ Nom fictif

comparaison avec les enseignants, et donc dans un but de formation et non dans le but de présenter une situation exemplaire pour la pratique. Bien que ce n'était pas une consigne des formatrices, Gabrielle a utilisé la tâche Arsène Ponton pour son enseignement, transposant ainsi une ressource de formation en une ressource d'enseignement. Afin de présenter la ressource utilisée par Gabrielle, nous allons présenter celle utilisée en formation et décrire quelques caractéristiques du potentiel didactique de la ressource pour l'enseignement.

La tâche Arsène Ponton se présente comme une série de cinq problèmes à résoudre dans l'ordre de présentation. Ces cinq problèmes sont des problèmes déconnectés, de partage inéquitable, de différents types et de degré de complexité croissant selon la typologie de Bednarz et Janvier (1996). Le tableau suivant résume les principales caractéristiques de ces problèmes ainsi que la schématisation de leur structure.

Tableau 1 : Caractéristiques des problèmes de la tâche Arsène Ponton

Problèmes	Nature des relations	Schéma
Problème 1 Arsène Ponton lègue sa fortune à ses deux nièces, Marie et Chantal. Il donne 19 000 \$ de plus à Marie qu'à Chantal. Si sa fortune s'élève à 133 000 \$, combien recevront Marie et Chantal?	Une relation additive entre deux inconnues	
Problème 2 Arsène Ponton lègue sa fortune à ses deux nièces, Marie et Chantal. Il donne 3 fois plus d'argent à Marie qu'à Chantal. Si sa fortune s'élève à 132 000 \$, combien recevront Marie et Chantal?	Une relation multiplicative entre deux inconnues	
Problème 3 Arsène Ponton lègue sa fortune à ses trois nièces, Marie, Chantal et Sophie. Il donne 15 000 \$ de plus à Marie qu'à Chantal, et il donne 5 000 \$ de plus à Sophie qu'à Chantal. Si sa fortune s'élève à 158 000 \$, combien recevront Marie, Chantal et Sophie?	Deux relations additives impliquant trois inconnues. Le problème est de type Source : une seule inconnue permet de générer les deux autres inconnues.	
Problème 4 Arsène Ponton lègue sa fortune à ses trois nièces, Marie, Chantal et Sophie. Il donne 3 fois plus d'argent à Marie qu'à Chantal, et il donne 16 000 \$ de moins à Sophie qu'à Marie. Si sa fortune s'élève à 208 000 \$, combien recevront Marie, Chantal et Sophie?	Deux relations impliquant trois inconnues, l'une d'elles est additive, l'autre est multiplicative. Le problème est de type Composition de relations : une des données est le point d'arrivée d'une relation et le point de départ de l'autre.	

Problème 5 Arsène Ponton lègue sa fortune à ses trois nièces, Marie, Chantal et Sophie. Il donne 2 fois plus d'argent à Marie qu'à Chantal, 36 000\$ de plus à Sophie qu'à Chantal, et finalement 43 000 \$ de plus à Marie qu'à Sophie. Combien d'argent recevront Marie, Chantal et Sophie?	La relation donnant le total des trois inconnues n'est pas donnée. Elle est remplacée par une troisième relation entre deux inconnues. L'une des deux autres relations est additive, l'autre est multiplicative. Problème de type Composition de relations.	
---	--	---

Pour illustrer les différents types de raisonnement que l'on peut utiliser dans la résolution de ces problèmes, nous allons étudier le cas du problème 1. Nous nous appuyons sur la grille développée par Squalli et al. (2020) qui propose une analyse des démarches de résolution selon le degré d'analyticité du raisonnement. La grille comporte trois catégories de raisonnement, chacune peut contenir plusieurs sous-catégories de raisonnements différents.

La première catégorie correspond aux raisonnements non analytiques : le résolveur n'opère que sur des données et relations connues. Voici un exemple de raisonnement pour la résolution du problème 1.

Résolution 1 – Raisonnement par essais-erreurs avec ajustement simple

Si l'avoir de Chantal en dollars est 51 000, alors celui de Marie serait de $51\,000 + 19\,000 = 70\,000$. Leur total vaut donc 121 000. Il est inférieur au total réel (133 000). Il faut donc augmenter la valeur initiale de l'avoir de Chantal. Dans ce type de raisonnement, la valeur de l'ajustement ne prend en compte que la comparaison entre le total obtenu et le total réel. Le résolveur reprend le premier essai avec une valeur plus grande de l'avoir de Chantal.

La deuxième catégorie est celle des raisonnements dits à tendance analytique. Cette catégorie regroupe les raisonnements hypothéticodéductifs où l'élève affecte une valeur déterminée à une inconnue sachant qu'elle est fautive, fait comme si cette inconnue possédait cette valeur, opère sur les relations et génère les valeurs des autres inconnues. Il raisonne ensuite sur les relations et les valeurs produites pour trouver la valeur exacte de l'inconnue de départ. En voici un exemple :

Résolution 2 – Raisonnement par essais-erreurs, avec ajustement raisonné

Si le montant de Chantal en dollars était de 1 000, alors celui de Marie serait de $1\,000 + 19\,000 = 20\,000$. Le total serait alors de 21 000. Or, le montant total réel est 133 000. Le montant de 112 000 correspondant à la différence entre le total réel et celui obtenu ($133\,000 - 21\,000$) est à partager également entre les deux nièces puisque nous avons déjà tenu compte des relations entre les montants des nièces.

Montant ajusté de Chantal : $1\,000 + 56\,000 = 57\,000 \$$

Montant ajusté de Marie : $20\,000 + 56\,000 = 76\,000 \$$

La troisième catégorie est celle des raisonnements analytiques. Dans ce type de raisonnement, l'élève considère l'inconnue, la représente par un symbole (non forcément une lettre), utilise cette représentation pour exprimer les relations entre les données connues et les autres inconnues du problème et opère sur ces représentations pour former l'équation et trouver les valeurs des inconnues. Le raisonnement utilisé dans la méthode algébrique conventionnelle de résolution en est un exemple. Voici un exemple où, dans la résolution, l'inconnue n'est pas représentée explicitement; Squalli et al. (2020) disent qu'elle reste muette.

Résolution 3 – Raisonnement analytique en termes de parts, l'inconnue reste muette

Dans les cinq problèmes d'Arsène Ponton, il est possible de raisonner en termes de parts. Dans ce cas-ci, la part de Marie, en dollars est égale à celle de Chantal augmentée de 19 000. Si l'on soustrait 19 000 du total pour enlever le surplus du montant de Marie par rapport à Chantal, le montant restant correspond alors au double de la part de Chantal. La part de Chantal est donc de $114\,000 \$ \div 2 = 57\,000 \$$ et la part de Marie est de 76 000 \$.

Par ailleurs, dans le problème 5, contrairement aux problèmes précédents, le montant total des parts n'est pas donné. En revanche, la part de Marie peut être générée de deux façons : par composition de deux relations additives à partir de la part de Chantal ou en doublant le montant de Chantal. On peut penser que la résolution de ce problème de manière non analytique peut s'avérer difficile pour les élèves, car le schéma de résolution de ce problème est différent de ceux des précédents.

Si la tâche Arsène Ponton est destinée aux élèves, elle devrait être présentée avant l'introduction du langage littéral de l'algèbre. La complexité croissante des cinq problèmes déconnectés rend difficile l'utilisation d'une démarche arithmétique de résolution et amènerait les élèves à tendre vers des raisonnements de nature analytique en recourant à des registres personnels de représentation des inconnues et des relations. L'enjeu pour l'enseignant dans la gestion de la résolution de cette tâche en classe est d'amener les élèves à raisonner de manière analytique en raisonnant sur les parts et en recourant à un registre de représentation des inconnues et des relations permettant d'opérer sur les représentations.

L'intégration, par une enseignante, d'une ressource visant le développement ...

4.3 Arsène Ponton comme ressource de la formation à laquelle a participé Gabrielle

D'après notre propre expérience de formation, Arsène Ponton est une tâche qui est habituellement utilisée comme dispositif de formation initiale des enseignants au secondaire dans un cours de didactique de l'algèbre dans une université québécoise. Le but est de placer les étudiantes et étudiants dans la posture des élèves avant leur entrée dans l'algèbre. La consigne qui leur est donnée est de résoudre ces problèmes sans utiliser la méthode algébrique conventionnelle de résolution. Les intentions de formation sont d'amener les étudiantes et les étudiants à prendre conscience de certains enjeux didactiques : 1) la nécessité du raisonnement analytique dans la résolution de problèmes déconnectés; 2) le recours à un registre de représentation des inconnues et des relations permettant d'opérer sur les représentations; 3) la diversité potentielle des types de raisonnements que pourraient produire les élèves ne connaissant pas la méthode algébrique conventionnelle de résolution; et 4) la nature des raisonnements qui est influencée par la structure du problème, au sens de Bednarz et Janvier (1996).

Dans le cadre de ce projet, la tâche demandée aux enseignants lors de la formation dans le groupe de travail avec les deux didacticiennes est de résoudre la série des cinq problèmes dans l'ordre, sans utiliser la méthode algébrique conventionnelle, de trouver à partir de quelle étape le raisonnement analytique est nécessaire pour résoudre le problème et quelles sont les différences d'une étape à l'autre. Lors de cette formation, des principes didactiques ont également été expliqués en lien avec la nature des problèmes ainsi qu'en lien avec le développement de la pensée algébrique dans le contexte de la résolution de problèmes. Ces principes sont tirés d'une analyse de la vidéo de la journée de formation des enseignants sur l'approche par résolution de problèmes écrits. Pour valider ces analyses, nous avons réalisé une entrevue avec les deux formatrices didacticiennes. L'analyse de ces principes permet de rendre compte de la raison d'être de la tâche Arsène Ponton et des intentions de formation poursuivies par les formatrices. Dans ce travail, la dimension ressource du document de Gabrielle est constituée de la tâche Arsène Ponton, des consignes données par les formatrices pour résoudre cette tâche ainsi que des principes énoncés explicitement par les formatrices ou inférés lors de l'analyse.

Principe didactique 1 : Le développement de la pensée algébrique peut se faire avant l'introduction du langage littéral de l'algèbre

D'une part, les formatrices ont apporté cette précision lors de la formation avec les enseignants : le développement de la pensée algébrique peut se faire sans « enseignement de l'algèbre formelle » contrairement à ce que l'on peut voir

présentement dans plusieurs classes du Québec. En effet, selon elles, les enseignants réservent un chapitre spécialement pour introduire les termes algébriques ainsi que les opérations sur les expressions algébriques. À la place d'une introduction frontale du calcul algébrique, le développement de la pensée algébrique avant l'introduction des lettres permet à l'enseignant de saisir les différentes occasions qui s'offrent à lui pour parler du langage algébrique et de la manipulation d'expressions.

D'autre part, l'une des deux formatrices a fait remarquer qu'en première année du deuxième cycle du secondaire, ce qui est difficile pour les élèves n'est pas de manipuler les expressions algébriques. Le plus ardu pour eux est de traduire les relations entre les inconnues d'un problème et d'opérer sur ces relations. Comme il est possible de le faire sans utiliser le langage littéral de l'algèbre, la confrontation à la résolution de problèmes déconnectés plus tôt pourrait aider en ce sens.

Principe didactique 2 : Les problèmes déconnectés sont nécessaires pour développer le raisonnement analytique

Selon l'une des deux formatrices, Mégane⁶, ce principe découle des travaux de Bednarz et Janvier (1992, 1996) qui montrent que les problèmes déconnectés inciteraient les élèves à raisonner de manière analytique, contrairement à des problèmes connectés où l'élève n'a qu'à partir d'une grandeur connue pour trouver les autres grandeurs inconnues à l'aide des relations connues. Elle explique :

raisonner analytiquement, ben moi je regarde toujours les trois conditions. Est-ce que l'élève, ou l'enseignant dans ce cas-ci, accepte de raisonner sur l'indéterminée puis accepte de raisonner sur celui-ci comme s'il était connu. Puis par la suite, ben là on met vraiment l'ancrage sur trois conditions. C'est cette habileté à dénoter. Est-ce que tu vas le dénoter avec un symbole qui serait une lettre? [...] Donc, si on revient à ta question initiale, pourquoi cette activité-ci nous permettrait de développer le raisonnement analytique? Je le dirais comme ça. C'est justement, avec les enseignants, à les forcer à ne pas utiliser une algèbre explicite.

Ces problèmes déconnectés mettent donc à défaut des raisonnements arithmétiques simples puisque l'élève (ou l'enseignant) doit maintenant considérer l'inconnue et raisonner avec celle-ci « comme si » elle était connue. Il est donc important, selon Mégane, que les enseignants s'attardent aux différents types de problèmes de comparaison qu'ils proposent à leurs élèves pour favoriser le raisonnement analytique.

⁶ Nom fictif

L'intégration, par une enseignante, d'une ressource visant le développement ...

Principe didactique 3 : Le raisonnement en termes de parts est un raisonnement analytique

Pour les formatrices, raisonner en termes de parts lors de la résolution des problèmes d'Arsène Ponton est central. Pour elles, le but est, dans un premier temps, d'amener les enseignants à raisonner sur les parts, sans utiliser le langage littéral de l'algèbre, autrement dit en utilisant la notion de part comme substitut à l'inconnue (Squalli et al., 2020). Par la suite, il s'agit de leur faire prendre conscience que le fait de raisonner en termes de parts les a amenés à opérer sur l'inconnue comme si elle était connue et ainsi à raisonner de manière analytique. L'une des deux formatrices le confirme :

Ben, si ça, c'est notre ancrage premier, ce qui est la particularité dans cette activité-ci, c'est lorsqu'ils raisonnent sur les parts [...] Mais le raisonnement sur les parts, pour eux, n'est pas toujours un raisonnement analytique. On essaie de leur faire voir justement, c'est qu'à partir du moment que tu peux accepter de rentrer dans ce jeu-là, de calculer le nombre de parts, c'est que nécessairement tu acceptes de faire « comme si » tu les connaissais.

Cette prise de conscience est essentielle pour comprendre que, lorsqu'ils raisonnent en termes de parts, ils raisonnent de manière analytique, et l'intégration du symbolisme algébrique peut facilement se faire par la suite puisqu'il a maintenant du sens.

Principe didactique 4 : Les problèmes d'Arsène Ponton peuvent être résolus sans l'utilisation de la méthode algébrique conventionnelle

Toujours lors de la journée de formation avec les enseignants, les didacticiennes leur ont fait expérimenter la tâche Arsène Ponton en leur demandant de résoudre les problèmes sans utiliser la méthode algébrique conventionnelle. Étant donné que les sujets de notre recherche sont compétents en algèbre, ils auraient probablement utilisé cette méthode de résolution plus efficace s'ils avaient eu le choix. Comme ils avaient la contrainte de ne pas utiliser le langage littéral de l'algèbre, cela ouvrait la porte à différentes résolutions. C'est ce que l'une des deux formatrices nous confirme lors de l'entrevue :

Donc, on a mis une contrainte qu'ils ne résolvent pas les problèmes...ben qu'ils essaient le plus possible de ne pas les résoudre en utilisant une algèbre explicite [méthode algébrique conventionnelle]. Ça, c'est quand même important que tu puisses le savoir parce que sinon on n'aurait peut-être pas eu une diversité de résolutions.

D'autre part, les formatrices espéraient que les enseignants opèrent sur l'inconnue en termes de parts pour qu'ils comprennent qu'il est possible de raisonner de manière analytique sans utiliser l'algèbre explicite :

Donc, là, ce qu'ils faisaient...vous essayez de ne pas la prendre [l'algèbre explicite].
Donc, là, ils...pour essayer de raisonner sur le nombre de parts et tout ça jusqu'à
ce qu'ils arrivent au problème 5 où là eux-mêmes le disent : Non, là là, est-ce que
c'est normal? Mais moi, c'est l'algèbre que je veux prendre.

Selon les deux formatrices, le fait de demander aux enseignants de ne pas utiliser
l'algèbre explicitement les forçait à vivre les différents enjeux de la tâche d'Arsène
Ponton.

**Principe didactique 5 : L'analyse de la structure des problèmes de comparaison
peut nous renseigner sur leur niveau de complexité**

Lors du retour en grand groupe après la résolution de la tâche Arsène Ponton par
les enseignants, l'une des deux formatrices est revenue sur chacun des cinq
problèmes en insistant sur leurs différences. Elle parle de ses intentions aux
enseignants :

Mon premier élément, c'était que vous remarquiez que : c'est drôle, quand je les
lis, ils se ressemblent tous. Ils se résolvent tous de la même manière, puis là tu es
en train de me dire qu'ils ne sont pas tous pareils? [...] Si, pour le moment, ça veut
juste dire que vous repartez en vous disant : écoute, je ne suis pas encore tout à fait
à l'aise, mais maintenant quand je vais l'ouvrir mon manuel [...] je le sais qu'il
existe différentes classes de problèmes.

L'un des buts de la formatrice est donc que les enseignants sachent qu'il existe
différents types de problèmes de comparaison et qu'ils sachent les reconnaître
même s'ils se ressemblent tous. Elle veut également leur faire prendre conscience
qu'en utilisant la méthode algébrique conventionnelle de résolution, le niveau de
difficulté est moins apparent. Par contre, ils doivent savoir qu'il existe tout de
même des différences significatives pour les élèves lorsqu'ils les résolvent sans
utiliser la méthode algébrique conventionnelle. En effet, comme le tableau 1 le
montre, les cinq problèmes de comparaison sont classés par ordre croissant de
complexité et les formatrices mentionnent que cette gradation est appuyée par la
recherche :

On s'appuie sur la grille de Bednarz et Janvier⁷ reprise par Marchand⁸ que nous
avons repris après, avec Hassane et Adolphe⁹. C'est quelque chose qui est très
connu, c'est les problèmes de comparaison. Il y a différents types de problèmes. Il
y a source, composition et puits. Ça a été prouvé dans les trois recherches menées
que ces problèmes-là sont gradués en ordre de complexité donc les

⁷ Bednarz et Janvier (1992)

⁸ Marchand (1998)

⁹ En référence à Adihou et al. (2015)

L'intégration, par une enseignante, d'une ressource visant le développement ...

problèmes « source » sont toujours plus simples que les problèmes « composition » qui sont eux-mêmes plus simples que les problèmes « puits ».

Donc, avec les enseignants, c'est d'aller leur montrer les différents niveaux de complexité pour les élèves à travers ces différents types de problèmes.

Puis, de l'autre côté, c'est d'aller voir que les problèmes où y'a le même énoncé, où y'a souvent le même nombre de grandeurs, ben, le niveau de complexité n'est pas le même. Qu'est-ce qui fait que le niveau de complexité change? Donc, c'est d'aller s'attarder sur l'enchaînement des relations de comparaison, schématiser le tout.

L'une des deux formatrices nous résume bien deux des enjeux principaux de la formation avec la tâche d'Arsène Ponton : « Y'en a une qui est de l'ordre de l'expression de la diversité des raisonnements qu'on peut mobiliser pour résoudre les problèmes, puis l'autre, c'est de s'intéresser à la structure des problèmes. » De plus, la tâche Arsène Ponton a été présentée tout juste avant une activité qui consiste à analyser les manuels qu'ils utilisent en classe. Si les enseignants savent reconnaître les différents types de problèmes, ils sont plus outillés pour choisir les problèmes des manuels et les exploiter efficacement pour le développement du raisonnement analytique chez leurs élèves.

4.4 Méthodes de collecte et d'analyse des données

Les données proviennent de trois sources, 1) les enregistrements vidéo de l'expérimentation en classe, 2) l'enregistrement vidéo de la rencontre du retour réflexif après expérimentation dans le groupe de travail et 3) une entrevue semi-dirigée postexpérimentation avec Gabrielle. Pour analyser la dimension schème d'utilisation du document, nous avons d'abord analysé les données provenant des deux premières sources. Conformément à la notion de schème de Vergnaud (1996), nous décrivons les schèmes d'utilisation de l'enseignante, au moyen des trois composantes suivantes : 1) une règle d'actions formulée à l'aide de verbe d'action et qui réfère à des actes de l'enseignante en lien avec la ressource en vue d'atteindre un certain but; 2) le but de ces actions et 3) un théorème-en-acte qui permet d'expliquer l'action et de renseigner sur des connaissances de l'enseignante (Pastré et al., 2006).

Ensuite, l'analyse des données provenant de l'entrevue post-expérimentation avec Gabrielle nous a permis de valider auprès de Gabrielle et de préciser les schèmes d'utilisation identifiés ainsi que leurs composantes. Les données de cette entrevue semi-dirigée sont essentielles, car ils permettent de valider et de rendre plus explicites les composantes des schèmes (règles d'actions, but des actions et théorèmes en actes) inférées par la chercheure.

5. Analyse des données et interprétation

Rappelons que la tâche Arsène Ponton a été présentée comme une ressource de formation et non comme une ressource d'enseignement destinée aux élèves. Gabrielle a utilisé la tâche Arsène Ponton pour son enseignement, transposant ainsi une ressource de formation en une ressource d'enseignement. Ce choix nous semble révéler un phénomène répandu et explique la tendance de certains enseignants à s'attendre à se voir proposer dans des activités de formation des ressources prêtes à être utilisées dans leur classe. Nous proposons de parler de détournement métadidactique de type 1, quand un enseignant transpose une ressource de formation en une ressource d'enseignement. Dans le cas qui nous concerne, Gabrielle devrait adapter la tâche Arsène Ponton pour ses élèves et la présenter avant l'introduction du langage littéral de l'algèbre, comme on a vu dans la section 4.2. En effet, l'une des raisons d'être de la tâche Arsène Ponton, si elle est destinée aux élèves, est de préparer ces derniers à l'introduction du langage alphanumérique comme registre de représentation optimal dans la résolution de problèmes se modélisant par une équation à une inconnue. Pour que les élèves voient la pertinence de l'introduction des lettres, ils doivent d'abord être « forcés » à raisonner en termes d'inconnue et à opérer sur l'inconnue en utilisant un registre de représentation personnel.

Contrairement à ce qui était attendu, Gabrielle a fait le choix de planifier son expérimentation après une introduction au calcul algébrique formel et juste avant l'introduction à la résolution algébrique de problèmes écrits à l'aide de la méthode algébrique conventionnelle.

Elle a présenté la tâche à ses élèves sans aucune modification par rapport à celle qui lui a été présentée en formation. Elle leur a présenté la même feuille, avec la consigne de résoudre les problèmes sans utiliser l'algèbre :

Puis, aussi, on va voir comment on fait pour utiliser l'algèbre pour résoudre des problèmes écrits. Puis aujourd'hui, ce qu'on va faire, je vous ai préparé cinq problèmes. Puis, avant de vous montrer comment faire pour utiliser l'algèbre pour résoudre ces problèmes-là, je veux voir votre logique à vous, comment vous feriez pour résoudre ces problèmes-là, sans nécessairement utiliser l'algèbre. Parce que ces problèmes-là, c'est des problèmes pour lesquels on peut en utiliser, mais on est capable aussi, quand on a une bonne mathématique, de les résoudre sans avoir recours à l'algèbre.

En entrevue, elle explique qu'elle a voulu montrer aux élèves qu'ils ont déjà plusieurs connaissances en lien avec l'algèbre et ainsi diminuer le stress qui lui est souvent associé. Elle y revient lors du retour réflexif en grand groupe : « C'était de leur montrer qu'ils étaient capables de, d'arriver à trouver des réponses, qu'ils

connaissaient déjà un petit peu de choses si on veut par rapport à l'algèbre, qu'ils étaient capables de se débrouiller avec ça. » Gabrielle a donc utilisé les mêmes consignes que pour la formation, mais dans un but différent, d'ordre motivationnel. À notre connaissance, ce type de phénomène d'enseignement n'est pas décrit dans la typologie proposée par Brousseau (2011). Nous proposons de parler de détournement métadidactique de type 2 lorsqu'un enseignant utilise une ressource d'enseignement, mais dans un but différent de son but initial.

Tous ces éléments nous ont amenés à formuler le premier schème ainsi :

Tableau 2 : Schème 1 - Les élèves peuvent résoudre les problèmes de la tâche Arsène Ponton sans l'algèbre, et le faire comme ils le veulent favorise leur engagement

Règle d'action	Demander aux élèves de résoudre les problèmes comme ils le veulent, sans être obligés d'utiliser l'algèbre.
But 1	Faire prendre conscience aux élèves qu'ils sont capables de résoudre des problèmes « algébriques » sans utiliser les lettres.
Théorème-en-acte 1	Les élèves sont capables de résoudre des problèmes algébriques sans utiliser le langage littéral de l'algèbre.
But 2	Engager les élèves dans la tâche
Théorème-en-acte 2	Avoir la liberté de résoudre un problème comme ils le veulent favorise l'engagement des élèves.

Par la suite, lors de l'expérimentation en classe, l'enseignante a laissé les élèves résoudre les problèmes. Au début, ils résolvaient individuellement et elle les plaçait ensuite en équipe de deux pour qu'ils comparent leurs méthodes et qu'ils se les expliquent. Pour faire le retour en grand groupe, elle commence donc avec le problème 1 et cible des élèves qui avaient des raisonnements différents. Elle leur demande de venir les expliquer au tableau. L'enseignante nous a fait remarquer qu'aucun des élèves n'a utilisé la méthode algébrique, la majorité des équipes ont utilisé des raisonnements de type essais-erreurs; une seule équipe semble utiliser un raisonnement sur les parts. Quand elle a vérifié quelles méthodes avaient donné un bon résultat avec eux en vérifiant les conditions de départ (si le montant total et le lien entre les inconnues sont respectés), elle a ensuite fait le lien avec les parts : « Des problèmes comme ça où on a des montants à partager, là, écoutez bien, c'est un petit truc qui est important, c'est de s'imaginer des nombres de parts. Ça va vous aider dans la compréhension de ces problèmes-là. »

Elle reprend chacun des raisonnements des élèves et leur explique comment ils pourraient faire pour exprimer les relations du problème en termes de parts. Le fait de leur montrer de raisonner en termes de parts montre que l'enseignante croit que c'est un bon moyen pour comprendre ces problèmes et qu'il est important de

le faire dès le début pour être habile dans les autres problèmes plus difficiles. Cela nous a amenés à formuler le schème suivant :

Tableau 3 : Schème 2 – Raisonner en termes de parts dans les problèmes de comparaison facilite leur compréhension

Règle d'action	Dans les problèmes de partage inéquitable, dire explicitement aux élèves de raisonner en termes de parts.
But	Que les élèves comprennent le problème
Théorème-en-acte	Raisonner en termes de parts favorise la compréhension des problèmes de comparaison déconnectés (partage inéquitable).

Ce schème montre, encore une fois, que Gabrielle a agi contrairement à ce qu'on aurait attendu; elle n'a pas laissé émerger les raisonnements des élèves en termes de parts au cours de la résolution de la série des problèmes de la tâche Arsène Ponton. Elle a pris à sa charge de montrer aux élèves ce type de raisonnement dès la résolution du premier problème!

Lorsque Gabrielle a montré aux élèves les raisonnements en parts, elle leur a également montré à représenter symboliquement les inconnues et leurs relations. Elle intervient ainsi dans ce second enjeu du développement du raisonnement analytique. En effet, comme le montre la figure 2, pour le problème 1, lorsqu'elle parlait du montant de Chantal, l'une des inconnues du problème, elle a dessiné un cercle au tableau et, pour le montant de Marie, la seconde inconnue, qui a 19 000 de plus que la première, elle a dessiné un autre cercle et écrit en dessous + 19 000. Ensuite, elle a ajouté le total en dessous pour montrer, qu'ensemble, elles avaient 133 000.

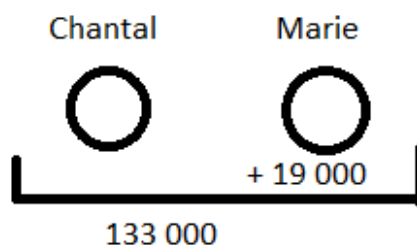


Figure 2 : Représentation symbolique des inconnues et leurs relations utilisées par l'enseignante

Lorsqu'elle revient sur les différents raisonnements des élèves, elle se réfère toujours au schéma de la figure 2 et opère sur la représentation pour trouver les valeurs des inconnues. Nous avons observé ce schéma se manifester une fois dans chaque classe de façon différente et Gabrielle nous en a parlé de manière explicite lors du retour réflexif en grand groupe. Dans le premier groupe avec qui elle l'a expérimenté, l'enseignante est intervenue avec quelques équipes pour leur faire le

L'intégration, par une enseignante, d'une ressource visant le développement ...

dessin et, dans le deuxième groupe, elle a fait le dessin en grand groupe. L'enseignante nous explique que le schéma est utile pour comprendre les relations entre les inconnues :

Je leur faisais le dessin, mais sans leur dire vraiment qu'il faut que tu enlèves le 19 000 au début, mais on dirait qu'avec le dessin, ils le voyaient plus. Tu sais, ça les amenait à découvrir que pour savoir combien il y a dans chacune des deux parts qui sont égales, il faut que tu commences par enlever le 19 000 avant de diviser par deux.

Ces éléments nous ont amenés à formuler le troisième schème de Gabrielle :

Tableau 4 : Schème 3 – Représenter la structure du problème par un dessin

Règle d'action	Représenter les parts par un dessin
But	Que l'élève utilise la schématisation pour représenter les relations et pour qu'il opère sur la représentation (raisonne de manière analytique).
Théorème-en-acte	Représenter les parts par un dessin favorise le raisonnement analytique.

Le prochain schème renforce le fait que Gabrielle croit que le raisonnement sur les parts ainsi que sur la représentation symbolique est l'élément clé dans ce type de problèmes. En effet, lors du retour réflexif en grand groupe, l'enseignante mentionne qu'elle a abordé l'introduction des lettres avec les élèves qui maîtrisaient le système de représentation des parts et qui avaient réussi plus de problèmes que les autres :

Gabrielle : Puis, j'avais même commencé à aborder le sujet avec certains qui étaient rendus plus loin que, à la place de faire un cercle, qu'est-ce qu'on pourrait faire. Comme...

Lili : Mettre un X ou...

Gabrielle : Mettre un X, c'est ça. Ceux qui étaient plus forts, là. J'avais commencé de parler de ça un petit peu.

Ainsi, pour l'enseignante, pour pouvoir comprendre l'utilité du langage littéral de l'algèbre dans la résolution de problèmes écrits, il est possible d'amener les élèves à raisonner en termes de parts, de les représenter en utilisant un mode de représentation intermédiaire (comme un dessin) et d'opérer sur ces représentations afin de résoudre le problème. Elle a donc complètement intégré les conditions du raisonnement analytique qui consiste à considérer l'inconnue, la représenter et opérer sur cette dernière. Voici donc le quatrième schème :

Tableau 5 : Schème 4 – Représentation par un dessin comme transition vers le langage littéral de l'algèbre

Règle d'action	Pour les élèves qui ont montré une certaine maîtrise (ou compréhension) de la résolution des problèmes de comparaison par dessin, l'enseignante demande aux élèves de rechercher un système de représentation autre.
But	Amener les élèves vers le symbolisme algébrique conventionnel.
Théorème-en-acte	Les élèves qui maîtrisent le système de représentation intermédiaire sont prêts à remplacer ce système de représentation par le langage littéral de l'algèbre.

Nous avons également pu remarquer que l'enseignante a trouvé une nouvelle utilité à la ressource qui n'était pas prévue au départ. En effet, ne voulant pas déroger de son enseignement habituel, elle avait déjà introduit en classe le langage algébrique et les transformations algébriques avant la résolution de problèmes. Gabrielle trouve que le fait de voir la résolution de problèmes dans un deuxième temps aide à donner du sens au symbolisme algébrique tout récemment appris.

Mais en tout cas, je trouve que ça aide à faire plus le lien si tu l'as déjà vu, s'ils sont déjà capables un peu, algébriquement. [...] Je serais ouverte à l'essayer au début, mais, en y pensant comme il faut, je pense que c'est bien de l'avoir fait en deuxième partie. Au début de la résolution de problèmes, mais après avoir fait la partie plus vocabulaire, puis manipulation d'expressions seulement.

Finalement, nous pouvons conclure que l'enseignante est tout à fait en accord avec la formation qu'elle a reçue sur la tâche Arsène Ponton. En effet, lorsque nous lui avons demandé si elle trouvait que l'activité visait le développement de la pensée algébrique, voici ce qu'elle a répondu :

Ben, moi, je trouve que c'est de la pensée algébrique quand même. De dire qu'il y a l'idée de parts puis d'inconnues. Je trouve que oui, dans un certain sens, ça amène vers ça. C'est comme une autre branche de l'algèbre. Tu as la généralisation, mais tu as aussi la valeur inconnue. C'est ce bout-là. Ça reste de l'algèbre quand même je trouve. Moi, je trouve que oui.

6. Discussion des résultats

Lors de l'expérimentation de la ressource par Gabrielle, cette dernière, comme nous l'avons vu, a décidé de présenter la tâche Arsène Ponton après l'introduction du langage littéral de l'algèbre et avant la résolution de problèmes écrits. Ce choix a été fait, nous semble-t-il, pour ne pas bouleverser sa planification initiale tout en restant proche de la ressource Arsène Ponton utilisée pour sa formation. En revanche, après l'expérimentation en classe, Gabrielle semble avoir trouvé des raisons qui justifient son choix. En effet, selon elle, l'introduction du langage

L'intégration, par une enseignante, d'une ressource visant le développement ...

algébrique avant la présentation d'Arsène Ponton n'a ni nui, ni aidé les élèves, puisqu'ils n'ont pas utilisé l'algèbre formelle pour résoudre les problèmes, mais a permis, à certains élèves, de donner un sens au symbolisme littéral. L'enseignante reste tout de même ouverte à reprendre cette tâche comme une entrée en algèbre pour créer le besoin du traitement algébrique.

Au fil des analyses, à travers les différents schèmes de Gabrielle, nous avons également pu remarquer que Gabrielle a pris à sa charge de montrer explicitement aux élèves comment raisonner en termes de parts et à utiliser une représentation schématique pour représenter et opérer sur les relations. Nous pensons que cela est dû au fait que la ressource n'a pas été pleinement intégrée dans sa pratique d'enseignement, c'est-à-dire qu'elle ne se sentait pas assez à l'aise avec les enjeux de la ressource.

Gabrielle a expérimenté l'activité en classe, en l'insérant dans sa séquence d'enseignement habituelle sans trop bouleverser cette dernière. L'expérimentation et le retour sur cette expérimentation lui ont permis de prendre conscience du potentiel de la ressource pour son enseignement et l'apprentissage des élèves. Ce potentiel s'exprime à travers les quatre schèmes d'action relevés précédemment.

Il me semble que j'ai manqué de temps. Par après, je suis comme embarquée dans ma planif que j'avais, habituelle. C'est comme si ça a été un petit temps pour faire cette activité-là, puis je trouve que ça n'a pas assez coulé. Ça n'a pas assez déteint sur le reste de mon enseignement.

Elle sent qu'il faudrait que l'activité « coule » mieux dans son enseignement pour assurer une cohérence. Par contre, elle n'a pas été à l'aise de bouleverser sa séquence d'enseignement. Il semble ainsi que Gabrielle est prise dans une tension entre une pratique d'enseignement naturalisée et une ressource dont l'intégration en enseignement bouleverserait sa pratique.

Selon les propos des didacticiennes, ce phénomène est complètement normal. Comme ce sont des enseignants qui sont dans leur première année dans le projet de formation, ils expérimentent des ressources, mais ils ne saisissent pas encore tout leur potentiel et ne modifient pas encore leur séquence d'enseignement en conséquence. Voici les propos de Mégane lors de l'entrevue en équipe de formatrices :

L'année un, c'est : je continue d'enseigner l'algèbre de la manière que je dirais qui est l'approche langage. [...] Et ce qu'ils font, c'est pratiquement tous ça, la première année. Ils continuent d'enseigner en introduisant avec l'approche langage¹⁰. Puis ils intègrent des activités qu'on leur propose en y voyant le potentiel, mais en

¹⁰ Soit une approche visant la maîtrise technique du calcul algébrique.

n'osant pas trop. Ils parlent des affaires un peu, mais ils ne sont pas au stade d'embarquer, de dire : OK, go, on embarque par résolution de problèmes écrits pour introduire l'algèbre ou approche par généralisation. C'est le cas de toutes les personnes qui commencent.

Dans un autre ordre d'idées, Gabrielle avait deux buts en présentant la tâche Arsène Ponton aux élèves. Le premier consiste à amener les élèves à raisonner de manière analytique en raisonnant sur les parts, sans utiliser le langage algébrique conventionnel. Le second est de les amener à donner du sens au symbolisme algébrique en passant d'abord par un mode de représentation intermédiaire. Gabrielle plaçait donc sur le même plan le développement du raisonnement analytique chez les élèves et l'introduction du langage littéral de l'algèbre. Elle souhaitait ainsi autant provoquer le développement du raisonnement analytique chez les élèves en raisonnant sur les parts que créer le besoin du traitement algébrique en n'ayant plus d'outils pour résoudre le dernier problème. Nous pouvons finalement croire que Gabrielle a compris et intégré les enjeux essentiels de la tâche Arsène Ponton puisqu'elle vise ces deux aspects essentiels lorsqu'elle présente la tâche à ses élèves. On peut le remarquer lorsque l'enseignante insiste sur le raisonnement sur les parts et veut remplacer les dessins représentant les parts par des lettres.

Conclusion

En guise de conclusion, notre recherche nous a d'abord permis de prendre conscience de la vigilance que devraient avoir les didacticiens quand ils exploitent des ressources à des fins de formation des enseignants. Gabrielle n'a pas hésité à transposer, pour sa pratique d'enseignement, la ressource Arsène Ponton qui a été utilisée lors de la formation par les deux didacticiennes. Les enjeux de formation des enseignants ne sont pas les mêmes que ceux de l'apprentissage des élèves. Les formateurs doivent donc être vigilants lorsqu'ils présentent une ressource destinée à la formation et sensibiliser les enseignants à distinguer les enjeux de formation de ceux de l'apprentissage des élèves.

Finalement, lors de notre analyse, nous avons remarqué que la dimension ressource est plus complexe qu'elle n'y paraît. En effet, si nous gardons en tête la définition de la ressource « tout ce qui est susceptible de re-sourcer le travail de l'enseignant », non seulement la tâche Arsène Ponton et les principes didactiques présentés par les didacticiennes lors de la formation sont venus ressourcer le travail de l'enseignante, mais nous pensons que l'expérience de la formation est également un élément à considérer. En effet, les didacticiennes ont présenté la tâche Arsène Ponton aux enseignants et en ont discuté avec eux, mais elles leur ont également fait vivre l'expérimentation de la tâche lors de la formation. Ainsi, lors

L'intégration, par une enseignante, d'une ressource visant le développement ...

de la résolution des problèmes d'Arsène Ponton, les enseignants ont développé des connaissances sur la tâche et ont pu comprendre et intégrer des principes didactiques des formatrices qui n'auraient peut-être pas été compris de la même façon. Par exemple, lorsque les enseignants ont eu à résoudre les problèmes avec la contrainte de ne pas utiliser le langage formel, ils ont réalisé que le raisonnement sur les parts et sur les surplus est un raisonnement analytique et qu'il est possible de le faire sans les lettres. C'est une constatation que les enseignants ont eue qui n'aurait peut-être pas été aussi évidente sans en avoir fait l'expérience.

Dans cette recherche, nous avons proposé de traiter de deux types de phénomènes chez les enseignants. Le premier est appelé détournement métadidactique de type 1 pour décrire le phénomène de transposition d'une ressource de formation des enseignants en une ressource d'enseignements aux élèves; le second est appelé détournement métadidactique de type 2 et fait référence au phénomène d'utilisation d'une ressource d'enseignement dans un but différent du but initial. L'étude de la portée de ces phénomènes et des conditions de leur émergence nous semble une voie prometteuse de recherche. Une telle étude amène, à partir de l'angle d'analyse de l'usage des ressources, à se poser la question des rapports entre formation et pratique d'enseignement, à clarifier le rôle des didacticiens de mathématiques dans la formation des enseignants ainsi que la contribution de la didactique des mathématiques comme discipline de recherche à la formation des enseignants.

Références

Adihou, A., Squalli, H., Saboya M., Tremblay, M. et Lapointe, A. (2015). Analyse des raisonnements d'élèves à travers des résolutions de problèmes de comparaison. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes du colloque EMF2015* (p. 206-219). Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene.

Adler, J. (2010). La conceptualisation des ressources, apports pour la formation des professeurs de mathématiques. Dans G. Gueudet et L. Trouche (dir.), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (p. 57-74). Presses universitaires de Rennes.

Bednarz, N. et Janvier, B. (1992). L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une caractérisation du scénario actuel et des problèmes qu'il pose aux élèves. Dans A. Daife (dir.), *Actes du colloque international : didactique des mathématiques, formation normale des enseignants* (p. 21-40). École normale supérieure de Marrakech.

Bednarz, N. et Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. Dans N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (p. 115-136). Kluwer Academic Publishers.

Bednarz, N., Kieran, C. et Lee, L. (1996). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*. Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (2011). La théorie des situations didactiques en mathématiques. *Éducation et didactique*, 5(1), 101-104. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.1005>

Carraher, D. W. et Schliemann, A. D. (2007). Early Algebra and Algebraic Reasoning. Dans F. Lester (dir.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 669-705). Information Age Publishing.

Gouvernement du Québec. (2006). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, premier cycle*. Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport.

Gueudet, G. et Trouche, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Éducation et didactique*, 2(3), 7-34. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.342>

Gueudet, G. et Trouche, L. (2010). Des ressources aux documents, travail du professeur et genèses documentaires. Dans G. Gueudet et L. Trouche (dir.), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (p. 57-74). Presses universitaires de Rennes.

Lins, R. C. (1992). *A framework for understanding what algebraic thinking is* [Thèse de doctorat, University of Nottingham]. Nottingham ePrints. <http://eprints.nottingham.ac.uk/13227/1/316414.pdf>

Marchand, P. (1998). *Résolution de problèmes en algèbre au secondaire : analyse de deux approches et des raisonnements des élèves* [mémoire de maîtrise inédit]. Université du Québec à Montréal.

Marchand, P. et Bednarz, N. (1999). L'enseignement de l'algèbre au secondaire: une analyse des problèmes présentés aux élèves. *Bulletin AMQ* (Association mathématique du Québec), XXXIX(4), 30-42.

Pastré, P., Mayen, P. et Vergnaud, G. (2006). La didactique professionnelle. *Revue française de pédagogie*, (154), 145-198. <https://doi.org/10.4000/rfp.157>

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.

L'intégration, par une enseignante, d'une ressource visant le développement ...

Rabardel, P. (1999a). Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. Dans M. Bailleul (dir.), *Évolution des enseignants de mathématiques; rôle des instruments informatiques et de l'écrit. Qu'apportent les recherches en didactique des mathématiques. Actes de la dixième université d'été de didactique des mathématiques* (p. 203-213). Association pour la recherche en didactique des mathématiques.

Rabardel, P. (1999b). Le langage comme instrument, éléments pour une théorie instrumentale élargie. Dans Y. Clot (dir.), *Avec Vygotsky* (p. 241-265). La Dispute.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1-19. <https://doi.org/10.1080/14794800903569741>

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. Dans C. Kieran (dir.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds. The global evolution of an emerging field of research and practice* (p. 3-26). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_1

Squalli, H. (2000). *Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base* [thèse de doctorat, Université Laval]. Corpus. <https://corpus.ulaval.ca/jsui/handle/20.500.11794/51025>

Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes du colloque EMF2015* (p. 346-356). Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene.

Squalli, H., Suurtaam, C. et Freiman, V. (2013). Préparer les enseignants au développement de la pensée algébrique au primaire et au secondaire. Dans S. Oesterle, D. Allan et P. Liljedahl (dir.), *Actes de la rencontre annuelle du Groupe canadien d'étude en didactique des mathématiques* (p. 125-136). Université Laval.

Squalli, H., Larguier, M., Bronner, A. et Adihou, A. (2020). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 22(1), 36-62. <https://doi.org/10.7202/1070024ar>

Squalli, H., Mary, C. et Marchand, P. (2011). Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre : cas du Québec et de l'Ontario. Dans J. Lebeaume, A. Hasni et I. Harlé (dir.), *Recherches et expertises pour l'enseignement scientifique* (p. 67-78). De Boeck.

Vergnaud, G. (1996). La théorie des champs conceptuels. Dans J. Brun (dir.), *Didactique des mathématiques* (p. 197-242). Delachaux et Niestlé.

Verillon, P. et Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European journal of psychology of education*, 10(1), 77-101. <https://doi.org/10.1007/BF03172796>

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: learning, meaning, and identity*. Cambridge University Press.

L'intégration, par une enseignante, d'une ressource visant le développement ...

Annexe 1

Version présentée aux enseignants à la formation du 9 février 2015

Problème d'Arsène Ponton

Nous avons ici un problème de départ que nous avons complexifié peu à peu. À partir de quelle étape a-t-on besoin de l'algèbre pour le résoudre? Quelles sont les différences d'une étape à l'autre?

Problème 1 : Arsène Ponton lègue sa fortune à ses deux nièces, Marie et Chantal. Il donne 19 000 \$ de plus à Marie qu'à Chantal. Si sa fortune s'élève à 133 000 \$, combien recevront Marie et Chantal?

Problème 2 : Arsène Ponton lègue sa fortune à ses deux nièces, Marie et Chantal. Il donne 3 fois plus d'argent à Marie qu'à Chantal. Si sa fortune s'élève à 132 000 \$, combien recevront Marie et Chantal?

Problème 3 : Arsène Ponton lègue sa fortune à ses trois nièces, Marie, Chantal et Sophie. Il donne 15 000 \$ de plus à Marie qu'à Chantal, et il donne 5 000 \$ de plus à Sophie qu'à Chantal. Si sa fortune s'élève à 158 000 \$, combien recevront Marie, Chantal et Sophie?

Problème 4 : Arsène Ponton lègue sa fortune à ses trois nièces, Marie, Chantal et Sophie. Il donne 3 fois plus d'argent à Marie qu'à Chantal, et il donne 16 000 \$ de moins à Sophie qu'à Marie. Si sa fortune s'élève à 208 000 \$, combien recevront Marie, Chantal et Sophie?

Problème 5 : Arsène Ponton lègue sa fortune à ses trois nièces, Marie, Chantal et Sophie. Il donne 2 fois plus d'argent à Marie qu'à Chantal, 36 000 \$ de plus à Sophie qu'à Chantal et finalement 43 000 \$ de plus à Marie qu'à Sophie. Combien d'argent recevront Marie, Chantal et Sophie?



Réflexion autour du rôle du symbolisme littéral dans le développement de la pensée algébrique au primaire

Steve TREMBLAY

Université du Québec à Montréal

tremblay.steve.3@courrier.uqam.ca

Elena POLOTSKAIA

Université du Québec en Outaouais

elena.polotskaia@uqo.ca

Valériane PASSARO

Université du Québec à Montréal

passaro.valeriane@uqam.ca

Résumé : Cet article a pour objectif de discuter le rôle de l'utilisation des lettres dans la formation de la pensée algébrique chez les élèves du primaire. La question de l'utilisation de lettres lors de l'apprentissage des mathématiques au primaire est controversée dans la littérature. Depuis les années 1980, deux visions s'opposent : 1) le développement de la pensée algébrique doit être amorcé dès le primaire sans l'utilisation explicite du symbolisme littéral qui doit être amené progressivement et avec prudence; 2) le symbolisme est un outil indispensable au développement de la pensée mathématique et doit être utilisé dès le début de l'apprentissage. Notre réflexion vise à soulever des questions sur l'usage des lettres à la fois comme outil mathématique et comme outil d'apprentissage.

Mots clés : pensée algébrique, primaire, utilisation des lettres, pensée relationnelle, Early Algebra.

Discussing the role of literal symbolism in the development of algebraic thinking in primary school

Abstract: The purpose of this article is to discuss the role of the use of letters in the development of algebraic thinking in primary students. This question is controversial in the literature. Since the 1980s, two opposite perspectives have coexisted when it comes to

developing algebraic thinking: 1) we should start without letters and introduce the algebraic notation gradually and with caution; and 2) we need to use letters as a key learning tool from the beginning of students' formal learning. In our discussion, we ponder the use of letters as a mathematical tool and as a learning tool.

Key words: algebraic thinking, primary school, use of letters, relational thinking, Early Algebra

Introduction

En 2019, notre équipe a réalisé un projet d'analyse critique des travaux de recherche concernant le développement de la pensée algébrique des élèves de 5 à 12 ans (Polotskaia et al., 2019). Le projet a été financé par le Fonds de Recherche du Québec – Société et Culture (FRQSC) et fait partie du programme de recherche sur la persévérance et la réussite scolaires. Nous avons sélectionné 125 articles traitant de la pensée algébrique et publiés depuis les 15 dernières années dans 15 revues les plus reconnues et citées dans le domaine de l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Nous avons ensuite utilisé un outil d'analyse qualitative, AtlasTi, pour dégager les principales approches et leurs ancrages théoriques pour favoriser le développement de la pensée algébrique chez les élèves du primaire. En amont de cette analyse, nous avons constaté une divergence importante sur la question de l'utilisation des lettres ou, plus précisément, dans le contexte de l'algèbre, du symbolisme littéral. Nous avons aussi remarqué que plusieurs auteurs d'un même courant s'appuient sur des fondements théoriques communs tout en adoptant des positions divergentes sur l'usage du symbolisme littéral (Schmittau et Morris, 2004; Squalli, 2015). Il nous est donc apparu opportun d'approfondir nos recherches sur le sujet et de partager la synthèse des éléments dégagés. Ainsi, au corpus de textes sélectionnés dans notre étude, nous avons ajouté plusieurs publications plus anciennes citées dans cette sélection. Cela nous a ramené dans les années 1980 et 1990 lorsque la question de l'enseignement de l'algèbre était au cœur des préoccupations des chercheurs, que les difficultés des élèves étaient minutieusement décrites et analysées, et que les cadres théoriques étaient en construction.

D'un côté, depuis des décennies, les curricula de nombreux pays prescrivent un enseignement des nombres et des opérations sur les nombres au primaire, puis des notions d'algèbre, telles que les relations fonctionnelles, la résolution d'équations et d'inéquations, etc. au secondaire (ex. Blanton et al., 2015; Davydov, 2008). Cette organisation des apprentissages entraîne des problèmes de transition entre la pensée arithmétique et la pensée algébrique (Blanton et al., 2015; Grugeon, 1997; Kieran, 1992; Malara et Navarra, 2002). Les travaux de l'Observatoire internationale de la pensée algébrique (OIPA) (Polotskaia et al., 2017; Vlassis et

al., 2017) soutiennent que, pour remédier à la rupture arithmétique-algèbre, il est possible et même souhaitable que l'élève amorce le développement d'une **pensée algébrique** dès le primaire. Ces auteurs se joignent ainsi au courant mondial de *Early Algebra* (voir Blanton et al., 2015; Knuth et al., 2016) et soulignent les avantages du développement d'une pensée algébrique précoce, entre autres, un enrichissement de la pensée mathématique et une meilleure réussite au secondaire. Kieran (2004) mentionne que ce développement s'opère notamment en mettant l'accent sur : 1) les relations entre les nombres plutôt que sur les calculs, 2) les opérations et leurs propriétés, 3) la représentation des relations entre les quantités dans la résolution de problème, 4) la manipulation de nombres et de symboles, 5) le sens de l'égalité. L'usage d'un symbolisme littéral constitue donc l'un des éléments de la pensée algébrique. Traditionnellement introduit lors de l'enseignement officiel de l'algèbre au secondaire, cet usage du symbolisme est reconnu depuis longtemps comme l'une des principales sources de difficulté lors de la résolution d'équations (Filloy et Rojano, 1989; Herscovics et Linchevski, 1991), de la manipulation d'expressions algébriques (Kieran, 1992; MacGregor et Stacey, 1997), de la résolution de problèmes (Bednarz et Janvier, 1996; Kaput, 1983) et de l'étude de relations fonctionnelles (Blanton et al., 2017; Janvier, 1996; Janvier et al., 1989).

D'un autre côté, certains programmes d'études proposent d'adopter une perspective différente sur le rôle et l'usage d'un symbolisme littéral. C'est le cas notamment du programme de Davydov (Bodanskii, 1991; Davydov, 2008) dans lequel l'usage du symbolisme littéral constitue un élément clé dans le développement d'une **pensée théorique**. L'introduction des lettres est alors suggérée dès le début de l'apprentissage des mathématiques (dès 6 ans). Actuellement, quelques recherches s'insèrent dans ce courant (Lee, 2006; Schmittau, 2011) et leurs résultats démontrent que l'utilisation d'un symbolisme littéral ancré dans les expériences sensorielles de l'enfant est accessible aux élèves dès 6 ou 7 ans.

Dans cet article, nous cherchons à mieux comprendre certains enjeux de l'usage du symbolisme littéral dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques au primaire. Nous présentons donc d'abord quelques réflexions autour des différents usages et interprétations de la lettre dans les mathématiques scolaires. Puis nous étayons les idées issues de deux « courants »¹ de recherche qui diffèrent

¹ Nous allons utiliser le mot courant pour distinguer les travaux qui s'inspirent principalement de la vision proposée par *Early Algebra* de ceux qui s'orientent davantage vers la vision proposée par Davydov et ses collègues. Ces deux courants nous sont apparus comme prédominants dans les travaux récents sur le développement de la pensée algébrique au primaire. Plus précisément,

dans leur vision sur le rôle et l'usage du symbolisme littéral dans le développement d'une pensée algébrique ou d'une pensée théorique. Finalement, nous proposons des réflexions autour des deux scénarios envisagés, leurs origines, les présupposés sur lesquels ils s'appuient et leurs impacts possibles sur l'apprentissage des élèves. Nos conclusions suggèrent notamment d'interroger les présupposés qui influencent le moment et la manière d'introduire le symbolisme littéral à l'école.

1. La lettre en mathématiques : usages, interprétations et dénominations

Nous relevons plusieurs enjeux d'apprentissage et d'enseignement du symbolisme littéral en algèbre. Premièrement, la lettre est utilisée de différentes manières en mathématiques; parfois cet usage est associé à une pensée algébrique, parfois non. Deuxièmement, en algèbre, plusieurs interprétations de la lettre se côtoient. Or, la dénomination courante de la lettre dans l'enseignement ne permet pas toujours de distinguer ces différentes interprétations.

1.1 Différents usages de la lettre en mathématiques au primaire et au secondaire

Lors de l'introduction de l'algèbre au secondaire, on a tendance à penser que les élèves n'ont jamais utilisé de lettres en mathématiques. Et pourtant, en arithmétique, les lettres u , d et c sont utilisées pour désigner respectivement les unités, les dizaines et les centaines dans un nombre exprimé en base dix. Dans ce contexte, une expression comme $2c + 3d + 5u$ pourra être utilisée comme décomposition du nombre 235, et les lettres peuvent être vues comme des étiquettes qui remplacent les mots unité, dizaine et centaine ou comme des constantes ($u = 1, d = 10$ et $c = 100$). En géométrie et mesure, les lettres désignent des unités de mesures (L pour litre, g pour gramme, etc.) ou des grandeurs/quantités qui sont mises en relation. Dans ce dernier cas, l'usage de la lettre est théoriquement algébrique. Toutefois, dans le contexte où l'enseignement de l'algèbre n'est pas au programme du primaire au Québec, on pourrait se demander quel sens les enseignants et les élèves attribuent aux lettres utilisées. En effet, la lettre semble davantage être utilisée comme une étiquette qui remplace un mot si on se fie aux contenus des matériels didactiques sur lesquels s'appuient

nous avons constaté que certains chercheurs (Lins, 1992; Mason et al., 1985; Radford, 2018) conçoivent que l'usage des lettres n'est pas essentiel, pas plus qu'il ne constitue une caractéristique de la pensée algébrique alors que pour d'autres chercheurs (Kaput et al., 2008), l'utilisation des signes alphanumériques est requise pour qu'une activité soit déclarée algébrique.

généralement les enseignants. Par exemple, dans la figure 1, la lettre A remplace le mot « aire » et la lettre L le mot « longueur », alors que dans la figure 2, la lettre A remplace le nombre d'arêtes, la lettre F le nombre de faces, et la lettre S le nombre de sommets. Dans le premier extrait, l'aire et la longueur sont des grandeurs, et A et L remplacent des mesures, et dans le deuxième extrait, les lettres S , F et A , désignent respectivement le nombre de sommets, de faces et d'arêtes selon l'énoncé. Dans ce type de situation, la confusion entre les attributs géométriques et le nombre de ces attributs semble presque inévitable.

Pour calculer l'aire (A) d'un rectangle, on multiplie sa longueur (L) par sa largeur (l).

Figure 1 : extrait de Bernier et al. (2012, p. 99)

Léonhard Euler est un mathématicien du 18^e siècle. Il a découvert la relation entre le nombre de sommets (S), de faces (F) et d'arêtes (A) des polyèdres convexes.

Voici cette relation : $S + F - A = 2$

Figure 2 : extrait de Bernier et al. (2012, p. 106)

Actuellement, d'après nos expériences et nos observations des matériels didactiques, le contexte d'enseignement au primaire au Québec peut souvent induire une interprétation de la lettre comme une étiquette remplaçant un mot au détriment d'une interprétation de la lettre comme représentation d'une quantité ou d'un nombre.

Par ailleurs, au secondaire, la lettre est utilisée en mathématique à différents usages, elle ne représente pas nécessairement une quantité indéterminée. Par exemple, on utilise les lettres pour désigner les unités de mesure, comme au primaire, et on les utilise pour représenter des constantes absolues comme π ou e . À cela s'ajoute l'usage algébrique de la lettre dans différents contextes et donc en association avec différents concepts et interprétations.

1.2 Les différents rôles de la lettre en algèbre

Comme nous l'avons rappelé en introduction, les composantes de la pensée algébrique sont diverses. Généraliser, prouver, modéliser... sont des activités mathématiques qui caractérisent particulièrement l'algèbre. Or, utilise-t-on la lettre de la même manière lorsqu'on généralise une propriété, une relation ou une situation de régularité, lorsqu'on prouve un énoncé ou lorsqu'on modélise une situation de variation? Oui et non. D'un côté, la lettre désignera souvent une quantité, un nombre et non un objet ou une qualité. Cette quantité ou ce nombre sera aussi forcément indéterminé dans la situation donnée. Ainsi, si on sait que $a = 3$ et qu'on doit calculer $2a + 7$, on n'est pas face à une tâche nécessitant une

pensée algébrique puisque a désigne un nombre connu. D'un autre côté, la signification accordée à la lettre sera différente selon l'activité algébrique mise en œuvre. Par exemple, dans la généralisation de la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition $a(b + c) = ab + ac$, les lettres représentent n'importe quels nombres, on peut dire qu'elles ont le sens de nombres généralisés (Philipp, 1992). Alors que dans la résolution de l'équation $2x + 3 = x - 12$, la lettre x représente un nombre précis que l'on cherche à déterminer, on peut dire que x est une inconnue.

En algèbre, la lettre est donc utilisée dans différents contextes et à différents escient (Booth, 1984a, 1984b; Kieran, 1989; Küchemann, 1981; Usiskin, 1988). Différentes interprétations de la lettre se côtoient et le développement de la pensée algébrique implique forcément le développement de la flexibilité à interpréter la lettre selon le sens de la situation. On doit apprendre à interpréter la lettre et à l'utiliser selon les usages propres à l'algèbre mais aussi selon l'activité algébrique impliquée. Généralement, quand les chercheurs parlent de la lettre en algèbre, il est question des notions de « variable » et d'« inconnue ». Ces deux concepts apparaissent d'ailleurs distinctement dans le programme de formation de l'école québécoise (Gouvernement du Québec, 2006).

1.2.1 La variable

Pour mieux comprendre l'origine et le sens du mot « variable » dans le contexte mathématique, on peut se référer aux propos des mathématiciens qui l'ont inventé. Dans son livre *Mathematical thought from ancient to modern times*, Kline (1972) écrit :

Cauchy commence son travail de 1821 par la définition d'une variable. « On appelle une quantité que l'on considère comme devant prendre successivement plusieurs valeurs différentes les unes des autres comme une variable. » Ainsi, pour le concept de fonction, « Quand des quantités variables sont liées de manière qu'à partir d'une valeur donnée de l'une on puisse déterminer les valeurs de toutes les autres, on conçoit ordinairement que ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de variable indépendante; et les autres quantités exprimées au moyen de la variable indépendante sont celles que l'on appelle fonctions de cette variable. » (Kline, 1972, p. 950, traduction libre²)

² Cauchy begins his 1821 work with the definition of a variable. "One calls a quantity which one considers as having to successively assume many values different from one another a variable". As for the concept of function, "When variable quantities are so joined between themselves that, the value of one of these being given, one may determine the values of all the others, one ordinarily conceives these diverse quantities expressed by means of the one among them, which then takes the name independent variable; and the other quantities expressed by means of the independent variable are those which one calls functions of this variable" (Kline, 1972, p. 950).

Kline rapporte donc que pour Cauchy, une « variable » est une quantité qui prend successivement plusieurs valeurs – une quantité qui varie. Sa définition d’une fonction emploie le mot « variable » pour définir un nouveau concept, la « variable indépendante » et comme adjectif qui caractérise une quantité qui varie. Cauchy utilise donc le mot variable pour désigner la quantité variable elle-même et non sa représentation littérale. Selon Philipp (1992), le glissement dans l’usage de ce mot s’est opéré clairement lors du mouvement de réforme des mathématiques scolaires, à la fin des années 1950 et au début des années 1960. Il note que, dans ce contexte, les manuels de mathématiques définissent la variable comme une lettre (symbole) qui représente un ensemble d’éléments (de nombres). Ce changement substantiel dans l’usage du mot variable prédomine à l’école, selon nos expériences, encore aujourd’hui.

Dans ce même contexte d’évolution des mathématiques scolaires, la recherche de concepts unificateurs a débouché sur l’enseignement du concept de variable dans sa forme la plus générale dès le début de l’algèbre. En conséquence, voulue ou non, tous les symboles littéraux utilisés en algèbre à l’école sont maintenant appelés « variables » (Kieran, 1989). La variable n’est plus associée à la variation et à la notion de fonction mais plutôt à un symbole littéral, ce qui rejoint l’usage général qu’en fait, par exemple, Blanton et al. (2015).

Le concept de variable est donc réduit à sa représentation littérale et toute lettre utilisée en algèbre est appelée variable. Philipp (1992) souligne que cet amalgame est forcément source de confusion chez les élèves.

1.2.2 L’inconnue

La notion d’inconnue est aussi associée à l’utilisation de la lettre. Schoenfeld et Arcavi (1988) indiquent que l’inconnue est une valeur fixe que l’on ne connaît pas encore dans une situation donnée :

La connotation d’inconnue est quelque chose qui a une valeur fixe mais que vous ne connaissez pas encore. Par exemple, x est l’inconnue dans l’équation $3x + 2 = 5x - 4$. Dans cette équation, vous ne savez peut-être pas ce qu’est x ; mais x n’est pas variable en ce sens qu’il n’a qu’une valeur. (Schoenfeld et Arcavi, 1988, p. 421, traduction libre³)

Ces auteurs distinguent clairement « l’inconnue » de la « variable ». Une lettre désigne une inconnue lorsqu’elle est utilisée dans une équation, c’est-à-dire dans une égalité entre deux expressions algébriques. Dans ce contexte, le but de la tâche

³ The connotation of unknown is something that has fixed value but that you don't yet know. For example, x is the unknown in the equation $3x + 2 = 5x - 4$. In this equation, you may not know what x is; but x isn't variable in that it only has one value (Schoenfeld et Arcavi, 1988, p. 421).

(résolution d'une équation ou d'un problème) est de déterminer la valeur de cette inconnue. Au-delà du cas typique décrit par Schoenfeld et Arcavi, dans lequel on obtiendra la valeur de l'inconnue à la fin de la résolution, certaines situations peuvent créer de la confusion. Par exemple, la résolution d'une équation qui débouche sur une infinité de valeurs possibles rappelle forcément la définition de la notion de variable. Pourtant, le statut de la lettre (un nombre ou une quantité inconnue) dans l'équation donnée au départ ne change pas pour autant puisque le but de la tâche reste de déterminer la valeur (ou les valeurs) de l'inconnue.

1.2.3 Difficultés avec l'interprétation et l'usage de la lettre

Nous avons jusqu'à présent relevé trois sources de difficulté en lien avec l'usage ou l'interprétation de la lettre : 1) le fait que la lettre puisse représenter autre chose qu'un nombre ou une quantité (ex : abréviation de mots, objet, constante); 2) l'usage abusif du mot « variable » qui ne permet pas de différencier les rôles des quantités derrière les lettres dans une situation; 3) les cas particuliers de résolution d'équations dans lesquels il y a une infinité de solutions ou pas de solutions.

À cela, s'ajoute la nécessité de passer d'une interprétation de la même lettre à une autre, Janvier (1996) explique :

Même si les élèves peuvent accepter qu'une lettre représente un nombre inconnu et peuvent effectuer des calculs sur cette base, ils pourraient être incapables d'imaginer simultanément qu'une lettre puisse également représenter un nombre qui change. Comme l'ont souligné Freudenthal (1983), Schoenfeld et Arcavi (1988) et Janvier (1993), l'utilisation d'une lettre comme variable ne dépend pas de la représentation symbolique utilisée, mais relève plutôt d'une interprétation particulière du « résolveur ». Par exemple, on peut utiliser pendant longtemps et avec succès (sous forme d'équations ou de formules) des expressions, telles que $A = \pi r^2$ ou $d = v \times t$ ou $T = 9/5 C + 32$, sans considérer un seul instant que r , t ou C varie et par conséquent A ou d ou T varie également. (Janvier, 1996, p. 227, traduction libre⁴)

Ainsi, une même formule d'aire peut être utilisée pour représenter la relation entre les grandeurs impliquées, pour déterminer une mesure manquante, pour étudier

⁴ Even if students can accept that a letter stands for an unknown number and can perform calculations on that basis, they might be unable to imagine concurrently that a letter can also stand for a number that changes. As Freudenthal (1983), Schoenfeld and Arcavi (1988), and Janvier (1993) have pointed out, using a letter as a variable does not depend on the symbolic representation used, but is rather a question of a particular interpretation of the "solver". For example, one can use for a long time and successfully (as equations or as formulas) expressions, such as $A = \pi r^2$ or $d = v \times t$ or $T = 9/5 C + 32$, without considering for a single moment that r , t , or C vary and consequently A or d or T vary too (Janvier, 1996, p. 227).

la variation d'une grandeur lorsque l'autre change, etc. Dans chacun des cas, le rôle de la quantité derrière la lettre n'est pas le même, la quantité varie selon l'interprétation donnée à la situation. Dans une formule d'aire, une lettre pourra désigner une inconnue, une variable ou un nombre généralisé selon le regard que l'on porte sur cette formule, selon l'usage que l'on veut en faire, selon la question que l'on se pose.

Janvier (1996) répertorie quatre manières différentes au moins d'interpréter la lettre a , et il mentionne que chacune appelle un processus mental différent : 1) une valeur indéterminée dans une formule telle que dans $P(\text{périmètre}) = 4a$ où a désigne la mesure du côté d'un carré; 2) une inconnue, comme dans l'équation $24 = 4a$; 3) en tant que variable dans la formule du périmètre d'un carré $P(a) = 4a$ (si a varie alors P varie); 4) comme un nom polyvalent (nombre généralisé selon Philipp, 1992) dans l'identité suivante : $4a = a + a + a + a$.

Les sources de difficulté que nous venons de rappeler viennent appuyer le constat de nombreux chercheurs : apprendre à utiliser le symbolisme algébrique adéquatement implique, d'une part, de penser algébriquement dans une variété de contextes d'usage de l'algèbre, et d'autre part, d'interpréter correctement la lettre dans chacun de ces contextes.

1.2.4 Lettre et pensée algébrique

L'usage algébrique d'un symbolisme littéral est considéré comme l'une des dimensions de la pensée algébrique (Kieran, 2004). Toutefois, faire de l'algèbre ce n'est pas uniquement manipuler des lettres (Bednarz et Janvier, 1996; Janvier, 1996; Radford, 2014). D'une part, il est possible d'utiliser mathématiquement des lettres sans mobiliser de pensée algébrique (voir les exemples § 1.1). Il est aussi possible, dans un contexte potentiellement algébrique utilisant des symboles alphanumériques, de contourner la pensée algébrique. Par exemple, à l'école primaire québécoise, on propose aux élèves de rechercher le terme manquant dans des égalités comme $2 + ? = 5$. Dans ces tâches, l'élément inconnu est généralement présenté sous forme d'un carré vide, un « ? » ou un espace vide. Ainsi, on a affaire à une « équation algébrique » dans laquelle une quantité inconnue est symbolisée. Toutefois, comme le travail sur les transformations littérales algébriques n'est pas au programme, les stratégies envisagées n'incitent pas la manipulation de la quantité inconnue. Par exemple, avec les petits nombres, l'élève fait appel à sa mémorisation de faits numériques (la réponse est 3 car je sais que $2 + 3 = 5$) ou effectue un comptage « en avant » à partir de 2 (3 – 4 – 5, donc il faut ajouter 3). Ainsi, même si ces tâches présentent un potentiel de développement de la pensée algébrique, elles ne sont généralement pas exploitées en ce sens.

D'autre part, il est possible de penser algébriquement sans manipuler de lettres. Cette affirmation, défendue notamment par Radford (2018) qui rappelle que les premiers travaux d'algèbre ont été réalisés par les mathématiciens sans aucun usage de lettres, est à la base de la proposition de la plupart des chercheurs qui suggèrent de développer la pensée algébrique avant d'introduire le symbolisme littéral.

2. La pensée algébrique avant la lettre

Dans cette section, nous discutons de la pensée algébrique avant la lettre sous les aspects suivants : description du courant *Early algebra*; des exemples concernant le système sémiotique et l'analyticité seront discutés; prudence et équilibre dans l'utilisation précoce de la lettre; synthèse sur la pensée algébrique avant la lettre.

2.1 Le courant *Early Algebra*

Early Algebra est un courant de recherche qui est né de la volonté commune d'enrichir les connaissances scientifiques sur le développement précoce d'une pensée algébrique. Ces connaissances offrent notamment un éclairage nouveau sur la nature de la rupture arithmétique-algèbre observée chez les élèves du secondaire. Squalli et Bronner s'appuient sur les travaux des chercheurs initiateurs de ce courant (Carraher et Schliemann 2007; Kaput, 1998; Squalli et al., 2011) pour résumer :

L'hypothèse actuelle concernant le courant *Early Algebra* est qu'il ne doit pas être perçu comme une version précoce de l'algèbre actuellement enseignée au secondaire ni comme une préparation à celle-ci, c'est-à-dire une préalgèbre. L'*Early Algebra* est plutôt une stratégie pour enrichir les contenus mathématiques enseignés au primaire en offrant aux élèves des opportunités pour développer la pensée algébrique et approfondir davantage certaines notions et certains concepts mathématiques (les concepts d'opération, d'égalité, d'équation, de régularité, de formule, de variable et de variation, entre autres). (Squalli et Bronner, 2017, p. 1)

La proposition consiste donc en un enrichissement de l'activité mathématique des élèves à travers des activités visant le développement d'une pensée algébrique avant l'enseignement officiel de l'algèbre. Kieran et al. (2016) identifient les quatre principaux thèmes explorés par le courant *Early Algebra* : 1) la généralisation liée aux activités de motifs (patterns) numériques et géométriques (imaginées), 2) la généralisation liée aux propriétés des opérations et aux structures numériques, 3) la représentation des relations entre les quantités et 4) l'introduction de la notation alphanumérique. Ainsi, les différentes activités suggérées pour développer la pensée algébrique proposent d'amener les élèves à généraliser des situations présentant des régularités (souvent des suites de nombres ou de motifs) (ex. Blanton et al., 2015; Radford, 2011), à généraliser des

propriétés des nombres et des opérations (ex. Carpenter et Levi, 2005; Cooper et Warren, 2008) et à étudier des relations entre des quantités dans l'optique de développer une certaine pensée fonctionnelle (ex. Carraher et Schliemann, 2018; Tanişli, 2011).

En ce qui concerne le quatrième thème évoqué par Kieran et al. (2016), deux positions semblent se dessiner. D'un côté, certains chercheurs (Mason et al., 1985; Squalli, Oliveira et al., 2020) considèrent que les signes alphanumériques ne sont pas essentiels ni caractéristiques de la pensée algébrique. Par exemple, selon Mason et al. (1985), « la symbolisation basée sur des signes alphanumériques - n'est pas nécessaire pour commencer à penser algébriquement : La symbolisation complète ne devrait venir que beaucoup plus tard » (Mason et al., 1985, p. 24, traduction libre⁵). D'un autre côté, même si l'algèbre précoce ne signifie pas déplacer le programme d'algèbre traditionnel au niveau de l'école primaire, certains chercheurs semblent estimer que la notation alphanumérique peut et doit être progressivement introduite au primaire (Kieran et al., 2016). Le symbolisme littéral est alors envisagé comme moyen de représenter les généralisations et les relations dégagées. Toutefois, cette introduction est effectuée avec prudence et progression même si elle semble souvent apparaître comme l'étape ultime de l'activité et même un but à atteindre.

Ainsi, la notation littérale, bien que liée à toutes les autres composantes de la pensée algébrique est judicieusement séparée de celles-ci. Comme il est possible de penser algébriquement sans faire usage d'un symbolisme algébrique formel, ce dernier devient comme un accessoire, un outil supplémentaire qui doit être enseigné et appris. Pourtant cet outil a un statut particulier puisqu'il contribue aussi au développement de la pensée algébrique et ce qui amène certains auteurs à envisager son introduction avec les élèves plus jeunes (Malara et Navarra, 2018) et donc à inclure le travail avec le symbolisme littéral dès l'amorce du développement de la pensée algébrique.

2.2 Système sémiotique et analycité

Pour Radford (2018), la pensée algébrique se caractérise par un travail sur des quantités indéterminées (inconnue, variable, paramètre, nombre généralisé, etc.). Il souligne, d'une part, que ces quantités indéterminées peuvent être exprimées dans n'importe quel système sémiotique et donc pas nécessairement avec des lettres : « Premièrement, les notations ne sont une condition ni nécessaire ni

⁵ [...] symbolization based on alphanumeric signs – is not required to start thinking algebraically: Full symbolization should only come much later (Mason et al., 1985, p. 24).

suffisante pour penser algébriquement » (Radford 2018, p. 7, traduction libre⁶). Il suggère alors que pour signifier une quantité ou une généralité, les élèves peuvent utiliser non seulement le code alphanumérique, mais aussi les gestes, le rythme, le langage naturel et d'autres systèmes sémiotiques permettant la représentation écrite de la quantité indéterminée (par exemple, un point d'interrogation, un carré vide ou même un nombre). D'autre part, il associe la pensée algébrique à l'utilisation d'un des systèmes de codes pour représenter les quantités indéterminées et pour agir sur celles-ci de façon analytique, notamment les ajouter, les soustraire, les multiplier ou les diviser comme si elles étaient connues. L'analycité ainsi mobilisée est basée sur la déduction et elle s'oppose aux raisonnements arithmétiques qu'il décrit comme des raisonnements de type tâtonnement ou essai/erreur (Radford, 2014). Nous voulons souligner ici que Radford parle des objets algébriques (variable, inconnue, etc.) qu'on peut représenter à l'aide des **systèmes sémiotiques variés**, plutôt que **des interprétations variées** de la lettre si bien expliquées par Janvier (1996).

2.2.1 Analycité : exemple avec une équation à partir d'un problème écrit

Pour illustrer la notion d'analycité de la pensée, prenons un exemple de recherche d'un terme manquant : $29 + ? = 51$. Selon la distinction proposée par Radford (2014), si l'élève résout cette tâche par essai/erreur ou par comptage, il ne mobilise pas une pensée algébrique puisqu'il opère directement sur des nombres connus donnés par la tâche ou qu'il se donne lui-même. Toutefois, si l'élève ne sait pas comment déterminer le nombre cherché et qu'il effectue une série de déductions comme « si 29 plus quelque chose équivaut à 51 alors c'est que 51 est 29 de plus que **ce nombre inconnu** et que **le nombre inconnu** est 29 de moins que 51 » qui l'amène à transformer l'égalité sous la forme $? = 51 - 29$, alors le déploiement d'une pensée analytique est amorcé. En effet, pour arriver à formuler l'opération $51 - 29$, l'élève a dû opérer sur l'inconnue. Ce qui caractérise la pensée analytique ce n'est donc pas la tâche en soi, mais bien le traitement qu'on en fait. Ici, la pensée évoquée ne peut être mise en œuvre que si le signe d'égalité est vu comme marqueur d'une équivalence et si la relation entre les nombres 51, 29, et « ? » est correctement perçue. De plus, il implique la reconnaissance et l'acceptation d'opérer sur une quantité indéterminée désignée par « ? », ainsi que la transformation d'une équation ($29 + ? = 51$) en une équation équivalente ($? = 51 - 29$). Ainsi, même si la tâche ne suscite pas plusieurs manipulations de la quantité indéterminée comme on pourrait l'avoir avec une

⁶ First, notations are neither a necessary nor a sufficient condition for algebraic thinking (Radford, 2018 p. 7).

équation de la forme $ax + b = cx + d$, le traitement qui en est fait implique une certaine analytité.

2.2.2 Analytité : exemple de suites de motifs

Pour Radford (2011), et plusieurs autres chercheurs (ex. Grugeon-Allys et Pilet, 2017; Kieran et al., 2016), le travail sur l'analytité est plus important que l'utilisation des lettres. Leurs recherches démontrent que, dans le contexte de suites de motifs, les jeunes enfants sont tout à fait capables de mobiliser cette analytité dans leur pensée mathématique. Radford (2011) soutient que dans des situations de généralisation à partir de motifs croissants (patterns), une pensée algébrique peut émerger chez des jeunes élèves (2^e année du primaire). Après avoir travaillé avec une série de figures (figure 3), les élèves parviennent à formuler la généralité sous forme d'instruction numérique ($500 + 500 + 1$ pour la 500^e figure).



Figure 3 : élément d'une suite croissante (Radford, 2011, p. 305)

Squalli et Bronner (2017) partagent l'idée de Radford en ce qui concerne l'analytité et ajoutent une deuxième composante importante de la pensée algébrique : l'activité de généralisation (Bednarz et Janvier, 1996; Lins, 1992; Radford, 2014; Squalli, 2000). Ils expliquent : « La capacité à généraliser repose sur une bonne appréhension des structures des nombres tels que les régularités numériques, la divisibilité, les nombres triangulaires, nombres premiers, etc., et des propriétés des opérations (associativité, commutativité, élément neutre, etc.) » (Squalli et Bronner, 2017, p. 1).

Cette vision est tout à fait différente de ce que les jeunes élèves ont fait dans l'expérimentation de Radford (2011), car la généralisation décrite par Radford repose sur les structures graphiques et une analyse essentiellement visuelle (figure 3). Apparemment, les jeunes enfants qui ne maîtrisent pas pour l'instant les structures numériques peuvent généraliser sans toutefois représenter symboliquement cette généralisation.

Pour Radford (2018), les tâches de généralisation de motifs croissants dans lesquelles deux quantités sont mises en relation (voir exemple à la figure 4) incitent davantage la généralisation symbolique.

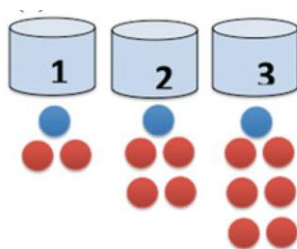


Figure 4 : suite croissante, 4^e année (Radford, 2018, p. 12)

En effet, face à cette tâche, les élèves de 4^e année qui ont été interrogés éprouvent des difficultés à distinguer le nombre de points dans la figure du nombre qui indique la position de la figure dans la suite. Ainsi l'articulation des variables en jeu et de leur relation apparaît comme une difficulté autant à l'écrit qu'à l'oral.

Radford (2018) avance que l'introduction de la notation littérale est possible et nécessaire à ce moment-là puisque « l'attention des élèves se déplace sur les variables et leur relation, qui, petit à petit, deviennent l'objet central du discours » (Radford, 2018, p. 16, traduction libre⁷). Alors, selon Radford, on peut commencer à exprimer une pensée algébrique dans le langage courant, sans utiliser un symbolisme littéral. L'introduction de ce symbolisme devient nécessaire et pertinente lorsque le discours de l'élève évolue jusqu'à se concentrer sur les quantités variables et leur relation.

2.3 Utilisation précoce de la lettre : prudence et équilibre

Plusieurs chercheurs recommandent la prudence et une introduction graduelle de la notation littérale (Hewitt, 2014; Malara et Navarra, 2018; Schliemann, 2002; Squalli, Larguier et al., 2020; Van Amerom, 2002). Par exemple, Schliemann (2002) constate que même si les élèves apprennent bien les règles formelles de résolution d'équations et qu'ils sont capables de les appliquer rapidement et avec succès, on ne peut pas garantir que ces élèves ont développé une compréhension profonde des lois mathématiques fondamentales sous-jacentes :

Ces puissants outils mathématiques peuvent permettre aux élèves de résoudre facilement et rapidement des équations et des problèmes de calcul et, s'ils sont explorés en profondeur, ils peuvent certainement contribuer à l'émergence d'une bonne compréhension de principes mathématiques. Cependant, à moins que les élèves ne soient guidés pour explorer ces principes, ils risquent d'apprendre des règles procédurales sans la compréhension mathématique appropriée implicitement incluses dans les étapes de ces procédures (voir, par exemple, les

⁷ The students' attention moves to the variables and their relationship, which, bit by bit, become the central object of discourse (Radford, 2018, p. 16).

données de Nunes, Schliemann, et Carraher, 1993, et de Schliemann, 2000). (Schliemann, 2002, p. 301-302, traduction libre⁸)

Pour Carraher et Schliemann (2018), il s'agit de trouver le bon équilibre afin d'éviter les dangers d'un formalisme trop précoce évoqués par Piaget (1964, cité dans Carraher et Schliemann, 2018), et ceux d'un « formalisme tardif, y compris une introduction trop tardive de la notation algébrique et d'autres formes conventionnelles de représentation » (p. 108).

2.4 Synthèse sur la pensée algébrique avant la lettre

En résumé, le courant *Early Algebra* propose d'amorcer le développement de la pensée algébrique dès le début du primaire, mais sans l'usage d'un symbolisme formel, la désignation de la quantité indéterminée étant envisagée à travers d'autres registres sémiotiques. De plus, une attention particulière est donnée aux situations dans lesquelles les manières de faire et de penser qui caractérisent l'algèbre sont mises en jeu (analyticité, généralisation, etc.). Ces choix s'appuient sur trois constats : 1) il est possible de penser algébriquement en mobilisant d'autres registres sémiotiques (gestes, paroles, dessins, etc.); 2) l'usage de la lettre en mathématique est varié et complexe (différents contextes d'usages, etc.); 3) la pensée algébrique peut servir d'appui à une introduction ultérieure significative et graduelle d'un symbolisme algébrique. Ainsi, l'usage du symbolisme littéral est reconnu comme une composante importante de la pensée algébrique qui,   un moment donné, doit être développé chez l'élève. Toutefois, cette composante n'est pas considérée comme essentielle à l'amorce d'une pensée algébrique et elle peut être introduite plus tard, lorsque les élèves sont prêts, soit à compter de la 4  année du primaire.

D'autres chercheurs adoptent toutefois une position différente en considérant cette composante comme outil essentiel au développement de la pensée algébrique, même à ses balbutiements.

3. La lettre comme outil de développement de la pensée algébrique

Pour plusieurs chercheurs, le symbolisme littéral constitue un outil indispensable pour développer la pensée algébrique chez l' l ve. Ces chercheurs s'appuient

⁸ These powerful mathematical tools may allow students to solve equations and computation problems easily and rapidly and, if explored in depth, certainly can contribute to the emergence of sound understanding of mathematical principles. However, unless students are guided to explore these principles, they risk learning procedural rules without the proper mathematical understanding implicit in its procedural steps (see, e.g., data by Nunes, Schliemann, et Carraher, 1993, and by Schliemann, 2000) (Schliemann, 2002, p. 301-302).

généralement sur les travaux menés en Russie par le psychologue et philosophe Vassili Davydov et ses collègues (Bodanskii, 1991; Davydov, 2008; Frolova, 1963).

3.1 L'origine de la recherche de Davydov

Davydov (2008) explique que l'origine de sa recherche est la quête sur le développement de l'enfant comme apprenant averti, comme personne et comme citoyen. Plus précisément, en mathématiques, son équipe cherchait à organiser l'apprentissage (le programme et la méthode d'enseignement) autour de la formation du concept de nombre chez l'enfant de manière à éviter les obstacles et difficultés rencontrés par de nombreux élèves au secondaire. Parmi ces difficultés apparaissaient, notamment, un raisonnement logique peu développé et l'incapacité à affronter des problèmes complexes et des problèmes ouverts de la vie réelle. Ainsi, l'introduction de la pensée algébrique au primaire ne représentait pas pour cette équipe un objectif en soi. C'est leur quête d'outils et de stratégies d'enseignement ainsi que leur analyse épistémologique du concept du nombre qui ont amené cette équipe à se tourner vers « la pensée théorique » et le concept de relation quantitative comme le pivot central de leur approche (Davydov, 1982, 2008).

3.2 Pensée théorique et relations quantitatives

Afin de bien comprendre comment l'utilisation des lettres est envisagée dans les recherches qui suivent la direction tracée par Davydov (voir notamment Mellone et al., 2018; Schmittau et Morris, 2004; Tuominen et al., 2018; Venenciano et Dougherty, 2014; Venenciano et al., 2020), nous présentons brièvement le programme de mathématiques à l'école primaire élaboré par Davydov et ses collègues (Bodanskii, 1991; Davydov et al., 1999; Davydov et al., 2001).

Selon le programme de Davydov, en 1^{re} année (6-7 ans), les élèves ne débutent pas avec les nombres, les chiffres, le comptage ou le calcul. À la place, ils manipulent des objets physiques pour comparer des grandeurs (longueur, aire, volume et masse). Les élèves apprennent à distinguer différentes caractéristiques quantitatives des objets, à les comparer et à communiquer leurs observations et conclusions à l'aide de dessins, de schémas, d'une notation littérale et d'un symbolisme mathématique approprié : $=$, $\neq$, $>$, et $<$. Schmittau et Morris (2004) précisent :

Par exemple, ils comparent les longueurs de deux planches, nomment les longueurs A et B et représentent la relation entre elles comme $A = B$, $A \neq B$, $A > B$ ou $A < B$. Il n'y a aucune référence aux nombres pendant ce travail : « A »

représente la longueur non mesurée de la planche. (Schmittau et Morris, 2004, p. 62-63, traduction libre⁹)

La notation littérale n'est pas le seul moyen de communication de relations entre les quantités; les dessins et les schémas sont aussi utilisés (voir figure 5). L'utilisation simultanée de plusieurs modes de communication aide les élèves à prendre du recul par rapport au caractère empirique des objets représentés et aux caractéristiques d'une représentation spécifique, pour se concentrer sur la relation entre les grandeurs observées. L'extraction de la relation qui s'opère est associée à la compréhension théorique de la situation. Ainsi, les élèves développent une pensée dite théorique.

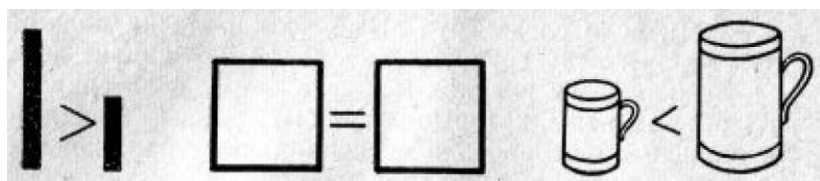


Figure 5 : Les représentations variées des relations quantitatives (Frolova, 1963, p. 35)

Ce qui est particulièrement inhabituel dans le programme de Davydov, c'est que les lettres, comme outil de communication des quantités, apparaissent avant les chiffres ou les nombres comme tels. Ainsi, les relations finalement décrites par des lettres ne sont pas des généralisations de faits numériques. Le caractère analytique de la pensée apparaît lorsque l'élève effectue des déductions directement à partir des expressions mathématiques littérales pour établir les relations entre les caractéristiques quantitatives des objets qu'il ne peut pas comparer physiquement. Par exemple, à partir de $A > B$ et $C < B$ (les caractéristiques des objets ont été comparés physiquement ou cette information a été donnée par écrit), l'élève déduit que $A < C$ (Venenciano et al. 2020).

Les élèves apprennent aussi à « évaluer » les grandeurs et préciser par quelle opération et à l'aide de quelle grandeur on peut le faire. Le processus de passage d'une inégalité à une relation d'égalité avec les actions (opérations) d'addition ou de soustraction est représenté symboliquement, par exemple, si « $K > D$ de A » (cette notation signifie que K est A de plus que D), alors $K - A = D$ et $K = D + A$ (voir Schmittau et Morris, 2004). Des déductions plus complexes deviennent ainsi accessibles aux élèves, par exemple : si $A > B$, alors $A + K > B + K$.

⁹ For example, they compare the lengths of two boards, name the lengths A and B , and represent the relationship between them as $A = B$, $A \neq B$, $A > B$, or $A < B$. There is no reference to numbers during this work: " A " represents the unmeasured length of the board (Schmittau et Morris, 2004, p. 62-63).

L'approche du programme élaboré par Davydov permet de faire penser les enfants de diverses manières. Premièrement, l'enfant développe une pensée théorique qui, selon Vygotsky, constitue l'essence de l'algèbre (Vygotsky, 1986). Par exemple, il prend l'habitude de rechercher des relations entre les quantités dans des situations contextualisées (une sorte de généralisation) et il apprend à résoudre une équation par déduction en observant sa structure (une sorte de pensée analytique). Deuxièmement, les enfants s'habituent à ce que les expressions et les équations impliquant des lettres aient un sens, car leur compréhension de ces expressions a été fondée sur le travail avec des quantités réelles, des actions sur des quantités et des modèles de relations quantitatives.

Les résultats de certaines recherches (Morris et Sloutsky, 1998; Schmittau, 1994, 2003) démontrent qu'à la fin de la 3^e année, les élèves ayant suivi un enseignement tel que décrit, ont une compréhension conceptuelle qui leur permet d'étendre leurs connaissances à de nouveaux contextes et problèmes. Ils ont aussi la capacité d'analyser et de modéliser des situations mathématiques qu'ils n'ont pas rencontrées auparavant ou du moins pour lesquelles ils ne possèdent pas la confiance nécessaire pour tenter de le faire.

L'approche de l'école de Davydov est encore actuellement reprise (Lee, 2006; Mellone et al., 2018; Polotskaia et al., 2017; Tuominen et al., 2018; Venenciano et al., 2020) et les résultats semblent démontrer le potentiel d'un travail sur la pensée relationnelle-théorique dans lequel l'usage algébrique de la lettre joue un rôle important.

3.3 Les résultats et les conclusions de Lee (2006)

Lee (2006) a réalisé une recherche dans le contexte d'enseignement basé sur le programme de mathématiques de Davydov. Le but de l'étude était de comprendre la pensée des élèves (6-7 ans) face à une tâche d'analyse d'un problème écrit et de représentation de la réponse à ce problème – le nombre qui est 2 de plus que a – sur la droite numérique. La discussion en classe, qui a duré trois heures et s'est étalée sur trois jours, a eu lieu au deuxième semestre de la première année de l'expérimentation du programme de Davydov. À ce stade, les élèves avaient discuté de la notion de quantité, comparé des objets selon certaines propriétés quantitatives, identifié l'égalité ou l'inégalité entre des quantités, et représenté les résultats de comparaison à l'aide de signes (dessins, schémas, etc.) et de lettres. De plus, la représentation à l'aide d'une droite numérique avait été introduite quelques temps avant les leçons décrites (figure 6).

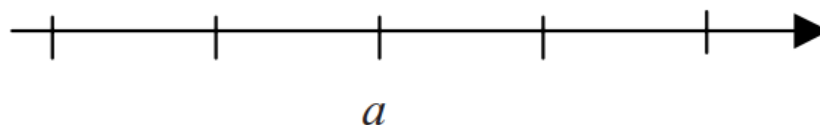


Figure 6 : La droite numérique utilisée dans l'étude de Lee (2006)

Au début, les élèves ont considéré le nombre a comme le début de la droite numérique ($a = 0$), comme deuxième point ($a = 2$) ou comme un nombre inconnu (et donc, on ne peut pas déterminer le nombre qui est 2 de plus que a).

Lee constate aussi qu'avant ces leçons, plusieurs difficultés bien connues en relation avec la compréhension des lettres (voir Collis, 1971; Küchemann, 1978; 1981) apparaissent. Par exemple, certains élèves ont interprété les lettres comme des étiquettes d'objets (par exemple, C pour Cup, B pour Ball, etc.) ou des valeurs numériques spécifiques.

Par exemple, au cours d'une session du premier semestre de la 1^{re} année, on a montré aux enfants deux bâtons et on leur a demandé: « La longueur de ce bâton (le plus long) est A et la longueur de l'autre bâton (le plus court) est B . Pouvez-vous comparer A et B ? » Six enfants sur sept ont proposé une formule correcte : $A > B$. Un élève a posé des questions sur la formule : « Comment se fait-il que A soit plus grand que B ? C'est faux. » Lorsqu'on lui a demandé une justification, il a expliqué : « A est le premier et B est le second de l'alphabet. Donc B est supérieur à A . » Il pense à l'ordre alphabétique. Cependant, il a rapidement ajusté sa réponse lorsqu'on lui a demandé : « Quelle propriété comparez-vous ? » Il a répondu : « Longueur... Attendez ! Attendez ! À quoi je pense ? A est supérieur à B . » (Lee, 2006, p. 101, traduction libre¹⁰)

Toutefois après les trois heures de discussion dûment organisées par l'enseignant, les élèves identifient a comme une quantité donnée (« ce n'est pas important c'est combien exactement ») et déduisent que la quantité cherchée doit être « $a + 2$ » et qu'elle se situe deux unités à droite de a sur la droite numérique. « Finalement, Jamie a convenu avec le reste des enfants que a pouvait être n'importe quel nombre et $a + 2$ était le nombre qui était 2 de plus que a , quel qu'il soit » (Lee, 2006, p. 103,

¹⁰ For example, in one session of the first semester of Grade 1, the children were shown two sticks and asked, "The length of this stick (longer one) is A , and the length of the other stick (shorter one) is B . Can you compare A and B ?" Six children out of seven derived a correct formula: $A > B$. One student asked questions about the formula: "How come A is greater than B ? It's wrong." When asked for a justification, he explained, " A is the first and B is the second in the alphabet. So B is greater than A ." He thought about the alphabetical order. However, he quickly adjusted his answer when asked, "What property are you comparing?" He replied, "Length... Wait! Wait! What am I thinking? A is greater than B " (Lee, 2006, p. 101).

traduction libre¹¹). L'auteur suggère que, malgré leur jeune âge, les élèves sont parvenus à développer une compréhension algébrique de la situation et à exprimer la réponse à l'aide d'un symbolisme algébrique. Ainsi, l'auteur conclut que les enfants sont en mesure de comprendre et d'utiliser certains concepts algébriques d'une manière théoriquement valable plus tôt qu'on ne pourrait le penser. Toutefois, cette compréhension ne peut émerger que dans le contexte où les tâches proposées s'insèrent dans un programme bien articulé et où les approches pédagogiques stimulent la participation, les échanges et la créativité des enfants.

3.4 Le cas de la résolution de problèmes

Une autre recherche inspirée par la théorie de Davydov (2008) a été réalisée au Québec (Polotskaia et al., 2017). Les chercheurs ont conçu un environnement virtuel pour soutenir la résolution de problèmes écrits traditionnels, à la différence que les données numériques du problème ont été remplacées par des lettres. Les élèves participants au projet ont suivi un programme expérimental visant l'apprentissage des relations additives et le développement de la pensée relationnelle dans le contexte de la résolution de problèmes écrits. Avant l'expérimentation, les lettres n'avaient jamais été utilisées et l'utilisation de schémas (des segments) pour représenter les relations entre les données du problème avait été enseignée.

Dans le cadre de cette expérimentation, qui avait eu lieu vers la fin de la 2^e année du primaire, les élèves ont participé à trois sessions de travail à l'ordinateur (dans l'environnement de résolution), suivies de discussions en classe. Comme dans l'expérimentation de Lee (2006), les chercheurs constatent qu'au début, les élèves étaient confus avec le texte sans nombre et avec les lettres utilisées pour identifier les quantités représentées par des segments sur le schéma. Toutefois, à la fin de la troisième session, les élèves étaient plus à l'aise avec l'utilisation des lettres. Ils réussissaient à modéliser les problèmes à l'aide de schémas et de lettres pour ensuite déduire l'opération arithmétique à effectuer et exprimer cette opération avec des lettres. Depuis, l'environnement de résolution de problèmes écrits a été utilisé pour travailler avec une élève dyslexique avec succès (Pelczar et al., à paraître).

¹¹ Eventually, Jamie agreed with the rest of the children that a could be any number and $a + 2$ was the number which was 2 more than a , whatever it was (Lee, 2006, p. 103).

3.5 Synthèse sur la lettre comme outil de développement de la pensée algébrique

Plusieurs chercheurs (Davydov, 2008; Lee, 2006; Malara et Navarra, 2018; Venenciano et al., 2020) avancent que l'utilisation de lettres pour noter des quantités plus tôt dans le curriculum pourrait soutenir le développement de la pensée relationnelle, théorique et algébrique. Pour certains, la notation littérale n'est pas un sujet d'apprentissage mais plutôt un outil de modélisation et de communication des relations quantitatives – un outil de pensée.

Pour nous, la pensée théorique promue dans l'approche de Davydov, porte un caractère analytique similaire à celui défini par Squalli et Bronner (2017) de même que Radford (2018). En effet, dans le cadre du programme de Davydov, les élèves cherchent à « théoriser » le problème, modéliser sa structure mathématique à l'aide de systèmes sémiotiques variées incluant la notation littérale. À l'aide de lettres, les élèves opèrent sur les quantités indéterminées comme si elles étaient connues et au moment où les nombres ne sont pas disponibles.

Par ailleurs, plusieurs recherches démontrent que cette utilisation des lettres est potentiellement accessible aux enfants dès le début de l'école primaire (6 ans) et qu'elle complète et rend efficace le processus de développement de leur pensée relationnelle-théorique-algébrique dès le début de l'apprentissage des mathématiques à l'école.

4. Synthèse et discussion

La nature abstraite de l'algèbre est souvent identifiée comme la source des difficultés des élèves (Collis, 1971; Küchemann, 1978, 1981). L'usage d'un symbolisme littéral peut être associé à ce caractère abstrait dans la mesure où il constitue un langage concis, organisé et régit par des conventions qui lui sont propres, qui peut exister et fonctionner indépendamment de toute situation concrète. Dans le contexte de l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire, il est justifié de se demander jusqu'à quel point cette abstraction a sa place. En effet, à ce niveau, les apprentissages sont ancrés dans les expériences sensorielles et motrices des enfants. L'observation et la manipulation des objets concrets du quotidien sont particulièrement mises à profit.

D'un côté, on pourrait penser que ce contexte mène forcément à un travail arithmétique avant tout dans lequel on construit et on manipule des nombres généralement associés à des quantités et des mesures concrètes. Certains auteurs envisagent alors le passage à l'algèbre qui s'ensuit à travers la généralisation des propriétés et des structures des nombres et de leurs relations. Cooper et Warren (2008) expliquent :

Nous avons apprécié que le nombre puisse être réifié du comptage quotidien d'éléments à l'objet de pensée qui permet, par exemple, d'ajouter des nombres sans référence à des ensembles d'éléments. Nous avons également vu que, plus tard, la variable pouvait être réifiée, à son tour, à l'objet de la pensée lorsque les élèves avaient l'expérience d'idées mathématiques qui sont vraies pour n'importe quel nombre. Ainsi, nous en sommes venus à considérer l'algèbre comme une réification ou une abstraction de second niveau, une réification d'une réification antérieure, révélant que les difficultés en algèbre pourraient être réduites si le nombre était entièrement reifié (plus seulement vu comme un ensemble d'items) et que la généralisation serait résulterait d'autant d'activités numériques que possible. (Cooper et Warren, 2004, p. 24, traduction libre¹²)

L'algèbre est alors considérée comme un second niveau, un travail mathématique abstrait qui s'appuie sur la compréhension de l'arithmétique. Cette vision traditionnelle de la succession arithmétique-algèbre fait en sorte que l'introduction d'un symbolisme littéral est forcément tardive. En effet, la consolidation des apprentissages arithmétiques est considérée comme préalable au passage à l'abstraction dans lequel le symbolisme littéral joue le premier rôle. Le courant *Early Algebra* s'insère dans ce cursus traditionnel dans lequel les mathématiques scolaires débutent par un travail sur les nombres tout en proposant un enrichissement à l'aide d'activités permettant l'amorce du développement d'une pensée algébrique. Le symbolisme littéral n'apparaît alors pas comme central dans ce développement qui vise avant tout le déploiement d'une pensée à travers différents registres sémiotiques informels. Selon les auteurs, le symbolisme plus formel sera introduit plus ou moins tardivement (à partir de la 4^e année du primaire) et graduellement pour éviter les dangers du formalisme précoce (Brizuela et Schlimann, 2004; Malara et Navarra, 2018; Radford, 2018). Le symbolisme littéral est alors vu comme un **outil mathématique**, un nouveau langage à apprendre pour exprimer la généralisation.

D'un autre côté, pour les chercheurs qui s'appuient sur les travaux de Davydov et ses collègues, l'observation et la manipulation de différents objets apparaissent aussi comme les stimuli d'apprentissages ancrés dans l'expérience sensorielle et motrice de l'enfant. Néanmoins l'exploitation de ce contexte s'effectue à travers

¹² We appreciated that number could be reified from counting everyday items to the object of thought that allows, for example, numbers to be added without reference to sets of items. We also saw that, at a later time, variable could be reified, in turn, to the object of thought when students were experienced with mathematical ideas that are true for any number. Thus, we came to regard algebra as a second level reification or abstraction, a reification of a previous reification, indicating that algebra difficulties might be reduced if number was fully reified (no longer a set of items) and generalisation was an outcome for as many number activities as possible (Cooper et Warren, 2004, p. 24).

des activités orientées vers la modélisation des relations quantitatives et la découverte de représentations variées de ces relations. Le symbolisme littéral apparaît alors très rapidement (après 2 à 4 mois d'école avec les enfants de 6-7 ans) et il constitue l'une des représentations possibles des relations entre des propriétés quantitatives des objets observés (longueur, aire, masse) (voir Tuominen et al. 2018; Mellone et al., 2018; Venenciano et al., 2020). Ainsi, la pensée théorique développée et le sens attribué aux expressions littérales proviennent de la manipulation d'objets et de la compréhension de la réalité de ces objets. Dans cette approche, le symbolisme littéral joue le rôle d'outil de communication de la pensée à même titre que la schématisation et la verbalisation. Autrement dit, il est vu comme **un outil de développement de la pensée** théorique.

Dans les deux perspectives que nous avons présentées, le symbolisme littéral apparaît soit comme un outil mathématique (à apprendre), soit comme un outil d'apprentissage (ce qui aide à apprendre autre chose). Malgré cette divergence qui influe sur le moment de la première rencontre des enfants avec le symbolisme littéral, les deux perspectives mettent de l'avant l'importance du sens comme support à la compréhension ainsi que la contribution de ce registre au développement d'une pensée algébrique comme le mentionnent Brizuela et Schliemann (2004) :

Les notations conventionnelles aident à étendre la réflexion (Cobb, 2000; Lerner et Sadovsky, 1994; Vygotsky, 1978), mais si elles sont introduites sans compréhension, les élèves peuvent afficher une formalisation prématurée (Piaget, 1964). Pour ces raisons, les élèves doivent être initiés aux notations mathématiques d'une manière qui leur convient. (Brizuela et Schliemann, 2004, p. 34, traduction libre¹³)

De plus, les auteurs des deux courants reconnaissent que la capacité intellectuelle des élèves du primaire est beaucoup plus étendue et variée que celle vers laquelle est orienté le contenu traditionnel de l'enseignement élémentaire (Blanton et al., 2015; El'konin et Davydov, 1975). Dans le cas d'*Early Algebra*, la proposition qui en découle consiste en un enrichissement de l'activité mathématique à travers de nouvelles activités favorisant le développement d'une pensée algébrique. Dans le cas du courant de Davydov, la proposition consiste à réenvisager l'entrée dans les mathématiques en visant en premier lieu une pensée théorique et analytique.

¹³ Conventional notations help extend thinking (Cobb, 2000; Lerner and Sadovsky, 1994; Vygotsky, 1978), but if they are introduced without understanding, students may display premature formalization (Piaget, 1964). For these reasons, students need to be introduced to mathematical notations in ways that make sense to them (Brizuela et Schliemann, 2004, p. 34).

Ainsi, les idées développées au sein des deux courants présentent des similitudes et les intentions didactiques semblent se rejoindre autour de caractéristiques associées à la pensée algébrique, notamment : dégager et représenter les relations entre les quantités; et considérer, comparer et manipuler des quantités indéterminées. La différence fondamentale entre les deux approches concerne plutôt la manière de mettre en œuvre ces idées dans la classe de mathématique au primaire et, par conséquent, d'introduire le nombre. Alors que le comptage traditionnel rend l'utilisation de lettres au primaire ambigu ou inutile, le travail sur les relations quantitatives semble rendre l'utilisation des lettres indispensable.

Conclusion

Les enjeux d'apprentissage et d'enseignement sur l'usage du symbolisme littéral sont nombreux. Les lettres sont utilisées à différents usages en mathématiques alors que l'utilisation de la lettre comme représentant d'une quantité ou d'un nombre est essentielle en algèbre. De plus, le symbolisme littéral prend un sens différent selon les contextes et les usages algébriques associés. La variété de contextes, les multiples sens et interprétations, les ambiguïtés de dénomination de la lettre, etc. révèlent la complexité du mandat. Soit cette situation est perçue comme une complexité et une limitation pour l'apprentissage, soit elle est perçue comme une flexibilité et un levier d'enseignement. Dans le premier cas on aura tendance à repousser l'introduction du symbolisme en justifiant que c'est trop difficile pour les élèves. On préférera éventuellement utiliser un symbolisme non conventionnel (point d'interrogation, espace vide, voire un nombre général) pour favoriser la pensée avant tout. Dans le second cas, on considérera que plus tôt les élèves sont habitués à l'usage des lettres, plus cette représentation leur apparaîtra commune et plus d'occasions et de temps ils auront d'approfondir leur compréhension.

Par ailleurs, comme la contribution du travail sur le symbolisme littéral au développement de la pensée algébrique semble acceptée de tous, on peut penser que le problème qui se pose concerne plutôt l'identification du « bon » moment pour amorcer le travail sur ce symbolisme. D'un côté, le courant *Early Algebra* préconise le développement de la pensée algébrique d'abord **sans utilisation du symbolisme littéral** (ex. Radford, 2018) et d'un autre côté, l'école de la pensée de Davydov introduit ce **symbolisme dès le début des apprentissages mathématiques scolaires**, avant même le travail sur les nombres et les opérations (ex. Lee, 2006). Toutefois, la revue de certains arguments avancés par les chercheurs des deux courants ainsi que les résultats de recherches récentes nous amènent à reconsidérer **le rôle** du symbolisme littéral dans l'apprentissage mathématique au primaire plutôt que le **moment** de son introduction. En fin de

compte, ce rôle dépend fortement de la vision sur le lien entre la pensée algébrique (ou théorique) et la conceptualisation du nombre. Au-delà des conceptions partagées sur les capacités des élèves – notre bagage piagétien assumé – et des appréhensions face à la complexité de l’algèbre, il faut savoir qu’il existe d’autres manières de concevoir le nombre et la pensée algébrique.

Nous sommes convaincus que la rupture arithmétique-algèbre n’est pas une fatalité et que plusieurs difficultés rencontrées par les élèves, et engendrées par des choix didactiques fortement ancrés dans les pratiques, pourraient être amoindries. Pourrait-on faire faire des mathématiques aux enfants du primaire autrement, sans nombres par exemple, et considérer les différentes facettes de l’algèbre progressivement? Les différents usages de la lettre pourraient-ils se côtoyer? La diversité des éléments de la pensée algébrique, que ce soit généraliser, prouver, modéliser, etc., pourrait-elle être vue comme une richesse plutôt que comme un obstacle à l’apprentissage?

Pour conclure, le problème de l’utilisation de la lettre n’est pas tant comment et à quel moment de la scolarité de l’élève il faut lui enseigner l’utilisation des symboles, mais plutôt comment doit-on voir le rôle de la notation littérale. Est-elle un outil mathématique ou un outil didactique ou les deux? De plus, à quel moment et comment doit-on commencer le développement de la pensée analytique-théorique-relationnelle-algébrique : avant le nombre, après le nombre ou en même temps que le nombre?

Références

Bednarz, N. et Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. Dans N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (p. 115-136). Kluwer Academic Publishers.

Bernier, J-F., Longtin, J. et Rodrigue, V. (2012). *Cinémath. Cahier d'apprentissage. Mathématique. 3^e cycle du primaire – 2^e année*. Édition Chenelière Éducation.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. et Newman-Owens, A. (2017). A progression in first-grade children’s thinking about variable and variable notation in functional relationships. *Educational Studies in Mathematics*, 95(2), 181-202. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9745-0>

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Lsler, I. et Kim, J. S. (2015). The development of children’s early algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46, 39-87. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.46.1.0039>

Bodanskii, F. G. (1991). The formation of an algebraic method of problem-solving in primary school children. Dans L. P. Steffe (dir.), *Soviet studies in mathematics education* (vol. 6): *Psychological abilities of primary school children in learning mathematics* (p. 275-338). National Council of Teachers of Mathematics.

Booth, L. (1984a). Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. *Petit x*, 5, 5-17.

Booth, L. (1984b). *Algebra: childrens' strategies and errors*. NFER-Nelson.

Brizuela, B. et Schliemann, A. (2004). Ten-year old students solving linear equations. *For the Learning of Mathematics*, 24(2), 33-40.
<https://www.jstor.org/stable/40248456>

Carpenter, T. P. et Levi, L. (2005). Algebra in Elementary School: Developing Relational Thinking 1. *ZDM Mathematics Education*, 37(1), 53-59.
<https://doi.org/10.1007/BF02655897>

Carraher, D. W. et Schliemann, A. D. (2007). Early Algebra and Algebraic Reasoning. Dans F. Lester (dir.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 669-705). Information Age Publishing.

Carraher, D. W. et Schliemann, A. D. (2018). Cultivating Early Algebraic Thinking. Dans C. Kieran (dir.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds. The global evolution of an emerging field of research and practice* (p. 107-138). Springer International Publishing.

Collis, K. F. (1971). A study of concrete and formal reasoning in school mathematics. *Australian Journal of Psychology*, 23(3), 289-296.
<https://doi.org/10.1080/00049537108254623>

Cooper, T. J. et Warren, E. (2008). The effect of different representations on Years 3 to 5 students' ability to generalise. *ZDM Mathematics Education*, 40, 23-37.
<https://doi.org/10.1007/s11858-007-0066-8>

Davydov, V. V. (1982). The psychological characteristics of the formation of elementary mathematical operations in children. Dans T. P. Carpenter, J.M. Moser et T.A. Romberg (dir.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (p. 224-238). Lawrence Erlbaum.

Davydov, V. V. (2008). *Problems of developmental instruction: A theoretical and experimental psychological study*. Nova Science Publishers.

Davydov, V. V., Gorbov, S. F., Mikulina, G. G. et Saveleva, O. V. (1999). *Mathematics: Class I*. State University of New York.

Davydov, V. V., Gorbov, S. F., Mikulina, G. G., Saveleva, O. V. et Tabachnikova, N. L. (2001). *Mathematics 3rd Grade*. State University of New York.

El'konin, D. B. et Davydov, V. V. (1975). Learning capacity and age level: Introduction. Dans L. P. Steffe (dir.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics*. Vol. 7, *Children's capacity for learning mathematics* (p. 1-11). University of Chicago.

Filloy, E. et Rosano, T. (1989) Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 19-25.

Frolova, T. A. (1963). Opyt vvedenia bukvennoi symboliki pri obuchenii matematike v 1 klasse. Dans V. V. Davydov et J. A. Ponomareva (dir.), *Povyshenie effektivnosti obucheniya v nachalnoi shkole* (p. 31-40). Akademia pedagogicheskikh nauk.

Gouvernement du Québec. (2006). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, premier cycle*. Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport.

Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, 17(2), 167-210.

Grugeon-Allys, B. et Pilet, J. (2017). Quelles connaissances et quels raisonnements en arithmétique favorisent l'entrée dans l'algèbre? *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 20(3), 106-130. <https://doi.org/10.7202/1055730ar>

Herscovics, N. et Linchevski, L. (1991). Crossing the didactic cut in algebra. Dans R.G. Underhill (dir.), *Proceedings of the Thirteenth Annual Meeting of PME-NA*. Volume 2 (p. 196-202). Virginia Tech.

Hewitt, D. (2014). The space between the unknown and a variable. *Proceedings of PME 38 and PME-NA 36*, 3, 289-296.

Janvier, C. (1996). Modeling and the initiation into algebra. Dans N. Bednarz, C. Kieran and L. Lee (dir.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (p. 225-236). Kluwer Academic Publishers.

Janvier, C., Charbonneau, L., et René de Cotret, S. (1989). Obstacles épistémologiques à la notion de variables : perspectives historiques. Dans N. Bednarz et C. Gamier (dir.), *Construction des savoirs*. Agence d'ARC inc.

Kaput, J. J. (1983). Representation systems and mathematics. Dans J. C. Bergeron et N. Herscovics (dir.), *Proceedings of the Fifth Annual Meeting of PME-NA*. Volume 2 (p. 57-66). Université de Montréal.

Kaput, J. J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by “algebrafying” the K-12 curriculum. Dans National Research Council (dir.), *The Nature and Role of Algebra in the K-14 Curriculum: Proceedings of a National Symposium*. The National Academies Press. <https://doi.org/10.17226/6286>.

Kaput, J. J., Blanton, M., et Moreno, L. (2008a). Algebra from a symbolization point of view. Dans J. J. Kaput, D. W. Carraher, et M. L. Blanton (dir.), *Algebra in the early grades* (p. 19–55). Routledge.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. Dans S. Wagner et C. Kieran (dir.), *Research issues in the learning and teaching of algebra. Volume 4 of Research agenda for mathematics education* (p. 33–56). National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. Dans D. A. Grouws (dir.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 390–419). National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139–151.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. et Ng, S. F. (2016). *Early Algebra. Research into its nature, its learning, its teaching*. Springer Open.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford University Press.

Knuth, E., Stephens, A., Blanton, M. et Gardiner, A. (2016). Build an early foundation for algebra success. *Kappan*, 97(6), 65–68. <https://doi.org/10.1177/0031721716636877>

Küchemann, D. E. (1978). Children’s understanding of numerical variables. *Mathematics in School*, 7(4), 23–26. <https://www.jstor.org/stable/30213397>

Küchemann, D. E. (1981). Algebra. Dans K. Hart (dir.), *Children’s understanding of mathematics* (p. 11–16). John Murray.

Lee, J. (2006). Teaching algebraic expressions to young students: The three-day journey of “ $a + 2$ ”. *School Science and Mathematics*, 106(2), 98–104. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2006.tb18139.x>

Lins, R. C. (1992) *A framework for understanding what algebraic thinking is* [Thèse de doctorat, University of Nottingham]. Nottingham ePrints. <http://eprints.nottingham.ac.uk/13227/1/316414.pdf>

MacGregor, M., et Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics*, 33(1), 1-19.

<https://doi.org/10.1023/A:1002970913563>

Malara, N. et Navarra, G. (2002). Influences of a procedural vision of arithmetics in algebra learning. Dans J. Novotná (dir.), *European Research in Mathematics Education II: Proceedings of the Second Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 2)* (p. 1-8). Bellaria.

Malara, N. et Navara, G. (2018). New words and concepts for early algebra teaching: sharing with teachers epistemological issues in early algebra to develop students' early algebraic thinking. Dans C. Kieran (dir.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds. The global evolution of an emerging field of research and practice* (p. 51-79). Springer International Publishing.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. et Gowar, N. (1985). *Routes to/Roots of algebra*. Open University Press.

Mellone, M., Ramploud, A., Di Paola, B. et Martignone, F. (2018). Cultural Transposition: Italian didactic experiences inspired by Chinese and Russian perspectives on Whole Number Arithmetic. *ZDM Mathematics Education*, 51(1), 199-212. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0992-7>

Morris, A. K. et Sloutsky, V. (1998). Understanding of logical necessity: Developmental antecedents and cognitive consequences. *Child Development*, 69(3), 721-741.

Pelczer, I., Polotskaia, E. et Fellus, O. (à paraître). La résolution des problèmes écrits: L'étude auprès d'une élève présentant une dyslexie. *McGill Journal of Education*.

Philipp, R. A. (1992). The many uses of algebraic variables. *The Mathematics Teacher*, 85(7), 557-561. <https://www.jstor.org/stable/27967771>

Polotskaia, E., Savard, A. et Freiman, V. (2017). La genèse de la pensée algébrique : macroanalyse d'une séquence d'enseignement expérimentale au primaire. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 20(3), 79-105. <https://doi.org/10.7202/1055729ar>

Polotskaia, E., Anwandter-Cuellar, N., et Savard, A. (2019). *La réussite en mathématiques au secondaire commence à la maternelle : Synthèse des connaissances sur les pratiques d'enseignement des mathématiques efficaces à la maternelle et au primaire pour réussir l'algèbre du secondaire*. Rapport de recherche. Fonds de recherche Société et culture. Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. Dans J. Cai et E. Knuth (dir.), *Early algebraization* (p. 303-322). Springer-Verlag.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26(2), 257-277. <https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2>

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. Dans C. Kieran (dir.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds. The global evolution of an emerging field of research and practice* (p. 3-26). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_1

Schliemann, A. D. (2002). Representational tools and mathematical understanding. *Journal of the Learning Sciences*, 11(2-3), 301-317. <https://doi.org/10.1080/10508406.2002.9672141>

Schmittau, J. (1994). Scientific concepts and pedagogical mediation: A comparative analysis of category structure in Russian and U.S. students [conférence]. *Annual meeting of the American Educational Research Association*, New Orleans.

Schmittau, J. (2003). Cultural-historical theory and mathematics education. Dans A. Kozulin, B. Gindis, S. Miller, et V. Ageyev (dir.), *Vygotsky's educational theory in cultural context* (p. 225-245). Cambridge University Press.

Schmittau, J. (2011). The role of theoretical analysis in developing algebraic thinking: A vygotskian perspective. Dans J. Cai et E. Knuth (dir.), *Early Algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (p. 71-85). Springer.

Schmittau, J. et Morris, A. (2004). The development of algebra in the elementary mathematics curriculum of V.V. Davydov. *The Mathematics Educator*, 8(1), 60-87.

Schoenfeld, A. et Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher*, 81(6), 420-427. <https://doi.org/10.5951/MT.81.6.0420>

Squalli, H. (2000). *Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base* [thèse de doctorat, Université Laval]. Corpus. <https://corpus.ulaval.ca/jspui/handle/20.500.11794/51025>

Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes du colloque EMF2015* (p. 346-356). Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene.

Squalli, H. et Bronner, A. (2017). Le développement de la pensée algébrique avant l'introduction du langage algébrique conventionnel. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 20(3), 1-8. <https://doi.org/10.7202/1055725ar>

Squalli, H., Larguier, M., Bronner, A. et Adihou, A. (2020). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 22(1), 36-62. <https://doi.org/10.7202/1070024ar>

Squalli, H., Mary, C. et Marchand, P. (2011). Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre : cas du Québec et de l'Ontario. Dans J. Lebeaume, A. Hasni et I. Harlé (dir.), *Recherches et expertises pour l'enseignement scientifique* (p. 67-78). De Boeck.

Squalli, H., Oliveira, I., Bronner, A. et Larguier, M. (2020). Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. *Recherches et perspectives curriculaires*. Québec : Livres en ligne du CRIRES. <https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches>

Tanişli, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *Journal of Mathematical Behavior*, 30(3), 206-223. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.08.001>

Tuominen, J., Andersson, C., Eriksson, I., et Bj, L. (2018). Relate before calculate: Students' ways of experiencing relationships between quantities. *Didactica Mathematicae*, 40, 5-33.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. Dans A. F. Coxford (dir.), *The ideas of algebra, K-12: 1988 Yearbook* (p. 8-19). National Council of Teachers of Mathematics.

Van Amerom, B. A. (2002). *Reinvention of early algebra. Developmental research on the transition from arithmetic to algebra*. CD-B Press, Centre for Science and Mathematics education.

Venenciano, L. et Dougherty, B. J. (2014). Addressing priorities for elementary school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 34(1), 18-24.

Venenciano, L., Yagi, S. et Zenigami, F. (2020). The development of relational thinking: A study of Measure Up first-grade students' thinking and their symbolic understandings. *Educational Studies in Mathematics*, 106(1), 1-16. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-020-10014-z>

Vlassis, J., Demonty, I. et Squalli, H. (2017). Développer la pensée algébrique à travers une activité de généralisation basée sur des motifs (patterns) figuratifs. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 20(3), 131-155.
<https://doi.org/10.7202/1055731ar>

Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and language*. MIT Press.