Revue québécoise de didactique des mathématiques

volume 3 (2021)
DOI : 10.71403/tq34b238v

Comité éditorial
Patricia Marchand, éditrice en chef
Claudia Corriveau, éditrice adjointe
Vincent Martin, éditeur adjoint
Izabella Oliveira, éditrice adjointe

Coordonnatrice
Marianne Homier

Table des matières

Université Laval, Québec

ISSN : 2563-6995

Mot éditorial du troisième numéro de la RQDM

Patricia Marchand
Université de Sherbrooke
patricia.marchand@usherbrooke.ca
Claudia Corriveau
Université Laval
claudia.corriveau@fse.ulaval.ca
Izabella Oliveira
Université Laval
izabella.oliveira@fse.ulaval.ca
Vincent Martin
Université de Sherbrooke
vincent.martin@USherbrooke.ca

Le comité éditorial a le plaisir de vous proposer quatre articles ainsi qu'une nouvelle rubrique pour ce troisième numéro. La nouvelle rubrique intitulée « Mémoire collective » résulte d'une envie du comité de mettre en lumière des textes issus des conférences plénières qui ont eu lieu dans le cadre des rencontres annuelles du Groupe de didactique des mathématiques (GDM) depuis son origine. La RQDM est une revue qui est née d'une volonté de notre communauté afin de diffuser les travaux de celle-ci et il s'agit ici d'une autre manière de diffuser nos travaux et ceux qui nous ont précédés.

Le premier article de ce numéro, rédigé par Alain Bronner et Hassane Squalli, expose les résultats d'une recherche menée en lien avec la pensée algébrique, plus spécifiquement le processus de généralisation. Ils analysent ce processus grâce à la praxéologie de Chevallard et au modèle de généralisation de Dörfler. Leur analyse permet de caractériser et de différentier les techniques auxquelles les élèves peuvent recourir dans le cadre d'une tâche de généralisation du premier cycle du secondaire. Elle met également en évidence les conditions à mettre en classe valorisant le développement du processus de généralisation.

https://doi.org/10.71403/fjvx9416

Vermette, Roy et Carroll proposent, comme deuxième article de ce numéro, une étude sur l'enseignement du concept de moyenne. Il traite de ce concept par le biais d'une analyse de onze manuels numériques de la première à la troisième secondaire. Leurs résultats illustrent ainsi le potentiel et les limites de ces manuels scolaires permettant de prendre un pas de recul et réfléchir à l'enseignement du concept de moyenne en prenant en compte une plus grande variété de procédures.

Le troisième article expose une réflexion théorique, réalisée par Bergeron et Barallobres, autour des différentes significations accordées à l'« abstraction » dans un contexte où l'abstraction représenterait un obstacle pour plusieurs élèves dits en difficulté. Le portrait de ce concept est effectué en étudiant le sens qu'il lui est attribué en philosophie, en mathématique, en psychologie et en didactique des mathématiques. Ce regard pluridisciplinaire met en exergue les assises théoriques de ce concept et des glissements pouvant être possibles lors des interventions auprès des élèves en difficulté. Les auteurs font appel a une vigilance épistémologique dans l'élaboration de propositions d'intervention auprès des élèves.

Le quatrième et dernier article de ce numéro est celui de Khalloufi-Mouha qui traite des fonctions trigonométriques et de leurs réciproques lors du passage des élèves du secondaire vers le postsecondaire. L'auteur traite des routines pouvant être observées dans les manuels scolaires et les notes de cours des enseignants comme une unité d'analyse selon l'approche commognitive. Cette étude met en lumière les continuités et les discontinuités existantes dans cette transition scolaire.

Le premier article présenté dans la rubrique « Mémoire collective » est issu de la conférence d'ouverture de la rencontre annuelle du GDM de 2007 dont la thématique était « La didactique des mathématiques au Québec : genèse et perspectives », conférence donnée par Nadine Bednarz. Sa conférence traitait de la spécificité de la didactique des mathématiques au Québec en revisitant plusieurs travaux et activités de centres de recherche depuis les quarante dernières années. Le texte qui a été publié pour la première fois dans les actes du GDM reprend les principaux éléments de cette conférence et brosse un portrait exhaustif des travaux menés au Québec en didactique des mathématiques. Par conséquent, ce texte nous paraissait une porte d'entrée tout à fait appropriée pour introduire cette nouvelle rubrique.

Bonne lecture!

La généralisation dans la pensée algébrique

Alain BRONNER
LIRDEF, Université de Montpellier
alain.bronner@umontpellier.fr
Hassane SQUALLI
Université de Sherbrooke
Hassane.Squalli@USherbrooke.ca

Résumé : Notre travail traite du développement de la pensée algébrique avant l'introduction du symbolisme formel de l'algèbre à travers des problèmes de généralisation. Il s'inscrit dans l'étude des potentialités de certaines classes de problèmes et de la mise en évidence des conditions favorisant l'émergence de la généralisation dans les classes du primaire et du début du secondaire. Nous questionnons tout d'abord le concept de généralisation et sa place dans le développement de la pensée algébrique. Pour appuyer notre étude nous analysons une situation de généralisation réalisée dans une classe de 6e du primaire du Québec dans le cadre d'une analyse praxéologique (Chevallard, 1992, 1999) soutenue par un modèle de la généralisation algébrique (Squalli, 2015) adapté de Dörfler (1991). Enfin nous souhaitons montrer l'apport d'une telle analyse conjointe pour l'étude des problèmes de généralisation au niveau des caractéristiques des situations, des raisonnements des élèves et de la pratique enseignante.

Mots clés : pensée algébrique, numérique, généralisation, école primaire, praxéologie

Generalization in algebraic thinking

Abstract: This article primarily focuses on the development of algebraic thinking before the introduction of formal algebraic symbolism through problems of generalization. It partakes in the study of the potential of certain classes of problems as well as the identification of conditions promoting the emergence of generalization in primary and beginning secondary classes. First, we question the concept of generalization and its role in the development of algebraic thinking. In order to support our study we analyze a situation of generalization within a 6th grade class in Quebec in the context of a praxeological analysis (Chevallard, 1992, 1999) supported by a model of algebraic generalization (Squalli, 2015) adapted from Dörfler (1991). Finally, we present the contribution of such a joint analysis to the study of problems of generalization in terms of situational characteristics, student reasoning, and teaching practice.

Keywords: *algebraic thinking, numerical, generalization,* primary school, praxeology

Introduction

Nos travaux portent sur le développement de la pensée algébrique avant l'introduction du symbolisme formel de l'algèbre, lequel soulève des difficultés importantes, tant au niveau des apprentissages des élèves qu'au niveau des stratégies d'enseignement (Coulange et al., 2012). Relativement à cette question les recherches didactiques ont souvent mis en avant la nécessité d'une articulation des savoirs et connaissances numériques et algébriques (Bronner, 1997, 2007). Cette question du passage des savoirs et connaissances numériques vers l'algébrique se pose depuis fort longtemps (Booth, 1984; Vergnaud, 1988; Chevallard, 1989, 1990; Kieran, 1992), mais elle reste encore une question d'enseignement et de recherche comme le montrent des études au Québec (Marchand et Bednarz, 1999; Squalli et al., 2011; Squalli et al., 2012). Face à cette question, ces travaux proposent, au niveau curriculaire et des pratiques enseignantes, de développer précocement la pensée algébrique, c'est-à-dire avant l'introduction du symbolisme algébrique conventionnel. De nombreux chercheurs et enseignants se sont tournés vers les problèmes dits de généralisation.

Notre travail s'inscrit dans cette perspective de recherche et vise à étudier les potentialités de certaines classes de problèmes pour favoriser une pensée algébrique avant toute introduction du symbolisme algébrique conventionnel à travers l'émergence de généralisation dans les classes du primaire et du début du secondaire.

Dans une première section de cet article, nous précisons notre problématique, puis nous présentons dans la section suivante notre cadre conceptuel et méthodologique issu de l'approche praxéologique de Chevallard (1992, 1999) et du modèle de la généralisation de Dörfler (1991). Ce cadre nous permet de préciser nos questions de recherche. Dans la troisième section notre étude s'appuie sur une situation de généralisation expérimentée dans une classe de 6e année du primaire du Québec. L'étude de cette situation se réalise dans le cadre d'une analyse conjointe praxéologique et du modèle adapté de Dörfler en nous centrant sur les généralisations mobilisées par les élèves et sur le rôle du professeur. En conclusion, nous synthétisons nos résultats sur les potentialités de certaines classes de situations de généralisation et terminons par une discussion sur l'apport de notre cadre conjoint d'analyse pour notre problématique autour des situations de généralisation.

1. Problématique de l'étude

La pensée mathématique est depuis longtemps au centre des programmes d'étude à l'école primaire et à l'école secondaire. Bien que le véritable objectif du programme au Québec soit le développement de différentes formes de la pensée mathématique (pensée arithmétique, algébrique, géométrique, probabiliste, statistique, fonctionnelle, etc.), ce dernier reste organisé selon une logique de hiérarchisation de domaines de contenus (Squalli, 2019). Ainsi, l'arithmétique est enseignée essentiellement au primaire et l'algèbre est enseignée au secondaire. Cette organisation a montré ses limites et crée un problème de transition entre les mathématiques du primaire et celles du secondaire, notamment entre arithmétique et algèbre. Ce problème est devenu une préoccupation majeure du milieu scolaire québécois car, comme le vivent les enseignants dans leur classe et comme le montre un grand nombre de travaux de recherches en didactique des mathématiques (Jeannotte, 2005; Oliveira et al, 2017; Saboya et al, 2013; Vergnaud et al., 1988), l'algèbre continue à poser problème aux élèves. Le passage pour les élèves d'un mode de pensée arithmétique à un mode de pensée algébrique est loin d'être facile à réaliser et présente d'importants obstacles (Vergnaud et al., 1988; Kieran, 1992; Rojano, 1996). Jusqu'à la fin des années 1980, la plupart des recherches en didactique de l'algèbre étaient principalement centrées sur l'étude des difficultés d'apprentissage rencontrées par les élèves lors du passage de l'arithmétique à l'algèbre. Dans leur article synthèse, Kieran (1992), Carraher et Schliemann (2007) présentent des exemples de telles difficultés documentées par la recherche.

Différentes interprétations des sources de ces difficultés sont proposées. Vergnaud (1988) évoque une double rupture épistémologique lors du passage de l'arithmétique à l'algèbre. On note, d'une part, une opposition des caractéristiques de la résolution arithmétique à celles de la résolution algébrique. D'autre part, une opposition des modes d'appréhension des écritures algébriques et numériques (statut du signe d'égalité, statut des lettres) ainsi que des modes de contrôle dans la transformation des écritures. Kieran (1992, 1994) avance qu'entre l'arithmétique et l'algèbre résident à la fois de fausses continuités et des discontinuités. Les fausses continuités résident dans l'utilisation des mêmes symboles et signes pour représenter le signe d'égalité et les opérations, mais avec des interprétations différentes. Les discontinuités sont reliées à la mise en œuvre de démarches de résolution distinctes, à l'utilisation de nouveaux objets, voire à la mise en jeu de conceptions structurales et non plus procédurales des objets, à la représentation formelle des problèmes par des équations et à l'utilisation de procédures formelles nouvelles pour les résoudre.

Au début des années 1990, l'ensemble de la communauté internationale s'accorde sur le fait que l'enseignement de l'algèbre pose problème et souligne la nécessité de sa rénovation en profondeur en mettant l'accent sur le développement de la pensée algébrique. Or, le développement de la pensée algébrique peut commencer avant l'introduction du symbolisme littéral de l'algèbre, dès les premières classes du primaire.

La généralisation et l'analycité sont deux caractéristiques essentielles de la pensée algébrique qui sont soulignées par la majorité des chercheurs (elles sont définies plus loin). La généralisation est un processus essentiel dans l'activité mathématique et tout particulièrement en algèbre. Elle est reconnue par plusieurs auteurs comme étant une composante très importante de la pensée algébrique (Lee, 1996; Kaput, 2008; Carraher et al., 2008; Radford, 2010, 2014; Squalli, 2000; Grugeon, 1995). Lee va jusqu'à penser qu'en algèbre, les activités de généralisation sont les plus importantes et constituent les seuls moyens d'initier les élèves à la culture algébrique. Elle ajoute : « Ce n'est pas non plus un défi de démontrer que les fonctions, la modélisation et la résolution de problèmes sont tous des types d'activités de généralisation, que l'algèbre et en fait toutes les mathématiques consistent à généraliser des modèles » (Lee, 1996, p. 102-103, traduction libre[1]).

Grugeon (2000) souligne les liens entre généralisation et compétence algébrique, montrant le rôle que peuvent jouer les problèmes de généralisation dans l'articulation des connaissances numériques et algébriques :

> La compétence algébrique s'évalue aussi à travers la capacité à exprimer des relations numériques générales. En effet, l'algèbre est un outil essentiel pour rendre l'accès possible aux propriétés numériques et pour les généraliser … De façon générale, le langage algébrique permet de formuler des problèmes dans leur généralité puis de les résoudre de façon systématique. (p. 11-12)

L'intérêt pour les problèmes de généralisation a conduit à des expérimentations de situations de généralisation s'appuyant sur divers supports et problèmes dans une perspective de développement de la pensée algébrique, notamment dans des situations de modélisation algébrique. En France, dans le rapport de la Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques (CREM) , une première entrée dans le calcul littéral est située dans « le travail sur les formules, qu'il s'agisse d'exploiter des formules données, ou d'en élaborer » (Kahane, 2002, p. 30). Pour la CREM, le statut de la lettre évolue : « elle devient représentant d'un nombre quelconque, engagée dans les calculs au même titre que le nombre qu'elle

[1] Nor is it much of a challenge to demonstrate that functions, modeling, and problem solving are all types of generalizing activities, that algebra and indeed all of mathematics is about generalizing patterns (Lee, 1996, p. 102-103).

représente » (Kahane, 2002, p. 235). On retrouve ici les premières caractéristiques d'une entrée dans la pensée algébrique, que nous préciserons plus loin, au service de la généralisation :

> Il y a là une évolution essentielle et, en même temps, un moyen de faire sentir à l'élève la puissance du calcul algébrique, dans une perspective complémentaire de celle ouverte par l'approche en termes d'équations et d'inéquations : il intervient ici comme outil au service de la généralisation. (Kahane, 2002, p. 235)

Toujours pour Kahane (2002), ce travail peut être engagé relativement tôt et il suggère comme habitat les problèmes de dénombrement :

> Le travail de production de formules, associé par exemple à des situations de dénombrement, est sans doute nécessaire pour ressentir en quoi consiste cette démarche de généralisation par le passage au littéral et la puissance que nous donne le calcul algébrique, une fois la formule établie. En fait, ce qui est en germe ici, c'est la pensée fonctionnelle et le calcul associé. (p. 31)

En Belgique aussi, les situations de dénombrement sont mises en avant pour le développement de la pensée algébrique comme l'indiquent Demonty et al. (2015) :

> Les programmes de Belgique francophone autorisent l'exploitation de situations de dénombrement, en proposant de les travailler à la fin de l'enseignement primaire (à travers des exploitations numériques) et au début de l'enseignement secondaire (où l'accent sera mis sur l'élaboration d'une formule permettant de généraliser le phénomène à tous les cas possibles). (p. 277)

C'est ce que Krysinska et al. (2009) appellent, à propos, des problèmes de dénombrement « l'engouement de la noosphère aussi bien que de chercheurs estimant que ces problèmes "marchent" et appréciant leur portée dans l'émergence de ce qu'ils appellent la "pensée fonctionnelle" » (p. 274). Krysinska et al. (2009) testent la crédibilité didactique des problèmes de dénombrement et proposent une ingénierie innovante de classement de ces problèmes dans le contexte des suites figurées pour montrer leur importance dans l'introduction à la pensée fonctionnelle.

Notre travail porte plus précisément sur l'émergence de la généralisation dès les classes du primaire, sur la nature des processus de généralisation au niveau des élèves et sur la recherche des conditions favorisant cette émergence au niveau des situations et de la pratique de l'enseignant. Notre hypothèse avance ainsi que ces problèmes de dénombrement constituent aussi des potentialités intéressantes pour le développement précoce de la pensée algébrique en favorisant les processus de généralisation.

En s'inspirant d'une série de travaux, Radford (2014, 2015) caractérise quant à lui la pensée algébrique élémentaire à l'aide de trois éléments :

1) indéterminés : la situation mathématique considérée contient des nombres dont les valeurs sont non déterminées (inconnues, variables, paramètres, etc.).
2) dénotation : les nombres non déterminés impliqués dans la situation doivent être nommés ou signifiés d'une certaine manière. On peut utiliser des signes alphanumériques, mais pas nécessairement.
3) analyticité : les nombres non déterminés sont traités comme s'ils étaient des nombres connus, c'est-à-dire, bien qu'ils ne soient pas connus, les nombres non déterminés sont traités de la même manière que les nombres déterminés (dont la valeur est connue) : on les additionne, les soustrait, les multiplie, les divise, etc. en respectant les propriétés des opérations.

2. Cadre théorique et méthodologique

Nous explicitons notre cadre conceptuel en présentant la notion de praxéologie au sens de Chevallard pour modéliser les savoirs et les activités dans la situation que nous analyserons dans cet article. Étant attentifs aux instruments sémiotiques mobilisés dans les activités de généralisation, nous compléterons notre cadre par la notion de registre sémiotique de Duval. Notre cadre d'analyse est aussi enrichi par un modèle des processus de généralisation algébrique à partir du modèle de Dörfler.

Nous terminerons cette partie en précisant nos questions de recherche et notre méthodologie.

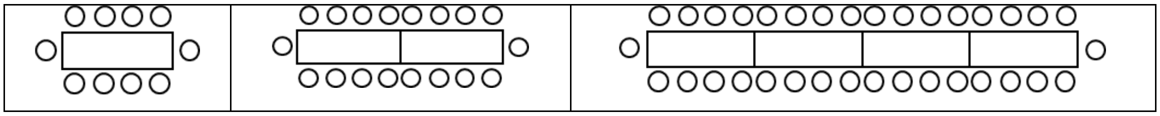
2.1 L'approche praxéologique et sémiotique des activités

Nous utilisons la modélisation de l'activité mathématique développée par Chevallard (1999) dans le cadre de l'approche anthropologique avec la notion de praxéologie constituée de quatre dimensions articulées (type de tâches, techniques, technologies, théorie) pour construire un premier axe d'analyse a priori des démarches possibles des élèves dans des activités de généralisation. Ainsi pour Chevallard (1997) :

> En toute institution, l'activité des personnes occupant une position donnée se décline en différents *types de tâches* T, accomplis au moyen d'une certaine *manière de faire*, ou *technique*, τ. Le couple [T/τ] constitue, par définition, un *savoir-faire*. (p. 38)

Prenons un exemple classique de problème de généralisation de type dénombrement « les tables de la cafétéria » :

> Dans une cafétéria d'école, le cuisinier dispose de petites tables rectangulaires qu'il faut mettre bout à bout pour former de plus grandes tables. Voici quelques dispositions possibles :



> Donne une manière de trouver rapidement le nombre de chaises placées autour d'une grande table, peu importe la longueur de celle-ci.

Pour chaque nombre de petites tables fixé, il se présente une tâche ou un spécimen (par exemple : déterminer le nombre de chaises pour 10 petites tables) de ce que Chevallard appelle un type de tâches que l'on peut formuler dans ce contexte de la manière suivante : déterminer le nombre de chaises d'une telle configuration selon le nombre de petites tables. La distinction « tâche » et « type de tâches » est importante dans la mesure où ce que le professeur vise est de faire élaborer, non pas seulement une méthode pour un cas particulier, et notamment pour les premiers, avec 2, 3 ou 4 petites tables, mais une méthode ou technique générale valable pour tous les cas particuliers. Nous expliciterons, dans l'analyse de notre situation, des techniques possibles qui peuvent être mobilisées pour un tel type de tâches de généralisation. Néanmoins, on peut déjà se baser sur la catégorisation des démarches de généralisation mises en place par les élèves de 10 à 14 ans pour ce problème par Radford (2006, 2008) : l'induction naïve, la généralisation arithmétique et la généralisation algébrique. Demonty et al. (2015) résument ainsi la catégorisation de cet auteur :

> - L'induction naïve consiste à rechercher un motif inconnu en analysant les caractéristiques d'un seul motif connu.
> - Une autre démarche est qualifiée par Radford (2006, 2008) de généralisation arithmétique : dans celle-ci, la personne identifie un point commun à travers l'analyse de plusieurs termes de la suite (il s'agit du fait qu'il y a un accroissement constant entre les termes consécutifs). Cette caractéristique peut être utilisée pour identifier correctement un terme à partir d'un terme proche (par addition successive de la raison).
> - Dans la démarche de généralisation algébrique, l'élève identifie une régularité à travers l'analyse de quelques termes de la suite, étend ou généralise cette régularité aux autres termes, et parvient à proposer une expression directe de n'importe quel terme de la suite. (p. 267-268)

Pour Chevallard (1997) une praxéologie a besoin, pour être viable, de mobiliser, de manière souvent très parcellaire, un savoir associé :

> Mais un tel savoir-faire ne saurait vivre à l'état isolé : il appelle un environnement technologico-théorique $[\theta,\Theta]$, ou savoir (au sens restreint), formé d'une technologie θ, « discours » rationnel (logos) censé justifier et rendre intelligible la technique (tekhnê), et à son tour justifié et éclairé par une théorie Θ, généralement évanouissante. Le système de ces quatre composantes, noté $[T/\tau/\theta/\Theta]$, constitue

> alors une organisation praxéologique ou praxéologie, dénomination qui a le mérite de rappeler la structure bifide d'une telle organisation, avec sa partie pratico-technique $[T/\tau]$ (savoir-faire), de l'ordre de la praxis, et sa partie technologico-théorique $[\theta/\Theta]$ (savoir), de l'ordre du logos. (Chevallard, 1997, p. 38)

Chevallard (2007), en explicitant la fonction de l'environnement tecnnologico-théorique, précise que sa modélisation s'applique aussi bien à une institution qu'à une personne (élève ou enseignant par exemple) :

> Est technologie ce qui, dans une institution ou pour une personne, remplit la fonction technologique – justifier, éclairer la technique t relative au type de tâches T, voire permettre de l'engendrer (ou de la reconstruire, quand elle est « donnée »). De même, est théorie ce qui assume, en cette institution ou pour cette personne, une fonction théorique. Dans un tel univers, les stratégies institutionnelles ou personnelles de diffusion, de rétention, de rejet praxéologique vont jouer un rôle prééminent; mais on s'en doutait déjà. (p. 714)

Dès la communication des tâches, comme on peut le voir sur l'exemple donné précédemment, les élèves sont confrontés à divers ostensifs, au sens de Bosch et Chevallard (1999) :

> Un « objet ostensif » – du latin ostendre, « montrer, présenter avec insistance » – pour nous référer à tout objet ayant une nature sensible, une certaine matérialité, et qui, de ce fait, acquiert pour le sujet humain une réalité perceptible. (p. 90)

C'est par ces objets que l'accès aux objets mathématiques abstraits, non ostensifs, est possible. Dans le traitement des tâches, notamment dans les moments d'élaboration de techniques, les élèves manipulent divers types d'objets, qu'ils soient matériels, numériques ou algébriques, à l'aide de divers ostensifs, dont certains se constituent en des registres de représentations sémiotiques :

> Les représentations sémiotiques sont des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses règles propres de signifiance et de fonctionnement. (Duval, 1993, p. 39)

Ainsi, dans l'exemple proposé, les élèves peuvent exprimer en mots ou en abrégé « le nombre de tables » ou « le nombre d'étapes » et évoquer des opérations sur cette grandeur.

Duval (1995) a souligné les problèmes sémiotiques spécifiques du point de vue de l'apprentissage comme de l'enseignement. Ainsi se présentent dans les situations de généralisation (de type dénombrement) les problèmes de l'articulation entre le registre des écritures symboliques arithmétiques, ou numériques pures pourrait-on dire, et celui des écritures algébriques, et entre ces registres sémiotiques et d'autres registres, notamment le registre de la langue naturelle et le registre graphique. Ces problèmes ne sont pas spécifiques de l'algèbre et se présentaient déjà avec les questions numériques comme l'indiquait Bronner (2007) :

> On le voit, il ne s'agit pas seulement de problème algébrique en opposition à arithmétique, mais de problèmes mettant en jeu des nombres qu'ils soient mis en scène dans des apparats numériques directs ou sous de belles lettres. (p. 17)

Cette approche praxéologique et sémiotique des situations est articulée avec un deuxième axe d'analyse s'appuyant sur le modèle de généralisation de Dörfler (que nous présentons dans la section suivante) pour étudier les situations de généralisation.

2.2 La généralisation : une composante essentielle de la pensée algébrique

À l'instar de Radford (2010), nous définissons la pensée algébrique comme une manière d'agir et de réfléchir dans des activités algébriques, c'est-à-dire des activités faisant intervenir des opérations (lois de composition internes, externes, binaires ou n-aires) pouvant être de nature quelconque (addition, multiplication, rotation, translation, etc.), mais répétées un nombre fini de fois (Squalli, 2000, 2015). Sur le plan opératoire la pensée algébrique se déploie au moyen de 1) un ensemble de raisonnements particuliers, comme généraliser, raisonner de manière analytique, symboliser et opérer sur des symboles; raisonner sur des relations entre variables, en particulier des relations fonctionnelles; raisonner en termes de structures, etc.; 2) des manières d'approcher des concepts en jeu dans les activités algébriques, comme traiter l'égalité comme une relation d'équivalence; laisser les opérations en suspens; voir une expression numérique comme un objet en soi et non uniquement comme une chaîne de calculs, etc. et des modes de représentation et des manières d'opérer sur ces représentations (Squalli, 2015, Squalli et al., 2020).

La généralisation peut être vue à la fois comme processus et comme produit. Pour faire une distinction entre ces deux aspects, nous parlerons de généralisation quand il s'agit du processus et de généralité quand il s'agit du produit. Une généralisation est algébrique quand la généralité produite peut être représentée dans le registre algébrique, par exemple par une expression faisant intervenir un nombre fini de fois, des opérations, des nombres, des lettres, des mots, des symboles. La présence des lettres n'y est pas indispensable (Radford, 2018; Squalli, 2020).

Pour décrire le processus de généralisation algébrique, nous nous appuyons sur une version adaptée (Squalli, 2015) du modèle de la généralisation théorique de Dörfler (1991). Nous allons illustrer ce modèle, schématisé dans la figure 1, par l'exemple de la situation des tables de la cafétéria.

Le point de départ est une action concrète ou un système d’actions. Les actions peuvent être physiques, imaginées ou symboliques. Les buts des actions, les moyens utilisés ainsi que le cours des actions orientent l’attention du sujet vers certaines relations et connexions entre les objets sur lesquels portent ces actions.

Dans la situation des tables de la cafétéria un système initial d’actions peut être le suivant : déterminer le nombre de chaises pour une table, ensuite pour une chaîne formée de deux tables, de trois tables et ainsi de suite.

Détachement des invariants de leur véhicule original

↑

Les invariants comme prototypes – Extension du domaine de référence

↑

Formulation d’invariants – Description symbolique des invariants

↑

Réflexion sur le système d’actions

↑

Système d’actions à partir d’une situation

Figure 1. Modèle simplifié de généralisation théorique de Dörfler (1991)

La répétition de ces actions conduit le sujet à une certaine constance dans leur réalisation : des invariants. Dans notre exemple, les invariants des actions sont, par exemple, « pour chacune des tables du centre, il faut compter 2 fois 4 chaises » alors que « pour les deux tables extrêmes, il faut compter deux chaises de plus » ou encore, « quand on rallonge une chaîne de tables d’une table on augmente le nombre de chaises de 2 fois 4 ». La formulation des invariants nécessite une description symbolique, parce qu’il est nécessaire d’utiliser des symboles pour décrire les objets sur lesquels portent les actions (nombres de tables, nombre de chaises) ou pour décrire les transformations subies par le nombre de chaises lorsqu’on fait varier le nombre de tables. Ces symboles peuvent relever de diverses natures ostensives : verbale, iconique, géométrique ou algébrique. Les invariants sont potentiellement plus généraux que les actions elles-mêmes, ils peuvent être appliqués à n’importe quelle chaîne de tables.

Un moment crucial dans le processus de généralisation se produit quand ces invariants sont remplacés par des prototypes. C’est-à-dire quand la formulation du système d’actions ne sert plus uniquement à décrire les cas spécifiques examinés, mais aussi à envisager les cas potentiels. Ainsi, dans la description du système d’actions précédent, « compter 2 fois 4 chaises pour chaque table du centre et 2 fois 4 + 1 chaises pour chacune des tables extrêmes » s'applique au cas de la chaîne de tables sur laquelle a porté le système d'actions initial, mais aussi à n'importe quelle autre chaîne de tables (formée de 3 tables ou plus). Les invariants et leurs formulations symboliques sont alors détachés des actions originales. Dans notre exemple, le schéma d'actions peut dès lors être formulé de la manière suivante : le nombre de chaises d'une chaîne de tables est : « le nombre de tables moins 2 fois 4 plus 2 fois 4 plus 2 », ou encore, en langage numérico-littéral, $(n-2) \times 2 \times 4 + 2 \times 4 + 2$ où n est le nombre de tables dans la chaîne.

Le détachement total des actions originales permet d'écrire notre règle comme $8n + 2$, où n est un entier naturel non nul représentant le nombre de tables dans la chaîne.

Nous pouvons maintenant préciser nos questions de recherche dans la section suivante.

2.3 Questions de recherche et méthodologie de l'étude empirique

Nous souhaitons tester l'efficacité du cadre construit conjointement autour de l'approche praxéologique et sémiotique, et du modèle adapté de généralisation algébrique de Dörfler pour étudier les situations de généralisation, notamment de type dénombrement, à travers les questions suivantes :

- Au niveau des situations, quelles sont les caractéristiques et la structure de réseau de tâches qui favorisent l'engagement des élèves vers des degrés de généralisation *via* l'identification d'invariants dans un travail conduit autour de problèmes de généralisation proches?
- Au-delà des catégories de Radford, peut-on identifier une variété de techniques au sens de Chevallard et de raisonnements d'élèves dans le processus de généralisation (y compris dans la production d'une même « généralité »), à partir du modèle de Dörfler?
- Au niveau de l'enseignant, quels sont les gestes spécifiques dans ces situations pour engager les élèves dans une activité de généralisation, pour conduire les élèves à formuler les généralités construites et à améliorer leurs formulations, et pour amener les élèves à valider les généralités produites?

Pour appuyer notre étude, nous présenterons et analyserons une situation de généralisation « les chaînes du joaillier », expérimentée dans une classe de 6e année du primaire au Québec dans le cadre d'une analyse praxéologique et du modèle adapté de Dörfler. Cette étude nous permet de montrer l'apport d'une telle analyse conjointe pour l'étude des problèmes de généralisation au niveau des caractéristiques des situations, des raisonnements des élèves et de la pratique enseignante dans les actions de dévolution et d'engagement des élèves vers les processus de généralisation.

3. Le contexte, la trame et les tâches d'une séance observée sur la généralisation

La séance d'enseignement analysée a été réalisée au Québec dans une classe de 6e année du primaire composée de 23 élèves. Nous présentons dans ce qui suit la description de la trame générale de la leçon ainsi que des tâches effectives proposées aux élèves.

3.1 Le contexte et la trame générale de la séance

L'activité se déroule en deux moments consécutifs de 65 minutes chacun, séparés par une récréation.

L'analyse se base sur les documents utilisés par l'enseignant lors de la séance ainsi que sur une narration en épisodes de la séance de classe à partir d'une observation directe et d'un enregistrement vidéo.

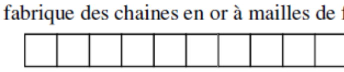
Nous décrivons tout d'abord une trame de la séance qui permet d'identifier des traces relativement objectives de ce qui est observé (Bronner, 2006). Le détail de la trame est fourni dans le tableau en annexe.

Le professeur propose un problème « les chaînes du joaillier » dans lequel il s'agit de produire un programme de calcul du nombre de tiges d'une chaîne en fonction du nombre de mailles. Il a choisi de commencer sa séquence par une première situation basée sur des chaînes carrées (figure 2).

Les chaines du joaillier

Mise en situation

Laurent, un bijoutier, fabrique des chaines en or à mailles de forme carrée comme celle-ci :



Il fait des chaines de différentes longueurs pour diverses utilisations (au cou, au pied, comme boucles d'oreilles).

L'or coûte cher. Quand il fait une commande, il compte les tiges une par une pour être sûr de ne pas en commander de trop ni en oublier. Mais c'est long. Il voudrait pouvoir trouver le nombre de tiges dont il a besoin sans être obligé de compter les tiges une par une. Vous devez envoyer un message au bijoutier dans lequel vous allez lui expliquer comment il pourrait faire pour trouver combien de tiges il a besoin selon le nombre de mailles.

Figure 2. Première situation « la maille carrée »

Puis, il propose aux élèves d'étudier le cas de chaînes à mailles triangulaires, puis hexagonales. Ensuite les élèves inventeront des formes, en fait octogonales et pentagonales. Enfin le professeur demande aux élèves d'étendre l'étude à n'importe quelle forme de mailles.

3.2 Les tâches proposées effectivement aux élèves dans la séance

Le professeur demande de commencer par des chaînes à 1, 2, 3, 5 et 9 mailles, puis il met à la disposition des élèves des bâtonnets en nombre suffisant pour la construction d'une chaîne carrée à 9 mailles. Les élèves sont ainsi confrontés dans les 3 premières phases à un premier type de tâches Tcn (au sens de Chevallard, 1999) :

1. Tcn : Calculer le nombre de constituants élémentaires (tiges) d'une chaîne à mailles carrées (c) connaissant (de manière déterminée) le nombre de mailles.

Précisons dès maintenant les notations que nous utiliserons selon le même principe dans la suite : la première lettre sera soit T, si nous considérons un type de tâches, soit la lettre minuscule t si on ne considère qu'une ou plusieurs tâches isolées. La deuxième lettre désigne la forme de la maille, par exemple c pour carrée, la troisième lettre est soit n pour numérique, soit a pour algébrique.

Le professeur propose encore des tâches particulières du type de tâches Tcn avec le cas de 44 ou 45 mailles, avant que les élèves soient confrontés à une première tâche de généralisation tca (nous y reviendrons particulièrement dans les sections 4.1. et 4.2.) :

2. Tca : Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaîne à mailles carrées pour n'importe quelle longueur de la chaîne.

Le choix d'une quantité de mailles comme 44 peut être vu comme une tâche intermédiaire entre le type de tâches Tcn, étiqueté de numérique, et la tâche tca que nous qualifions d'algébrique. En fait, ce choix du professeur doit être souligné comme une tentative pour engager les élèves dans un processus de généralisation. En effet, bien que le nombre de mailles 44 soit un nombre déterminé, il est suffisamment grand pour que la quantité de tiges ne soit pas facile à obtenir directement par un dénombrement, mais seulement via un schéma de calcul. Le cas de 44 mailles joue donc ici le rôle d'une tâche intermédiaire entre les tâches numériques et une tâche de généralisation algébrique. On pourrait même le considérer comme faisant partie des tâches de généralisation algébrique.

Les phases 4 et 5 amènent à jouer sur la variable forme et le professeur propose maintenant des tâches analogues, mais avec le cas d'une chaîne à mailles triangulaires. Les élèves étudient ainsi le type de tâches :

3. Ttn : Calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaîne à mailles triangulaires connaissant (de manière déterminée) le nombre de mailles.

Les différents cas suivants sont proposés pour la variable N nombre de mailles :

- calcul pour 1, 2, 3, 4, 5 mailles (phase 4);
- calcul pour 44 mailles (phase 5).

Ici encore, il est remarquable que les choix de la variable didactique « nombre de mailles » demandent implicitement de rentrer dans une première généralisation avant que le professeur propose de travailler explicitement sur la tâche de généralisation suivante :

4. tta : Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaîne à mailles triangulaires pour n'importe quelle longueur de la chaîne.

Il est à noter qu'avec notre notation, nous souhaitons bien montrer qu'il s'agit à ce stade du déroulé de la séance observée de tâches isolées tca et tta et non pas encore d'un type de tâches.

Le scénario se poursuit de manière analogue avec le cas d'une maille hexagonale dans les phases 6 et 7, faisant rencontrer le type de tâches Thn à travers le calcul pour 44 mailles (phase 6) :

5. Thn : Calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaîne à mailles hexagonales connaissant (de manière déterminée) le nombre de mailles.

Puis encore une tâche isolée de généralisation (phase 7) :

6. tha : Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaîne à mailles hexagonales pour n'importe quelle longueur de la chaîne.

Dans les phases 8 et 9, le professeur demande aux élèves de choisir leurs propres formes de mailles avec la contrainte suivante : la forme doit être différente des précédentes. En plus de la consigne « trouver une phrase mathématique pour calculer le nombre de tiges pour une chaîne de 44 mailles », il précise aussi à la suite d'une question d'un élève à propos de la longueur des tiges : « les tiges doivent être toutes égales et les mailles, elles sont toutes de la même forme. C'est pourquoi je te demande de dessiner une maille et toutes tes mailles vont être identiques. Et elles vont s'attacher par un côté ».

Cela amène les élèves, selon les groupes, à deux tâches de généralisation :

7. toa : Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaîne à mailles octogonales pour n'importe quelle longueur de la chaîne ;
8. tpa : Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaîne à mailles pentagonales pour n'importe quelle longueur de la chaîne.

Le professeur demande ensuite de trouver : « une phrase mathématique à envoyer au bijoutier qui permettra de calculer le nombre de tiges pour n'importe quelle chaîne ». La succession des différentes tâches tca, tta, tha, toa et tpa, apparaissant comme isolées dans un premier temps, alimentent ainsi le travail des phases 10 et 11, qui les font alors apparaître comme des spécimens d'un nouveau type de tâches, encore plus général :

9. Ta : Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaîne à mailles pour n'importe quelle forme et pour n'importe quelle longueur de la chaîne.

4. Analyse a priori des raisonnements des élèves et des processus de généralisation

Nous menons dans cette section une analyse a priori des raisonnements des élèves et des généralisations associées selon les types de tâches proposés par l'enseignant à l'aide de la notion de praxéologie. Cette grille est articulée avec un deuxième axe d'analyse s'appuyant sur le modèle de généralisation de Dörfler.

Ainsi, nous commençons par identifier les types de tâches de cette séance, liés à la forme carrée, pour lesquels nous avions déjà proposé de grandes catégories possibles de techniques et de technologies associées (Bronner, 2015, 2017) que nous rappelons ici et dont nous articulons l'analyse des raisonnements des élèves avec le modèle de Dörfler. Nous présentons ensuite les possibilités d'extension à d'autres types de tâches en jouant sur les variables didactiques principales.

4.1 Le premier type de tâches Tcn et les techniques numériques σ1

Rappelons que la première situation concerne le type de tâches Tcn pour lequel il s'agit de calculer le nombre de tiges d'une chaîne à mailles carrées (c) connaissant de manière déterminée le nombre de mailles. On peut envisager deux catégories de techniques σ1 associées à ce type de tâches dans le cas d'un petit nombre déterminé de mailles :

- Dénombrer les tiges : Le dénombrement peut se faire de manière désorganisée ou raisonnée suivant une réorganisation spatiale. Dans ce dernier cas, plusieurs procédures sont à envisager, par exemple, on peut d'abord compter toutes les tiges horizontales (soit deux par deux, soit toutes celles du haut, puis celles du bas, …), et ensuite les tiges verticales.

- Calculer de proche en proche : Une autre procédure consiste à compter selon un principe de récurrence. On peut dénombrer tout d'abord les tiges de la première maille (4), puis on compte les tiges de la maille suivante, soit en énumérant, soit en ajoutant 3 d'un coup (7), et ainsi de suite (10) ...

Nous dirons que ces techniques sont du type « numérique », car elles s'appuient sur un dénombrement effectif ou un calcul sur ces nombres déterminés. Ces techniques sont ainsi basées sur des technologies numériques et ne mobilisent pas des généralisations.

4.2 Une première tâche de généralisation tca

Après, les premiers cas déterminés étudiés pour les mailles carrées, certains élèves peuvent ne pas comprendre qu'il s'agit d'étudier le cas général et ne pas entrer dans la généralisation demandée au niveau de la tâche tca : Formuler une méthode pour calculer le nombre de tiges d'une chaîne à mailles carrées pour n'importe quelle longueur de la chaîne.

Les stratégies des élèves par rapport à la généralisation peuvent se répartir en trois grandes catégories de techniques. Chacune de ces catégories est mise en lien avec celles avancées par Dörfler (voir section 2.2).

4.2.1 Les techniques σ2 basées sur des technologies de généralisation explicite

Ces techniques s'élaborent en général par la mise en œuvre de techniques σ1 en examinant le cas d'un petit nombre de mailles 1, 2, 3, 4, … dans le cadre du type de tâches Tcn. Il est nécessaire de comprendre que le schéma de dénombrement ou de calcul est invariant pour le cas des nombres déterminés examinés, et qu'il peut s'appliquer à n'importe quelle chaîne à mailles carrées, même si on ne connaît pas de manière déterminée la quantité de mailles. Ici, la généralisation porte sur l'extension du domaine de validité de l'invariant des premiers cas examinés sur de petites quantités de mailles aux cas potentiels de quantités plus importantes. Elle correspond à une généralisation théorique au sens de Dörfler (1991) que nous proposons d'appeler « généralisation algébrique » dans le contexte étudié. Ces généralisations algébriques sont aussi l'indice d'une identification explicite d'une relation fonctionnelle entre les deux grandeurs en jeu « nombre de mailles » et « nombre de tiges ».

Par exemple, l'élève se base sur une décomposition du motif en distinguant les tiges horizontales et verticales. Ainsi, pour une quantité donnée de mailles, il faut compter 2 fois plus de tiges horizontales et autant de tiges verticales plus une tige verticale pour terminer le motif. Cela conduit à des expressions, dans divers registres de représentations sémiotiques (Duval, 1993), conformes à M1 = 2n + (n + 1) où n désigne le nombre de mailles.

En synthèse, pour n mailles, plusieurs types de formulation sont possibles, conformes à une certaine « lecture » de la configuration spatiale :

> M1 = 2n + (n + 1) en considérant le nombre de tiges horizontales d'une part et celui des tiges verticales d'autre part;
> M2 = 3n + 1 en considérant le nombre de mailles avec 3 tiges et en ajoutant une tige pour commencer ou terminer la chaîne;
> M3 = 4n -(n - 1) en considérant le nombre de mailles à 4 tiges et en retranchant les tiges mises en double;
> M4 = 4 + 3(n - 1) en considérant une première maille à 4 tiges et les tiges correspondant aux mailles suivantes à 3 tiges.

Mais, un élève de sixième année (au Québec) ne produira certainement pas de telles expressions dans le registre du langage algébrique. Toutefois, on peut s'attendre à des réponses dans un système ostensif mixte qui associe des ostensifs du langage mathématique et de la langue naturelle. Les élèves peuvent ainsi produire des formulations comme « le nombre de tiges est 2 fois le nombre de mailles plus le nombre de mailles plus un ») ou un code mixte verbal-numérique (comme « Nombre de tiges = 2 × Nombre de mailles + Nombre de mailles + 1 »).

Une autre technique consisterait à exprimer la généralité au moyen d'un exemple générique avec un sens proche de celui proposé par Balacheff (1987) pour une validation empirique. Par exemple, pour 10 mailles, il faut 3 fois 10 tiges et une tige de plus. L'élève est porté à rendre visible le schéma de calcul (l'invariant), et non la valeur numérique du résultat (ici 31 tiges); le nombre 10 a ici le statut d'une instanciation de la variable par un nombre spécifique. Le projet de l'élève est bien l'extension, même si la généralité n'est pas encore construite, c'est un processus prospectif. L'élève fait montre d'une conception procédurale (Sfard, 1991; Kieran, 1992) dans laquelle l'expression décrit un schéma ou un programme de calcul à l'aide d'un cas déterminé, mais il est ici, pour nous, dans une procédure de généralisation.

L'élaboration de ces techniques et la production des généralités (au sens défini à la section 2.2) formulées de diverses manières par ces élèves sont conformes à un processus de généralisation théorique au sens de Dörfler (1991).

4.2.2 Les techniques σ3 basées sur des technologies de généralisation locale

Des techniques s'appuient sur l'identification d'une régularité ou d'un invariant pour passer du cas d'une quantité de mailles au cas de celle augmentée d'une unité (de mailles). Une certaine généralisation est à l'œuvre et peut se traduire de cette façon : quand on ajoute une maille, on ajoute une tige en largeur et 2 tiges en longueur, on ajoute donc 3 tiges. La généralité exprimée ici s'arrête à la récurrence repérée. Elle pourrait se traduire par un opérateur du type : pour trouver le nombre de tiges pour n + 1 mailles, j'ajoute 3 au nombre de tiges pour n mailles. Ici aussi un langage mixte devrait être utilisé dans ce type de procédure.

Nous appelons ce processus une « généralisation locale ». En effet, cette généralisation s'appuie quand même sur un invariant, portant sur une comparaison des configurations de deux chaînes avec des nombres de mailles consécutifs. Même s'il s'agit encore d'une généralisation théorique au sens de Dörfler (1991), cet invariant n'a pas la puissance en termes de généralité pour exprimer le cas général. Cette généralisation demande de calculer au fur et à mesure les quantités obtenues à partir du premier cas et se trouve rapidement limitée pour un nombre de mailles assez grand.

4.2.3 Les techniques σ4 basées sur des technologies de généralisation par induction

Les élèves peuvent déterminer les quantités de tiges des premiers cas en faisant plusieurs dessins pour 1 maille, 2 mailles, jusqu'à 5 ou 6 mailles ou un dessin qu'ils complètent au fur et à mesure. Par exemple, ils obtiennent des résultats comme dans le tableau 1.

Tableau 1. Calculs des premiers cas organisés en tableau

Mailles	1	2	3	4	5	6	7	8
Tiges	4	7	10	13	16	19	22	25

Ensuite, ils conjecturent une relation générale par induction à partir de l'examen des valeurs numériques du tableau. Des élèves peuvent généraliser les résultats sur les petits nombres en faisant apparaître une relation numérique liée au nombre de mailles de départ. Ils peuvent ainsi remarquer la récurrence indiquée précédemment $T(n + 1) = T(n) + 3$, mais cette fois-ci en observant les quantités numériques et en faisant une induction numérique plutôt que sur la configuration spatiale comme dans la catégorie précédente. L'activité de ces élèves est ici conforme à une généralisation empirique au sens de Dörfler (1991), que l'on pourrait qualifier aussi de « généralisation arithmétique », car l'argument de l'induction est porté par les caractéristiques nombrantes des valeurs du tableau, c'est-à-dire sur la valeur des quantités et non sur les relations sémantiques entre les quantités.

Ils peuvent aussi remarquer que les résultats obtenus pour la deuxième ligne sont des multiples de 3 augmentés d'une unité. Cela peut conduire à des expressions conformes à M2 = 3n + 1, mais encore une fois cette conjecture est obtenue par observation et induction des valeurs numériques.

4.3 L'extension du type de tâches et l'analyse des variables didactiques

Nous étudions maintenant l'influence des variables didactiques principales dans le cadre de la situation observée.

4.3.1 La variable « nombre de mailles »

Dès le premier type de tâches relatives à la forme carrée, le professeur joue sur la valeur du nombre N de mailles à étudier, laquelle peut influencer de manière significative les procédures des élèves. Ainsi, on peut distinguer plusieurs domaines relativement à cette variable pour une forme donnée :

- N petit (inférieur ou égal à 10) : une procédure de dénombrement systématique ou par calcul peut être envisagée comme on l'a vu.
- N grand (supérieur à 10) : ici la procédure précédente, non réalisable, doit être abandonnée, mais les élèves peuvent mimer les procédures de dénombrement direct, les remplacer par l'invariant de calcul d'un terme au suivant et aller vers les procédures de généralisation locale.
- N très grand. Dans ce domaine, les procédures de généralisation locale ne sont pas réalisables ou le sont difficilement, et l'élève doit déjà se projeter vers la généralité pour pouvoir répondre à la question et évoluer vers des procédures de généralisation explicite.
- N non déterminé : En fait il s'agit d'un véritable changement de type de tâches comme avec la tâche tca qui demande un changement radical de techniques. Même si l'enseignant ne le suggère pas ou ne le demande pas, l'élève peut examiner les premiers cas de sa propre initiative. Mais, pour répondre en fonction du contrat didactique, il doit entrer dans un processus de généralisation avec une technique du type σ2, σ4 ou σ4.

4.3.2 La variable « forme de la maille »

Comme indiqué plus haut, le problème proposé sera étendu par le professeur à d'autres formes de maille : triangulaire, carré, pentagonale, etc, De nouvelles tâches apparaissent relativement à ces autres formes dans la séance et l'on peut, bien sûr, avancer qu'elles conduisent à des techniques similaires à celles de la maille carrée en conservant le même raisonnement. Nous ne les reprenons pas ici, car il s'agit d'une adaptation des techniques σ1, σ2, σ3 et σ4 en tenant compte de la différence du nombre d'éléments constitutifs de la maille selon la forme. Les différents choix de cette variable aboutissent évidemment à des expressions différentes du nombre de tiges, mais peuvent aussi jouer progressivement un rôle sur le raisonnement pour déterminer une formule générale pour une forme donnée, et donc sur la généralisation engagée. De plus, l'expérience et la familiarisation avec le type de tâches peuvent aussi conduire les élèves à faire évoluer leur raisonnement et les caractéristiques de la généralisation. Nous y reviendrons dans nos analyses ultérieures au niveau de l'analyse des productions effectives des élèves de la classe observée.

4.3.3 Un jeu ultime sur les deux variables « nombre de mailles » et « forme de la maille »

Le nouveau type de tâches Ta termine la séance en jouant sur les deux variables en même temps et en demandant de généraliser pour n'importe quelles formes et quantités de mailles. Nous verrons alors comment les élèves s'engagent dans cette nouvelle activité, et comment le professeur les accompagne pour une production conforme à l'évolution du contrat didactique.

Nous nous intéressons maintenant à l'analyse de la séance relativement aux raisonnements des élèves et à l'étayage de l'enseignant.

5. Les raisonnements des élèves effectivement développés dans la séance et les gestes d'étayage de l'enseignant

Nous analysons les raisonnements développés par les élèves dans la séance selon le type de tâches proposées et la régulation du professeur dans le développement des processus de généralisation. Nous décrivons notamment les éléments principaux des techniques élaborées par les élèves et repérables dans les données de la séance « bijoutier » et identifions les processus de généralisation associés à ces techniques.

Dans le contexte de la séance observée, nous montrerons notamment que le rôle de l'enseignant est fondamental pour la réussite de l'engagement et de l'activité des élèves, en prenant en compte les questions suivantes :

- comment l'enseignant s'y prend-il pour engager les élèves dans une activité de généralisation?
- comment l'enseignant s'y prend-il pour amener les élèves à formuler les généralités construites et à améliorer leurs formulations?
- comment l'enseignant s'y prend-il pour amener les élèves à valider les généralités produites?

5.1 Activités et techniques associées aux types de tâches numériques Tcn, Ttn Thn

Dans le cas des calculs sur un petit nombre de mailles carrées (1 à 5, puis 9 parfois) en début de séquence, les élèves utilisent certainement des techniques conformes à σ1 basées sur des technologies numériques comme nous l'avions indiqué dans l'analyse a priori. Le professeur ne demande pas la procédure des élèves et la classe se met rapidement d'accord sur le nombre de tiges pour 1, 2 et 3, puis 5 :

> Il compte avec les élèves, les tiges qui composent une maille, deux mailles et trois mailles. Puis il ajoute deux mailles de plus (5 mailles) sans les afficher sur l'écran. … Il demande à une élève le nombre de tiges obtenues. Elle dit 16 et il vérifie que tous sont d'accord.

Visiblement on n'est pas dans une tâche problématique, comme on peut encore le voir avec la construction d'une chaîne de 9 mailles :

> Il suit en particulier l'équipe 4 : ils en comptent 22. Il leur demande de vérifier. Ils recomptent et obtiennent 28. Il fait le tour des équipes, revient ensuite en grand groupe et demande si quelqu'un a autre chose que 28. Aucun. Il leur fait constater que c'est facile si l'on peut les compter.

Pour introduire le cas d'une chaîne à 45 mailles, l'enseignant explique aux élèves que le calcul du nombre de tiges pour les chaînes à 2, 3, 5 et 9 mailles était facile, car il suffisait de compter les tiges. Il ajoute qu'il est difficile de faire la même chose avec plusieurs mailles, car ils ne disposent pas d'assez de bâtonnets. Il leur demande de « trouver une façon d'expliquer au bijoutier comment trouver la quantité de tiges à commander ». Par cette consigne, l'enseignant amène les élèves à prendre conscience d'un protocole d'actions, dans le sens de Dörfler (1991), la tâche n'étant plus orientée vers l'exécution d'un dénombrement ou d'un calcul effectif pour trouver un nombre déterminé, mais vers la réflexion pour trouver le programme de calcul. Il y a là un changement de point de vue, une invitation à penser algébriquement. Ainsi, pour un grand nombre de mailles carrées (44 ou 45), les élèves essaient d'expliquer leur technique, comme dans l'équipe 4 :

> E[4.3] explique que pour 2 mailles, il faut faire 2 × 3 + 1, pour 3 mailles 3 × 3 + 1, pour 5 mailles… E[4.4] trouve que c'est compliqué alors que E[4.1] suggère que pour 45 mailles, il faut faire 45 × 3 et que le terme + 1 est pour commencer la chaîne, car la première maille comprend 4 tiges.

L'équipe 3 envisage une autre décomposition dans le cas de 45 mailles : « E[3.1] explique à E[3.3] qu'elle a calculé 1 fois 4, et pour les autres mailles 1 fois 3 et donc … E[3.2] récapitule : 1 × 4 + 44 × 3 ». Puis, quelques minutes après que le professeur demande de travailler sur 44 au lieu de 45, l'équipe confirme sa procédure : « E[3.1] dit encore 1 fois 4 est égal à 4, et 43 fois 3 …». On souligne ici encore comment cette équipe évolue d'une technique de dénombrement de type σ1 basée sur des technologies numériques vers une technique de type σ2 basée sur des technologies de généralisation explicite consistant à voir la configuration comme un carré avec 4 tiges, puis un nombre (ici 43) de composants de 3 tiges.

Par ce choix du professeur sur la quantité de mailles (44 ou 45 mailles) et sur l'engagement dans une situation de formulation (expliquer à un acteur fictif, le bijoutier), les élèves s'engagent déjà sur le chemin de la généralisation algébrique. Le matériel devient insuffisant pour le calcul du nombre de tiges pour une chaîne à 45 (ou 44) mailles. Dans ce premier travail de groupes à propos des mailles carrées et d'un nombre déterminé, considéré comme déjà grand, 44 ou 45, on observe ainsi que certains élèves ont déjà compris qu'il fallait décrire le programme de calcul, et non pas se limiter à donner la quantité de tiges nécessaire.

5.2 Activités et techniques associées à la tâche de généralisation tca

Nous étudions dans cette section les activités des élèves relatives à la tâche isolée de généralisation tca concernant la maille carrée, première tâche de généralisation explicitement rencontrée par les élèves. Le professeur précise à plusieurs moments « qu'il veut un message à dire au bijoutier, pour qu'il sache comment trouver le nombre de tiges, et ce, pour n'importe quelle longueur de chaîne » et encore il rappelle qu'après avoir trouvé la réponse pour 44 mailles, ils doivent écrire un message pour tout nombre de mailles. On note ainsi ce geste du professeur envers les élèves dans l'entrée de la tâche de généralisation tca, et on le reverra aussi pour les tâches tta, tha, toa et tpa, vraisemblablement, pour faire entrer les élèves dans une situation de formulation et une formulation explicite des généralités.

5.2.1 L'articulation entre la tâche de généralisation tca et les tâches numériques de type Tcn

Examinons plus précisément comment se sont développés les processus de généralisation au niveau de la tâche tca et le lien avec les techniques numériques du type de tâches Tcn. Les cas déterminés à 44 ou 45 mailles ont bien joué un rôle crucial dans le processus de généralisation pour la tâche tca, puisqu'il s'agit de pouvoir anticiper non pas un cas déterminé mais tout cas potentiel. Le nombre de mailles devient une variable pouvant prendre n'importe quelle valeur spécifique. Après avoir étudié le cas de la chaîne à 45 mailles, l'enseignant dit aux élèves qu'« il ne veut pas seulement le nombre de tiges, mais aussi un message mathématique pour aider le bijoutier à trouver le nombre de tiges à commander pour d'autres longueurs de chaînes ». Dans cette consigne, il positionne bien les élèves dans un projet d'extension, à partir du cas de la chaîne à 45 mailles. L'enjeu de la tâche est double. Primo, il s'agit pour les élèves de transformer le cas spécifique à 45 mailles en un cas prototypique, et ce, par la prise de conscience que les invariants et le protocole d'actions jusque-là valides pour les cas spécifiques singuliers examinés et étendus au cas de 45 mailles sont aussi valides pour des cas potentiels. Secundo, il s'agit de formuler un message au bijoutier expliquant comment il peut calculer le nombre de tiges pour une chaîne de longueur quelconque.

Cette invitation du professeur, déjà présente lors du passage à 45 mailles, conduit les élèves à exprimer la généralité de deux manières, soit en itérant sur chaque cas à partir de 1, 2, …, le schéma de calcul, soit en faisant jouer au cas « 45 », un rôle de variable en explicitant sur cet exemple le programme de calcul. Comme on l'a vu, c'est explicitement ce que fait l'élève E4.3 en indiquant qu'« il faut faire 45 × 3 et que le terme + 1 est pour commencer la chaîne ». Cette description est proche du système d'action initial qui consiste à isoler la première tige de la première maille de la chaîne et de voir ensuite que le reste de la chaîne est formé par une chaîne de triplets de tiges, et qu'il y a autant de triplets que de mailles. En outre, cette première formulation symbolique réfère explicitement au système d'action initial, aux invariants ainsi qu'à la justification de ces invariants. Le cas de la chaîne à 45 mailles est ainsi un bon candidat pour devenir un prototype, l'élève l'exploite ici pour étendre les invariants au cas de 45 mailles. Une nouvelle extension est encore nécessaire pour anticiper non seulement un cas déterminé lointain mais n'importe quel cas potentiel. Les formulations des élèves montrent que le cas de la chaîne de 45 mailles est devenu prototypique, et cela est rendu possible car l'élève serait convaincu que les invariants en jeu dans la formation de la chaîne de 45 mailles demeurent stables pour n'importe quel autre nombre de mailles. En outre, ces invariants ainsi que leur justification constituent le contenu du message de l'élève E4.4 au bijoutier. De cette façon, l'élève évite de représenter la variable (nombre de mailles) de manière explicite.

5.2.2 Les types de formulation traduisant la généralité

Pour la tâche tca, au niveau de l'équipe 4 : « E[4.4] explique qu'il lui dirait qu'à chaque maille il faut 3 tiges, mais qu'il faut en ajouter une pour la première ». Il associe bien la correspondance sans pouvoir exprimer globalement la quantité nécessaire. Vers la fin de cette phase, l'élève débouche sur cette généralisation explicite en verbalisant « multiplier nombre de mailles par trois plus un pour le premier ». La généralisation explicite, signe d'une pensée algébrique, semble en route dans cette équipe. Finalement, il va modifier son message sous la demande du professeur de griffonner ce message sur sa feuille pour produire la formulation suivante de la généralité « × nombre de m. par 3 et + 1 pour 1er » puis, après une remarque du professeur à propos du terme « 1er », l'élève finit par formuler : « trois fois nombre de mailles plus un ». Cette généralisation est passée par l'abstraction d'une configuration générale où le « plus un » avait encore la signification de la 1re. Finalement, dans la phase 3 où un bilan est proposé, cette équipe produit au tableau le message « 3 × nombre de mailles + 1 = chaîne » qui sera transformé par le professeur en « 3 × nb de mailles + 1 = nb de tiges de la chaîne », qui propose aussi que « nombre dorénavant on va le simplifier : “nb” » (figure 3).

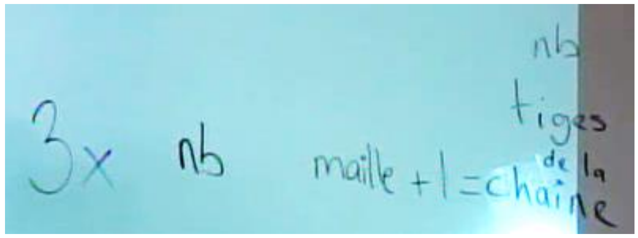


Figure 3. Message de l’équipe 4, abrégé par le professeur

L’équipe 2 entre aussi dans une généralisation explicite conforme à la modélisation M4 = 4 + 3(n – 1), du moins pour l’élève E[2.4], qui dit à voix haute « 3 × nombre de mailles – 1 + 4 ». Il s’ensuit un échange fourni avec le professeur pour amener l’élève à écrire le message en tenant compte des priorités des opérations. Dans le bilan collectif de la phase 3 l’élève E[2.4] de cette équipe ira écrire son message (figure 4) au tableau sous la forme « (nb de mailles – 1) × 3(+ 4) = nb de tiges de la chaîne » qui sera corrigée par le professeur.

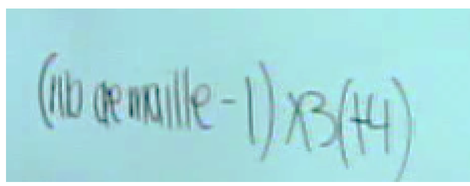


Figure 4. Message de l’équipe 2

Les deux messages précédents, conformes aux modélisations M2 = 3n + 1 et M4 = 4 + 3(n – 1), sont validés par le professeur et la classe par retour aux premiers cas numériques, et constituent alors une référence pour la suite.

5.2.3 Le rôle du langage et de la symbolisation

Dès les premières tâches, le langage verbal et divers ostensifs sont sollicités pour formuler les généralités produites. Ainsi, la composante sémiotique de cette situation, à travers divers systèmes ostensifs et registres sémiotiques, fait apparaître une caractéristique du travail algébrique.

Pour amener les élèves à décrire et à améliorer l'expression des généralités construites sous cette forme, l'enseignant fera un ensemble d'interventions en plénière et au sein des équipes. S'adressant à toute la classe il commence par préciser qu’il ne veut pas un texte, que « le message sera composé surtout de nombres, de symboles et d’un peu de mots : on parle de tiges, de chaînes ». Lors de ses passages chez les différentes équipes, il apportera des précisions de plus en plus explicites. Il précise que les nombres sont écrits avec des chiffres et les opérations avec les symboles ×, ÷, + et - et non en mots. L'enseignant devient de plus en plus explicite dans son exigence de réduire le nombre de mots : la forme ostensive qu'il attend et vers laquelle il veut que les élèves s'orientent est composée de nombres (chiffres) de signes des opérations arithmétiques, du signe = et des expressions « nombre de tiges » et « nombre de mailles » : « Dans votre message, je ne devrais voir que 2 ou 3 mots, je ne devrais pas voir des bouts de phrases ». Il vise à obtenir, par cette tâche de généralisation tca, des généralités exprimées au moyen d'expressions pseudo-mathématiques utilisant les registres numérique et verbal. Bien que cette exigence puisse être critiquable dans le contexte strict de la séance, car non motivée par un besoin immédiat de « réduction syntaxique », le professeur souhaite peut-être s'inscrire dans une perspective ultérieure de la dimension calculable des expressions algébriques.

5.3 Activités et techniques associées à l'extension aux tâches de généralisation tta, tha, toa et tpa

Dans la phase 4, à propos des mailles triangulaires, la dévolution (Brousseau, 1998) sur la tâche de généralisation tta est réussie et les élèves essaient d'élaborer un message général. L'élève E[1.1] précise l'élaboration de la technique en expliquant qu'elle se base sur l'adéquation numérique avec les premiers cas : « si tu fais deux fois le nombre de mailles plus un, car 2 × 2, 4, + 1, 5 ». Mais surtout l'idée lui est venue du message de l'équipe 4 à propos des mailles carrées : « L'autre chaîne avait 4 côtés, ils ont enlevé 1 et ils ont mis 3, alors moi, vu qu'il y a 3 côtés, j'ai enlevé 1 et ça m'a fait 2 ». On observe ici une démarche par analogie validée numériquement sur les premiers cas qui correspond plutôt à un processus de généralisation empirique. Le professeur l'invite même à expliciter cette démarche dans la phase 5 de bilan à partir du premier message pour le calcul des mailles carrées (3 × nb de mailles + 1) : « soustraire 1 au nombre de côtés d'une maille ». Nous reviendrons sur l'attention du professeur à propos de cette élaboration qui conduit au message : « 2 × nb de mailles + 1 = nb de tiges » de même type de modélisation que M2.

Dans ce bilan, nous trouvons aussi une modélisation du type M4 proposée à la classe par l'équipe 3 par l'élève E[3.2] : « (nb de mailles –1) × 2 + 3 = nb de tiges dans la chaîne ». Ce message est validé par le professeur et les élèves par un test avec les cas 3 et 5.

Les deux premières tâches de généralisation tca et tta (mailles carrées et triangulaires) scellent le scénario et les trois autres tâches tha, toa et tpa (mailles hexagonales, octogonales et pentagonales) se déroulent de la même manière que celles de la phase 6 à la phase 9 avec des messages du même type que les modélisations M2 et M4 des chaînes à mailles carrées. Par exemple, pour l'octogone, des groupes donnent le message « (nb de mailles – 1) × 7 + 8 = nb de tiges », tandis que pour les pentagones des groupes le message « (nb de mailles – 1) × 4 + 5 = nb de tiges » est avancé.

5.4 Activités et techniques associées au type de tâches Ta

Dans les phases 10 et 11, le professeur propose aux élèves de se situer au niveau du type de tâches de généralisation Ta pour lequel les tâches précédentes (tca, tta, tha, toa et tpa) constituent alors des spécimens. Cette situation est un exemple de la dialectique « tâches-type de tâches », car c'est bien le type de tâches Ta qui est l'enjeu de la situation à travers les tâches particulières précédentes. Le professeur présente ainsi le travail demandé :

> À chaque coup on a trouvé une phrase mathématique qui permettait de trouver le nombre de tiges. Maintenant, ce que je veux que vous me trouviez, je veux avoir une phrase mathématique qu'on va pouvoir envoyer au bijoutier et dans cette phrase peu importe la commande du client, c'est-à-dire que le client qu'il décide que sa maille est triangulaire, carrée qu'elle est de forme hexagonale, pentagonale, octogonale, peu importe la forme de sa maille, le bijoutier va pouvoir prendre cette formule-là et dire : Ah là, parfait, j'aurai besoin de tant de tiges.

Après un travail de groupes de huit minutes environ dans la phase 10, les élèves livrent leurs « phrases mathématiques » demandées par le professeur. On retrouve ici deux types de formules généralisant les formes M2 et M4 vues dans les cas particuliers de formes :

- G2 : (nb côtés de la maille – 1) × nb de mailles + 1 = nb de tiges
- G4 : (nb de mailles – 1) × (nb de côtés – 1) + nb de côtés = nb de tiges.

Pour la formule G2, une élève explique qu'ils ont observé que, dans la formule « 2 × nb de mailles + 1 = nb de tiges » du cas triangulaire, le « 2 » représente le nombre de côtés de la maille moins 1. Le professeur pousse un peu le raisonnement en disant « donc vous avez remplacé votre 2 … d'où il vient ce 2 là … c'est justement le nombre de côtés de la maille moins 1 ».

Le professeur poursuit la demande d'explicitation du raisonnement pour la formule G2 en mettant en parallèle au tableau (voir figure 5) la formule pour le pentagone pour bien faire ressortir le rôle joué par les différentes variables et explicite lui-même le raisonnement supposé des élèves : « on part de la formule précise pour ce type de mailles-là, et puis on généralise avec une formule qui va nous permettre de trouver ». Et il compare les deux formules en précisant que la deuxième est un peu moins évidente à voir. Il favorise, et explicite lui-même, ce processus de généralisation à ce moment de la séance.

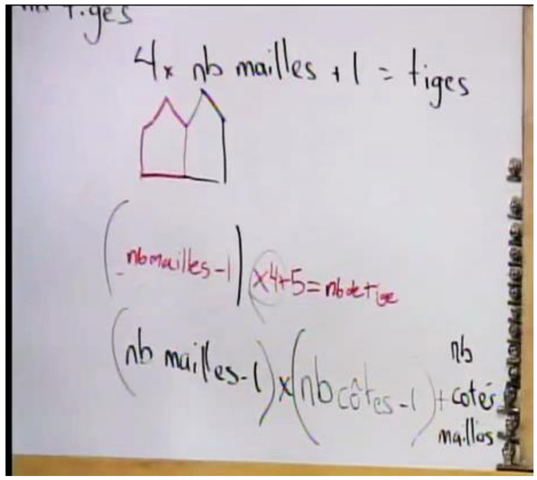


Figure 5. Message G4 pour la tâche de généralisation Ta

Une première interprétation de ce passage d'une généralité d'une forme vers celle d'une autre serait de la qualifier de généralisation empirique au sens de Dörfler (1991), car elle est basée sur un seul cas, a priori en rien spécifique. Or, une autre interprétation est possible qui dénote une pensée généralisatrice plus avancée. Dans le cas du travail sur des mailles à une forme déterminée, le nombre de mailles de la forme était une constante. Mais l'élève vient d'apprendre ce que signifie cette constante par rapport à la forme (le nombre de tiges d'une maille - 1). Dans le dernier type de tâches Ta, la forme devient une variable, ainsi que le nombre de tiges d'une maille avec un statut de nombre non déterminé. Dans ce cas, compte tenu de l'expérience des élèves avec les différentes formes, ils voient les nombres déterminés des cas précédents (les constantes) comme des instanciations de la variable « nombre de tiges d'une maille ». Ils utilisent l'analogie sur les formes comme raisonnement en adaptant la variabilité sur la quantité de tiges de la maille, mais ils seraient capables de justifier la généralité en recourant à une généralisation de leur schéma de calcul de la quantité cherchée. D'ailleurs, dans ce sens, on peut remarquer que les expressions des généralités pour toutes les formes, y compris la forme générale, proviennent toutes des mêmes invariants, ou schémas de calcul, elles ont toutes la même structure syntaxique. On peut ainsi avancer qu'une généralisation théorique, et ici algébrique, se met en place.

5.5 Analyse du degré de généralisation en lien avec le réseau des tâches de la séance

La succession des tâches fait apparaître une structure complexe d'enseignement de cette séance comme un réseau de tâches enchâssées en parallèle et en série (voir la figure 6, où N est pris pour numérique et A pour algébrique, et les flèches désignant des généralisations successives). Ainsi, après avoir fait travailler les élèves sur les formes de mailles carrée, triangulaire et hexagonale, en lien avec les types de tâches Tcn, Ttn, Thn, le professeur les amène à se placer sur les tâches respectives de généralisation tca, tta, tha. Même si la réalisation des différentes tâches est proposée successivement, nous analysons le début de la structure comme parallèle dans la mesure où il apparaît une répétition en jouant sur la variable forme de la maille (carrée, triangulaire et hexagonale) avec la même structuration interne au niveau d'un type de tâches numérique en proposant plusieurs spécimens de la variable « nombre de mailles » (étude sur les premiers termes au niveau du nombre de mailles 1, 2, 3 et 5, puis 44 et 45, puis cas général).

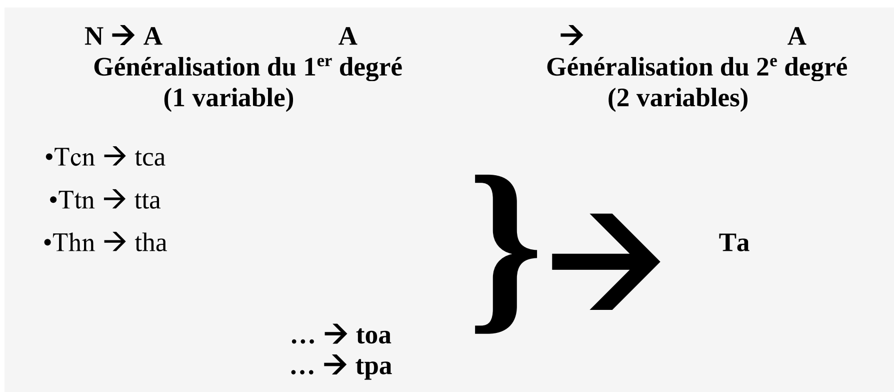


Figure 6. Le réseau de tâches en parallèle et en série

Ainsi, l'étude commence par des types de tâches Tfn (« f »comme forme et « n » comme numérique) que nous avons qualifiés de numérique dans la mesure où il s'agit tout d'abord de considérer un nombre déterminé de mailles et de produire la quantité de tiges correspondante. Mais à chaque fois, le contrat conduit, pour chaque forme f, à terminer l'étude avec une tâche de généralisation algébrique tfa (“a” ici comme algébrique).

La structure parallèle aurait pu se poursuivre strictement sur les phases suivantes 8 et 9, mais pour la suite, l'étude se réalise directement sur les tâches de généralisation toa et tpa à propos des formes octogonale (o) et pentagonale (p) comme le précise le professeur à un élève : « il doit faire une phrase mathématique plus générale, pas seulement pour le cas de 44 mailles ». Par cette intervention, le professeur essaie d'engager les élèves vers un premier degré de généralité plus important. Le nouveau réseau se complète par un ajout en parallèle sur les tâches de généralisation laissant vides les types de tâches numériques pour les formes octogonale et pentagonale (deuxième colonne A de la figure 6).

Les phases 10 et 11 font alors apparaître les différentes tâches précédentes tca, tta, tha, toa et tpa comme de simples spécimens d'un nouveau type de tâches de généralisation Ta avec la recherche d’une méthode pour calculer le nombre de tiges d’une chaîne à mailles pour n'importe quelle forme et pour n’importe quelle longueur de la chaîne. Le réseau se complexifie alors en série si l’on peut dire (comme le suggère la figure 6).

Le professeur, par le choix de ce réseau, engage les élèves dans un processus de généralisation de degré encore supérieur en considérant les deux variables « forme de la maille » (F) et « nombre de mailles » (N). Cette analyse montre que les praxéologies ponctuelles s’agrègent en des praxéologies locales, voire régionales, emboîtées autour du type de tâches Ta et permet de mettre au jour une structuration mathématique complexe et emboîtée favorisant le développement de généralisation algébrique chez les élèves.

Conclusion

Nous soulignons ici la fécondité d’une analyse conjointe à l’aide d’une approche praxéologique et du modèle de Dörfler pour identifier les processus de généralisation et les conditions de leurs développements. L’analyse praxéologique a permis de mettre au jour la structure de la situation proposée avec la succession des tâches numériques et de généralisation que nous avons qualifiée de réseau de tâches enchâssées en parallèle et en série. Cette analyse montre la complexité du système de tâches qu'a utilisé l'enseignant pour engager les élèves dans des activités de généralisation et d'expression des généralités. Nous faisons l’hypothèse qu’il permet ainsi d’engager les élèves dans un processus de généralisation de degré de plus en plus étendu en considérant les deux variables « forme de la maille » et « nombre de mailles ».

Cette analyse conjointe a permis de caractériser et de différencier les techniques développées par les élèves dans les diverses tâches numériques et algébriques et de montrer des processus de généralisation différents grâce au modèle de Dörfler. L’analyse conjointe permet aussi de rendre compte de l'activité de généralisation des élèves provoquée par ces tâches, de mettre au jour les techniques et les processus de généralisation développés par les élèves, ainsi que le rôle de l’enseignant, notamment dans les processus de dévolution et d’engagement des élèves dans la transition du numérique vers l’algébrique. Nous avons notamment montré le rôle crucial de l'enseignant pour gérer ces situations dans lesquelles il doit notamment engager les élèves dans un projet de généralisation : construction d'invariants à partir de cas déterminés; transformation des cas déterminés en cas prototypiques (extension du domaine de validité des invariants); amener les élèves à perfectionner la manière de parler du général à partir du spécifique, à utiliser des représentations langagières de plus en plus formelles.

Nous avons ainsi identifié des conditions d'une dévolution de ce processus en commençant par des types de tâches numériques et en mobilisant des raisonnements et des techniques basées sur des technologies numériques. Les productions des élèves attestent une articulation numérique-algébrique bien ajustée en jouant sur la taille de la variable « nombre de mailles ». Ainsi le passage de l'étude des premiers cas du nombre de mailles (entre 1 et 9) à celui d'un nombre comme 44 ou 45 contraint les élèves à faire évoluer leurs procédures vers des techniques de généralisation explicite. Ce saut informationnel fait ainsi fonctionner ces valeurs numériques comme des exemples prototypiques ou génériques (Balacheff, 1987; Squalli, 2015) et oblige à ne plus considérer ce cas comme un cas déterminé mais comme une instanciation d'une variable, montrant ainsi un aspect de la pensée algébrique. Les élèves élaborent tout d'abord, pour le cas d'un nombre déterminé (plus grand), des germes de techniques σ2 basées sur des technologies de généralisation explicite au sens de Dörfler (1991). Le but est ensuite d'orienter les élèves à réfléchir sur le système d'actions utilisé dans les cas précédents (ou à le construire) et à dégager des invariants et un protocole d'actions pouvant être appliqués au cas de nombres déterminés plus grand. Nous avons montré que cette étape est cruciale pour aborder ensuite des tâches de degré de généralisation de plus en plus élevé dans le cadre du réseau de tâches enchâssées en parallèle et en série que nous avons identifié. Ce développement de la généralisation s'accompagne en général d'un développement de la symbolisation en jouant sur plusieurs systèmes ostensifs et registres sémiotiques.

Cette recherche constitue pour nous une étape fondamentale pour améliorer les stratégies d'enseignement en envisageant différents degrés de généralisation *via* l'identification d'invariants (au sens de Dörfler) et pour fonder un projet plus global d'enseignement de la généralisation en algèbre, en lien avec l'identification d'invariants *via* des actions enseignantes appropriées.

Références

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(2), 147-176. https://doi.org/10.1007/BF00314724

Booth, L. (1984). Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. *Petit x, 5*, 5-17.

Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(1), 77-124.

Bronner, A. (1997). Étude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée [thèse de doctorat inédite]. Université Joseph Fourier.

Bronner, A. (2006). Installation et régulation par l'enseignant de l'espace « parole-pensée-action-relation ». Gestes d'étude, gestes professionnels, événements et ajustements. Dans M. C. Guernier, V. Durand-Guerrier et J.-P. Sautot (dir.), *Interactions verbales, didactiques et apprentissages : recueil, traitement et interprétation didactiques des données langagières en contextes scolaires* (p. 115-136). Presses de l'Université de Franche-Comté

Bronner, A. (2007). *La question du numérique : Le numérique en questions* [habilitation à diriger des recherches]. Université Montpellier 2.

Bronner, A. (2015). Développement de la pensée algébrique avant la lettre - Apport des problèmes de généralisation et d'une analyse praxéologique. Dans L. Theis (dir.) Actes du colloque EMF2015, *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* (p. 247-264).10-14 octobre 2015, Alger.

Bronner, A. (2017), Analyse d'une séquence basée sur des problèmes de généralisation pour l'entrée dans l'algèbre : Apport d'une analyse praxéologique. *Actes du 5e congrès international sur la théorie anthropologique du didactique,* 278-297.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Éditions la Pensée sauvage.

Carraher, D. W. et Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. Dans F. Lester (dir.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 669-705). Information Age Publishing.

Carraher, D. W., Martinez, M. V. et Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education,* 40, 3-22. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, 19, 43-75.

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie. Voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x*, 23, 5-38.

Chevallard, Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *12*(1), 73-112

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques*, *17*(3), 17-54.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. Dans L. Ruiz-Higueras, A. Estepa et F. J. Garcia (dir.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría antropológica de lo didáctico (TAD)* (p. 705-746). Universidad de Jaen.

Coulange, L., Drouhard, J.-P., Dorier, J.-L. et Robert, A. (dir.). (2012). Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. *Recherches en didactique des mathématiques, numéro spécial hors-série*.

Demonty I., Fagnant A. et Vlassis J. (2015). Le développement de la pensée algébrique : quelles différences entre les raisonnements mis en place par les élèves avant et après l'introduction de l'algèbre? Dans L. Theis (dir.), *Actes du colloque EMF2015. Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* (p. 265-279). Université d'Alger.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. Dans A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen et J. Van Dormolen (dir.), *Mathematical knowledge: its growth through teaching* (p. 63-85). Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 5,* 37-65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Grugeon B. (1995). Étude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première [thèse de doctorat, Université Paris 7]. TEL. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01252058/document

Grugeon, B. (2000). L'algèbre au lycée et au collège. Une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire : conception, exploitation et perspectives. Dans J. Delgoulet, J.-P. Guichard, M. Janvier, B. Capponi et B. Grugeon (dir.), *L'algèbre au lycée et au collège. Actes des journées de formation de formateurs* (p. 5-39). IREM de Montpellier.

Jeannotte, D. (2005). *L'interprétation de la lettre et des erreurs commises en algèbre par les élèves du secondaire d'aujourd'hui et ceux de la fin des années 70 : une étude comparative* [mémoire de maitrise inédit]. Université de Sherbrooke.

Kahane, J. P. (dir.). (2002). *L'enseignement des sciences mathématiques. Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques*. Odile Jacob.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? Dans J. J. Kaput, D. W. Carraher et M. L. Blanton (dir.), *Algebra in the early grades* (p. 5-17). Routledge.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. Dans D. A. Grouws (dir.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 390-419). Macmillan.

Kieran, C. (1994). A functional approach to the introduction of algebra - Some pro and cons. Dans J. Ponte et J. F. Matos (dir.), *Proceedings of The 18th International Conference for the Psychology of Mathematical Education* (vol. 1, p. 157-175). Université de Lisbonne.

Krysinska M., Mercier A. et Schneider M. (2009). Problèmes de dénombrement et émergence de premiers modèles fonctionnels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 29(3), 247-303.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. Dans N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (p. 87-106). Springer.

Marchand, P. et Bednarz, N. (1999). L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une analyse des problèmes présentés aux élèves. *Bulletin AMQ (Association mathématique du Québec), XXXIX*(4), 30-42.

Oliveira, I., Rhéaume, S. & Geerts, F. (2017). Apprentissage de l'algèbre : procédures et difficultés rencontrées lors de la résolution de problèmes. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, *20* (3), 156–180. https://doi.org/10.7202/1055732ar

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, *12*(1), 1-19. https://doi.org/10.1080/14794800903569741

Radford, L. (2014) The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 257-277. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Radford, L. (2015). La pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation. *Actes du colloque EMF2015. Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* (p. 334-345). Université d'Alger.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. Dans C. Kieran (dir.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds. The global evolution of an emerging field of research and practice* (p. 3-26). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_1

Rojano, T. (1996). Developing algebraic aspects of problem solving within a spreadsheet environment. Dans N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), *Approaches to algebra* (p. 137-145). Springer.

Saboya, M., Besançon, V., Martin, F., Adihou, A., Squalli, H. et Tremblay, M. (2013). Résolution de problèmes écrits au moment de l'introduction de l'algèbre: analyse de productions d'élèves du premier cycle du secondaire. Dans L. Bacon, V. Martin, I. Oliveira et J. Proulx (dir.), *Expériences mathématiques uniques et multiples. Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec* (p. 112-122). Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematics conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 1-36.

Squalli, H. (2000). *Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base* [thèse de doctorat, Université Laval]. Corpus. https://corpus.ulaval.ca/jspui/handle/20.500.11794/51025

Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes du colloque EMF2015* (p. 346-356). Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene.

Squalli, H. (2019). Le développement de différentes formes de la pensée mathématique : recherches et perspectives curriculaires. *Revue RMDM, 4,* 33-49.

Squalli, H. (2020). Early algebra : genèse d'un domaine de recherche, évolution et perspectives. Dans H. Squalli, I. Oliveira, A. Bronner et M. Larguier (dir.), *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires.* Livres en ligne du CRIRES. https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches

Squalli, H., Mary, C. et Marchand, P. (2011). Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre : cas du Québec et de l'Ontario. Dans J. Lebeaume, A. Hasni et I. Harlé (dir.), *Recherches et expertises pour l'enseignement scientifique* (p. 65-78). De Boeck.

Squalli, H., Oliveira, I., Bronner, A. et Larguier, M. (2020). *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires*. Livres en ligne du CRIRES. https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches

Squalli, H., Suurtaam, C. et Freiman, V. (2013). Préparer les enseignants au développement de la pensée algébrique au primaire et au secondaire. Dans S. Oesterle, D. Allan et P. Liljedahl (dir.), *Actes de la rencontre annuelle du Groupe canadien d'étude en didactique des mathématiques* (p. 125-136). Université Laval.

Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. Dans C. Laborde (dir.), *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique* (p. 189-200). Éditions La Pensée sauvage.

Vergnaud, G., Cortes, A. et Favre-Artigue, P. (1988). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. Dans G. Vergnaud, G. Brousseau et M. Hulin (dir.), *Didactique et acquisition des concepts scientifiques. Actes du Colloque de Sèvres* (p. 259-279). Éditions la Pensée sauvage.

Annexe : Trame de la séance « bijoutier »

Phases	Instants Narration	Moments ou épisodes : tâches du professeur et des élèves	Types de tâches /tâches	Modalités de travail
1	0 à 16 min 11	Présentation de la situation générale, de la chaîne à mailles carrées et calcul du nombre de tiges pour 1, 2, 3, 5/Calcul pour 9 mailles	Tcn	Collective/ Groupe pour le cas de 9 mailles (2 min)
2	16 min 11 à 40 min 15	Calcul du nombre de tiges pour 45, puis 44, mailles et explicitation du programme de calcul général (cas des chaînes à mailles carrées)	Tcn / tca	Groupe (appelé équipe au Québec)
3	40 min 15 à 49 min 43	Retour sur la chaîne à mailles carrées : bilan et débat	tca	Collective
4	49 min 43 à 57 min 40	Présentation de la chaîne à mailles triangulaires, calcul du nombre de tiges pour 44 mailles et explicitation du programme de calcul général	Ttn / tta	Collective/ Groupe
5	57 min 40 à 1 h 04	Retour sur la chaîne à mailles triangulaires : bilan des réponses du problème	tta	Collective
6	1 h 04 à 1 h 08	Présentation de la chaîne à mailles hexagonales, calcul du nombre de tiges pour 44 mailles et explicitation du programme de calcul général	Tth / tha	Collective/ Groupe
7	1 h 08 à 1 h 14	Retour sur la chaîne à mailles hexagonales : bilan du travail des élèves	tha	Collective
	Récréation			
8	4 min à 11 min 23	Créer sa propre chaîne à mailles différentes, calcul du Nb de tiges pour 44 mailles et explicitation du programme de calcul général	toa / tpa	Collective / Groupe
9	11 min 23 à 17 min 04	Retour sur les propres chaînes octogonale et pentagonale : bilan du travail des élèves	toa / tpa	Collective
10	17 min 04 à 25 min 30	Rechercher une expression commune dans tous les cas de formes de chaîne	Ta	Collective / Groupe
11	25 min 30 à 31 min 36	Retour sur la généralisation : bilan	Ta	Collective

Le manuel numérique en mathématique : le cas de la moyenne

Sylvain VERMETTE
Université du Québec à Trois-Rivières
sylvain.vermette@uqtr.ca
Normand ROY
Université de Montréal
normand.roy@umontreal.ca
Michelle CARROLL
Centre de services scolaire de l'Énergie
mcarroll@csenergie.qc.ca

Résumé : La présente étude examine les manuels numériques en mathématiques, et plus particulièrement, les stratégies et ressources utilisées pour la présentation de la moyenne. Même si l'enseignement de ce concept se résume souvent à son algorithme de calcul, il existe d'autres approches permettant de développer la compréhension de la moyenne. Ainsi, pour mieux comprendre la valeur ajoutée des manuels numériques en mathématiques, nous proposons d'examiner la présence du concept de moyenne dans 11 manuels numériques, de la 1re à la 3e secondaire. Nos résultats permettent de voir que même si certains manuels proposent des ajouts intéressants, il appert que d'autres procédures (total-répartition, nivelage et point d'équilibre) sont peu abordées, suggérant que l'enseignant devra utiliser d'autres ressources didactiques pour y arriver.

Mots-clés : manuel scolaire, manuel numérique, mathématiques, moyenne arithmétique

The numerical textbook in mathematics: the case of the average

Abstract: This study examines digital textbooks in mathematics, and more specifically, the strategies and resources used to teach the concept of mean. Although instruction of this concept often comes down to the algorithm of calculation, there are other approaches to developing and understanding of the mean. Thus, in order to better understand the added value of digital textbooks in mathematics, we propose to examine the presence of the concept of the mean in 11 digital textbooks, from Secondary 1 to Secondary 3. Our results show that even if some textbooks offer interesting additions, it appears that other procedures (total-distribution, levelling and balance point) are little discussed, suggesting that the teacher will have to use other teaching resources to achieve this.

Keywords: textbook, digital textbook, mathematics, mean

Introduction

Privilégié par un grand nombre d'enseignants (Choppin, 1992 ; Lebrun, 2006), le manuel scolaire trouve sa place dans la classe de mathématique. En effet, il apparaît être un élément indispensable pour l'enseignant québécois, le manuel pouvant être utilisé comme recueil d'exercices, comme support à la leçon, comme support d'évaluation, pour une reformulation théorique et, enfin, comme source documentaire (Margolinas et Wozniak, 2009). Selon Bucheton (1999), les manuels sont pour les enseignants des références fiables sur le plan des contenus présentés et des pistes pédagogiques proposées. Il n'est donc pas surprenant de constater qu'il s'agit d'un outil précieux lors de la conception et de la planification de leçons (Araújo Oliveira et al., 2006). Son utilisation semble particulièrement généralisée chez les enseignants de mathématiques au moment de fournir à leurs élèves des exercices portant sur les concepts enseignés. Le manuel est ainsi perçu comme un outil au service des apprentissages. Chaque enseignant peut l'utiliser de la manière qui lui paraît la plus appropriée pour assurer la réalisation des apprentissages de ses élèves. Les manuels scolaires constituent donc une ressource importante puisqu'ils définissent en quelque sorte l'enseignement en proposant une certaine présentation de l'objet à enseigner, ce qui agit sur l'activité d'appropriation des utilisateurs (Rabardel, 1997). Il n'est pas l'unique ressource de l'enseignant de mathématiques, alors que l'on retrouve aussi du matériel de manipulation (Corriveau et Jeannotte, 2015) et, étant au cœur d'une ère où la technologie prend de plus en plus de place dans le milieu de l'éducation, de nombreux types de ressources numériques.

D'ailleurs, dans un contexte hors du commun lié à la COVID-19, l'utilisation du numérique dans nos écoles se vit depuis mars 2020 dans une nouvelle réalité. L'apport potentiel du numérique à l'enseignement s'inscrit dans une dynamique complexe entre les apprenants, les enseignants et les contextes d'usage. Malgré des résultats mitigés quant à l'impact des outils numériques sur l'apprentissage des élèves (Karsenti et Bugmann, 2017; Viriot-Goeldel et al., 2016), il s'avère que de nombreuses études concluent plutôt que le numérique apporte une valeur ajoutée, en autant que celui-ci s'inscrive dans une utilisation dite pédagogique. Il est aisé de concevoir que les technologies peuvent contribuer à l'enseignement des mathématiques en enrichissant les situations d'enseignement-apprentissage, que ce soit par exemple en soutenant la réflexion des élèves par une présentation différente des contenus notionnels ou en permettant une rétroaction rapide aux élèves, notamment lors des phases d'exercices (Oudrhiri, 2016; Vandebrouck et Robert, 2017). La démocratisation du numérique a favorisé l'émergence de nombreux usages dans la classe, du tableau numérique interactif (TNI) à la tablette de type iPad.

En mathématique, l'usage de ressources numériques pour apprendre ne date pas d'hier. Dès 1997, les différents cadres de références pour l'enseignement des mathématiques introduisent l'utilisation du numérique pour apprendre : les calculatrices scientifiques, les jeux d'apprentissage, la programmation LOGO ou Basic, etc. (Oldknow et Taylor, 2003). À partir de 2007, le tableau numérique interactif fait son apparition dans la salle de classe, outil numérique qui permet l'interaction avec les ressources numériques, et ce, en temps réel devant les élèves. Toutefois, son intégration n'est pas réussie (Karsenti et al., 2012), en partie à cause de la formation limitée des enseignants (Samson et Lefebvre, 2012). Pourtant, et particulièrement en mathématiques, il s'avère plutôt intéressant, notamment pour l'usage d'outils (compas, règles, etc.), la manipulation d'objets pour illustrer des concepts mathématiques ou encore pour l'usage de ressources existantes. En ce sens, les maisons d'édition ont rapidement produit du matériel accessible par le tableau numérique interactif, comme du matériel de manipulation ou le manuel scolaire numérique.

Dans le cadre de cet article, un regard sera porté sur le manuel scolaire numérique en fonction des deux questions de recherche qui l'ont guidé. D'abord, sous quelle forme les contenus d'enseignement en mathématiques sont-ils présentés dans les manuels numériques? Dans un deuxième temps, afin de voir si les manuels numériques en mathématiques peuvent être mis au service de l'apprentissage du contenu disciplinaire, nous nous questionnerons sur comment le concept de moyenne est-il présenté afin de voir si la dimension numérique d'un manuel apporte réellement une plus-value par rapport à la version imprimée. Après avoir tracé un bref portrait du manuel scolaire numérique au Québec et avoir décrit les ancrages théoriques sur le concept de moyenne qui orientent ce travail, les aspects méthodologiques de l'étude sont présentés. Les résultats permettent de faire ressortir l'apport possible des éléments numériques sur les enjeux didactiques associés à l'enseignement de la moyenne, bien que celui-ci soit limité. L'article se termine par une discussion des résultats sous l'optique de pistes de bonifications pour favoriser l'appropriation du concept en jeu.

1. Le manuel scolaire numérique au Québec

Au Québec, le manuel numérique est dans le paysage scolaire depuis les années 2000, et avec une présence accrue avec l'avènement de la tablette iPad en 2010. Selon Karsenti et Fiévez (2013), 72 % des élèves (sur 6 057 répondants) qui utilisent la tablette rapportent utiliser le manuel scolaire numérique. Il s'agit de l'usage principal pour ces élèves. Il appert que le manuel numérique facilite l'accès et l'interactivité avec les contenus (Roussel et al., 2017). Il s'avère néanmoins coûteux à produire et différentes politiques en place exigent encore en 2021 que la version imprimée du manuel de l'élève soit présente afin que l'ensemble didactique puisse être reconnu par le ministère de l'Éducation. Le Bureau d'approbation du matériel didactique stipule que pour être admissible, un ensemble didactique est composé d'une série d'instruments dont un manuel imprimé à l'usage de l'élève et un guide d'enseignement imprimé ou numérique. Il peut inclure d'autres éléments numériques (Gouvernement du Québec, 2010).

Ainsi, même si l'on reconnaît qu'on peut inclure des éléments numériques, les éditeurs ne peuvent pas soumettre uniquement du matériel numérique. On remarquera d'ailleurs que sur le site du ministère de l'Éducation et du ministère de l'Enseignement supérieur (Gouvernement du Québec, 2017), aucune mention du matériel numérique approuvé n'est présente. L'enjeu est important, puisque seul le matériel approuvé peut être acquis par l'école, alors que le matériel non approuvé peut être proposé aux parents, mais il ne sera pas fourni par l'école. Sachant que les manuels numériques sont de plus en plus utilisés en éducation (Reynolds, 2011), il convient donc de s'interroger sur la présentation des objets d'enseignement à l'intérieur de ceux-ci. Ici, la moyenne, arithmétique fut ciblée à des fins d'analyse. Ce concept fut choisi non seulement parce qu'il s'agit d'un concept clé dans le développement de la pensée statistique, mais aussi parce qu'il devrait être abordé pendant plusieurs années, soit de la 1re à la 3e secondaire, ce qui a permis l'analyse d'un plus grand nombre de manuels puisque celle-ci n'était pas limitée à une seule année académique.

2. Le concept de moyenne

L'étude du concept de moyenne est clairement établie au sein du Programme de formation de l'école québécoise où l'on mentionne en ce qui a trait à la Progression des apprentissages au secondaire (Gouvernement du Québec, 2016) que les élèves devraient être amenés au cours des trois premières années du secondaire à décrire le concept de moyenne arithmétique (répartition équitable ou centre d'équilibre) ainsi qu'à calculer et à interpréter une moyenne arithmétique en tant que mesure de tendance centrale. Ce concept intervient donc lors de l'analyse et de l'interprétation de distributions statistiques qui peuvent être présentées sous la forme de tableaux ou de diagrammes statistiques. Il est aussi réinvesti lors de l'étude d'autres mesures statistiques pour lesquelles la moyenne intervient dans leurs calculs comme c'est le cas pour l'écart moyen et l'écart type soit des mesures de dispersion. Pour l'aborder à partir du matériel didactique, les enseignants proposent aux élèves de « bons problèmes » afin de parfaire leur compréhension du concept (Lajoie et Thibault, 2017). Il constitue un concept bien présent dans les manuels scolaires, tel que prescrit par le MEES, mais aucune étude ne permet d'élaborer en détail sur cet aspect. Nous préciserons davantage sa présence dans les manuels numériques afin d'appuyer notre analyse de ceux-ci.

Comme le soulignaient Proulx et al. (2016) ainsi que Gattuso (1999), la richesse mathématique inhérente à ce concept va bien au-delà de sa définition, soit une mesure statistique représentative de la valeur que toutes les données de la distribution auraient si elles avaient toutes la même valeur, et ce, sans changer la dimension globale de la distribution bien entendu (Thompson, 1994). Trop souvent la statistique est considérée comme une application d'algorithmes. L'enseignement du concept de moyenne n'y échappe pas. Cet enseignement se résume souvent à son algorithme de calcul qui implique de faire la somme de toutes les données de la distribution pour ensuite diviser cette somme par le nombre de données qui composent cette distribution. Bien que la plupart des élèves finissent par apprendre l'algorithme qui leur est spécifique, leur compréhension conceptuelle reste toutefois, dans bien des cas, déficiente. D'ailleurs, plusieurs travaux montrent qu'un enseignement des concepts statistiques axé sur leur algorithme de calcul n'est pas gage de leur compréhension et conduit à questionner l'intérêt donné à l'enseignement de la statistique (Boyé et Comairas, 2002; Cyr et Deblois, 2007; Gattuso, 1997; Gattuso et Mary, 2005; Vermette, 2016). Il s'agit bien entendu d'une procédure acceptable pour déterminer la moyenne d'une distribution, mais il existe d'autres procédures moins « mécaniques » permettant d'obtenir cette mesure statistique. Proulx et al. (2016) en ont répertorié trois. D'abord, le total-répartition qui fait intervenir le sens partage de la division et qui consiste à trouver le total pour pouvoir ensuite le répartir/partager également sur l'ensemble des données. Bien que l'on reconnaisse l'algorithme de calcul derrière cette procédure, cette dernière se distingue par le sens sous-jacent que l'on peut lui attribuer. Une deuxième procédure est celle du nivelage qui consiste à faire des échanges entre les valeurs des données de la distribution; on enlève aux plus grandes données au profit des plus petites, afin de parvenir à réduire progressivement les écarts entre les données pour en arriver à obtenir la même valeur pour chacune d'elles. Enfin, une troisième procédure voit la moyenne comme étant le point d'équilibre de la distribution, en quelque sorte le pivot d'une balance graduée sur laquelle sont placées les données, son point d'équilibre (delMas et Liu, 2005; Gattuso, 1999). Il n'y a pas que la diversité des procédures permettant d'établir la valeur de la moyenne qui témoigne de la richesse du concept en question, mais aussi tout ce qui entoure l'interprétation de la valeur obtenue. Ici, il faut aller au-delà des différentes procédures et se poser la question de savoir si la valeur obtenue est représentative de l'ensemble des données de la distribution et si elle exprime la tendance centrale de celle-ci. Pour répondre à ces questions, un regard s'impose sur l'ensemble de la distribution, ce qui implique inévitablement de considérer la dispersion des données au sein de la distribution.

D'ailleurs, le concept de moyenne est directement lié au calcul des mesures de dispersion que sont l'écart moyen et l'écart type, des mesures qui permettent de connaître la dispersion des données par rapport au centre de la distribution, soit la moyenne de la distribution. Contrairement à l'étendue, une mesure de dispersion obtenue en faisant la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur de la distribution et qui exprime la longueur du plus petit intervalle qui inclut toutes les valeurs de la distribution, l'écart moyen et l'écart type donnent une indication de la dispersion des données d'une distribution en prenant en considération toutes les données de la distribution. La moyenne a aussi cette spécificité par rapport aux autres mesures de tendance centrale que sont le mode et la médiane. En effet, la valeur de chaque donnée de la distribution est considérée dans le calcul de la moyenne, ce qui permet en quelque sorte de résumer par une seule valeur un ensemble de données, une valeur unique qui remplace toutes les données tout en conservant la même somme. Cet intérêt que l'on peut percevoir comme un avantage pour cette mesure au regard des autres mesures de tendance centrale devient toutefois un inconvénient lorsque la distribution comporte des données extrêmes qui viennent influencer le résultat et faire en sorte que la mesure obtenue n'est plus représentative de la tendance centrale de la distribution, comme dans le cas d'une distribution asymétrique, par exemple. Ici, la médiane, une mesure statistique d'une distribution telle que le nombre de valeurs qui lui sont inférieures est égal au nombre de valeurs qui lui sont supérieures, doit alors être priorisée afin de porter un regard sur la tendance centrale de la distribution. Puisque c'est le nombre de données dans chacun des sous-groupes qui importe et que la valeur des données n'est pas considérée dans le calcul de la médiane, celle-ci n'est donc pas influencée par ces données éloignées. D'autres aspects relatifs à ces mesures de tendance centrale peuvent certainement être répertoriés. Toutefois, rappelons que le concept de moyenne fut l'entrée préconisée dans le cadre de cet article pour une analyse plus spécifique et plus riche des manuels numériques en mathématiques.

3. La méthodologie

Pour répondre à nos questions de recherche, nous avons procédé à l'analyse des compléments ou des versions numériques des manuels de mathématiques, destinés à la formation des élèves de la première à la troisième secondaire au

Québec, entre 2015 et 2018. Des 26 ouvrages recensés au Québec en 2017-2018, nous avons approfondi 11 ouvrages provenant de 4 maisons d'édition (voir tableau 1). Ces derniers correspondent à l'ensemble de ceux qui traitent du thème spécifique à cette étude : la moyenne.

Mis à part un ouvrage qui s'adressait aux élèves de 2e secondaire (Pixel 2), tous les autres étaient destinés aux élèves de première et troisième secondaire. La collecte des données s'est d'abord dirigée vers la présence du numérique dans les ouvrages, tous chapitres confondus. Ici, deux questions ont guidé notre recension des manuels numériques. Retrouve-t-on des éléments qui sont uniques à la version numérique (vidéos, sons, hyperliens, activités interactives, etc.). Dans l'affirmative, quels sont ces éléments et à quelle fréquence sont-ils proposés? Ensuite, afin de voir si les manuels numériques en mathématiques offrent une présentation des contenus d'enseignement qui diffère des manuels scolaires dits traditionnels, nous nous sommes attardés au traitement de la moyenne comme contenu théorique et des processus inhérents à son apprentissage à travers le matériel didactique.

L'examen des manuels numériques a permis d'avoir une appréciation de la présentation du concept de moyenne à travers les sections théoriques, les exercices et problèmes présentés dans les chapitres portant sur la statistique de chacun des manuels (tableau 1), et ce, afin de voir dans quelle mesure les intentions didactiques qui fondent les programmes actuels au regard du concept de moyenne se trouvent concrétisées dans ceux-ci. Quel est l'apport du numérique dans l'apprentissage du concept de moyenne? Quelles procédures sont mises en évidence dans les manuels numériques? L'interprétation de la valeur obtenue est-elle approfondie ou s'agit-il d'un aspect négligé?

4. Résultats

En premier lieu, soulignons que sur les 11 manuels analysés (dont deux avec des cahiers), quatre ne sont en fait qu'une version numérisée du manuel imprimé, sans ajout d'interactions, alors que sept sont une version numérique bonifiée de l'original (voir tableau 1). On y retrouve bel et bien certaines fonctionnalités numériques, comme le surlignement, l'insertion d'un signet ou encore la rédaction de notes, mais ces fonctionnalités sont présentes pour l'ensemble des ressources numériques, puisqu'ils dépendent de l'environnement de la maison d'édition. Néanmoins, si l'on considère qu'il est aussi possible d'annoter et de surligner un manuel en version papier, alors la seule option supplémentaire offerte par ces quatre copies numériques est la possibilité d'agrandissement d'une section désirée. Le tableau 1 brosse le portrait des ajouts numériques présents dans ces manuels. Mentionnons que les sept premiers manuels comportent des ajouts numériques, et que parmi ceux-ci, les vidéos correspondent à l'ajout le plus fréquent avec les questionnaires interactifs. Les animations sont moins présentes et un seul manuel propose des liens vers Internet. Il est important de mentionner que les ressources originales signifient qu'elles sont uniquement accessibles par le manuel numérique et qu'elles ont été produites par la maison d'édition.

Tableau 1. Contenu des manuels

Nom du manuel	Liens vers Internet	Questionnaires avec corrections	Vidéos originales	Animations originales	Activités interactives originales	Questionnaires interactifs originaux
Panoramath A	0	0	122	0	13	70
Pixel - 2	0	28	92	0	27	66
Point de mire 1	0	0	71	0	13	81
Pixel - 1	0	0	44	0	0	0
Point de mire 3	0	0	37	10	10	56
Visions 3	0	0	22	12	1	0
Sommets 3	31	15	1	0	62	0
À vos maths! 1	0	0	0	0	0	0
Intersection 3	0	0	0	0	0	0
Perspective A - vol. 1	0	0	0	0	0	0
Point de vue - 3	0	0	0	0	0	0

Notre regard s'est ensuite tourné vers l'analyse des sept ouvrages qui offrent un complément, à différents niveaux, au manuel imprimé. Une analyse didactique fut alors dirigée vers la présentation du concept de moyenne à travers sa définition et des procédures permettant de déterminer la moyenne d'une distribution, une référence possible pour l'enseignant de mathématiques comme support à la leçon, ainsi que vers les exercices proposés, soit un aspect du manuel scolaire souvent préconisé par l'enseignant de mathématiques.

Le concept de moyenne à travers les manuels numériques

Rappelons que pour l'analyse de la moyenne, seulement une petite partie des manuels a été analysée en profondeur (tableau 2), soit uniquement ceux qui traitent de la moyenne.

Tableau 2. Liste des versions numériques des manuels analysées (ordre alphabétique par maison d'édition)

Titre du manuel ou du cahier	Nombre de pages	Ressources numériques présentes en lien avec la moyenne	Maison d'édition
Panoramath A	9	1 activité de manipulation, 1 vidéo et 1 série d'exercices interactifs[1]	CEC
Point de mire 1	7	1 activité de manipulation, 1 vidéo et 1 série d'exercices interactifs	
Point de mire 3	6	1 vidéo, 1 série d'exercices interactifs	
Visions 3 (manuel + cahier)	12 + 5	2 vidéos	
Pixel 1	3	1 vidéo, 1 exerciseur, exercices en ligne	ERPI
Pixel 2	3	2 vidéos, 1 exerciseur, exercices en ligne	
Sommets 3	7	Activités interactives, activité sur Khan Academy, fiches d'activités	Chenelière

Ici, sans surprise, l'étude de ce concept est clairement établie au sein des manuels numériques consultés. La présence du numérique dans les sections se rapportant à l'apprentissage de ce concept ne diffère pas du portrait global présenté précédemment, à savoir que pour les manuels concernés, on y retrouve des vidéos, une activité de manipulation, des exercices interactifs, des banques d'exerciseurs, etc. Cinq manuels se distinguent de leur version imprimée en offrant la possibilité de faire des exercices en ligne (Panoramath A, Point de mire 1 et 3, Pixel 1 et 2) dont deux de façon non interactive (Pixel 1 et 2). Pour ces deux derniers manuels, le fait de présenter une plateforme pour faire les exercices en ligne semble être un ajout minimal à la version imprimée, mais celui-ci peut comporter tout de même des avantages, notamment en facilitant la transmission d'un devoir de façon numérique à l'enseignant afin d'obtenir une rétroaction rapide. Les trois autres manuels offrent quant à eux des exercices interactifs pour chaque section des différents chapitres avec une correction instantanée similaire à ce que l'on peut retrouver sur la plateforme Netmath. À l'intérieur des manuels des éditions CEC (Panoramath A, Point de mire 1 et 3), on y propose également des tests interactifs, du même style que les exercices, mais étant situés cette fois-ci à la fin des chapitres. Ces tests interactifs peuvent ainsi apporter un certain support à l'évaluation. Enfin, pour trois manuels (Pixel 1, Pixel 2 et Sommets 3), on retrouve

1 Les exercices interactifs supposent une rétroaction automatique, alors que les exercices en ligne permettent seulement de répondre et l'enseignant peut ensuite réagir.

des liens menant à des banques d'exerciseurs permettant ainsi à l'élève d'avoir un surplus d'exercices afin de mettre en pratique les concepts en jeu.

En ce qui a trait à la présentation des contenus à travers les sections théoriques, tous les manuels numériques bonifiés proposent des vidéos où l'on illustre comment calculer la moyenne, principalement à partir de son algorithme de calcul. Toujours afin de faciliter l'appropriation du contenu mathématique, les manuels proposent également des liens internes, menant cette fois vers d'autres pages du manuel permettant notamment de rappeler des préalables au concept à l'étude tandis qu'un seul manuel contient des liens externes menant à des sites comme GoMaths, MatouMatheux, Multimaths, ou AlloProf. Aussi, deux manuels offrent une activité de manipulation où l'élève est invité à déplacer numériquement des objets dans le but de calculer la moyenne de la distribution. Il est important de spécifier qu'il s'agit de la même activité pour ces deux manuels, étant donné que ceux-ci proviennent de la même maison d'édition. Les ressources numériques sont-elles intéressantes? Pertinentes? En nombre suffisant?

En fait, dans les manuels numériques observés, nous ne retrouvons que très peu d'activités interactives permettant d'aller au-delà du simple calcul arithmétique et menant à une réelle analyse des données afin d'interpréter, entre autres, le résultat obtenu et porter un regard sur la tendance centrale de la distribution, contribuant du même coup à illustrer toute la richesse de ce concept mathématique. C'est plutôt l'algorithme de calcul qui prédomine en général dans tous les aspects numériques, à l'exception de deux ouvrages (Panoramath A et Point de mire 1) de 1re secondaire qui mettent en évidence les sens total-répartition et nivelage pour le calcul de la moyenne. Pour ces ouvrages provenant de la même maison d'édition, on retrouve par exemple, dans un premier temps, une activité de manipulation qui consiste à répartir des bâtons dans des cercles correspondant à des ensembles. Durant cette activité, l'élève peut alors tenter de distribuer adéquatement les bâtons afin de comprendre le concept de moyenne. On met en avant ici la procédure total-répartition puisque l'activité consiste à répartir une quantité totale de bâtons dans un certain nombre d'ensembles représentés par des cercles qui sont vides au départ. Dans un deuxième temps, une vidéo combine les procédures nivelage et répartition équitable. Pour ce faire, on retrouve plusieurs groupes comportant un nombre différent de bonbons. On nivelle d'abord les groupes en fonction de celui qui comporte le moins de bonbons. Ensuite, on regroupe le surplus pour le répartir équitablement entre les groupes. Ici, on s'inscrit davantage au niveau de la procédure total-répartition. En effet, dans cette deuxième partie de la vidéo, on ne retrouve pas ce va-et-vient entre les groupes qui est implicitement lié au processus de nivelage. En plus, dans la procédure nivelage, on n'a pas besoin de connaître le « total » afin de trouver la valeur de la moyenne. Certes, il serait possible de le trouver à la toute fin en multipliant le nombre de bonbons par groupe par le nombre de groupes, mais ce total ne sert pas à la procédure de calcul. C'est donc pour cette raison que l'on perçoit davantage la procédure total-répartition dans la deuxième partie de cette vidéo, le « total » ne représentant toutefois pas ici tous les bonbons en jeu, mais uniquement une partie d'entre eux correspondant au surplus total qui est réparti équitablement. Mis à part ces deux situations, les vidéos proposées présentent des exemples de moyenne calculée avec l'algorithme amenant ensuite l'élève à réinvestir celui-ci dans des exercices. Cette insistance mise sur l'algorithme de calcul et sur le fait que les autres procédures ne soient pas davantage exploitées au niveau numérique est surprenante si l'on considère que cette mesure statistique n'est pas définie uniquement par son algorithme au sein des manuels consultés. En effet, six manuels l'abordent comme mesure de tendance centrale. La notion de point ou de centre d'équilibre est aussi mentionnée à six reprises, deux manuels mentionnent qu'il s'agit d'une répartition égale et, enfin, quatre la définissent comme la valeur unique qui pourrait remplacer toutes les données tout en conservant la même somme.

5. Discussion et conclusion

Rappelons que cette étude fait état de la situation durant la période de 2016 à 2018. Toutefois, il est difficile de faire abstraction de la situation inédite de 2020 lorsque vient le temps de réfléchir aux résultats de cette étude et de la place du manuel numérique en éducation. Dans ce contexte d'enseignement à distance, la grande majorité des maisons d'édition ont été les premières à supporter les besoins et à offrir des ressources numériques pour accompagner les apprenants durant la fin de l'année 2020. Ces outils numériques ont un grand potentiel et peuvent certainement contribuer à aider les élèves, surtout en contexte à distance, mais il semble que ce potentiel n'est pas exploité pleinement au sein des manuels numériques en mathématiques si l'on se fie à l'analyse réalisée en lien avec le concept de moyenne. Bien évidemment, la production de ressources inédites exige temps et argent, et nous voyons une diversification continue de l'offre chez les différents éditeurs.

Deux limites importantes se doivent d'être mises en évidence. D'une part, le présent projet correspond à un moment particulier dans le temps, et puisque les manuels évoluent chaque année, il est difficile d'avoir un portrait en temps réel. Cela étant dit, puisque le processus d'édition est long alors que Gérard et Roegier (1993) rapportent que cela peut prendre un minimum de six ans, voire jusqu'à 10 ans, nous croyons que le portrait du manuel numérique évolue plutôt lentement. L'autre aspect qui n'est pas abordé dans cet article est celui de l'usage fait du manuel et des autres ressources par les enseignants. Bien que le manuel soit entre les mains des élèves, il constitue un outil didactique de l'enseignant, qui pourra, selon son expérience, en faire un usage très strict, en se fiant uniquement à une collection didactique, ou l'utiliser comme un complément ou pour enrichir sa pratique (Araújo Oliveira et al., 2006; Bucheton, 1999; Margolinas et Wozniak, 2009; Rabardel, 1997). Cela pourra varier selon l'expérience de l'enseignant, dans l'enseignement en général ou dans le niveau enseigné, son sentiment de compétence en mathématiques et le matériel disponible dans son école.

Maintenant, pour ce qui est du cas de la moyenne, on dénote à travers les éléments numériques des manuels une intention qui se concrétise principalement par une présentation du concept de moyenne axée sur son algorithme de calcul associée à des exercices où les élèves sont amenés à mettre en pratique cet algorithme. On constate donc que l'apport possible des éléments numériques sur les enjeux didactiques associés à l'enseignement de la moyenne est limité. L'algorithme de calcul ne s'avère pas être la seule procédure permettant d'obtenir la moyenne d'une distribution et pourtant, à nos yeux, il aurait été possible d'envisager un apport plus grand du numérique lié aux autres procédures que sont total-répartition, nivelage et point d'équilibre dans le but de favoriser une meilleure compréhension conceptuelle chez les élèves.

Prenons pour exemple la procédure point d'équilibre pour laquelle on ne trouve aucune ressource numérique et imaginons des données réparties sur une droite, agissant comme une balance graduée, pour lesquelles la moyenne serait indiquée à l'aide d'une flèche correspondant au point d'équilibre de la balance.

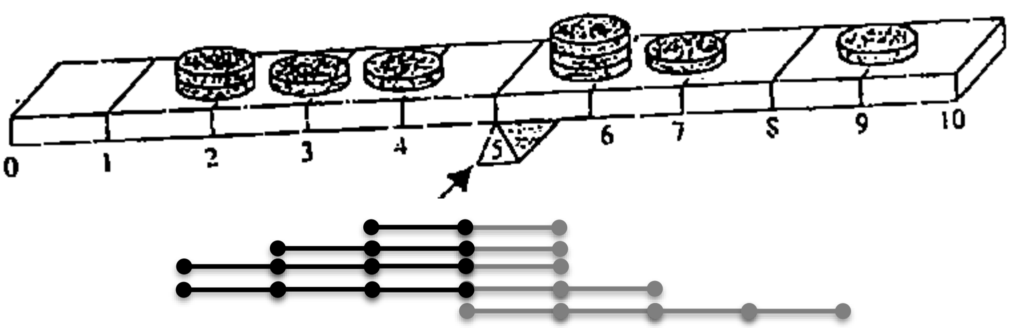


Figure 1. Procédure point d'équilibre (Trudel et Antonius, 1991, cité dans Gattuso, 1999, p. 85)

Une activité interactive pourrait contribuer à comprendre l'effet de la position des données sur la moyenne de la distribution et porter un regard par le fait même sur son point d'équilibre. Où placer le pivot afin que la balance retrouve son équilibre? Pour aider à trouver l'emplacement du pivot, il serait alors possible de montrer que la somme des écarts à la moyenne doit être nulle, ici illustré par le même nombre de segments de droite que l'on retrouve de part et d'autre de la flèche soit neuf dans la figure 1. Les élèves pourraient être amenés à réorganiser les données afin de produire l'effet désiré sur la moyenne de la distribution, c'est-à-dire à provoquer un déplacement du pivot de la balance dans un sens ou dans l'autre afin de retrouver l'équilibre. Les élèves seraient alors en mesure de modifier une ou des données de la distribution dans le but de mesurer l'impact de ce changement sur la moyenne de la distribution et voir ainsi la flèche fluctuer en conséquence. Une telle activité offre la possibilité d'aller au-delà du simple calcul arithmétique en plongeant l'élève dans un véritable exercice statistique où il doit accorder une attention particulière à l'interprétation du résultat obtenu. Tout ceci implique de porter un regard sur l'ensemble de la distribution afin de juger si la moyenne demeure un bon indicateur de la tendance centrale de la distribution à la suite de l'effet d'un tel changement. L'élève pourrait également prendre conscience visuellement de l'influence d'une donnée extrême sur la valeur de la moyenne et juger par la suite de la représentativité ou non de la moyenne obtenue en tant que mesure de tendance centrale de la distribution. Enfin, l'élève pourrait observer les droites numériques représentant différentes distributions dans le but d'estimer l'emplacement du point d'équilibre de chacune d'elles et ainsi comparer leur moyenne respective.

Il serait également possible de conceptualiser une activité de manipulation, mais cette fois-ci en mettant de l'avant la procédure de nivelage. Pour ce faire, on pourrait réinvestir une activité illustrant des piles de jetons qui est présentée dans une version papier (Cadieux et al., 2005), où la tâche consiste à rééquilibrer les piles de façon à ce qu'elle soit égale, mais en y ajoutant une dimension numérique. L'élève pourrait ainsi manipuler les objets en étant invité à déplacer les jetons d'une pile à l'autre afin d'en arriver à trouver la valeur correspondant à la moyenne. À travers cette activité de manipulation, il pourrait être amené à réfléchir à l'impact de l'ajout d'une donnée sur la moyenne. L'ajout d'une pile comportant un certain nombre de jetons forcerait l'élève à revoir le nivelage réalisé initialement et permettrait d'observer par le fait même l'influence de cet ajout sur la moyenne de la distribution. Par exemple, il serait intéressant d'ajouter une pile vide de jetons. Il serait alors possible de croire que cet ajout ne modifierait en rien la moyenne de la distribution puisque le nombre total de jetons, correspondant à la somme des données si l'on réfère à l'algorithme de calcul, demeure le même. Cet ajout aurait pourtant une incidence, car il impliquerait de revoir le partage afin que toutes les piles soient de nouveau nivelées, la valeur de la moyenne serait ainsi revue à la baisse.

Enfin, une conceptualisation de la moyenne à travers différentes représentations graphiques serait aussi une voie envisageable pour laquelle le numérique aurait un apport certain, ne serait-ce que par la puissance et la vitesse d'exécution des technologies de l'information et de la communication qui pourrait permettre aux élèves de se concentrer sur l'analyse des représentations graphiques et sur la visualisation de la tendance centrale de la distribution illustrée plutôt que de travailler à leur production. DelMas et Liu (2005) se sont d'ailleurs intéressés à ce type d'activité interactive dans le but d'aider à la compréhension d'une mesure statistique, en l'occurrence l'écart type, chez des étudiants de niveau universitaire inscrits à un cours d'introduction aux statistiques. Ces derniers ont illustré tout le potentiel de leur activité interactive afin de comprendre l'effet de la position des barres d'un histogramme sur l'écart type de la distribution.

En conclusion, les manuels numériques qui ne sont pas bonifiés numériquement perdent une bonne majorité des avantages, tout en gardant leurs limites. L'apparence de jeu et la possibilité pour l'élève d'interagir, d'être actif dans son apprentissage, qui facilitent la compréhension et la rétention, ne sont pas présentes dans un manuel numérique qui n'est qu'une copie PDF du manuel imprimé. En contrepartie, les manuels qui offrent des activités de manipulation ou des vidéos explicatives peuvent apporter une réelle valeur ajoutée. Nos résultats montrent néanmoins qu'il faut arriver à proposer une offre variée du matériel interactif, afin de s'appuyer sur les plus récentes connaissances didactiques du domaine, tout en maximisant les ressources existantes. Dans le cas de la moyenne, il appert que les manuels auraient pu profiter des autres procédures (total-répartition, nivelage et point d'équilibre) pour favoriser l'appropriation du concept. Ainsi, pour aborder de façon plus adéquate la moyenne, nous suggérons aux éditeurs de : 1) favoriser l'appropriation de la moyenne avec les différentes procédures possibles; 2) proposer des activités interactives tirant avantage du numérique; 3) d'offrir des vidéos en guise de synthèse faisant des liens entre les procédures. En guise de complément, l'enseignant de mathématique doit utiliser d'autres ressources que celles du manuel afin de proposer une diversité d'activités en classe.

Remerciements

Ce projet s'appuie sur des recherches financées par le Conseil de recherches en sciences humaines du Canada.

Références

Araújo Oliveira, A., Lisée, V., Lenoir, Y. et Lemire, J. (2006). Connaissance et utilisation des manuels scolaires québécois. Ce qu'en disent des futures enseignantes du primaire. Dans M. Lebrun (dir.), *Le manuel scolaire. Un outil à multiples facettes* (p. 301-328). Presses de l'Université du Québec.

Boyé, A. et Comairas, M.-C. (2002). Moyenne, médiane, écart type. Quelques regards sur l'histoire pour éclairer l'enseignement des statistiques. *Repères-IREM*, *48*, 27-39.

Bucheton, D. (1999). Les manuels : un lien entre l'école, la famille, l'élève et les savoirs. Dans S. Plane (dir.), *Manuels et enseignement du français* (p. 41-50). Centre régional de documentation pédagogique de Basse-Normandie.

Cadieux, R., Gendron, I. et Ledoux, A. (2005). *Panoramath-1er cycle du secondaire manuel A* (Vol. 1). Les Éditions CEC.

Choppin, A. (1992). *Les Manuels scolaires : histoire et actualité.* Hachette Éducation.

Corriveau, C. et Jeannotte, D. (2015). L'utilisation de matériel en classe de mathématiques au primaire : quelques réflexions sur les apports possibles. *Bulletin AMQ (Association mathématique du Québec), 55*(3), 33.

Cyr, S. et Deblois, L. (2007). La cote standard comme objet pour réfléchir aux notions statistiques avec les futurs maîtres. *Petit x*, *75*, 50-73.

delMas, R. et Liu, Y. (2005). Exploring students' conceptions of the standard deviation. *Statistics Education Research Journal*, *4*(1), 55-82.

Gattuso, L. (1997). La moyenne, un concept évident? *Bulletin AMQ (Association mathématique du Québec)*, *37*(3), 10-19.

Gattuso, L. (1999). La moyenne : un concept inexploité, d'une richesse exceptionnelle. *Repères-IREM*, *34*, 79-93.

Gattuso, L. et Mary, C. (2005). Trois problèmes semblables de moyenne pas si semblables que ça ! L'influence de la structure d'un problème sur les réponses des élèves. *Statistics Education Research Journal*, *4*(2), 82-102.

Gérard, F. M. et Roegiers, X. (1993). *Concevoir et évaluer des manuels scolaires*. De Boeck.

Gouvernement du Québec. (2010). *L'approbation du matériel didactique*. Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport. Direction des ressources didactiques.

Gouvernement du Québec. (2016). *Progression des apprentissages au secondaire. Mathématique*. Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur.

Gouvernement du Québec. (2017). *Bureau d'approbation du matériel didactique.* Ministère de l'Éducation et ministère de l'Enseignement supérieur. http://www1.mels.gouv.qc.ca/bamd/fr/new_second.asp?no=1

Karsenti, T., Collin, S. et Dumouchel, G. (2012). L'envers du tableau : ce que disent les recherches de l'impact des TBI sur la réussite scolaire. *Vivre le primaire*, *25*(2), 30-32.

Karsenti, T. et Bugmann, J. (dir.) (2017). *Enseigner et apprendre avec le numérique*. Presses de l'Université de Montréal.

Karsenti, T. et Fiévez, A. (2013). Les tablettes tactiles à l'école primaire : avantages, défis et recommandations pour les enseignants. *Vivre le primaire*, *26*(4), 33-36.

Lajoie, C. et Thibault, M. (2017). La mise à contribution de la didactique des mathématiques dans l'enseignement et la recherche. Dans S. El Euch, A. Groleau et G. Samson (dir.), *Didactiques : bilan et perspectives* (p. 35-54). Presses de l'Université du Québec.

Lebrun, M. (2006). *Le manuel scolaire, un outil à multiples facettes*. Presses de l'Université du Québec.

Margolinas, C. et Wozniak, F. (2009). Usage des manuels dans le travail de l'enseignant : l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. *Revue des sciences de l'éducation*, *35*(2), 59-82. https://doi.org/10.7202/038729ar

Oldknow, A. J. et Taylor, R. (2003). *Teaching mathematics using ICT* (vol. 1). A&C Black.

Oudrhiri, M. (2016). De l'usage pédagogique du numérique dans l'enseignement des mathématiques au Maroc. *EpiNet*, 185. https://www.epi.asso.fr/revue/articles/a1605c.htm

Proulx, J., Lavallée-Lamarche, M.-L. et Tremblay, K.-P. (2016). Vers une conceptualisation de la moyenne comme mesure de tendance centrale. *Envol*, *167*, 24-27.

Rabardel, P. (1997). Activités avec instruments et dynamique cognitive du sujet. Dans C. Moro, B. Schneuwly et M. Brossard (dir.), *Outils et signes : perspectives actuelles de la théorie de Vygotski* (p. 35-49). Peter Lang.

Reynolds, R. (2011). Trends influencing the growth of digital textbooks in US higher education. *Publishing Research Quarterly*, *27*(2), 178-187. https://doi.org/10.1007/s12109-011-9216-5

Roussel, C., Lemieux, M. M., Landry, N. et Samson, G. (2017). L'utilisation du manuel numérique en contexte postsecondaire : avantages et inconvénients. *Sciences et technologies de l'information et de la communication pour l'éducation et la formation*, *24*(3), 9-35. https://doi.org/10.3406/stice.2017.1747

Samson, G. et Lefebvre, S. (2012). Mettre les points sur les I et les barres sur les T : le cas du TBI. *Vivre Le Primaire*, *25*(4), 32-33.

Thompson. P. W. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of speed. Dans G. Harel et G. Confrey (dir.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (p. 179-234). SUNY Press.

Trudel, R. et Antonius, R. (1991). *Méthodes quantitatives appliquées aux sciences humaines*. Chenelière.

Vandebrouck, F. et Robert, A. (2017). Activités mathématiques des élèves avec les technologies numériques. *Recherches en didactique des mathématiques 37*(2-3), 333-382.

Vermette, S. (2016). L'écart-type : au-delà de l'algorithme. *Bulletin AMQ (Association mathématique du Québec)*, *56*(1), 11-24.

Viriot-Goeldel, C., Crinon, J., Piquée, C. et Marin, B. (2016). L'usage du numérique à l'école élémentaire en France : résultats de l'étude « Lire-écrire au CP ». *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, *19*(3), 90-120. https://doi.org/10.7202/1045179ar

Processus d'abstraction et difficultés d'apprentissage en mathématiques : quelques repères théoriques

Laurie BERGERON
Université du Québec à Montréal, GEMAS
bergeron.laurie.2@uqam.ca
Gustavo BARALLOBRES
Université de Québec à Montréal, GEMAS et
Laboratoire CeDS (Cultures et Diffusion des Savoirs, EA-7440), Bordeaux
barallobres.gustavo@uqam.ca

Résumé : Un discours répandu affirme que les difficultés d'abstraction constituent un obstacle majeur à l'apprentissage des mathématiques. Malgré le fait que les institutions porteuses de ces discours omettent de questionner la signification même de l'expression « difficultés d'abstraction », elles vont tout de même effectuer des propositions d'interventions; l'impact de celles-ci sur la nature des savoirs enseignés semble ne pas être interrogé. Cet article, de nature théorique, tente de préciser les différentes significations accordées à l'abstraction, en particulier pour l'apprentissage des mathématiques selon différentes disciplines contributives des sciences de l'éducation afin de se doter de critères pour analyser les discours portant sur les difficultés d'abstraction en mathématiques en éducation.

Mots clés : abstraction, fondements théoriques, didactique des mathématiques, conceptualisation

Abstraction process and learning difficulties in mathematics: some theoretical benchmarks

Abstract: There is an omnipresent discourse asserting that difficulties with abstraction constitute a considerable barrier to mathematics learning. Even though the institutions characterized by these discourses fail to question the very meaning of the expression "abstraction difficulties," they will, all the same, propose interventions, and the impact of these interventions on the nature of the knowledge taught seems not to be questioned. This article, theoretical in nature, attempts to clarify the different meanings assigned to abstraction, in particular for mathematics learning, according to different disciplines that

Revue québécoise de didactique des mathématiques, 2021, *vol 3*, p. 56-81.
https://doi.org/10.71403/k79a8c88

inform education science. The objective is to establish criteria by which to analyze discourses on abstraction difficulties in mathematics in education.

Keywords: abstraction, theoretical foundations, mathematics education, conceptualization

Introduction

Un discours très répandu en adaptation scolaire stipule que les difficultés d'abstraction des élèves sont un obstacle majeur à l'apprentissage des mathématiques. Même si ces difficultés ne sont pas explicitées et définies dans les divers documents qui en font mention[1], elles sont habituellement associées à des problématiques intrinsèques aux élèves (cognitives, affectives, etc.). Compte tenu des orientations partagées que semble adopter le ministère de l'Éducation, les chercheurs s'inspirant de travaux de la psychologie cognitive et des programmes de formation, il est possible de constater la prégnance des idéologies mentalistes en enseignement[2] et plus particulièrement en enseignement auprès d'une population d'élèves en difficulté d'apprentissage (Bergeron, 2017; Bergeron et Barallobres, 2019). L'empreinte des cadres médical et psychologique, qui conçoivent les difficultés d'apprentissage strictement en termes de caractéristiques cognitives des élèves et des défauts dans les processus cognitifs mis en place, est remarquable dans les discours de la noosphère en éducation au Québec. En effet, pour enrayer les « difficultés d'abstraction » que pose l'apprentissage des mathématiques, diverses circulaires ministérielles du Québec et d'autres provinces du Canada (par exemple, Fédération des syndicats de l'enseignement, 2018; Gouvernement de l'Ontario , s. d.; Pelletier et Léger, 2004) proposent de morceler les tâches et de les choisir en fonction de leur lien avec le quotidien (le sensible). Ce que les interventions proposées (inspirées d'une conception empiriste de l'abstraction) ont en commun est la simplification de la complexité de la tâche via la réduction de l'abstraction (ex. la manipulation non nécessairement finalisée d'objets concrets) dans le but, d'une part de centrer l'action sur « le sensible » et, d'autre part, d'alléger la charge cognitive des élèves. En tant que stratégie générale indépendante de la nature du savoir ; cette « concrétisation des savoirs » (Barallobres, 2009; Giroux, 2013; Roiné, 2010) a une

1 Par exemple, la Fédération des syndicats de l'enseignement (2018) mentionne que les difficultés d'abstraction, de généralisation et de conceptualisation sont des manifestations d'une déficience intellectuelle, langagière ou même d'un trouble du spectre de l'autisme. Dans certains cas, la fédération explique l'origine de ces difficultés à un cerveau qui serait plus « concret ».

2 C'est-à-dire que l'apprentissage est considéré comme une appropriation individuelle et non comme une démarche collective, ce qui entraîne ainsi des recommandations orientées sur l'individualisation de l'enseignement et le traitement des capacités cognitives des élèves (Roiné, 2015).

incidence sur le sens des savoirs enseignés, surtout lorsque ce sens s'élabore à l'intérieur même de la discipline, rendant également implicite l'idée que la spécificité des savoirs est un élément secondaire (Bergeron, 2017).

Les analyses des discours institutionnels que nous avons menées dévoilent l'absence de questionnement quant à la signification même de l'expression « difficultés d'abstraction en mathématiques » (Bergeron, 2017). De quoi s'agit-il lorsqu'il est fait mention d'abstraction? Que doit-on comprendre par « abstraction en mathématiques » et par « difficulté d'abstraction en mathématiques »?

Dans le cadre de cet article, nous proposons une synthèse de la manière dont la philosophie, les mathématiques, la psychologie et la didactique des mathématiques abordent l'abstraction. Cet élargissement nous permettra d'élaborer un cadre d'analyse des difficultés d'abstraction en mathématiques dépassant le point de vue strictement psychologique.

1. Quelques repères théoriques sur les idées abstraites en philosophie

Les problèmes posés par les idées abstraites concernent les rapports entre « le monde matériel, sensible » et « la pensée, l'intuition » qui prennent des formes particulières au sein des différents courants philosophiques (Sylvand, 1999).

D'une part, le réalisme postule l'existence du « réel sensible » et suppose que l'esprit entre en contact immédiat avec le réel sensible par l'intuition sensible et que « l'abstrait », en tant que contenu propre de l'intellect, est « dans » le donné et est obtenu de ce donné par un processus d'analyse. Dans ce contexte, les idées abstraites, étant indépendantes du sujet, renvoient toujours au sensible, car elles apparaissent en tant qu'analyse ou comme un « schéma généralisant » du donné sensible et le sujet est en réceptivité passive puisque les objets et leurs propriétés se présentent à lui (Dondeyne, 1938a). Pour Reymond (1943), le cadre réaliste refuse au sujet toute capacité d'analyse sélective (chargée d'intentions), de généralisation ou même de synthèse constructive en le limitant à la seule capacité d'analyse, en bref, à une pensée passive. L'évolution des sciences et de la critique scientifique conteste cette version naïve de l'objectivité, en particulier les limites du fondement sensible dans la constitution de la connaissance scientifique, qui ne jouit pas de l'intemporalité que l'on souhaite lui attribuer.

À l'extrême opposé, l'idéalisme conteste l'idée d'un sujet réceptif « modelé » par l'objet externe et propose de le concevoir comme un pôle d'activité qui pose lui-même l'objet par des opérations de synthèse plutôt que d'analyse. La synthèse consiste à ajouter un concept à un autre (par l'expérience ou par l'intuition pure : les idées abstraites dépassent ainsi le contenu immédiat du sensible et leur schématisation. Bien que l'idéalisme ait eu le mérite de renverser le point de vue du réalisme en donnant un rôle central à la pensée en acte, il peine à dépasser les « limites du moi constructeur » (Dondeyne, 1938a), à expliquer l'existence de ce qui est « déjà-là » comme « fait » et à donner une place au sensible dans l'explication de la constitution de la connaissance.

D'une part, il est difficile de savoir quel rôle et quel caractère de vérité attribuer à des idées qui ne se fondent pas sur le réel, mais sur des principes de cohérence logique interne et, d'autre part, il n'est pas évident de comprendre comment l'activité intuitive à partir d'un donné concret pourrait servir de fondement pour des affirmations dont la portée dépasse nettement les propriétés immédiates de ce donné (Dondeyne, 1938a) :

> L'expérience nous apprend bien que quelque chose est de telle ou telle manière, mais non point que cela ne peut pas être autrement… Nécessité et stricte universalité sont les marques sûres d'une connaissance à priori. (Kant, 1781, cité dans Dondeyne, 1938a, p. 11)

Dondeyne (1938b) insiste sur le caractère actif et conceptuel de la pensée qui tire des informations d'expériences sensibles ou intuitives antérieures afin de les réintroduire à de nouvelles expériences. Le concept n'est pas le reflet de l'intuition ni des objets, mais il est plutôt une interaction entre sensible et intuition ainsi qu'une possession active, inachevée en constante croissance vers une compréhension totale du réel : « connaître, c'est posséder l'autre activement » (Dondeyne, 1938b, p. 351).

Dans ce déplacement vers la reconnaissance de l'existence de processus intellectuels où la pensée développe « en interaction » avec un certain « réel », des processus appelés d'abstraction prennent des formes différentes.

Delaunay (2016) distingue quatre formes de ce processus reflétant un travail formel de structuration du donné : l'abstraction par simplification permettant de négliger toutes les particularités d'un acte, de se détourner de toute considération concrète afin d'en retenir, par induction, une nature constante, une valeur, un sujet, une forme. L'abstraction par généralisation (constitutive de la conceptualisation), dans le cadre de laquelle l'esprit part des propriétés d'un objet (même complexes) pour remonter vers des propriétés plus générales, se fonde sur la logique des classes. L'abstraction par sélection consiste à isoler de l'intégralité du donné un aspect fragmentaire, un trait particulier. Par exemple, à partir d'une feuille de papier, il est possible de n'en retenir que l'aspect blanc en écartant son aspect rectangulaire et sa texture. L'abstraction par schématisation permet une modélisation d'un donné et sa formalisation, c'est-à-dire la décomposition et la recomposition d'un système de données permettant d'extraire du sensible, des éléments de forme (de l'information), à partir desquels, par abstractions successives, se construiraient des niveaux de complexité formés par des représentations de plus en plus symboliques donc détachées du sensible.

L'abstraction consiste ainsi à penser à part ce qui ne peut être donné à part (Reymond, 1943); dans cet acte, le langage joue un rôle fondamental, étant « le véhicule social de la pensée […] parce que la pensée est essentiellement sociale et communicable » (Dondeyne, 1938b, p. 346). Gonseth (1890-1975) représente ce processus comme « une synthèse dialectique entre appréhension d'une situation donnée et la façon dont on l'exprime » (cité dans Bkouche, 2012, s. p.). En parlant de « situation » et non d'objet, l'auteur souhaite souligner le fait que l'élaboration d'objets purement intellectuels (abstraits) n'est nullement indépendante des besoins propres à la situation : ces objets sont des outils pour l'appréhension de la situation. Les processus intellectuels d'abstraction sont conçus comme se développant à l'intérieur de situations (des exigences contextuelles, des finalités), dans le cadre d'une culture (mathématique, physique, etc.), et ce, par le biais du langage.

Prenons l'exemple donné par Bkouche (2012) : une expérience simple montre les ambigüités et les limites de la connaissance sensorielle dans la définition des idées de « chaud » et « froid » comme sensation captée par les sens. Devant trois récipients, le premier rempli d'eau froide, le second rempli d'eau chaude et, le troisième, d'eau tiède, une personne met sa main gauche dans le premier récipient et sa main droite dans le second, puis elle retire ses mains et les met toutes deux dans le troisième récipient. La main gauche aura une sensation de chaud, alors que la main droite aura une sensation de froid bien qu'elles plongent dans la même eau. Afin de préciser cette notion, on « invente » un concept pour déterminer le degré de chaleur d'un corps, la température et des appareils pour la mesurer. Le concept qui précise ce qui est chaud et ce qui est froid est loin d'être le précurseur de l'appareil qui le mesure, il est défini grâce à la construction de l'appareil. La notion sensorielle de chaleur disparaît et se précise ainsi derrière une notion « abstraite » définie de manière arbitraire qui devient un outil opératoire pour appréhender la problématique en question. C'est ainsi « l'abstrait » qui permet de mieux cerner « le concret » (et non pas quelque chose qui serait « extrait » du concret) et qui émerge d'un contexte spécifique.

2. L'abstraction en mathématiques

La question de l'abstrait en mathématiques est intimement liée à la nature même de cette discipline. Si plusieurs concepts en mathématiques se développent en lien avec des problématiques externes aux mathématiques, une dynamique d'enrichissement s'installe dans l'activité mathématicienne, caractérisée par l'obtention de résultats plus précis et plus sophistiqués nécessitant l'élaboration de définitions et d'arguments qui s'éloignent, peu à peu, des intuitions et des problèmes « réels » qui étaient sous-jacents à la construction de la théorisation. Autrement dit, les « situations » (dans le sens de Gonseth) au sein desquelles les objets mathématiques se produisent peuvent être internes aux mathématiques mêmes.

Les niveaux de théorisation sont habituellement accompagnés de formalisations axiomatiques à l'intérieur desquelles les objets originaux sont effacés ou mis de côté, au risque de considérer la connaissance mathématique comme un ensemble de formules symboliques dépourvues de significations. Cependant, comme Patras (2001) l'affirme, la revendication d'une fidélité inconditionnelle aux origines est dangereuse, car les contenus que les théorisations véhiculent risquent de cesser d'avoir du sens.

Un débat essentiel concernant la nature des objets mathématiques fait écho à celui de la philosophie : les mathématiques ne peuvent être réduites à une science empirique ni à un ensemble de règles et d'axiomes. Certains empiristes comme Mill (1843) considèrent que les notions mathématiques sont des notions empiriques qui portent sur des faits physiques, et que les propositions des mathématiques se fondent sur l'expérience; l'affirmation 3 = 2 + 1 porte sur le fait suivant : la totalité composée de trois éléments peut être divisée en une totalité de deux éléments et une autre d'un élément. Frege notera bien la difficulté de cette conception de l'arithmétique, en particulier en ce qui concerne la notion de nombre : si le nombre dénote la totalité, quelle dénotation attribuer à 0?

À l'opposé de l'empirisme radical, l'idéalisme de Leibniz (1646-1716) postule que les notions mathématiques sont de pures créations de l'esprit humain, des vérités de la raison. Ces notions n'ont pas de contenu factuel et on n'a nullement besoin de recourir à l'observation du monde extérieur pour les valider : elles sont des vérités nécessaires et a priori. La position rationaliste n'est pas exempte de difficultés : comment expliquer ce qui fait d'une proposition mathématique une vérité de raison accessible indépendamment de toute expérience?

Sortant de cette dichotomie, Bonnay et Dubucs (2011) proposent de considérer l'existence d'une certaine « expérience mathématique », de nature différente à l'expérience matérielle donnant lieu à des généralisations empiriques, et affirment que Kant (1724-1804) a cherché à construire une voie intermédiaire entre empirisme et rationalisme, en reconnaissant un rôle à l'intuition[3], mais sans que

3 Intuition pour Kant : représentation singulière, immédiate de quelque chose (si l'on met la main sur le feu, ce que l'on sent immédiatement est une intuition); toujours particulière, toujours

cette intuition fasse dépendre les vérités mathématiques des contenus empiriques :

> À nouveau, tout le problème est de comprendre comment nous pouvons nous appuyer sur une intuition apparemment empirique pour établir une connaissance qui, elle, n'est pas empirique… La solution de Kant est de supposer l'existence d'une intuition pure, l'intuition pure des formes de la sensibilité. L'idée de forme de la sensibilité repose sur la distinction de deux aspects des phénomènes : leur forme, qui correspond à la manière dont sont ordonnés les phénomènes les uns relativement aux autres, et leur matière, qui correspond à la sensation. Les formes de la sensibilité, que sont le temps et l'espace, sont a priori : elles ne dépendent pas d'une expérience, elles fondent au contraire la possibilité de l'expérience. (Bonnay et Dubucs, 2011, p. 5)

La thèse de Kant s'oppose à celle d'Hume (1711-1776) qui considérait que les mathématiques étaient des vérités analytiques distinguant les connaissances qui portent sur la réalité concrète, et les connaissances logiques et mathématiques, qui elles portent sur les idées de notre esprit et leur mise en relation. Les premières connaissances sont des vérités synthétiques a posteriori: elles sont variables, peuvent changer de statut de vérité et on a besoin de les vérifier, de recourir à l'expérience. Les connaissances logiques et mathématiques sont des vérités analytiques : elles ne portent pas sur le monde, elles ne sont pas sujettes à changement. Elles sont a priori et nécessaires. Kant affirme, pourtant, que les mathématiques sont a priori, mais pas analytiques. La logique, pour Kant, est purement formelle : science de la forme de penser en général, incapable de dire jamais quoi que ce soit sur le contenu ou la matière de pensée (Patras, 1996). Les mathématiques sont, par contre, une science d'objets et elles se réfèrent à des contenus de connaissances ; elles ne peuvent alors se réduire à la logique formelle.

Le programme intuitionniste de Kant (ainsi que l'empirisme de Mill) rencontre l'opposition de Frege et Russell pour qui les mathématiques peuvent être dérivées de la logique. L'approche logiciste, prétend que les mathématiques parlent de « tous les objets », mais accepte en même temps l'existence d'objets propres aux mathématiques et distincts des autres entités (les distinguant des formalistes). Russel et Frege partagent l'idée que les énoncés mathématiques ont un contenu

immédiate. Il y a deux types d'intuitions pour Kant : empiriques et pures. Les intuitions pures sont a priori, c'est-à-dire indépendamment de tout contenu empirique : il s'agit de la capacité à recevoir des intuitions qui tiennent à la forme de notre sensibilité. C'est la « structure d'accueil », la réceptivité, la condition a priori de toute intuition. Toute intuition empirique se plie à la forme de notre intuition. Le temps et l'espace sont des intuitions a priori (nous n'avons pas l'intuition de l'espace, l'espace est une intuition pure qui est la condition de toute autre intuition).

sémantique; une réalité externe au sujet qui n'est pas la réalité physique. Pour Frege, le contenu mathématique est une réalité en soi et c'est de leur adéquation à cette réalité que les règles tirent leur légitimation (les nombres sont des objets abstraits, existant indépendamment de nous). Les énoncés mathématiques cherchent ainsi à décrire une « réalité » que nous n'avons pas à construire ; ils sont vrais lorsque les objets auxquels ils se réfèrent ont bien les propriétés qu'ils leur attribuent (Dubucs, 2010). Le programme logiciste de Frege conduit cependant à une impasse lorsque Russell découvre un paradoxe : la solidité de l'édifice mathématique semble mise en question. Le risque de perte de certitude garantie par cette discipline favorise l'émergence de programmes alternatifs tendant à garantir la solidité de l'édifice mathématique comme le formalisme.

Pour le formalisme, l'important ce sont les règles auxquelles les objets mathématiques sont soumis et non la nature de ces objets. Le formalisme nie l'existence de toute autre entité que les signes concrets qui sont l'objet des manipulations du mathématicien. Pour Hilbert (1892-1943), les mathématiques sont simplement une manipulation symbolique, un jeu formel : tout est réductible à des symboles dépourvus de contenu. Ce qui importe pour le mathématicien formaliste n'est pas ce qu'exprime un énoncé, mais la recherche d'une démonstration respectant des règles précises et formulées à l'avance. Dans ce contexte, le développement de symbolismes à chaque fois plus puissants conduit les mathématiciens à explorer des mondes « abstraits » de divers ordres, abandonnant le type d'intuition auquel s'attachait Kant. Cependant, la constitution d'objets mathématiques par « manipulation symbolique » atteint ses limites lorsque le progrès de l'abstraction aboutit à l'introduction d'objets paradoxaux. À cette époque, Gödel (1906-1978) montre l'impossibilité de formaliser entièrement les mathématiques, et donc, l'impossibilité de les réduire à la logique. Pour Gödel, nos idées empiriques contiennent des éléments abstraits « qualitativement distincts des sensations » qui ne peuvent avoir leur origine dans les sensations. La perception sensible est pour Gödel une relation entre concepts et objet particulier perçu, alors que la perception mathématique est une relation entre concepts. Il établit l'impossibilité de construire les mathématiques de manière strictement syntaxique et affirme l'existence d'objets mathématiques, indépendants des actes et des dispositions de l'esprit humain, qui décrivent une réalité non sensible.

Les limites du formalisme qui suit l'échec des propositions kantiennes et du logicisme ouvrent de nouvelles voies à une épistémologie des mathématiques qui, tout en refusant de réduire les mathématiques à une science empirique, dépasse les questions des fondements et s'intéresse à l'analyse des traces constitutives de la pensée mathématique. Selon Patras (1996), la phénoménologie de Husserl a exploité la possibilité de construire une épistémologie postkantienne permettant d'expliquer comment les mathématiques peuvent, tout à la fois et sans contradiction, être une science axiomatique susceptible de descriptions formelles et en même temps, une science d'intuitions très diverses (intuitions sensibles, intuitions plus abstraites). L'analyse de la structure propre des actes en jeu dans l'expérience mathématique (ensemble d'actes à travers lesquels on a accès aux objets mathématiques) devient un enjeu fondamental dans cette nouvelle épistémologie. Ces analyses montrent qu'une seule couche d'actes ne suffit pas à rendre pleinement déterminée la connaissance des objets mathématiques : il n'y a rien d'analogue à la composante « sensorielle » de la perception sensible dans l'expérience mathématique (Bonnay et Dubucs, 2011). La question de l'abstraction émerge, dans cette perspective, de l'analyse des couches constitutives du contenu mathématique développée par le mathématicien dans le contexte d'une pratique culturelle spécifique. Il s'agit d'une posture qui réclame un contenu sémantique aux mathématiques, mais qui conçoit la réalité mathématique comme étant dépendante du mathématicien, de ses constructions, de l'activité, de l'expérience du sujet à l'intérieur d'une culture.

Si, pour Frege, une fois le concept construit, la façon dont nous formons le concept est effacée, pour Husserl, la pensée mathématique se construit par des abstractions successives, par idéalisation. L'étude de ces couches d'abstraction devrait pouvoir éclaircir ce que sont les mathématiques. Cependant, le progrès mathématique n'a pas montré la linéarité que Husserl imaginait et certains aspects de l'argument de Frege sont restés tout à fait pertinents : une fois les idéalités mathématiques constituées, elles existent par elles-mêmes et deviennent indépendantes du moment de constitution, réutilisables dans d'autres contextes, parfois inattendus. Un exemple représentatif concerne les travaux de la théorie de nombres sur les nombres premiers. Ces travaux, sans aucun lien dans leurs origines avec l'informatique, ont été repris par cette discipline et sont à la base de la cryptographie. Le sens des idéalités mathématiques appartient ainsi à la pratique mathématique, il évolue avec cette pratique et n'est pas fiché dans l'objet ni dans le processus de genèse original de l'objet (et non dans les intuitions fondamentales, à la manière de Kant). Les objets mathématiques prennent du sens dans l'usage fait à l'intérieur d'une pratique mathématicienne.

Patras (1996) explique que la définition d'un objet mathématique n'épuise pas sa signification : si l'on montre sa définition à un mathématicien, il pense aux spécialisations de ce concept, les problèmes où il intervient, les variations possibles de la notion, les problèmes non résolus impliquant la notion, etc. (cela dépasse les intuitions au sens naïf, car les mathématiques ne sont pas une science d'intuitions au sens de l'esthétique, mais une science de concepts).

Cherchant à éclaircir la nature des pratiques mathématiciennes, Gonseth définit le rapport des mathématiques au monde de l’expérience dans un processus faisant passer de la réalité à un schéma de cette réalité[4], un schéma étant un support écrit, dessiné qui tend vers l’abstraction, mais doit conserver une partie des relations qu’entretiennent entre eux les objets réels. Les schémas se construisent par le biais de signes, à différents niveaux de formalisation et conceptualisation (Bloch, 2014) et sont des repères marquant le passage de l’intuition à l’expérimentation par un processus de mathématisation. L’idée de dialectique est affirmée par le fait que ni l’objet concret ni le schéma abstrait n’offrent, à eux seuls, le « vrai » visage de la réalité : les notions intuitives évoluent sous l’influence de la schématisation lors de l’expérimentation, perdant ainsi une partie de ses attaches avec le réel et, par ailleurs, le schéma abstrait, par lui-même, ne peut pas représenter tous les détails de l’objet en question. Les objets mathématiques se constituent à l’intérieur de cette dialectique, par différentes couches de schématisation et d’abstraction.

Cette brève description des questions ontologiques et épistémologiques concernant les mathématiques permet de mieux situer une vision empiriste souvent implicite, mais assez répandue dans le milieu éducatif, concernant le rapport entre le « réel » et la construction d’objets propres à cette discipline. On y retrouve la dichotomie empirisme/idéalisme déjà mentionnée dans le paragraphe précédent et l’essai de la dépasser soit par la discussion sur la nature du contenu sémantique des énoncés mathématiques soit par l’analyse de l’activité mathématique et du rôle, et la nature de l’expérience mathématique engagée.

Lorsqu’il s’agit de penser à l’intervention auprès des élèves en difficulté en mathématiques, l’adoption implicite ou explicite d’une posture empiriste a comme conséquence un retour « au concret » (dans le sens du matériel physique), mais non pas dans le sens de déployer autour de ce concret une expérience dont l’intérêt porterait sur la structure des actes engagés, mais dans celui d’extraire, par la perception sensible, ce que l’objet donnerait à voir en termes de contenus mathématiques. L’accès aux objets mathématiques impliquerait alors principalement un seul aspect des processus d’abstraction identifiés par Delaunay. La synthèse présentée montre bien que l’activité mathématique comporte bien plus que cet aspect de l’abstraction, surtout ceux relatifs aux processus de généralisation et modélisation (schématisation) dans lesquels « le concret » est très souvent déjà mathématisé, déjà « abstrait ».

4 Si bien la notion de « réalité » n’est pas clairement définie, il faut noter que, selon les objets mathématiques en question, elle peut référer à des aspects déjà intrinsèquement mathématiques.

Nous défendons l'idée qu'une vision empiriste de la connaissance limite l'accès à une expérience mathématique fidèle aux pratiques mathématiciennes et collabore, d'une certaine manière, à renforcer les difficultés d'apprentissage : plus on revient au « concret matériel » -sans remonter vers l'abstrait structurant ce concret-, plus on s'éloigne de l'activité mathématique; moins les élèves ont la possibilité d'être exposés à l'abstrait (car ils ont de la difficulté), moins ils auront la possibilité d'y accéder et de développer une pratique mathématicienne.

3. Quelques points de vue psychologiques sur l'abstraction

L'œuvre de Piaget se situe, d'un point de vue philosophique, en continuité avec celle de Kant, mais elle se distingue par l'ambition de fournir un fondement empirique à ses propos. C'est, entre autres, par l'entremise des stades de développement ainsi que par ce qu'il nomme la pensée concrète et la pensée formelle que Piaget fonde l'approche développementale. La notion de schème est centrale dans cette théorisation : « [u]n schème est la structure ou l'organisation des actions telles qu'elles se transfèrent ou se généralisent lors de la répétition de cette action en des circonstances semblables ou analogues » (Piaget et Inhelder, 1966, p. 11). Piaget (1978) affirme[5] qu'il y a, au cours du développement du sujet, une continuité fonctionnelle entre ce qu'il appelle l'intelligence sensori-motrice à l'intelligence conceptuelle et accorde à l'expérience un rôle de toute première importance dans la formation des schèmes sensori-moteurs ou conceptuels. L'auteur distingue deux types d'expériences physiques et logico-mathématiques qui mènent à des connaissances relatives aux objets ou à des connaissances construites sur la base des actions effectuées par le sujet, et ces connaissances sont le produit de deux modes d'abstraction. D'une part, la connaissance physique est la résultante d'une abstraction « empirique » ou « simple » qui consiste à abstraire une ou plusieurs caractéristiques de l'objet étudié et d'autre part, « l'abstraction réfléchissante » mène aux connaissances logico-mathématiques et est le produit des inférences tirées des coordinations générales des actions du sujet sur les objets. C'est grâce aux deux modes d'abstraction que le sujet parvient à construire ses connaissances, à modifier ses schèmes et ainsi à passer d'un niveau élémentaire (expériences physiques) à un niveau supérieur (les expériences logico-mathématiques).

Quant à Vygotski, ce dernier associe les processus d'abstraction au développement des fonctions psychiques – mentales ou psychologiques selon les ouvrages – supérieures, étant le langage et l'apprentissage de concepts quotidiens et

5 Il faut noter qu'il s'agit d'une hypothèse de travail, laquelle, selon Bronckart (2007) n'a pas été prouvée par Piaget.

scientifiques deux éléments fondamentaux. Pour Vygotski, tout concept implique des actes de généralisations qui se distinguent par leur distance au concret et à l’abstrait ; les opérations mentales inférieures sont toujours des cas particuliers de l’opération supérieure. Par exemple, dans le domaine des mathématiques, « toute opération arithmétique est un cas particulier de l’opération algébrique » (Vygotski, 1934/2012, p. 305), en ce sens, l’algèbre se situe à un niveau supérieur puisqu’il est un champ de savoir plus abstrait et libère la pensée de ses attaches au concret en permettant d’opérationnaliser le raisonnement (Vygotski, 1934/2012). L’appropriation des concepts scientifiques se distingue de celle des concepts quotidiens par le fait que ceux-ci se présentent dans l’apprentissage scolaire et nécessitent un acte volontaire et non un besoin immédiat d’action sur la réalité, constituant un passage à l’acte conscient du sujet. En contexte d’enseignement, « on apprend à l’enfant ce qu’il n’a pas devant les yeux, ce qui dépasse infiniment les limites de son expérience immédiate, actuelle et potentielle » (Vygotski, 1934/2012, p. 307). Construction et concepts scientifiques et processus d’abstraction sont ainsi en lien puisqu’en étant plus clairement définis, les concepts scientifiques permettent une prise de conscience progressive des caractéristiques et des relations que l’on peut établir avec d’autres concepts. Cette prise de conscience est nécessaire pour permettre à l’élève une certaine maîtrise de ses actions afin d’établir des liens et d’identifier des ressemblances et des différences entre concepts, c’est-à-dire pour identifier des généralisations et construire des systèmes de concepts, en se distanciant des objets et phénomènes immédiats ou primitifs (Vygotski, 1934/2012).

Provenant de la psychologie piagétienne, mais en accordant un rôle fondamental aux savoirs spécifiques et à l’épistémologie des savoirs, Gérard Vergnaud propose, en 1990, une théorie qu’il qualifie de théorie psychologique du concept. Les éléments constitutifs de la théorie des champs conceptuels (TCC) sont les situations, les schèmes et bien sûr, les concepts. C’est à partir de ces trois éléments que l’auteur tente d’expliquer l’acte de conceptualisation chez le sujet. Selon l’auteur (Vergnaud, 1988, 1990) trois ensembles sont à considérer dans l’activité conceptualisante du sujet : S (le référent), I (le signifié) et ζ (le signifiant) : le premier ensemble (S) fait référence à la variété de situations qui permettent de donner du sens au concept. Le second (I) est celui des invariants opératoires qui sont constitutifs du fonctionnement des schèmes. Un schème est composé de règles d’action, d’anticipations/inférences et d’invariants opératoires (théorèmes-en-acte et concepts-en-acte)[6] et bien qu'ils soient souvent implicites, les invariants opératoires sont indispensables à l'acte de conceptualisation du sujet puisque, dans le cadre de la résolution de la tâche, ils organisent la recherche de l'information appropriée et vont également régir les inférences. Dans ce cadre constructiviste (Vergnaud était un élève de Piaget), c'est, entre autres, l'accommodation des schèmes qui permet aux sujets d'élaborer de nouveaux savoirs et de développer des compétences de plus en plus élevées.

S'inspirant des travaux de Piaget et de Vygotski, les travaux de Bruner (1966, 1993), centrés sur l'acquisition du concept, placent le sujet au centre de la construction de ses apprentissages. L'acte de conceptualisation, chez Bruner, relève d'une démarche de résolution de problème dans laquelle le sujet, influencé par la nature de la tâche ainsi que par le contexte, tente de définir les critères selon lesquels il va catégoriser des objets, des événements, des idées, etc. Cet auteur accorde une grande importance à l'étude des processus de classification, de catégorisation et d'acquisition de concepts dans la compréhension des processus d'abstraction. Il définit les concepts comme étant des catégories construites par le sujet dans la classification d'objets, d'idées ou d'événements de son environnement qui ont des attributs en commun, par l'entremise de trois modes de représentation. Le premier mode, nommé énactif, est celui dans lequel les informations sont représentées en termes d'actions dites habituelles et quotidiennes qui sont effectuées de façon procédurale. Le mode iconique (les représentations visuelles) est celui où le sujet construit des représentations qui sont indépendantes des actions qu'il est possible d'exercer sur les objets. Enfin, le mode de représentation symbolique est caractérisé par une construction qu'effectue le sujet qui est arbitraire et abstraite. En ce qui concerne les deux premiers modes, ils se construisent en interaction avec le milieu physique et les expériences concrètes alors que le troisième mode, quant à lui, est tributaire de la culture et est indissociable du langage.

Enfin, du côté de la psychologie cognitive, plus particulièrement des études concernant le traitement de l'information, il nous semble important de souligner les travaux sur l'acquisition d'un ordre supérieur de pensée inspirés, entre autres, des travaux de Bruner. Pour Ivie (1998), cet ordre implique l'utilisation de structures abstraites de pensée, l'organisation de l'information en un système organisé et intégré, et l'application de règles de logique et de jugement pour développer le raisonnement. Si l'apprentissage est ici considéré comme

6 Les théorèmes-en-acte et les concepts-en-acte sont deux des trois logiques des invariants opératoires, de type « propositions » et « fonctions propositionnelles ». Ils se construisent dans l'action et peuvent être utilisés sans toutefois être expliqués/formulés par le sujet.

« l’acquisition de connaissances organisées, intégrées systématiquement en mémoire à long terme » (Tardif, 1992, p. 44), elle est beaucoup plus que cela pour Tardif qui, en s’appuyant sur les travaux de Pressley et Harris (1990), met de l’avant que l’utilisation fonctionnelle des connaissances implique la mise en application de stratégies cognitives et métacognitives. Les stratégies cognitives permettent de résoudre la tâche donnée alors que les stratégies métacognitives assurent la mise en application des stratégies sélectionnées et leur contrôle. L’élève aurait ainsi à sélectionner les stratégies les plus efficaces parmi celles disponibles au sein du domaine étudié pour résoudre la tâche pour ensuite en contrôler leur exécution afin d’atteindre le but qu’il s’est fixé. Dans une telle perspective, l’analyse des savoirs en jeu est mise de côté pour prioriser la structure des informations à traiter.

Cette approche cognitiviste se distingue des précédentes approches puisqu’elle centre entièrement son objet d’étude sur la cognition et les structures mentales du sujet et fournit un modèle explicatif de la connaissance dont l’apport de la culture n’occupe pas une place fondamentale; la construction d’un ordre supérieur de pensée est plutôt théorisée en tant qu’activité à la charge de l’apprenant et de l’efficacité des stratégies cognitives et métacognitives qu’il met en œuvre. Au sein de cette approche, le rôle de l’enseignant est d’expliciter les différentes stratégies et de rendre les élèves « conscients » de l’efficacité de leurs stratégies.

À la différence de la psychologie cognitive, Vygotski, Vergnaud et Bruner s’intéressent tous les trois à l’apprentissage des savoirs scolaires; dans ce contexte, les processus d’abstraction et de généralisation sont fortement liés aux processus de conceptualisation caractérisant l’élaboration de savoirs spécifiques. Ces processus, bien qu’ils accordent une place fondamentale au sujet, ne s’y réduisent pas. Le rôle de l’environnement (situations et contexte) est ainsi fondamental pour les trois auteurs, même si sa nature peut varier d’un auteur à l’autre, certains attribuant un poids plus important au langage et à la culture.

Encore une fois, la perspective adoptée conditionne le regard porté sur les difficultés d’apprentissage (et les difficultés d’abstraction) ainsi que sur les formes d’intervention. Par sa posture épistémologique, la psychologie cognitive cherche à identifier des défaillances dans des processus mentaux et à agir à ce niveau à travers le développement de stratégies indépendantes de la spécificité des savoirs.

Vygotski, Vergnaud et Bruner, cependant, placent la conceptualisation, et en conséquence le rôle fondamental des savoirs tout comme des tâches et situations au sein desquels l’expérience de l’élève prend place, au centre de l’analyse des difficultés. Les interventions qui en découlent peuvent difficilement ignorer le contenu de savoir. En donnant un pas en avant, la didactique des mathématiques se situera dans une certaine continuité avec les travaux de ces auteurs.

4. Abstraction, conceptualisation et symbolisme selon différents courants de la didactique des mathématiques

Pour Dreyfus et al. (2001), l'abstraction est un processus de réorganisation des connaissances antérieures dans lequel le contexte et la constitution d'une nouvelle structure occupent une place fondamentale : « Nous considérons l'abstraction comme une activité de réorganisation verticale des connaissances mathématiques précédemment construites dans une nouvelle structure. L'abstraction est donc un processus dépendant du contexte » (p. 307, traduction libre[7]). Ces processus sont considérés comme une activité constituée de trois actions épistémiques dans laquelle de nouvelles relations sont établies permettant l'élaboration de connaissances plus développées (Dreyfus et al., 2001). L'action de « reconnaître » (*recognising*) une structure mathématique familière fait appel aux situations déjà vécues par l'élève qu'il peut lier en vérifiant qu'elle correspond, en partie ou totalement, à la nouvelle situation qui lui est présentée. L'étape centrale de l'abstraction, « assembler » (*constructing*), consiste à lier les connaissances déjà reconnues et les artéfacts de la connaissance[8] dans le but d'en produire une nouvelle structure plus abstraite, mais qui deviendra plus familière pour l'élève (par l'usage et la fréquentation). Finalement, l'activité de « construire avec » (*building-with*) demande la combinaison des artéfacts de la connaissance existants pour atteindre un but comme la résolution d'un problème ou la justification d'une proposition. Observons que la description des trois actions épistémiques constituant l'abstraction est centrée sur l'élève comme si, d'une certaine manière, ces trois actions lui étaient intrinsèques; le rôle de l'enseignant comme représentant de la culture mathématique ainsi que la nature des situations auxquelles l'élève est confronté ne sont pas mentionnés explicitement.

Sfard (1991) affirme que l'apprentissage des mathématiques consiste en un processus dialectique entre une conception opératoire (procédurale) et une conception structurelle (conceptuelle) de la même notion mathématique. La

7 We take abstraction to be an activity of vertically reorganising previously constructed mathematical knowledge into a new structure. Abstraction is thus a context dependent process (Dreyfus et al., 2001, p. 307).

8 Les artéfacts de la connaissance (knowledge artefacts) peuvent être tangibles (des documents, des images, des objets) et intangibles (pensées, conversations, métaphores). L'utilisation des artéfacts de la connaissance permet de partager, mais également de transférer les connaissances (Abuhimed et al., 2013).

conception opératoire réfère à des procédures, des actions et des algorithmes. La notion mathématique est donc perçue comme une possibilité plutôt qu’une entité et elle prend forme à partir d’une requête dans une séquence d’actions ; la conception structurelle des notions mathématiques correspond à les traiter comme des entités abstraites, à pouvoir s’y référer en tant qu’objet, à une idée manipulable comme un tout sans avoir besoin d’entrer dans les détails. En s’appuyant sur une analyse historique et cognitive, Sfard (1991) fait l’hypothèse que la conception opératoire précède la conception structurelle. De ce fait, plusieurs degrés d’abstraction/structuralisation séparent et lient les deux conceptions dans le développement des concepts. La première étape de l’activité de la formation des concepts mathématiques, « l’intériorisation », est celle où l’apprenant se familiarise avec la procédure pour acquérir, éventuellement, un nouveau concept. Durant l’étape de « condensation », l’élève peut considérer une certaine procédure comme un ensemble sans avoir à recourir à des exemples particuliers et peut passer d’une représentation à une autre du concept, tout en étant toujours très attaché à la procédure. C’est lors de la « réification » que l’élève considère les différentes représentations qu’il avait du concept en une seule représentation (généraliser) : l’intériorisation de concepts de plus haut niveau commence. Cette nouvelle entité créée n’est plus considérée en tant que procédure, mais en tant qu’objet faisant partie d’une catégorie permettant d’en étudier les propriétés. À différence du modèle précédent, l’analyse épistémologique en tant que référence sur les modes de production des objets mathématiques organise les étapes de l’apprentissage. Cependant, la description des processus de construction des objets mathématiques ne fait pas intervenir explicitement l’organisation de l’enseignement, ni la spécificité des situations didactiques et du savoir qui les détermine.

Encore centrés sur le point de vue des sujets, mais en donnant une place très importante aux processus sémiotiques et à la culture mathématique, Radford et al. (2009) considèrent l’abstraction en mathématiques comme un processus qui ne porte pas sur des objets, mais sur des symboles les représentant et leurs relations. Radford (2001, 2004) accorde un rôle fondamental à la généralisation, en tant que processus sémiotique, dans la formation des objets mathématiques et souligne le fait que l’objet du savoir n’est pas directement acquis par nos sens, mais plutôt par des modes culturels de signification (sens), à travers « la technologie de l’activité sémiotique » (langage, écriture, formules, graphiques). L’interaction entre les symboles et les idées doit être conçue comme un système de relations construit par l’élève dans son cheminement intellectuel à la fois individuel et social, demandant un détachement de l’objet concret et la construction d’objets mentaux et de structures de référence qui se réalisent par des processus d’abstraction et de généralisation (Radford, 2001 ; Radford et Grenier, 1996 ; Steinbring, 2006). Ainsi, l'abstraction et la généralisation sont des processus considérés comme étant « des moteurs » de l'activité mathématique et, par conséquent, de l'activité sémiotique. De façon complémentaire, les travaux plus récents de Radford (2020) placent au centre des questionnements sur l'enseignement et l'apprentissage la question du travail conjoint entre enseignant et élève(s). Au sein de la théorie de l'objectivation, l'apprentissage est considéré comme phénomène collectif ancré dans un contexte social et culturel où le savoir, en tant que systèmes de pensée et d'action formés historiquement et culturellement, nous oppose sa présence. L'objectivation est ainsi le processus social, corporel, matériel et symbolique de prise de conscience par lequel nous tentons d'effacer l'altérité entre soi et le savoir. Selon Radford (2020), ce processus dépend de l'activité au sein duquel il prend place qui ne se réduit pas seulement à l'objet de l'activité, mais dans le travail conjoint entre enseignant et élèves où chacun se réalise dans son rapport à l'autre.

Dans les travaux du courant anglo-saxon, il est possible d'identifier un changement de perspective dans la conception des processus d'abstraction/généralisation, dépassant le point de vue strictement psychologique et proposant une approche sémiotique de l'activité mathématique qui tient compte des modes culturels de signification et qui, plus récemment, accorde une importance particulière aux formes d'interactions dans l'activité conjointe. Cependant, même si le rôle du contexte culturel est mentionné dans plusieurs travaux du courant anglo-saxon, il semble difficile d'identifier la manière spécifique dont il intervient effectivement dans les analyses de l'activité d'enseignement-apprentissage des mathématiques. Dans certains cas, les processus d'abstraction/généralisation semblent attachés à des intentionnalités propres aux sujets individuels et la nature des tâches, la spécificité de l'activité mathématique institutionnelle, le contexte culturel et les caractéristiques spécifiques des processus d'enseignement apparaissent comme des éléments secondaires dans les explications fournies.

Dans le contexte de la didactique française, l'analyse des pratiques mathématiques, impliquant des processus d'abstraction/généralisation, se produit à l'intérieur d'une approche structurelle qui donne un rôle fondamental à l'analyse épistémologique du savoir et aux pratiques institutionnelles au sein desquelles le savoir se développe.

Au sein de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1994), la compréhension d'un concept est dépendante des techniques associées et de leur mise en application à l'aide d'objets ostensifs régulés par des objets non ostensifs émergeant de la praxis humaine. Les ostensifs sont des objets de nature sensible ayant une certaine matérialité qui peuvent être manipulés (pas simplement par le toucher, mais aussi la voix, le regard) et qui sont accessibles par les sens. Ils sont la partie perceptible de l'activité mathématique (sons, graphismes, gestes) et possèdent une valence instrumentale signifiant qu'ils permettent de travailler ainsi que d'agir et une valence sémiotique permettant de produire du sens et de communiquer, tandis que les non-ostensifs renvoient à ce qui ne peut être manipulé à proprement parler comme des concepts et des idées, mais qui sont évoqués par l'entremise de la manipulation d'ostensifs. Les non-ostensifs règlent les manipulations et permettent de justifier et d'expliquer les actions de la technologie et/ou de la technique. C'est par l'entremise des ostensifs (le sensible) et des non-ostensifs (l'abstrait) qu'une nouvelle technique peut être construite dans le but d'accomplir une tâche et que le savoir a une fonction technologique (justification des techniques), le tout, articulé et influencé par l'institution.

Si, dans la théorie anthropologique du didactique, il n'y a pas de mention directe des processus d'abstraction et de généralisation, c'est parce que cette approche considère que la conceptualisation n'est pas tributaire de l'élève seul, mais bien de la praxis humaine à l'intérieur de laquelle l'individu évolue. Ces processus d'abstraction, associés à la manipulation dialectique des ostensifs/non-ostensifs, sont dépendants de la nature des organisations praxéologiques à l'intérieur desquelles la pratique mathématique de l'élève se développe. Cependant, dans la brève description effectuée, l'idée de « technique routinière » peut être associée à l'idée de « familiarité » d'un objet de la pensée (par la maîtrise des situations dans lesquelles cette technique est impliquée), et ainsi, des liens peuvent être établis avec le processus dialectique de conception structurelle-conception opératoire des objets mathématiques avancé par Sfard.

En étroit lien avec la théorie anthropologique du didactique, la théorie des situations didactiques (TSD) (Brousseau, 1998) offre un cadre plutôt microdidactique pour penser les situations d'enseignement en fonction des caractéristiques des savoirs, dans lequel la notion de milieu didactique, spécifique au savoir, occupe un rôle fondamental. Brousseau identifie trois dialectiques agissant en tant que fonctionnements distincts de la connaissance. La dialectique de l'action est la phase dans laquelle l'élève agit sur une situation qui lui pose problème et tente d'adapter ses stratégies en fonction des rétroactions que la situation lui donne. La dialectique de la formulation permet de formuler et de communiquer, à l'aide du langage mathématique, les connaissances en jeu lors de la phase précédente. Ainsi, au moins deux actants devront formuler sous une forme quelconque la connaissance dans le but de la convertir en savoir collectivement acceptable. Finalement, la dialectique de la validation, consiste à prouver, convaincre et théoriser ce qui aura été explicité lors de la phase de formulation. Bien que ces dialectiques permettent à l'élève de rencontrer le savoir en situation, il est important de le fixer de façon conventionnelle (Bessot, 2003 ; Brousseau, 1998 ; Sarrazy, 2006). C'est le processus d'institutionnalisation, effectué par l'enseignant et les élèves, qui favorise la décontextualisation et l'émergence d'une connaissance qui pourra être identifiée et réinvestie dans d'autres contextes (domaine de validité) et qui prendra un statut de savoir.

La TSD n'aborde pas de façon explicite les processus d'abstraction/ généralisation; cependant, c'est par l'entremise des dialectiques de formulation et de validation ainsi que par l'institutionnalisation que les processus de conceptualisation, et alors d'abstraction et de généralisation prennent forme. Butlen et Pezard (2003) s'intéressent, dans le contexte de la TSD, à la conceptualisation et plus particulièrement aux étapes intermédiaires qui la sous-tendent dans le cadre de l'organisation de l'enseignement. Selon ces auteurs, la conceptualisation est le processus final d'une série d'activités intermédiaires du processus de décontextualisation. Ainsi, c'est à travers la généralisation, le changement de contexte et la formalisation que la décontextualisation s'opère et qu'elle mène à la conceptualisation. Correspondant à des degrés différents, ces activités intermédiaires permettent de passer de l'exemple concret à un énoncé formel ou à une définition et elles sont considérées comme une activité collective propre à chaque classe plutôt que comme une activité dont la responsabilité et le bon déroulement sont imputés à l'enseignant. La conceptualisation s'effectue en grande partie grâce au dialogue (dans les phases de formulation, en particulier) par l'organisation spécifique de l'enseignement et par le passage à l'écrit dans le cadre desquels les élèves doivent se décentrer de leurs expériences personnelles pour rendre compte des savoirs élaborés dans le cadre des tâches rencontrées (phases de validation et phases d'institutionnalisation des savoirs).

5. Quelques clés de lecture pour analyser les injonctions scolaires

À la lumière des postures des différentes disciplines à propos de l'abstraction, il est possible de faire ressortir certains éléments qui nous semblent clés afin, à la fois de mieux comprendre ce que signifie abstraire en mathématiques, mais également aux fins de réfléchir à ce qu'implique « avoir des difficultés d'abstraction ». Il importe de mentionner que les formes d'abstraction décrites par les auteurs dépassent l'idée empiriste d'« extraction » de quelque chose « du concret ». Des thèmes récurrents, outre celui de l'activité cognitive du sujet, tels que le langage, la situation, le but poursuivi, la culture et le contexte deviennent incontournables dans l'explication de la nature et des modes d'accès auxdites formes.

La question du « contenu » des idées abstraites, de leur nature, de leurs modes de représentation et de leur caractère de vérité prend des caractéristiques spécifiques lorsqu'il s'agit de mathématiques. Si l'abstraction implique de penser à part ce qui ne peut pas être donné à part, il en résulte que la pensée joue un rôle fondamental dans la constitution de ces idées ; dans ce « penser à part », les objets (matériels ou idéaux) occupent une place importante. C'est donc l'interaction entre intuition et objet qui devient un enjeu fondamental pour penser les processus d'abstraction.

Lorsqu'il s'agit des objets de savoirs spécifiques, l'abstraction apparaît associée à la généralisation et à la conceptualisation. L'accès aux objets mathématiques, dont le caractère est essentiellement opératoire, n'est pas uniquement une question de perception, mais de « faire » et « refaire » des exercices et des problèmes. Les processus d'abstraction associés à la constitution d'objets mathématiques ne sont pas indépendants d'une certaine structure d'intentionnalité. Le rôle du symbolisme devient fondamental dans la constitution de la pensée mathématique, puisqu'il permet de décrire et d'objectiver, par des schématisations, les relations explorées. Ces schématisations deviennent ensuite objet d'étude en elles-mêmes donnant lieu à différentes couches d'abstraction/généralisation. Les généralisations impliquent des modalités de représentations distinctes permettant des éclairages différents à une même situation et de nouvelles constructions mathématiques plutôt que d'abstractions empiriques. Elles caractérisent l'activité mathématique et la distinguent d'un processus strictement algorithmique et deviennent, en même temps, autonomes à l'égard des actes qui les pensent.

Loin de l'associer à des aspects de la perception sensible, la synthèse épistémologique proposée laisse entrevoir que l'élaboration d'objets idéaux, réalisée toujours dans un contexte d'une pratique culturelle qui encadre les buts poursuivis, implique des paliers de structuration des données (qui ne sont pas nécessairement « sensibles ») et de formalisation et que l'objet abstrait, en tant qu'outil opératoire, n'émerge pas nécessairement du concret, mais qu'il peut, dans certains cas, mieux le cerner. C'est dans l'usage et la fréquentation des objets, à l'intérieur d'une pratique réglée, que les rapports entre « concret » et « abstrait » se précisent. L'analyse de cette pratique, des natures des expériences et des structures des actes qui les constituent devient fondamentale pour comprendre les processus de généralisation et d'abstraction propres aux mathématiques.

Du point de vue de l'apprentissage, le rôle de l'action du sujet dans la construction de nouvelles structures de pensée (par abstraction/généralisation), du langage et de la culture (en particulier du contexte scolaire) est différemment identifié par les auteurs. La place du langage, par exemple, distingue la position des différents chercheurs. Bronckart (2007), dans une perspective vygotskienne, montre chez Vergnaud et Piaget l'absence d'une définition de l'agir; il fait ressortir le fait que toute action collective, complexe et instrumentée demande un mécanisme d'entente (le langage). Ainsi, l'action sensée humaine est dépendante de l'activité langagière et est influencée (et non déterminée) par l'interaction avec des préconstruits sociaux auxquels s'ajoute la mise en place de capacités d'abstraction et de généralisation qui participent à la décontextualisation de la pensée : plus le sujet est confronté à des corpus de connaissances formelles, plus la pensée se développe.

Dans le cas particulier de l'apprentissage des mathématiques, les aspects sémiotiques jouent un rôle fondamental de par la nature même des objets impliqués. Les travaux des didacticiens cités en témoignent en rejoignant par ailleurs les propos philosophiques et épistémologiques déjà traités : la nécessité du détachement de l'objet concret dans la constitution des objets abstraits s'interprète bien à l'intérieur du cadre philosophique développé tout comme la dualité processus/objet et la notion de réification chez Sfard appellent à une analyse historico-épistémologique de l'évolution des notions mathématiques qui sont mises à l'étude au sein de l'institution scolaire. De la même façon, certains didacticiens tentent de préciser, au sein d'une approche historico-culturelle de l'apprentissage, le rôle des artéfacts, du corps et du concret dans l'apprentissage et ainsi d'éviter de tomber dans les écueils entre empirisme et idéalisme. Des approches, comme la théorie de l'objectivation, s'intéressent, entre autres, à la question de l'apprentissage dans le rapport entre soi et l'autre au sein du travail conjoint où la cognition est considérée comme *embodied* afin de réfléchir aux manières de développer différentes modalités à mettre en place en classe de mathématiques qui tiennent compte à la fois du savoir culturel, mais également du langage, des gestes, des actions sur les artéfacts (dont font partie les symboles mathématiques) ainsi que des formes d'imagination (Radford, 2017). De façon complémentaire, les aspects structuraux concernant les caractéristiques des pratiques mathématiques institutionnelles sont mis de l'avant par les théories francophones et permettent de mieux cerner les processus de conceptualisation impliqués dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

Au regard des différentes positions des courants étudiés, il nous est possible de considérer que l'abstraction en mathématiques ne peut se passer de l'étude des objets et des savoirs en jeu, des aspects langagiers et symboliques, du but poursuivi, des aspects historico-culturels et institutionnels au sein desquels la pratique mathématicienne prend place et des capacités cognitives des acteurs impliqués. Ces thématiques en interaction semblent incontournables pour expliquer et comprendre la nature et les modes d'accès aux formes d'abstraction, mais permettent également d'entrevoir que les « difficultés d'abstraction » peuvent émerger d'un complexe de facteurs qui dépasse l'individu et ses caractéristiques cognitives. En ce sens, le terme « difficulté d'abstraction », qui dirige le regard vers la cognition de l'élève semble bien insuffisant pour aborder l'ensemble des phénomènes pouvant se produire en classe de mathématiques.

En guise de conclusion

En début d’article, nous avons évoqué que bien que les difficultés d’abstraction soient attribuées aux capacités et déficits cognitifs des élèves au sein des discours institutionnels, cela se produit sans qu’une définition ou un questionnement de ses difficultés et même de l’abstraction en elle-même ne soit présenté par les institutions porteuses de ces discours. À l’issue des différents éléments de discussion, les difficultés d’abstraction peuvent difficilement être imputables aux seules caractéristiques cognitives des élèves. À elle seule, la perspective cognitiviste, pour aborder l’abstraction, semble conduire à une uniformisation des processus d’abstraction en lien étroit avec des processus de décontextualisation (permettant d’accéder à la structure de la connaissance) où les aspects afférents aux savoirs en jeu, au langage ainsi qu’au contexte sont occultés.

Les analyses épistémologiques mettent en évidence que toute décontextualisation s’accompagne d’une nouvelle contextualisation et ainsi, que les processus d’abstraction, même s’ils impliquent des processus de décontextualisation, se caractérisent surtout par des recontextualisations continuelles au sein d’une pratique mathématicienne variée qui produit de nouvelles significations.

La perspective pluridisciplinaire que nous avons entreprise pour aborder l’abstraction nous amène à proposer de poser un regard nouveau sur les discours portant sur l’apprentissage (et les difficultés d’apprentissage) des mathématiques et en particulier lorsqu’il est question d’abstraction et des difficultés d’abstraction afin d’en comprendre la trame (idéologique et théorique) sous-jacente ainsi que de pouvoir porter un jugement critique et avisé sur ces injonctions. En effet, comment les élèves peuvent-ils être amenés à abstraire si l’une des principales injonctions concerne la réduction de la complexité des tâches mathématiques proposées? Si la manipulation est souvent présentée par le ministère de l’Éducation (Gouvernement du Québec, 2006) comme activité permettant essentiellement d’accéder aux objets mathématiques, ceci suppose que le savoir mathématique est contenu dans l’objet et qu’il suffirait seulement de trouver la bonne représentation physique pour favoriser les apprentissages, et ce, sans spécifier la nature des objets à choisir (Bergeron, 2017). Ou encore, lorsque plusieurs circulaires ministérielles font référence au fait que l’abstraction est inhérente au développement des stratégies cognitives et métacognitives, ceci réfère à une posture selon laquelle les aspects cognitifs seraient préalables à l’abstraction plutôt que conjoints à une pratique mathématicienne orientée par des buts. Sans spécification relatives à ce que signifie abstraire, il est possible, à la lumière de la synthèse effectuée, de percevoir comment de telles injonctions peuvent créer certains glissements dans les méthodes d’enseignement mises en place et les apprentissages, mais également négliger certains aspects qui sont pourtant constitutifs d'une pratique mathématicienne.

Notre intention n'est point d'affirmer que ces propositions sont à tout coup néfastes, mais plutôt de souligner le fait qu'elles sont exemptes de considérations théoriques importantes au regard d'aspects inhérents à l'abstraction. Dans une telle perspective, il semble important d'appeler à une vigilance épistémologique quant à certaines propositions d'intervention en lien avec les fondements qui sous-tendent les difficultés d'abstraction mentionnées au sein de multiples discours ministériels et pédagogiques afin d'étudier les impacts possibles de ces pratiques sur le plan des niveaux de conceptualisation des objets mathématiques et le sens des savoirs enseignés et appris.

Références

Abuhimed, D., Beheshti, J., Cole, C., AlGhamdi, M. J. et Lamoureux, I. (2013). Knowledge artefacts: Lessons learned and Stories as a means to transfer knowledge amongst cohorts of high school students working on an inquiry-based project. *Proceedings of the Association for Information Science and Technology, 50* (1), 1-4.

Barallobres, G. (2009). Caractéristiques des pratiques algébriques dans les manuels scolaires québécois. *Petit x, 80*, 55-76.

Bergeron, L. (2017). Difficultés d'abstraction en mathématiques : certains fondements théoriques et idéologiques du discours noosphérien de l'adaptation scolaire. [Mémoire de maitrise, Université du Québec à Montréal]. Archipel. https://archipel.uqam.ca/11131/

Bergeron, L. et Barallobres, G. (2019). Les modèles d'enseignement en adaptation scolaire en mathématiques : à la recherche du savoir perdu. *Chroniques - Fondements et Épistémologie de l'activité mathématique* [en ligne]. https://jfmaheux.uqam.ca/chroniques/2019/03/22/savoirperdu/

Bessot, A. (2003). Une introduction à la théorie des situations didactiques : Masteur « Mathématiques, Informatiques » de Grenoble 2003-2004. *Cahier du laboratoire Leibniz, 91*, 1-28.

Bkouche, R. (2012). *Abstrait vs concret, une opposition ambiguë* [notes de cours]. IREM de Lille.

Bloch, I. (2014). Concepts, objets, symboles, enseignement de mathématiques… Quelques réflexions sur l'épistémologie et la didactique. *Cahiers rationalistes, 631*, 1-8.

Bonnay, D et Dubucs, J. (2011). La philosophie des mathématiques. Dans A. Barberousse, D. Bonnay et M. Cozic (dir.), *Précis de philosophie des sciences* (p. 293-349). Éditions Vuibert.

Bronckart, J. -P. (2007). De l'activité collective à l'action et à la pensée individuelles pour une psychologie fermement vygotskienne. Dans M. Merri (dir.), *Activité humaine et conceptualisation : questions à Gérard Vergnaud* (p. 121-141). Presses universitaires du Mirail.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Éditions la Pensée sauvage.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Belkapp Press.

Bruner, J. S. (1993). *Le développement de l'enfant : savoir dire, savoir faire*. Presses universitaires de France.

Butlen, D. et Pezard, M. (2003). Étapes intermédiaires dans le processus de conceptualisation en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 23*(1), 41-78.

Chevallard, Y. (1994). Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique. *Actes du séminaire de l'Associazione Mathesis*, 190-200.

Delaunay, A. (2016). Abstraction. Dans *Universalis éducation*. https://www.universalis.fr/encyclopedie/abstraction/

Dondeyne, A. (1938a). L'abstraction. *Revue néo-scolastique de philosophie, 41*(57), 5-20.

Dondeyne, A. (1938b). L'abstraction (suite et fin). *Revue néo-scolastique de philosophie, 41*(59), 339-373.

Dreyfus, T., Hershkowitz, R. et Schwarz, B. (2001). The construction of abstract knowledge in interaction. *Proceedings of the 25th Annual Meeting of PME, Volume 2,* 377-384.

Dubucs, J. (2010). L'« absence » des objets mathématiques. Dans J.-T. Desanti, D. Pradelle et F-D. Sebah (dir.), *Sur l'aphilosophie des mathématiques* (p. 160-173). Éditions Trans-Europ-Repress.

Fédération des syndicats de l'enseignement. (2018). *Référentiel : Les élèves à risque et HDAA*.

Giroux, J. (2013). Étude des rapports enseignement/apprentissage des mathématiques dans le contexte de l'adaptation scolaire : Problématique et repères didactiques. *Éducation et didactique*, *7*(1), 59-86.

Gouvernement de l'Ontario. (s. d.). *À l'écoute de chaque élève grâce à la différenciation pédagogique.* Ministère de l'Éducation. http://www.edu.gov.on.ca/fre/teachers/studentsuccess/aecoutepartie1.pdf

Gouvernement du Québec. (2006). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, premier cycle*. Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport.

Ivie, S. D. (1998). Ausubel's learning theory: An approach to teaching higher order thinking skills. *The High School Journal*, *82*(1), 35-42.

Mill, J. S. (1843). *Système de logique déductive et inductive*. Pierre Mardaga.

Patras, F. (1996). Phénoménologie de la connaissance mathématique. Dans J.-F. Courtine (dir.), *Phénoménologie et logique* (p. 109-121). Presses de l'École nationale supérieure.

Patras, F. (2001). *La Pensée mathématique contemporaine*. Presses universitaires de France.

Pelletier, E. et Léger, C. (2004). *Les troubles d'apprentissage : Guide pour les enseignants*. École Marguerite-Bourgeoys.

Piaget, J. (1978). *La formation du symbole chez l'enfant* (8e éd.). Delachaux et Niestlé.

Piaget, J. et Inhelder, B. (1966). *La psychologie de l'enfant*. Presses universitaires de France.

Pressley, M. et Harris, K. (1990). What we really know about strategy instruction. *Educational leadership, 48*(1), 31-35.

Radford, L. (2001). The historical origins of algebraic thinking. Dans R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell et R. Lins (dir.), *Perspectives on school algebra* (p. 13-36). Springer.

Radford, L. (2004). La généralisation mathématique comme processus sémiotique. Dans G. Arrigo (dir.), *Atti del Convegno di didattica della matematica 2004* (p. 1-27). Divisione della Scuola.

Radford, L. (2017). The multimodal material mind: Embodiment in mathematics education. Dans J. Cai (dir.), *First compendium for research in mathematics education* (p. 700-721). National Council of Teachers of Mathematics.

Radford, L. (2020). Le concept de travail conjoint dans la théorie de l'objectivation. Dans M. Flores González, A. Kuzniak, A. Nechache, et L. Vivier (dir.), *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz, 21*, 19-41.

Radford, L., Demers, S. et Miranda, I. (2009). *Processus d'abstraction en mathématiques : repères pratiques et conceptuels*. Centre franco-ontarien de ressources pédagogiques.

Radford, L. et Grenier, M. (1996). Entre les choses, les symboles et les idées… une séquence d'enseignement d'introduction à l'algèbre. *Revue des sciences de l'éducation, 22*(2), 253-276.

Reymond, M. (1943). Études critiques : l'abstraction et la nécessité selon M. Laporte. *Revue de théologie et de philosophie, 31*(128), 174-181.

Roiné, C. (2010). Caractérisation des difficultés en mathématiques des élèves de SEGPA. *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation, 4*(52), 73-87.

Roiné, C. (2015). La fabrication de l'élève en difficulté. Postulats et méthodes pour l'analyse d'une catégorisation dans le champ scolaire. *Éducation et socialisation, Les cahiers du CERFEE, 37*. https://doi.org/10.4000/edso.1138

Sarrazy, B. (2006). Fondements épistémologiques et ancrages théoriques d'une approche anthropo-didactique des phénomènes d'enseignement des mathématiques. Dans A.-C. Mathé et É. Mounier (dir.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (p. 79-99). IREM de Paris.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36.

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign? – An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 133-162.

Sylvand, B. (1999). La querelle des idées abstraites entre Locke et Leibniz et ses prolongements dans le débat contemporain. [Mémoire de maitrise inédit]. Université Sorbonne Paris IV.

Tardif, J. (1992). *Pour un enseignement stratégique. L'apport de la psychologie cognitive.* Éditions Logiques.

Vergnaud, G. (1988). Question de représentation et formulation dans la résolution de problèmes mathématiques. *Annales de didactique et des sciences cognitives, 1*, 33-55.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques, 10* (2.3), 133-170.

Vygotski, L. S. (1934/2012). *Pensée et langage* (F. Sève, trad.) (4e éd.). La Dispute.

Évolution des routines lors de la transition secondaire postsecondaire : cas de l'enseignement des fonctions trigonométriques et de leurs réciproques

Faten KHALLOUFI-MOUHA
Université de Carthage. Tunisie.
faten.khalloufi@fsb.u-carthage.tn

Résumé : En adoptant l'approche commognitive qui conceptualise l'apprentissage des mathématiques comme une modification dans l'activité discursive, nous avons utilisé le concept commognitif de routine comme unité d'analyse de l'apprentissage des fonctions trigonométriques et de leurs réciproques lors de la transition secondaire/postsecondaire. La conceptualisation des textes mathématiques proposés dans les manuels scolaires au secondaire et des notes de cours des enseignants au postsecondaire comme un discours nous a amenés à introduire le concept de routines visées comme unité d'analyse des manuels et des notes de cours utilisés pour l'enseignement des fonctions trigonométriques et de leurs réciproques. L'étude des routines visées par l'enseignement lors de cette transition permet d'identifier une continuité globale apparente, mais également des discontinuités ponctuelles associées aux routines relatives à l'étude des propriétés des fonctions trigonométriques et de leurs réciproques. L'étude des routines exécutées par les étudiants en réponse au questionnaire proposé fait apparaitre des difficultés importantes lorsque les tâches associées sont proposées dans un contexte différent de celui du secondaire.

Mots clés : fonctions trigonométriques, réciproques de fonctions trigonométriques, transition secondaire/postsecondaire, commognition, routines visées

Revue québécoise de didactique des mathématiques, 2021, *vol 3*, p. 82-112.
https://doi.org/10.71403/4x9bbh10

The evolution of routines in the secondary/postsecondary transition: The case of teaching trigonometric functions and their reciprocals

Abstract: Adopting the commognitive approach that conceptualizes mathematics learning as a change in discursive activity, we used the commognitive concept of routine as a unit of analysis of the learning of trigonometric functions and their reciprocals in the secondary/postsecondary transition. Conceptualizing the mathematical texts found in textbooks at the high school level and teachers' lecture notes at the post-secondary level as a discourse led us to introduce the concept of intended routines as a unit of analysis of textbooks and lecture notes used to teach trigonometric functions and their reciprocals. An examination of the intended routines during this transition brings to light an apparent overall continuity, but also occasional breaks associated with routines related to studying the properties of trigonometric functions and their reciprocals. Analysis of the routines performed by the students in response to the proposed questionnaire reveals significant difficulties when the associated tasks are proposed in a context different from the secondary (high school) context.

Keywords: trigonometric functions, reciprocals of trigonometric functions, secondary/postsecondary transition, commognition, intended routines.

Introduction

L'enseignement des mathématiques dans la transition secondaire/postsecondaire a suscité l'intérêt d'un nombre important de chercheurs dans le domaine de la didactique des mathématiques (Biehler et al., 2011; Corriveau, 2017; Gueudet, 2008; Gueudet et Vandebrouck, 2019; Nardi, 2008). Ces travaux ont abordé cette transition selon différentes approches et ils s'accordent sur l'existence d'une double rupture qui se traduit par une discontinuité dans les contenus ainsi qu'une discontinuité au point de vue didactique (des changements en lien avec les organisations didactiques, ainsi que des exigences et des méthodes d'enseignement). En se plaçant dans le cadre de l'approche commognitive (Sfard, 2008), nous avons choisi d'aborder la transition secondaire/postsecondaire à travers l'étude de l'évolution des routines visées par l'enseignement des mathématiques et d'identifier les difficultés des étudiants liées à cette évolution. Notre travail s'intéresse au cas des routines relatives aux fonctions trigonométriques et à leurs réciproques dans la transition entre le secondaire et la première année universitaire pour des étudiants en sciences de l'informatique.

En enseignement secondaire, les fonctions trigonométriques sont les premières fonctions périodiques et transcendantes que les élèves rencontrent. Ces fonctions qui se situent au carrefour de plusieurs cadres mathématiques (la géométrie, l'algèbre et l'analyse) sont connectées aux différents objets mathématiques appartenant à ces cadres (angle, arc, fonction, équation…) et mettent en relations différents registres sémiotiques et différents types de représentations (Khalloufi-Mouha, 2009, 2020; Khalloufi-Mouha et Smida, 2012). Dans nos travaux antérieurs (Khalloufi-Mouha, 2009, 2014, 2018; Khalloufi-Mouha et Smida, 2012), nous avons identifié l'importance des difficultés relatives à la construction d'une signification mathématique des fonctions trigonométriques qui soit cohérente avec les connaissances antérieures du cadre géométrique de la trigonométrie chez des élèves de 2e année de l'enseignement secondaire tunisien (16-17 ans). Nos analyses ont montré que l'enseignement proposé ne permet pas aux élèves de faire le lien entre la trigonométrie et les fonctions trigonométriques. Pour ce qui est de l'enseignement postsecondaire (universitaire), les fonctions trigonométriques et de leurs réciproques jouent un rôle important dans l'introduction et l'enseignement de l'Analyse. Cela apparait essentiellement dans leurs relations avec les intégrales, les séries numériques et les séries de Fourier qui sont considérées comme très importantes dans les études universitaires pour la plupart des disciplines scientifiques, notamment, la physique, l'architecture, la biologie, l'informatique et les différentes spécialités de l'ingénierie. Cependant, les travaux de recherches ont souligné que les étudiants continuent à rencontrer des difficultés importantes avec les fonctions trigonométriques et de leurs réciproques (Gueudet et Quéré, 2018; Mesa et Goldstein, 2017; Weber, 2005).

Dans son article, Weber (2005) a analysé l'apprentissage des fonctions trigonométriques pour deux groupes d'étudiants universitaires ayant suivi un enseignement selon deux approches différentes. L'enseignement au premier groupe a été donné par un professeur utilisant un cours magistral classique, tandis que le second groupe a reçu un enseignement selon un paradigme expérimental basé sur la notion de « procept[1] » de Gray et Tall (1994) et sur les théories cognitives qui conceptualisent l'apprentissage à travers les concepts de processus-objets. L'analyse d'entretiens menés auprès d'étudiants et d'un test papier-crayon ont mis en évidence que les étudiants ayant suivi le cours magistral ont développé une compréhension très limitée des fonctions trigonométriques. Leurs connaissances sont essentiellement de type procédural sans être liées à une signification mathématique. Cependant, les étudiants qui ont reçu un enseignement expérimental ont développé une compréhension plus approfondie (Weber, 2005). La plupart de ces étudiants ont réussi à utiliser leur compréhension des fonctions trigonométriques pour identifier et justifier leurs propriétés. Les

1 Un procept est un amalgame de trois composants : un objet mathématique, un processus qui produit l'objet mathématique et un symbole qui est utilisé pour représenter le processus ou l'objet. Cette notion a été introduite par Gray et Tall (1994) qui lui attribuent la définition suivante : « An elementary procept is the amalgam of three components: a process which produces a mathematical object, and a symbol which is used to represent either process or object. A procept consists of a collection of elementary procepts which have the same object » (p. 121).

étudiants interrogés ont pu opérationnaliser leurs connaissances sur le processus de calcul du sinus d'un réel pour justifier les propriétés de la fonction sinus. De plus, les réponses des étudiants interrogés ont indiqué qu'ils considéraient les expressions trigonométriques comme des procepts.

Mesa et Goldstein (2017) ont identifié l'existence de différentes significations relatives aux notions d'angles, de fonctions trigonométriques et de fonctions trigonométriques réciproques à travers l'étude des organisations proposées dans les manuels scolaires relatifs à l'ordre collégial (postsecondaire) pour l'enseignement de la trigonométrie. Ils supposent que cela pourra engendrer des difficultés chez les étudiants lors de la résolution de situations problèmes surtout que l'enseignement proposé dans ces manuels ne prend pas en charge les connexions nécessaires entre les cadres et les registres mis en jeu dans cet enseignement.

La problématique de l'articulation entre les différents cadres et registres lors de l'enseignement des fonctions trigonométriques a été également l'objet du travail de Gueudet et Quéré (2018). Leur étude a porté sur l'enseignement du thème de la trigonométrie dans les ressources en ligne proposées aux futurs ingénieurs (ingénierie électrique) en France, et cela en comparant l'utilisation de la trigonométrie en tant qu'outil, dans un cours d'ingénierie électrique, et le contenu des cours en ligne de mathématiques relatifs au chapitre de la trigonométrie, proposé aux futurs ingénieurs. Dans ce travail, les auteurs ont identifié l'écart entre les besoins relatifs aux notions de trigonométrie dans le cours d'électricité et les cours de mathématiques en lignes destinés à des étudiants de première année du cycle des ingénieurs. L'étude a porté essentiellement sur les connexions entre les cadres, les registres et les concepts mis en jeu. Les résultats ont fait apparaitre que bien que les cours analysés proposent certaines connexions entre les différents cadres et registres utilisés, leur connectivité n'est pas assez développée pour répondre aux exigences des cours pour des futurs ingénieurs. Cette connectivité se limite à une connexion entre les concepts et les registres sémiotiques mobilisés dans le premier cours et à une connexion entre le domaine de la physique et le domaine mathématique dans le second cours.

Les résultats des travaux précédents attestent que les difficultés des étudiants relèvent essentiellement d'un manque en ce qui a trait à l'habilité à faire des connexions entre les différents cadres, registres et concepts mis en jeu (Gueudet et Quéré, 2018), afin d'identifier les plus pertinents lors de la résolution d'une situation problème (Mesa et Goldstein, 2017). Les connaissances des étudiants restent ainsi à un niveau procédural (Weber, 2005) ne permettant pas une appréhension plus profonde articulant les cadres, registres et concepts relatifs aux fonctions trigonométriques.

Dans notre travail, en nous appuyant sur les résultats de ces travaux ayant abordé les difficultés en enseignement universitaire et sur nos travaux antérieurs sur l'introduction des fonctions trigonométriques en enseignement secondaire (Khalloufi-Mouha, 2014, 2018, 2020; Khalloufi-Mouha et Smida, 2012), nous avons choisi d'explorer, dans le contexte tunisien, en utilisant une approche discursive, l'enseignement des fonctions trigonométriques dans la transition secondaire/postsecondaire en Tunisie. Notre étude poursuit deux objectifs. Il s'agit d'abord d'étudier les changements quant aux exigences et aux attentes auprès des étudiants lors de leur entrée en première année de l'enseignement postsecondaire. Ensuite, le second but consiste à explorer si les étudiants entamant des études en sciences de l'informatique SI1, arrivent à identifier cette évolution et à individualiser[2] les nouvelles routines caractérisant la transition, et à les utiliser lors de la résolution des problèmes. Pour cette filière SI1, les fonctions trigonométriques constituent un outil mathématique très important, utilisé dans plusieurs modules de spécialité (l'étude des fibres optiques, la compression de fichiers numériques audios, vidéos, images…) Ces fonctions sont étudiées ainsi que leurs réciproques au cours du premier semestre où le module des mathématiques a pour objectif général de rappeler des connaissances déjà étudiées au secondaire et d'initier les étudiants au module d'Analyse qui commence au deuxième semestre.

Nous avons choisi d'aborder cette étude en adoptant l'approche commognitive qui conceptualise l'apprentissage des mathématiques comme un développement du discours (Sfard, 2008). L'apport de cette approche consiste essentiellement à fournir les outils théoriques et méthodologiques permettant de caractériser le discours relatif aux fonctions trigonométriques dans lequel les étudiants sont susceptibles de s'engager lors de la transition secondaire/postsecondaire. Le travail comporte deux parties. D'abord, nous commençons par une analyse de l'évolution des exigences et des attentes auprès des étudiants relatives à l'enseignement des fonctions trigonométriques à travers l'étude des routines visées par l'enseignement proposé dans les manuels de 3ᵉ (17-18 ans) et de 4ᵉ année de l'enseignement secondaire (18-19 ans). Pour l'enseignement universitaire, l'identification des routines visées est réalisée à partir de l'analyse des notes du cours d'Analyse ainsi que des séries de travaux dirigés (séries d'exercices associés aux différents chapitres étudiés) élaborés par le professeur responsable du module d'Analyse du premier semestre pour des étudiants de première année

2 « To individualize a discourse means to become able to communicate according to its rules, and to do so not only in conversations with other people and possibly with their help, but also while "talking" to oneself and solving one's own problems. Thus, to say that a person individualized mathematical discourse means that this discourse became a discourse of her thinking » (Sfard, 2008, p. 81).

universitaire en sciences de l'informatique à la Faculté des sciences de Bizerte. Dans la deuxième partie, et en nous appuyant sur les résultats identifiés dans la section précédente, nous avons élaboré un questionnaire afin de vérifier si les routines précédemment identifiées sont bien individualisées par les étudiants et si elles émergent à travers leurs réponses aux tâches proposées. Le travail est guidé par les deux questions de recherches suivantes :

Q1. Quels sont les changements du point de vue des exigences et des attentes auprès des étudiants en ce qui a trait aux fonctions trigonométriques et de leurs réciproques lors de la transition secondaire/postsecondaire, et comment ces changements s'expriment-ils dans les routines visées par les concepteurs des manuels au secondaire, et par l'enseignant conférencier au postsecondaire?

Q2. Quelles sont les caractéristiques des routines identifiées dans le travail des étudiants de la première année universitaire lors de la résolution de problèmes relatifs aux fonctions trigonométriques et de leurs réciproques?

1. Cadre théorique

La théorie commognitive (Sfard, 2008) est une approche discursive qui a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs dans le domaine de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques. Ce cadre, basé sur une perspective vygotskienne qui conceptualise l'apprentissage des mathématiques dans sa dimension socioculturelle, définit les mathématiques comme une activité de communication (Sfard, 2012) et l'apprentissage des mathématiques comme un développement du discours, comme une modification dans l'activité discursive. Selon cette approche, le discours mathématique sur les fonctions trigonométriques émerge lorsque les apprenants sont engagés dans une communication avec les autres ou avec eux-mêmes à propos de ces fonctions. Comme tout discours mathématique partagé par une certaine communauté, le discours mathématique scolaire sur les fonctions trigonométriques se distingue par quatre caractéristiques qui peuvent être classées en deux catégories selon leurs fonctionnements dans la communication. La première catégorie comporte les outils de la communication qui sont le vocabulaire (première caractéristique) et les médiateurs visuels (deuxième caractéristique) utilisés pour parler des fonctions trigonométriques, où le vocabulaire est défini par Sfard (2021) comme « un ensemble de signes de base appelés mots et de syntaxe, l'ensemble des règles permettant de combiner les éléments du vocabulaire en énoncés légitimes (ou significatifs) » (p. 46, traduction libre[3]). Les médiateurs visuels sont les supports visuels qui soutiennent la

3 A set of basic signs called words and of syntax, the set of rules for combining elements of vocabulary into legitimate (or meaningful) utterances (Sfard, 2021, p. 46).

communication comme les mots écrits, les symboles, les graphes. Pour l'enseignement des fonctions trigonométriques, nous distinguons les médiateurs visuels graphiques (le cercle trigonométrique et les représentations graphiques des fonctions trigonométriques et de leurs réciproques) et les médiateurs visuels symboliques tels que les expressions *sin(x), cos(x), tan(x), arccos(x), arcsin(x)* ou *arctan(x)*. La deuxième catégorie de caractéristiques comporte les produits de la communication à propos des fonctions trigonométriques et de leurs réciproques. Il s'agit des récits (troisième caractéristique) approuvés et des routines. Les récits approuvés comprennent les textes écrits ou oraux décrivant les objets et les processus ainsi que les relations entre eux et qui sont soumis à la validation, à la modification ou au rejet selon des règles définies par la communauté. Nous citons comme exemples les définitions, théorèmes et preuves. La quatrième caractéristique est l'ensemble des routines (*metarules*) qui comprennent les règles et les modèles d'actions régulièrement utilisés et bien définis par la communauté pour le perfectionnement du discours et l'élaboration de récits approuvés. Sfard (2008) élabore trois types de routines : les actions (*deeds*), les explorations (*explorations*) et les rituels (*rituals*) (p. 223-245).

Dans les travaux récents (Lavie et al., 2019), le concept de routine gagne en opérationnalité dans sa nouvelle définition et devient une unité d'analyse pour étudier l'apprentissage, non seulement des individus, mais aussi l'apprentissage collectif. Le concept de routine est « une unité d'analyse qui permet d'étudier l'apprentissage non seulement des individus, mais aussi de collectifs, et donc d'étudier les développements ontogénétiques et historiques. » (Lavie et al., 2019, p. 164, traduction libre[4]). Lavie et al. (2019) définissent la routine comme étant le couple tâche-procédure. La tâche indique ce qui doit être réalisé en exécutant la routine (ex. produire un récit approuvable sur les fonctions trigonométriques). La procédure est une prescription sur la façon dont cela pourrait être fait. Dans cette perspective, ces auteures conceptualisent l'apprentissage comme un processus progressif de routinisation des actions des apprenants et l'étude de l'apprentissage revient à l'étude du processus d'émergence et de développement des routines. Cela donne au concept de routine un aspect dynamique, puisqu'une routine n'est pas indépendante du temps, elle est plutôt introduite dans le contexte de performances spécifiques, permettant de faire le lien entre la façon d'agir de l'apprenant et ses expériences et ses connaissances antérieures. Ainsi, différentes personnes peuvent agir de façons distinctes dans une même situation et, par

4 A unit of analysis for investigating learning not just of individuals, but also of collectives, and thus for studying both ontogenetic and historical developments (Lavie et al., 2019, p. 164).

conséquent, des routines différentes peuvent être associées à une même tâche. Lavie et al. (2019) expliquent que

> la routine ne sera plus une construction abstraite, mais elle sera liée à une situation donnée et à une personne donnée. Nous dirons désormais qu'une routine exécutée dans une situation donnée par une personne donnée est la tâche, telle qu'elle est vue par la personne qui l'exécute, ainsi que la procédure qu'elle a mise en œuvre pour réaliser la tâche (p. 162, traduction libre[5]).

Cela donne ainsi un outil analytique permettant d'étudier l'apprentissage d'un objet mathématique par une personne à travers l'étude des routines exécutées lors d'une situation de communication ou une situation de résolution de problème. Les quatre caractéristiques du discours ne sont pas indépendantes. En fait, le discours relatif à un objet mathématique (les fonctions trigonométriques et de leurs réciproques dans le cas de notre étude) est lié à l'élaboration d'un ensemble de récits à propos de cet objet mathématique. L'élaboration de ces récits nécessite l'utilisation du vocabulaire associé ainsi que l'ensemble de médiateurs visuels permettant d'éclairer et d'appuyer ces récits. Les routines constituent les règles qui régissent l'utilisation du vocabulaire et des médiateurs visuels pour l'élaboration et la validation des récits.

Le cadre de l'approche commognitive est généralement employé dans le cas de l'analyse d'une communication orale comme le cas d'une discussion ou d'un interview. Très peu de travaux ont utilisé cette approche pour une analyse des textes écrits. Alshwaikh et Morgan (2013, 2018), Alshwaikh (2016) et Park (2016) ont utilisé l'approche commognitive pour l'analyse des manuels scolaires. Alors que Morgan et Sfard (2016) ainsi que Thoma et Nardi (2018) l'ont utilisée pour l'analyse des énoncés des examens. En se plaçant dans la lignée de ces travaux qui conceptualisent les textes mathématiques écrits comme un discours, notre travail se distingue par une analyse de l'évolution des routines à travers l'introduction d'un type particulier que nous avons désigné par « routines visées », et ce, dans l'objectif d'étudier les changements quant aux exigences et aux attentes auprès des étudiants autour des fonctions trigonométriques et de leurs réciproques, lors de la transition secondaire/postsecondaire. Nous avons désigné par « routines visées » l'ensemble des routines proposées dans un objectif d'enseignement spécifique. En se référant aux travaux de Lavie et al. (2019), les routines visées sont définies comme étant le couple tâche-procédure. Cependant, les routines visées sont évoquées à partir de leurs tâches, sans référence à une *task situation* particulière ou

5 Routine will no longer be an abstract free-floating construct, but it will be tied to a particular task situation and to a particular person. We will now say that a routine performed in a given task situation by a given person is the task, as seen by the performer, together with the procedure she executed to perform the task (Lavie et al., 2019, p. 162).

à une personne spécifique. Ce sont les routines telles qu'elles sont susceptibles d'être interprétées et réalisées par un expert[6] (enseignant) en utilisant les connaissances relatives au niveau scolaire en question. Les procédures sont décrites soit à l'aide d'algorithmes qui déterminent la façon d'agir, par exemple l'addition ou la multiplication de deux entiers, soit à partir des règles qui guident l'action de l'apprenant, par exemple les règles utilisées pour prouver des théorèmes ou définir de nouveaux termes mathématiques (Morgan et Sfard, 2016). Les routines visées englobent les routines visées relatives au niveau objet ainsi que celles relatives au niveau méta. Les routines visées relatives au niveau objet sont celles qui marquent les règles d'utilisation des objets mathématiques en jeu. Dans notre travail, il s'agit des règles d'utilisation des fonctions trigonométriques et de leurs réciproques dans un discours mathématique scolaire. Les routines visées du niveau méta comportent les règles relatives à l'établissement d'un résultat, les règles de justification et de preuve ainsi que les règles de généralisation. Ainsi, le concept de routines visées est susceptible d'être l'unité d'analyse de tout texte mathématique destiné à l'enseignement et à l'apprentissage des mathématiques (manuels, notes de cours, séries d'exercices, énoncés des examens, etc.). Dans ce travail, nous nous sommes limités aux routines visées relatives au niveau objet et aux règles d'utilisation des fonctions trigonométriques et de leurs réciproques lors de la transition secondaire/postsecondaire.

Nous admettons, dans notre travail, l'hypothèse que les exigences et les attentes de l'enseignement se traduisent dans les textes des manuels ainsi que dans les textes de cours proposés pour l'apprentissage des notions en jeu, à travers la mise en place de routines visées, dans lesquelles les apprenants sont amenés à s'engager lors de la résolution de problèmes. L'individualisation des routines visées par les apprenants est identifiée lorsqu'ils deviennent capables de les exécuter lors de l'activité mathématique[7] pour l'élaboration des récits approuvés. Ainsi, appréhender nos questions de recherche en termes de routines visées nous amène à identifier les changements en matière des routines relatives à l'enseignement des fonctions trigonométriques que les auteurs des manuels, au secondaire, et que l'enseignant universitaire, en première année universitaire, cherchent à instaurer.

2. Analyse de l'évolution des routines visées

Dans ce qui suit, nous présentons la méthodologie utilisée pour identifier des routines visées, l'analyse de manuels scolaires ainsi que l'analyse des notes de cours et de la série de TD proposés aux étudiants.

---

6 Il s'agit de notre interprétation en tant qu'enseignante chercheuse des tâches proposées.

7 Selon l'approche commognitive, l'activité mathématique consiste à produire des récits susceptibles d'être approuvés en exécutant un ensemble de routines appropriées.

2.1 Méthodologie de l'identification des routines visées

Dans l'enseignement tunisien, les fonctions trigonométriques commencent à être un objet d'enseignement dès la 3e année (17-18 ans). Pour cela, nous avons choisi d'analyser les manuels de 3e (17-18 ans) et 4e année (18-19 ans, la dernière année de l'enseignement secondaire) des sections scientifiques (Mathématiques et sciences expérimentales). Nous rappelons que dans le contexte tunisien, à chaque niveau scolaire, depuis la première année primaire jusqu'à la dernière année de l'enseignement secondaire, correspond un manuel officiel unique, utilisé comme une ressource pour les enseignants et comme un outil de travail pour les élèves. L'analyse du manuel de 3e année porte sur les parties « cours » et « exercices et problèmes » du 8e chapitre « Fonctions trigonométriques ». Pour le manuel de 4e année (tome 1), nous avons examiné les chapitres où les fonctions trigonométriques sont utilisées comme un objet mathématique déjà étudié et dont les routines associées sont susceptibles d'être exécutées par les élèves pour l'apprentissage de nouveaux objets mathématiques. Pour ce qui est de l'enseignement supérieur, nous avons analysé les notes de cours de l'enseignant conférencier, responsable du module de mathématique du premier semestre ainsi que les séries d'exercices associées.

Pour l'identification et l'analyse des routines visées pour l'apprentissage des fonctions trigonométriques, nous identifions les tâches proposées et les procédures susceptibles d'être utilisées pour accomplir ces tâches. L'analyse des routines est guidée par les questions suivantes :

Tableau 1. Méthodologie de l'identification et de l'analyse des routines visées

Composantes des routines visées	**Questions guidant l'analyse**
Catégorisation des tâches relatives aux fonctions trigonométriques et de leurs réciproques, dans lesquelles les élèves ou les étudiants sont amenés à s'engager et qui sont proposées dans les manuels et dans les notes de cours et les séries d'exercices proposées aux étudiants de 1re année, sciences de l'informatique.	Quels sont les domaines mathématiques mis en jeu? Quelles sont les différentes réalisations[8] des fonctions trigonométriques et de leurs réciproques? Quels sont les médiateurs visuels évoqués médiateurs visuels graphiques et/ou symboliques? Quels sont les objets et les concepts mathématiques mis en relation avec les fonctions trigonométriques?
Les caractéristiques des procédures routinières que les élèves ou les étudiants doivent être capables d'exécuter pour accomplir ces types de tâches.	Les procédures sont-elles algorithmiques ou heuristiques? Quel est leur degré de complexit? Les procédures sont-elles implicites (à identifier par les élèves) ou explicites dans l'énoncé de l'activité proposée?

8 Sfard (2008) définit les réalisations comme « perceptually accessible objects that may be operated upon in the attempt to produce or substantiate narratives" about a signifier (p. 154).

2.2 Analyse des manuels scolaires

L'analyse des chapitres relatifs à l'introduction et à l'étude des fonctions trigonométriques dans les manuels de 3e et de 4e année fait apparaitre l'existence de plusieurs réalisations de cet objet, qui font appel à différents types de médiateurs visuels (symbolique, tableau, graphique…). Les activités proposées utilisent ces différentes réalisations afin d'étudier les propriétés des fonctions trigonométriques et leurs relations avec les différents objets mathématiques. L'analyse en termes de routines visées a permis de les classer en trois catégories selon la nature de la propriété des fonctions trigonométriques : la première catégorie est celle mobilisant l'une des propriétés de localités introduites par Vandebrouck (2011) : globale, locale ou ponctuelle des fonctions trigonométriques. La deuxième catégorie est relative aux routines visées articulant entre elles deux de ces propriétés et la troisième catégorie est relative à celles articulant les trois aspects, global, local et ponctuel.

- Catégorie 1 : cette catégorie comporte les routines visées associées à l'un des aspects ponctuel, local ou global des fonctions trigonométriques et de leurs réciproques. *Les routines ponctuelles* sont les routines essentiellement associées à des tâches de calcul des images de certains réels par une fonction trigonométrique ou celles de résolution algébrique ou graphique des équations trigonométriques où le travail est localisé en des points d'intersection. *Les routines locales* sont les routines visées faisant appel aux propriétés de voisinage (Montoya Delgadillo et al., 2018). Elles émergent dans les activités de l'étude de la continuité et de la dérivabilité, en un point donné, des fonctions trigonométriques simples ou composées avec des fonctions algébriques ou transcendantes. Selon les procédures de calcul des limites, on distingue deux sous-routines. L'une émerge lorsqu'il s'agit d'une application directe d'une limite usuelle et la seconde, lorsqu'il s'agit de procéder à une modification de l'expression de la fonction afin de faire apparaitre une limite usuelle à travers des minorations, majorations et encadrement avec des fonctions usuelles (théorèmes de comparaison). Le troisième type, désigné par *routines globales*, comporte les routines associées à la détermination de l'ensemble des définitions, l'étude de la continuité et de la dérivabilité sur un intervalle ainsi que l'étude des variations. Ces études, vu la propriété de périodicité des fonctions trigonométriques, sont généralement réduites à un intervalle, déterminé à partir de l'étude de la parité et la périodicité de ces fonctions. L'analyse des différents problèmes proposés au secondaire montre que, en général, l'intervalle d'étude est recommandé dans l'énoncé et sa détermination n'est pas à la charge des élèves, notamment en ce qui concerne les tâches de l'étude de l'existence d'une fonction réciproque où la procédure suggérée consiste à appliquer le théorème de la fonction réciproque dans un intervalle imposé par l'énoncé (figure 1).

- Catégorie 2 : les routines visées appartenant à cette catégorie sont essentiellement associées à la réalisation et à l'interprétation des médiateurs visuels graphiques relatifs aux fonctions trigonométriques qui articulent entre elles des routines ponctuelles (associées à la construction des points) et des routines globales (associées à la forme de la courbe). Il y a également les routines relatives aux activités de détermination et de construction des tangentes ou des asymptotes qui articulent le global et le local.
- Catégorie 3 : c'est la catégorie des routines visées qui articulent les trois aspects, ponctuel, local et global. Elle comporte, à titre d'exemple, les activités de réalisation de tableau de variation des fonctions trigonométriques simples ou composées avec d'autres fonctions.

L'analyse des manuels et des notes de cours, selon cette catégorisation, est synthétisée dans les tableaux suivants relatifs à la 3e année, à la 4e année et à la 1re année universitaire. Dans ces tableaux, nous avons déterminé le nombre et le pourcentage des activités proposées nécessitant l'engagement des apprenants avec les routines visées relatives à chacune de ces catégories et qui font intervenir les fonctions trigonométriques et/ou leurs réciproques. Nous avons également identifié les principales routines visées en explicitant à chaque fois la tâche concernée.

2.2.1 Analyse du manuel de 3e année

L'analyse porte sur le chapitre 8 intitulé Fonctions trigonométriques (46 activités).

Tableau 2. Analyse des routines visées identifiées dans le manuel de 3e année

Catégories	Nombres d'activités	Pourcentage	Principales routines visées identifiées
Catégorie 1	4	8,7 %	Approximation du sinus et du cosinus au voisinage de 0 (RL). Étude de la dérivabilité et détermination de la fonction dérivée en utilisant les dérivées des fonctions usuelles et la dérivée de la composée de fonctions (RG).
Catégorie 2	6	13,04 %	Étude de la dérivabilité et détermination de la fonction dérivée (RL+RG). Calcul de la limite d'une fonction trigonométrique en utilisant le nombre dérivé (RP+RL). Détermination graphique des extrema (RL+RG).
Catégorie 3	36	78,26 %	Étude des variations et représentation graphique d'une fonction trigonométrique.

Catégories	Nombres d'activités	Pourcentage	Principales routines visées identifiées
			Calcul de limites en utilisant les relations trigonométriques, les propriétés des fonctions trigonométriques et les limites usuelles. Calcul de l'aire maximale d'une surface définie en utilisant une fonction trigonométrique définie sur un intervalle donné. Résolution graphique d'une équation ou inéquation trigonométrique à travers l'étude et la représentation graphique d'une fonction trigonométrique. Détermination et caractérisation de la tangente à la courbe d'une fonction trigonométrique en un point donné.

2.2.2 Analyse du manuel de 4e année

L'analyse porte sur les neuf chapitres du tome 1. Dans chaque chapitre, nous avons identifié les routines visées à travers l'étude des activités proposées dans les parties « cours » et les parties « exercices et problèmes » qui font appel aux fonctions trigonométriques.

Tableau 3. Analyse des routines visées identifiées dans le manuel de 4e année

Catégories	Nombres d'activités	Pourcentage	Principales routines visées identifiées
Catégorie 1	20	13,07 %	Étude de la continuité d'une fonction en un point ou sur un intervalle (RL ou RG). Calcul d'une limite simple (calcul direct en utilisant les fonctions usuelles ou une limite usuelle) (RL). Calcul du nombre dérivé d'une fonction trigonométrique (RL). Étude de la dérivabilité sur un intervalle (RG). Détermination de la fonction dérivée d'une fonction et/ou calcul des dérivées successives (RG).
Catégorie 2	38	24,83 %	Calcul d'une limite faisant appel à des propriétés des fonctions trigonométriques ou à des procédures algébriques pour faire disparaitre des formes indéterminées (RL+RG). Étude de la dérivabilité et détermination de la fonction dérivée de la composée de deux fonctions dans des activités comportant des questions intermédiaires guidant le travail des élèves. Les routines locales comportent la dérivabilité en un point et les routines globales comportent les sous-

Catégories	Nombres d'activités	Pourcentage	Principales routines visées identifiées
			tâches de l'étude de la dérivabilité et la détermination de la fonction dérivée (RL+RG). Étude de la convergence d'une suite en utilisant les limites usuelles et les propriétés des fonctions trigonométriques (périodicité et encadrement) (RL+RG). Calcul de l'intégrale d'une fonction donnée en utilisant une primitive ou à l'aide d'une intégration par partie (RP+RG). Établir une inégalité entre deux intégrales en utilisant la linéarité des intégrales.
Catégorie 3	95	62,1 %	Calcul de limite de fonction en utilisant les théorèmes de comparaison avec des fonctions usuelles. Étude de la dérivabilité et de la variation de fonctions (tableau de variation). Étude et représentation graphique de fonctions. Résolution algébrique et graphique d'équations trigonométriques nécessitant l'étude et la représentation de fonction. Encadrement d'une fonction en utilisant le théorème des accroissements finis. Étude de la convergence d'une suite définie par une relation de récurrence faisant intervenir une fonction trigonométrique. Établir l'existence d'une fonction réciproque et étude de ses propriétés et de sa représentation graphique. Étude de la continuité et de la dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale. Étude et représentation graphique d'une fonction définie par une intégrale Calcul de l'aire d'une surface déterminée par la courbe d'une fonction trigonométrique et des droites. Étude de la convergence d'une suite définie par une intégrale comportant une fonction trigonométrique nécessitant des sous-tâches à travers des questions intermédiaires. Calcul d'une intégrale nécessitant l'utilisation d'autres intégrales et des procédures de calcul intermédiaires. Résolution d'équations différentielles de la forme y} + {ω} ^ {2} y= où $\omega \in IR$.

À travers nos analyses des routines visées identifiées dans les manuels de 3e et de 4e année, nous avons noté que la plupart de ces routines visées relèvent de la troisième catégorie. Ces routines sont associées à 78,26 % de l'ensemble des activités proposées dans le manuel de 3e année et à 62,1 % des activités proposées dans le manuel de 4e année. Dans ces activités, les tâches relatives aux routines visées sont subdivisées en des sous-tâches à travers des questions intermédiaires qui guident entièrement le travail des élèves en indiquant la procédure visée. Cela permet de fournir des modèles unifiés des routines visées dans toutes les classes du pays. Nous avons également noté que les routines relatives à la parité et à la périodicité ne font pas l'objet d'une grande quantité de travail en ce qui a trait aux exercices proposés. Dans ces exercices, l'énoncé impose l'intervalle d'étude de la fonction trigonométrique donnée. Nous illustrons nos propos par l'exercice suivant, extrait du manuel de 4e année (République tunisienne, 2019).

26 **A/ Soit la fonction f définie sur $[0, 1]$ par**

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

1. a. Montrer que f réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$.

On notera f^{-1}, la fonction réciproque de f.

b. Calculer $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. a. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0, 1[$.

b. Calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2}\right)$.

c. Montrer que pour tout x de $[0, 1[$,

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}.$$

3. Tracer dans un repère orthonormé C_f et $C_{f^{-1}}$.

Figure 1. Exercice 26 (République tunisienne, 2019, p. 93)

L'exercice est extrait de la partie « Exercices et problèmes » du chapitre « Fonctions réciproques ». L'objectif de l'exercice est la définition, l'étude de la dérivabilité et la représentation graphique de la fonction réciproque de *f*. Les questions 1.a, 2.a et 3 nécessitent l'exécution des routines globales de détermination du domaine de continuité et de dérivabilité. L'énoncé fait également apparaitre une importante utilisation des routines ponctuelles relatives à la détermination de l'image d'un réel par la fonction réciproque et par sa dérivée. L'exécution de cette routine visée nécessite l'application de la relation entre une fonction et sa réciproque ainsi que l'utilisation des angles remarquables pour la résolution d'équations trigonométriques simples. Ces routines ponctuelles visent une justification de l'existence de la fonction réciproque de *f* qui ne peut pas être explicitée à travers une expression spécifique comme dans le cas des fonctions algébriques précédemment étudiées. De même, la représentation graphique de cette fonction, qui est une autre réalisation de la fonction réciproque, vise également la justification de son existence. Nous considérons que, à ce point de vue, les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques restent au niveau procédural et sont approchées à travers un algorithme qui se caractérise par l'application directe du théorème de la fonction réciproque ainsi que par la relation entre une fonction et sa réciproque. Dans l'énoncé de cet exercice, nous avons également noté que le domaine de définition est imposé et que l'intervalle image par f et le domaine de dérivabilité de sa réciproque sont donnés. La tâche de l'élève revient à justifier ces intervalles à travers l'application du théorème de cours. Les routines visées dans cet exercice sont explicitées par l'énoncé et l'élève se trouve guidé à travers les questions intermédiaires qui visent l'exécution de routines précises.

2.3 Analyse des notes de cours et de la série de TD proposés aux étudiants

Le module de mathématiques du premier semestre des sciences de l'informatique a pour objectif d'introduire et de reprendre des notions de base de l'Analyse. Les fonctions trigonométriques sont revisitées dans ce module dans le chapitre « Fonctions numériques d'une variable réelle ». Ce chapitre consiste d'abord à reprendre succinctement des résultats obtenus durant les deux dernières années du secondaire sur les outils nécessaires pour l'étude de fonctions numériques et de leurs représentations graphiques. Il reprend également des éléments de base sur le calcul des limites, l'étude de la continuité, la dérivabilité, la parité, les éléments de symétrie et le théorème des valeurs intermédiaires. Par la suite, un passage à l'étude des propriétés de la bijectivité d'une fonction est présenté de même que les conséquences qui en découlent sur les représentations graphiques, l'explicitation de la fonction réciproque et de sa dérivée. En fin de chapitre sont introduites les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques et des fonctions hyperboliques, comme un nouveau champ d'application de tout ce qui précède. Les fonctions trigonométriques et leurs réciproques sont par la suite abordées lors de l'introduction des notions de développement limité, de la notion d'intégrales et du calcul des primitives.

L'analyse des notes de cours de l'enseignant et des séries d'exercices associées aux chapitres étudiés a permis d'identifier l'émergence de nouveaux types de routines visés, associées aux fonctions trigonométriques et leurs réciproques. Ces routines coexistent avec les routines visées déjà vues au secondaire et qui constituent, en termes commognitifs, l'espace de recherche précédent relatif à ces fonctions. Cependant, nous avons noté une augmentation remarquable du degré de complexité des fonctions proposées ainsi que l'émergence de nouvelles fonctions transcendantes (la composée de fonctions trigonométriques avec des fonctions algébriques ou transcendantes, la composée de fonctions trigonométriques avec des fonctions trigonométriques réciproques).

Tableau 4. Analyse des routines visées identifiées dans les notes de cours.

Catégories	Nombres d'activités	Pourcentage	Principales routines identifiées
Catégorie 1	5	9.26 %	Détermination de l'image de certaines valeurs remarquables par une fonction trigonométrique réciproque (RP). Détermination des expressions algébriques de la composée d'une fonction trigonométrique et d'une fonction trigonométrique réciproque (RG). Détermination du développement limité d'une fonction trigonométrique ou réciproque au voisinage d'un point x_0 (RL).
Catégorie 2	21	38.88 %	Calcul d'une limite faisant appel à des propriétés des fonctions trigonométriques ou à des procédures algébriques pour faire disparaitre les formes indéterminées (RL+RG). Étude du prolongement par continuité en un point d'une fonction trigonométrique (RL+RP). Étude de la continuité et de la dérivabilité, et détermination de la fonction dérivée de la composée de deux fonctions (RL+RG). Calcul de l'intégrale d'une fonction donnée en utilisant une primitive ou à l'aide d'une intégration par partie (RP+RG). Calcul de l'intégrale d'une fonction en utilisant un changement de variable (RP+RG). Démonstration de certaines expressions comportant des fonctions trigonométriques réciproques (RG+RP). Résolution d'une équation trigonométrique. Détermination de l'image de certaines valeurs remarquables par la composée d'une fonction trigonométrique et une fonction trigonométrique réciproque en faisant intervenir les propriétés de parité et/ou de périodicité des fonctions trigonométriques (RG+RP).
Catégorie 3	28	51.85 %	Calcul de limite de fonction en utilisant la règle de l'Hôpital ou les développements limités.

Catégories	Nombres d'activités	Pourcentage	Principales routines identifiées
			Détermination du développement limité d'une fonction trigonométrique ou trigonométrique réciproque à un ordre donné au voisinage d'un point donné.
			Détermination de l'équation de la tangente à la courbe d'une fonction trigonométrique composée en un point donné et la détermination de la position relative de la courbe avec cette tangente.
			Étude et représentation graphique de fonctions composées avec des fonctions trigonométriques.
			Établir l'existence d'une fonction réciproque et étude de ses propriétés et de sa représentation graphique.

L'analyse des notes de cours et des exercices proposés dans les séries de TD a permis de relever une importance du taux d'activités proposées qui visent l'exécution de routines relatives à la deuxième et à la troisième catégorie (38.88 % et 51.85 %). Cela atteste l'importance accordée à la coordination des perspectives de localité relatives aux fonctions trigonométriques et leurs réciproques afin de permettre aux étudiants de coordonner les différentes réalisations de ces objets mathématiques et, par la suite, permettre l'individualisation des routines visées par leur enseignement.

L'analyse des notes de cours et des séries de TD fait apparaitre la coexistence dans les routines visées de routines déjà abordées au secondaire avec de nouvelles routines introduites dans ce cours. En fait, les routines déjà vues comme celles relatives à l'étude des propriétés de fonctions trigonométriques et leurs réciproques sont associées à des activités avec des fonctions plus complexes que celles visées au secondaire. Les analyses font également apparaitre que les routines relatives à la représentation et à l'interprétation graphique apparaissent uniquement dans la partie cours lors de l'introduction et de la caractérisation des fonctions *arcsinus, arccosinus* et *arctangente.* Cela atteste une régression au postsecondaire de l'importance accordée aux médiateurs visuels graphiques par rapport à l'enseignement secondaire. L'analyse a également mis en évidence l'existence de routines visées relatives à l'étude des propriétés de fonctions composées reliant une fonction trigonométrique et sa réciproque ou entre une fonction trigonométrique et la réciproque d'une autre fonction trigonométrique. L'introduction de ces routines vise l'engagement des étudiants dans des activités permettant l'élaboration de récits approuvés en utilisant des propriétés de parité et de périodicité des fonctions trigonométriques. C'est le cas de nouvelles routines visées ponctuelles relatives à des activités de détermination des images de

certaines valeurs par ces fonctions composées. Nous donnons, à titre d'exemple, la détermination de $Arcsin[sin(\frac{15\pi}{7})]$ où il faut commencer par l'utilisation de la propriété de périodicité
$Arcsin[sin(\frac{15\pi}{7})] = Arcsin[sin(\frac{14\pi}{7} + \frac{\pi}{7})] = Arcsin[sin(2\pi + \frac{\pi}{7})] = Arcsin[sin(\frac{\pi}{7})] = \frac{\pi}{7}$.

La présence des routines visées déjà identifiées au secondaire, dans les notes de cours de l'enseignant et les séries d'exercices proposées faisant intervenir des fonctions trigonométriques et leurs réciproques au postsecondaire, laisse penser que les étudiants sont capables de les exécuter lors de la résolution des activités proposées. Pour cela, nous avons choisi de proposer un questionnaire afin d'étudier les caractéristiques des routines exécutées par les étudiants et d'identifier, d'une part, si les routines visées déjà vues au secondaire sont utilisées par les étudiants lors de la résolution des activités. Par ailleurs, nous avons cherché à repérer si les nouvelles routines visées par l'enseignement des fonctions trigonométriques et de leurs réciproques en première année ont été individualisées par les étudiants et peuvent émerger dans leurs réponses.

Nos analyses révèlent une fausse continuité en ce qui a trait aux routines visées par l'enseignement des fonctions trigonométriques et de leurs réciproques lors de la transition secondaire/postsecondaire. Cette fausse continuité se traduit par une continuité apparente du point de vue des tâches correspondant aux routines visées déjà abordées au secondaire avec une variation importante en lien avec les procédures susceptibles d'être utilisées pour accomplir les tâches à travers l'introduction de nouvelles procédures et de l'extension du domaine d'application (*applicability*). Cela constitue ainsi une évolution au regard des caractéristiques de ces routines[9]. Au secondaire, les procédures associées aux routines liées aux fonctions trigonométriques relèvent d'une application directe des théorèmes et définitions du cours et sont entièrement imposées aux élèves qui sont guidés dans leur travail par des questions intermédiaires. Cependant, en ce qui a trait à l'enseignement universitaire (postsecondaire), en dépit de la continuité apparente de certaines routines visées lors de la transition secondaire/postsecondaire, l'analyse fait apparaitre au moins une évolution sur deux plans : celui de l'applicabilité (Lavie et al., 2019) de ces routines et celui de leur flexibilité (*idem*). En fait, bien que dans certains cas la tâche correspondant à la routine visée soit la même que celle introduite au secondaire, par exemple le calcul de la limite d'une fonction ou l'étude et la représentation graphique d'une fonction, l'analyse montre une augmentation quant à la complexité des fonctions proposées. Cela constitue une extension du domaine d'application de ces routines à de nouveaux types de

9 Characteristics of routine: flexibility, bondedness, applicability, performer's agentivity, objectification of the discourse, and substantiability. (Lavie et al, 2019)

fonctions complexes, ce qui correspond, selon l'approche commognitive, à une modification du domaine d'applicabilité de ces routines visées. Par ailleurs, l'évolution quant à la flexibilité des routines visées se traduit par l'existence de nouvelles alternatives en ce qui a trait aux procédures permettant d'accomplir la tâche visée. Ces procédures coexistent avec les anciennes procédures. Cette évolution quant au domaine d'applicabilité et au degré de flexibilité des routines, en plus de l'émergence de nouvelles routines visées par l'enseignement postsecondaire, est susceptible d'engendrer certaines difficultés chez les étudiants quant à l'identification d'une procédure adaptée pour accomplir la tâche visée. Ces difficultés sont accentuées par l'absence d'une guidance par les questions intermédiaires et l'augmentation de l'autonomie dans le choix des procédures.

L'exemple de l'évolution de la routine de calcul de la limite d'une fonction trigonométrique composée avec d'autres fonctions illustre nos conclusions précédentes. En fait, la tâche associée à cette routine connaît une extension par l'introduction des fonctions trigonométriques réciproques ainsi que leur composition avec d'autres fonctions étudiées. Cette routine indique également une évolution sur le plan du degré de sa flexibilité qui se traduit par l'introduction de nouvelles procédures pour accomplir la tâche demandée comme le développement limité.

La routine de calcul intégral constitue également un deuxième exemple de la continuité apparente à travers l'utilisation des primitives et de l'intégration par parties. Cependant, la complexité des fonctions proposées dans les activités et l'introduction du changement de variable en tant que nouvelle procédure sont susceptibles d'augmenter considérablement les difficultés des étudiants.

3. Partie expérimentale

Dans la partie suivante, nous cherchons à apporter des éléments de réponse à notre deuxième question de recherche relative aux caractéristiques des routines exécutées par les étudiants lors de la résolution du questionnaire proposé. Cela permettra d'identifier l'individualisation des routines visées par l'enseignement des fonctions trigonométriques et leurs réciproques lors de la transition secondaire/postsecondaire.

3.1 Méthodologie

Le questionnaire a été proposé à deux groupes d'étudiants comme travail d'évaluation (non noté). Le questionnaire comporte quatre exercices nécessitant l'exécution de routines déjà introduites dans le cours et/ou lors des séances de TD. Il a été demandé aux étudiants de travailler d'une façon individuelle et de donner de l'importance à la justification des réponses. Les participants sont des étudiants de première année des sciences de l'informatique (SI1) de la Faculté des sciences de Bizerte, pendant le premier semestre de l'année universitaire 2018/2019. Le nombre de copies recueillies est de 60, et la durée de travail est d'une heure.

3.2 Analyse du questionnaire

Dans ce paragraphe, nous présentons l'analyse des deux premiers exercices du questionnaire en termes de routines exécutées par les étudiants lors de la résolution des activités proposées. Pour chacun des exercices, nous commençons par identifier la ou les routines visées susceptibles d'être exécutées par les étudiants selon ce qu'ils ont étudié lors des séances de cours et des séances de TD. Par la suite nous analysons les productions des étudiants afin d'identifier les caractéristiques des routines utilisées, l'individualisation des routines visées ainsi que les difficultés rencontrées par certains des étudiants dans le processus d'individualisation de ces routines.

A/ Calculer

$$Arcsin\left[\sin\left(\frac{15\pi}{7}\right)\right] \quad Arccos\left[\cos\left(\frac{19\pi}{5}\right)\right] \quad Arccos\left[\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \quad Arccos\left[\sin\left(\frac{14\pi}{3}\right)\right]$$

Figure 3. Énoncé du premier exercice proposé dans le questionnaire

3.2.1 Analyse de l'exercice 1 du questionnaire

Le premier exercice du questionnaire (figure 3) est l'un des exercices classiques qui sont proposés à la suite de l'introduction des réciproques des fonctions trigonométriques. Ce type d'exercices a été proposé avec d'autres valeurs dans la série de TD. L'objectif de la donnée de cet exercice est de vérifier l'individualisation de la routine visée introduite dans ce chapitre sur les fonctions numériques dans les notes de cours de l'enseignant conférencier. Il s'agit de la routine appartenant à la catégorie 2 que nous avons désignée dans le tableau 3 par la routine relative à la détermination de l'image de certaines valeurs remarquables par la composée d'une fonction trigonométrique et une fonction trigonométrique réciproque. L'exécution de cette routine nécessite la mise en œuvre des propriétés de périodicité et de parité des fonctions trigonométriques ainsi que la relation entre les fonctions trigonométriques et les fonctions trigonométriques réciproques, la tâche routinière étant la détermination de l'image d'un réel par la composée d'une fonction trigonométrique avec une fonction trigonométrique réciproque. Plusieurs procédures sont susceptibles d'être mises en œuvre selon les valeurs des réels et des fonctions proposées. Dans chacune des quatre questions proposées, l'une des procédures est visée pour l'exécution de cette routine. L'individualisation de cette routine par les étudiants se traduit par la possibilité de son exécution dans différents contextes et, par conséquent, par la possibilité d'identifier une procédure adéquate pour accomplir la tâche. Pour chacune des questions proposées, une procédure, notée P_i, est visée pour l'exécution de la routine. Ces procédures relèvent de notre interprétation en tant qu'enseignante-chercheuse de la tâche de la situation. Pour la première question, la procédure visée est relative à la périodicité de la fonction sinus. La réponse attendue est la suivante *Arcsin[sin(*$\frac{15\pi}{7}$*)]=Arcsin[sin(*$\frac{\pi}{7}+2\pi$)] $=\frac{\pi}{7}$. La procédure P_2 visée est relative à la périodicité et à la parité de la fonction cosinus. La réponse attendue est :

$$arccos\left(cos\left(\frac{19\pi}{5}\right)\right)=arccos\left(cos\left(\frac{20\pi}{5}-\frac{\pi}{5}\right)\right)=arccos\left(cos\left(\frac{-\pi}{5}\right)\right)=$$
$$arccos\left(cos\left(\frac{-\pi}{5}\right)\right)=\frac{\pi}{5}.$$

La troisième tâche fait appel à la procédure P_3 relative à la relation entre la fonction arccosinus et la fonction sinus, mais elle pourra se réduire à une identification de l'égalité entre le sinus et le cosinus de deux angles complémentaires $arccos$. Cette question est une étape intermédiaire qui prépare la question suivante ayant un degré de complexité plus important puisqu'elle nécessite l'exécution de la procédure notée P_4 associant la périodicité de la fonction sinus et l'égalité $sin(\pi-a)=sina$ avec la relation entre les fonctions arccosinus et sinus.

$$.Arccos(\sin\left(\frac{14\pi}{3}\right))=Arccos(\sin\left(\frac{2\pi}{3}+4\pi\right))=Arccos(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right))=$$
$$Arccos(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right))=Arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{\pi}{6}.$$

L'analyse des productions des étudiants a permis de repérer une variation en matière de l'individualisation par les étudiants de cette routine visée. Certains d'entre eux sont capables d'identifier la tâche visée et de l'exécuter en appliquant les mêmes procédures identifiées. Pour ces étudiants, la tâche interprétée à la quatrième question consiste en la détermination de la valeur de $arccos\left(sin\left(\frac{14\pi}{3}\right)\right)$ en commençant par la transformation du réel $\frac{14\pi}{3}$ afin d'être afin d'identifier une valeur entre 0 et π pour utiliser les relations entre sinus et cosinus et être ramenée au cas de $arccos\big(cos(x)\big)$ avec $x\in[0,\pi]$. Le travail de ces étudiants a consisté ainsi à appliquer une routine déjà introduite dans le cours et dans les exercices proposés. Cependant, pour d'autres étudiants, nous avons remarqué l'émergence d'autres routines[10] qui relèvent de leurs propres interprétations de la tâche de la situation.

10 La routine, ici, est associée à un individu particulier selon son interprétation personnelle de la situation de la tâche et en fonction de la procédure utilisée pour accomplir la tâche interprétée. « A routine performed in a given task situation by a given person is the task, as seen by the performer, together with the procedure she executed to perform the task » (Lavie et al., 2019, p. 162).

Tableau 5. Résultats de l’analyse des productions des étudiants pour l’exercice n 1

	Procédure P_1	**Procédure P_2**	**Procédure P_3**	**Procédure P_4**
Utilisée avec succès	42	25	16	12
	70 %	41,66 %	26,66 %	20 %
Utilisée, mais sans succès	6	16	0	26
	10 %	26,66 %		43,33 %
Réponse sans justification	7	10	13	5
	11,66 %	16,66 %	21,66 %	8,33 %
Autre Réponse	5	6	21	4
	8,33 %	10 %	35 %	6,66 %
Pas de réponse	0	3	10	13
		5 %	16,66 %	21,66 %

Bien que les routines relatives à la parité et à la périodicité ont déjà été étudiées au secondaire, l’analyse des productions indique que plusieurs étudiants trouvent des difficultés à les exécuter dans un nouveau contexte où interviennent les fonctions trigonométriques réciproques comme dans le cas de la quatrième question. Les résultats font apparaitre également l’importance du nombre d’étudiants qui donnent une réponse correcte sans aucune justification ou explicitation de la procédure adoptée, ce qui laisse penser qu’ils ont fait appel à l’utilisation d’une calculatrice bien que nous ayons demandé une justification à toutes les réponses. Cela s’explique par une interprétation différente de la tâche (*task situation*) qui amène ces étudiants à exécuter une routine différente, soit celle de la détermination des images de fonctions en utilisant la calculatrice. La modalité « autre procédure » est relative aux réponses où les étudiants ont étendu le domaine de validité à tout l’ensemble des nombres réels pour la propriété $f^{-1}[f(x)] = x$ sans prendre en considération le domaine de définition des fonctions Arcsinus et Arccosinus. Les réponses des étudiants ont permis de repérer deux étudiants ayant utilisé la relation $arccos\big(sin\,(x)\big) + arcsin\big(sin(x)\big) = \frac{\pi}{2}$ pour répondre à la 3^e^ et à la 4^e^ question. Ces deux étudiants ont interprété la tâche de la situation (*task situation)* comme une relation entre les fonctions Arccosinus et sinus. Ils ont ainsi cherché à la transformer en une relation entre les deux fonctions Arccosinus et sa réciproque. Pour ce faire, ils ont fait appel à la relation $arccos(x) + arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$ pour $x \in [-1,1]$. Cela atteste l’existence d’un domaine d’expérience précédent plus élaboré pour ces deux étudiants. Leurs productions font ressortir l’existence d’une individualisation des différentes routines associées aux fonctions trigonométriques réciproques. Cela se traduit par la réussite à connecter des routines relevant de *tasks situations* différentes, l'une associée à $f^{-1}[f(x)] = x$ et l'autre à $arccos(x) + arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$ en plus des routines liées à la périodicité et des relations entre les angles complémentaires.

3.2.2 Analyse de l'exercice 2 du questionnaire

On considère la fonction f définie sur $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = \sin(\pi x)$

1/ Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

2/ Montre que f réalise une bijection de $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$ dans un intervalle I que l'on déterminera.

3/ Exprimer la fonction réciproque f^{-1} en fonction de $Arcsin$.

4/ Déterminer le domaine de dérivabilité de f^{-1} et calculer $(f^{-1})'(x)$

Figure 4. Énoncé du deuxième exercice proposé dans le questionnaire.

L'exercice 2 du questionnaire proposé aux étudiants a pour objectif d'étudier, à travers les productions des étudiants, l'individualisation de la routine visée relative au théorème de la fonction réciproque ainsi que les sous-routines[11] associées (routines relatives à la continuité, dérivabilité, sens de variation, etc.). Cette routine visée a connu un développement important lors de la transition secondaire/postsecondaire. Cette évolution se manifeste essentiellement au dans l'introduction de la sous-routine relative à l'explicitation de la fonction trigonométrique réciproque et de ses différentes réalisations. Cette évolution marque un passage d'un discours sur les fonctions trigonométriques comme processus à un discours sur l'objet mathématique fonctions trigonométriques réciproques. Les sous-routines associées à la routine visée relative au théorème de la fonction réciproque sont les suivantes :

- R1 : routine associée à l'étude de la continuité et de la dérivabilité de la fonction f dans l'intervalle donné.
- R2 : routine relative à l'étude de la variation de la fonction dans l'intervalle donné.
- R3 : routine relative à l'élaboration du tableau de variation.
- R4 : routine relative à l'application du théorème de la fonction réciproque, explicitation de la fonction réciproque et détermination de ses propriétés.

11 Une sous-routine d'une routine visée est une routine dont l'exécution constitue une étape intermédiaire pour l'exécution de la routine visée. Nous proposons comme exemple la routine visée relative au théorème de la fonction réciproque qui nécessite l'étude de la continuité et de la monotonie. Les deux routines relatives à la continuité et à la variation des fonctions constituent deux sous-routines de la routine visée relative au théorème de la fonction réciproque.

Tableau 6. Résultats de l'analyse des productions des étudiants pour les questions 1 et 2 de l'exercice n° 1

	Routine R1	**Routine R2**	**Routine R3**	**Routine R4**
Exécutée avec succès	34 56,66 %	37 61,66 %	46 76,66 %	31 51,66 %
Exécutée mais sans succès	18 30 %	19 31,66 %	10 16,66 %	16 26,66 %
Pas de réponse	8 13,33 %	4 6,66 %	4 6,66 %	13 21,66 %

L'analyse des productions fait apparaitre que la plupart des étudiants utilisent des routines installées au secondaire, que nous avons identifiés dans notre analyse des manuels. Cependant, l'exécution de ces routines lors de la résolution des activités proposées est parfois associée à des difficultés en lien avec le calcul de la dérivée de la fonction trigonométrique donnée ou à un passage direct à l'élaboration du tableau de variation sans passer par la vérification de la continuité, de la dérivabilité et des variations de la fonction. Nous attribuons cela à une estimation de simplicité de la fonction et, par conséquent, ses propriétés sont considérées comme triviales et ne nécessitant pas une justification. La difficulté de certains étudiants quant à l'utilisation du théorème de la fonction réciproque revient essentiellement à une modification des hypothèses du théorème (la continuité et la monotonie de la fonction sur l'intervalle de définition). Cependant, certains étudiants se limitent à la vérification de la continuité et de la dérivabilité, d'autres se limitent à la monotonie de la fonction sur l'intervalle d'étude, alors que d'autres ajoutent l'hypothèse de la dérivabilité de la fonction à la vérification de sa continuité et de sa monotonie. L'analyse des productions des étudiants associées à la deuxième partie de l'exercice (questions 3 et 4) permet d'identifier les caractéristiques des nouvelles routines récemment introduites et qui sont relatives aux propriétés de la fonction Arcsinus. Trois sous-routines sont identifiées : la détermination de l'expression de la fonction réciproque f^{-1}, l'étude de la dérivabilité de f^{-1} et la détermination de l'expression de $(f^{-1})'$. Pour cette partie, nous avons choisi d'identifier les différentes étapes atteintes par les étudiants dans le processus d'individualisation des routines introduites dans le cours et la série de TD, et ce, afin de caractériser ces routines.

Pour la routine de détermination de l'expression de f^{-1}, nous avons remarqué que la plupart des étudiants s'engagent dans la détermination de l'expression de f^{-1} en fonction de Arcsinus sans vérifier les conditions de la relation $arcsin\big(sin(x)\big) = x$. D'autres étudiants font appel à des procédures erronées qui consistent à considérer que si $f(x) = sin(\pi x)$, alors $f^{-1}(x) = arcsin\big(sin(\pi x)\big)$ ou que $f^{-1}(x) \ = arcsin(\pi x)$. Deux étudiants considèrent que la fonction Arcsinus est linéaire. C'est ce qui émerge à travers l'équivalence entre l'expression $\pi y = \ arcsin(x)$ et l'expression $y = arcsin\left(\frac{x}{\pi}\right)$. Concernant l'exécution de la routine relative à la dérivabilité de f^{-1}, nous avons identifié deux types de procédures adoptés par les étudiants. La première consiste à utiliser le domaine de dérivabilité de la fonction Arcsinus. Pour ces étudiants ayant déjà réussi à retrouver l'expression de f^{-1}(x)$en\ fonction\ de\ arcsin(x)$, ils utilisent le domaine de dérivabilité de la fonction $arcsin$ ainsi que l'expression de sa dérivée pour répondre aux questions. Nous considérons que pour ces étudiants cette fonction acquiert le statut d'un objet mathématique puisqu'ils sont capables d'exécuter les routines attachées à cet objet lors de la résolution des problèmes mathématiques. La deuxième procédure consiste à déterminer le domaine de dérivabilité de la fonction f^{-1} ainsi que l'expression de sa fonction dérivée, et ce, en utilisant les propriétés de la fonction réciproque, sans faire le lien avec la fonction Arcsinus. En fait, ils déduisent la dérivabilité de f^{-1} comme une conséquence de la dérivabilité de f. Pour la détermination de l'expression de la fonction dérivée ils utilisent la relation $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}\,(x))}$. L'utilisation de cette procédure atteste que bien que ces étudiants arrivent à identifier la fonction Arcsinus, elle n'est pas étudiée en tant que fonction, mais plutôt en tant qu'un processus qui permet de définir la fonction réciproque et lui transfère certaines propriétés de la fonction de départ f. Cela nous amène à conclure que la fonction Arcsinus chez ces étudiants n'a pas encore le statut d'un objet mathématique caractérisé par ses propres routines utilisables dans différents contextes pour la résolution des activités proposées. L'analyse a permis également de remarquer l'hétérogénéité des niveaux des étudiants en relation avec la performance des routines déjà vues au secondaire ainsi que les routines récemment installées. Le changement des contextes des tâches routinières rend difficile l'identification et l'exécution des procédures déjà étudiées dans un contexte différent.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons analysé l'évolution des attentes et des exigences auprès des étudiants, autour des fonctions trigonométriques et de leurs réciproques lors de la transition secondaire/postsecondaire ainsi que leurs impacts sur l'apprentissage des étudiants. Appréhender cette problématique du point de vue de la théorie commognitive nous a permis d'utiliser le concept de routine comme unité d'analyse de l'apprentissage des étudiants. En conceptualisant les textes mathématiques proposés dans les manuels scolaires comme un discours, nous avons introduit le concept de routine visée comme unité d'analyse des manuels, des notes de cours proposées dans le module d'Analyse ainsi que des énoncés proposés dans le questionnaire. L'analyse de l'évolution des routines visées relatives aux fonctions trigonométriques et de leurs réciproques dans la transition secondaire/postsecondaire, que les élèves et les étudiants sont amenés à s'approprier, fait apparaitre une fausse continuité en ce qui a trait aux routines visées déjà identifiées au secondaire, lesquelles sont susceptibles de cohabiter avec les nouvelles routines visées relatives aux fonctions trigonométriques réciproques introduites en première année universitaire. En fait, le changement de contextes des tâches routinières au postsecondaire, la complexité des fonctions étudiées et l'introduction des fonctions trigonométriques réciproques comme objet révèlent une modification de la flexibilité et du domaine de validité des routines visées. Cela peut expliquer que des étudiants éprouvent certaines difficultés à individualiser les routines visées par l'enseignant, vu la nécessité de développer de nouvelles procédures plus complexes et, par conséquent, faire évoluer ces routines. Ces routines se développent à travers l'imbrication d'anciennes routines pour créer une seule routine à travers une description commune de leurs tâches, comme pour le cas des routines de détermination de l'image d'un réel par la composée d'une fonction trigonométrique réciproque par une fonction trigonométrique. Cette routine articule les routines de la parité, la périodicité des fonctions trigonométriques ainsi que la routine de la relation entre une fonction et sa réciproque. Dans le questionnaire, pour cette même routine visée, nous avons identifié deux routines mises en œuvre par les étudiants, qui diffèrent selon leurs interprétations de la *task situation* introduite par la question proposée.

L'analyse des tâches proposées dans les séances de cours et de TD montre qu'au postsecondaire, les étudiants ont plus d'autonomie pour l'élaboration des tâches proposées, ce qui engendre une diversité des procédures susceptibles d'être exécutées et, par conséquent, l'évolution de plusieurs routines. Concernant l'utilisation des routines déjà étudiées au secondaire et celles récemment introduites, l'analyse des productions des étudiants lors de la résolution des activités proposées dans le questionnaire a fait apparaitre que chez certains étudiants, le changement de contexte engendre beaucoup de difficultés, même pour des tâches routinières comme l'étude de la continuité et de la dérivabilité d'une fonction. Les résultats font également ressortir les difficultés des étudiants à exécuter des routines relatives à la périodicité, à la parité et aux relations trigonométriques dans un nouveau contexte où interviennent les fonctions trigonométriques réciproques. Nous supposons qu'au postsecondaire, l'absence de questions intermédiaires ou d'indications qui guident les étudiants et leur imposent la procédure qu'ils doivent adopter explique les difficultés de plusieurs étudiants qui ne sont pas encore habitués à être autonome dans leurs apprentissages et dans les choix des procédures adéquates.

Les analyses ont également permis de dégager que la transposition des routines relatives à l'étude de la continuité et de la dérivabilité pour le cas des fonctions trigonométriques réciproques ne va pas de soi et constitue une source de difficulté pour les étudiants. Pour ces étudiants, plusieurs routines déjà étudiées au secondaire n'ont pas encore évolué en termes de champ d'applicabilité et l'éventail des tâches pour lesquelles elles sont susceptibles de donner des résultats est encore réduit.

La contribution de notre travail au domaine de la recherche dans l'enseignement des mathématiques relève de trois niveaux :

1. Proposer une analyse de l'évolution des exigences et des attentes institutionnelles relatives aux fonctions trigonométriques et de leurs réciproques en termes de routines visées.
2. Conceptualiser les textes mathématiques proposés dans les manuels et les notes de cours ainsi que les énoncés des exercices, comme un discours qui a ses propres caractéristiques.
3. Introduire le concept de routines visées comme une unité d'analyse des textes mathématiques écrits : manuels scolaires, notes de cours, séries d'exercices (TD), énoncés des exercices.

Dans ce travail, nous nous sommes centrés sur les routines visées relatives au niveau objet, spécifiques à la notion de fonctions trigonométriques et de leurs fonctions réciproques. Cependant, nous sommes conscients de l'importance des routines visées relatives au niveau méta dans l'apprentissage de ces fonctions et des mathématiques en général. Parmi ces routines, on note les routines d'instanciation. En fait, l'importance du niveau de rigueur associé à l'utilisation d'un ensemble de règles formelles bien définies en enseignement supérieur rend le discours mathématique universitaire difficile pour un nouveau bachelier habitué à des applications directes des savoirs enseignés et à une guidance importante en ce qui concerne les activités proposées dans l'enseignement secondaire.

Pour ce qui est des perspectives, nous considérons que le modèle d'analyse utilisé dans notre travail pourra être exploité pour étudier l'usage des textes mathématiques (manuels) en tant que ressources par les enseignants. Il permettra également d'identifier l'adéquation entre les routines visées par les textes des programmes et des manuels officiels, d'une part, et celles identifiées dans le cours proposé effectivement en classe par les enseignants, d'autre part, notamment au secondaire où les programmes et les manuels constituent les sources officielles pour l'enseignant.

Références

Alshwaikh, J. (2016). Investigating the geometry curriculum in Palestinian textbooks: Towards multimodal analysis of Arabic mathematics discourse. *Research in Mathematics Education, 18*(2), 165-181. https://doi.org/10.1080/14794802.2016.1177580

Alshwaikh, J. et Morgan, C. (2013). Analysing the Palestinian school mathematics textbooks: A multimodal (multisemiotic) perspective. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 33*(2), 70-75.

Alshwaikh, J. et Morgan, C. (2018) A framework for the study of written and spoken discourse: school mathematics in Palestine. *ZDM Mathematics Education*, 50, 1041-1051. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0970-0

Biehler, R., Fischer, P. R, Hochmuth, R. et Wassong, T. (2011). Designing and evaluating blended learning bridging courses in mathematics. online blended courses. Dans M. Pytlak, T. Rowland et E. Swoboda (dir.), *Proceedings of the 7th Conference of European Researchers in Mathematics Education* (p. 1971-1981). University of Rzeszów.

Corriveau, C. (2017). Secondary-to-tertiary comparison through the lens of ways of doing mathematics in relation to functions: a study in collaboration with teachers. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(2), 139-160.

Gray, E. M. et Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A proceptual view of elementary arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 116-140.

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(3), 237-254.

Gueudet, G. et Quéré, P.-V. (2018). “Making connections” in the mathematics courses for engineers: the example of online resources for trigonometry. Dans V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, S. Goodchild et N. M. Hogstad (dir.), *Proceedings of the second conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (p. 135-144). University of Agder.

Gueudet, G. et Vandebrouck. F. (2019). *Entrée dans l'enseignement supérieur : éclairages en didactique des mathématiques.* Conseil national d’évaluation du système scolaire.

Khalloufi-Mouha, F. (2009). *Étude du processus de construction du signifié de fonction trigonométrique chez des élèves de 2e année section scientifique* [thèse de doctorat inédite]. Université de Tunis.

Khalloufi-Mouha, F. et Smida, H. (2012). Constructing mathematical meaning of a trigonometric function through the use of an artefact. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *16*(2), 207-224. https://doi.org/10.1080/10288457.2012.10740740

Khalloufi-Mouha, F. (2014). Étude de l'évolution des signes langagiers lors d'une séquence d'enseignement intégrant un artefact technologique. *Spirale. Revue de recherches en éducation, 54*, 49-63. https://doi.org/10.3406/spira.2014.1036

Khalloufi-Mouha, F. (2018). Constructing mathematical meaning of the cosine function using covariation between variables in a modeling situation in Cabri. Dans T. Dooley et G. Gueudet (dir.), *Proceedings of the 10th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 1308-1315). Dublin City University.

Khalloufi-Mouha, F. (2020). Analyse discursive de l'enseignement des fonctions trigonométriques dans la transition lycée/université. Dans T. Hausberger, M. Bosch et F. Chellougui (dir.), *Proceedings of the Third Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (p. 123-132). University of Carthage

Lavie, I., Steiner, A. et Sfard, A. (2019). Routines we live by: From ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics*, *101*(2), 153-176. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9817-4

Mesa, V. et Goldstein, B. (2017). Conception of angles, trigonometric functions, and inverses trigonometric functions in college textbooks. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education* 3(2), 338-354.

Montoya Delgadillo, E., Páez Murillo, R., Vandebrouck, F. et Vivier, L. (2018). Deconstruction with localization perspective in the learning of analysis. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 4, 139-160. https://doi.org/10.1007/s40753-017-0068-z

Morgan, C. et Sfard, A. (2016). Investigating changes in highstakes mathematics examinations: A discursive approach. *Research in Mathematics Education*, *18*(2), 92-119. https://doi.org/10.1080/14794 802.2016.11765 96

Nardi, E. (2008). *Amongst mathematicians. teaching and learning mathematics at university level*. Springer.

Park, J. (2016). Communicational approach to study textbook discourse on the derivative. *Educational Studies in Mathematics*, *91,* 395-421. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9655-6

République tunisienne (2019). *Mathématiques. 4ème année de l'enseignement secondaire. Section Mathématiques (tome 1).* Ministère de l'Éducation. http://www.cnp.com.tn/cnp.tn/arabic/PDF/222445P00.pdf

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, development of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Sfard, A. (2012). Introduction: Developing mathematical discourse—Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research*, *51-52*, 1-9.

Sfard, A. (2021). Bewitched by language. Questions on language for mathematics education research. Dans N. Planas, N. Morgan et M. Schütte (dir.), *Classroom Research on Mathematics and Language*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780429260889

Thoma, A. et Nardi, E. (2018). Transition from school to university mathematics: manifestations of unresolved commognitive conflict in first year students' examination scripts. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 4, 161-180. https://doi.org/10.1007/s40753-017-0064-3

Vandebrouck, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques de Paris (IREM)*, 16, 149-185.

Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal, 17*(3), 91-112.

Ancrage de la didactique des mathématiques au Québec : à la recherche de sens et de cohérence

Ce texte a été publié pour la première fois dans les actes du GDM de 2007 :

Bednarz, N. (2007). Conférence d'ouverture. Ancrage de la didactique des mathématiques au Québec : à la recherche de sens et de cohérence. Dans P. Marchand, *La didactique des mathématiques au Québec : genèse et perspectives*. *Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec*, p.19-61.

Nadine Bednarz
Université du Québec à Montréal

Résumé : Un important corpus de recherches en didactique des mathématiques a été développé au Québec depuis près de 40 ans. Les analyses réalisées par Lemoyne (1996) et Kieran (2003) permettent d'établir un premier portrait de l'évolution de la recherche en didactique des mathématiques au Québec sous l'angle des objets qu'elle aborde et de sa communauté de chercheurs. En partant de ces synthèses et des premiers travaux de recherche réalisés en didactique des mathématiques au sein des groupes québécois qui ont constitué des pôles importants de développement de celle-ci (Centre de recherche en psycho-mathématique, le Centre de recherche en didactique (CRD), section didactique de l'UQÀM, le Centre interdisciplinaire de recherche sur l'apprentissage et le développement en éducation (CIRADE), etc., nous avons tenté de retracer les finalités, les courants théoriques et les approches méthodologiques qui ont orienté les pratiques didactiques de ces groupes. Ce retour aux sources cherche à reconstruire le sens profond des premiers travaux menés dans ce domaine. Il vise aussi à répondre aux questions suivantes : de quelle didactique des mathématiques est-il question quand on parle de didactique des mathématiques dans ces groupes? Quelle cohérence, si elle existe, traverse ces différents travaux?

The roots of mathematics instruction in Quebec: In search of meaning and consistency

Abstract: Over the past nearly 40 years, a substantial body of research in mathematics instruction has developed in Quebec. The analyses carried out by Lemoyne (1996) and

https://doi.org/10.71403/qz37ac38

Kieran (2003) allow us to establish a first portrait of the evolution of research in mathematics instruction in the province from the standpoint of the subjects dealt with and the associated community of researchers. Based on these syntheses and on the first research works produced in mathematics instruction within the Quebec groups that have been important centres of development in this field (Centre de recherche en psycho-mathématique, Centre de recherche en didactique (CRD), section didactique de l'UQÀM, Centre interdisciplinaire de recherche sur l'apprentissage et le développement en éducation (CIRADE), etc.), we have attempted to retrace the aims, theoretical currents and methodological approaches that have guided the instructional practices of these groups. The objective of this return to the sources has been to reconstruct the deep meaning of the first studies conducted in this field. We also set out to answer the questions: Which mathematics instruction are we talking about when referring to mathematics instruction in these groups? What consistency, if any, can be identified across these research works?

Introduction

> La création d'une identité de praticien est une entreprise collective… Elle est aussi une façon de parler de la constitution du groupe lui-même par l'activité de ses praticiens. Elle suppose la reconnaissance et la validation par les autres participants des pratiques changeantes par lesquelles les nouveaux venus deviennent des anciens. (Lave, 1991, p. 154)

Plus de 37 ans se sont écoulés depuis la création du Groupe de didactique des mathématiques au Québec (GDM) et le début des travaux de recherche en ce domaine. Au moment où bon nombre de didacticiens s'apprêtent à quitter le domaine de la formation et de la recherche, la nécessité de faire le point sur les développements qui ont marqué l'émergence et le développement de ce champ d'études apparaît comme un enjeu crucial, non seulement pour en comprendre l'origine et l'évolution, mais aussi pour ouvrir sur des perspectives nouvelles. Le thème de la rencontre du GDM tenue en juin 2007 se prêtait bien à cet exercice[1]. Mais, travailler sur l'historicité de la recherche en didactique des mathématiques au Québec représentait, à cette étape, lorsque j'acceptais de présenter cette conférence d'ouverture, un véritable défi. Voulant retracer son ancrage, mieux comprendre les finalités des premiers travaux, leur fil directeur, leurs enjeux, leur apport, j'étais confrontée à des choix difficiles. En effet, la quantité impressionnante de travaux menés au Québec en didactique des mathématiques depuis les années 1970 et l'identification de données associées aux travaux de ces groupes de recherche non archivées de manière systématique rendaient la tâche complexe. La reconstruction amorcée ici ne peut donc être que partielle. Elle

[1] Pour minimiser toute lourdeur dans l'écriture et la lecture, nous utiliserons le masculin dans l'ensemble du texte.

demanderait à être poursuivie par une équipe de chercheurs, travaillant de manière systématique à retracer toutes les données issues des différents groupes et à reconstruire l'histoire de ces derniers. Pour favoriser la construction d'une identité de chercheurs en didactique des mathématiques au Québec, un tel travail historique semble fondamental[2] de manière à pouvoir se donner une mémoire collective de ces travaux et de leur place dans le champ de la didactique des mathématiques au Québec.

Avant de préciser la manière dont nous avons abordé la question de cette reconstruction, nous soulignerons au préalable quelques éléments des travaux antérieurs sur lesquels il est possible de s'appuyer pour aborder cette genèse de la didactique des mathématiques au Québec (Mura, 1994; Lemoyne, 1996; Kieran, 2003).

1. Un retour sur les travaux rétrospectifs déjà réalisés

Trois études servent de matériau à une entrée dans la reconstruction de la didactique des mathématiques au Québec. Ces études, les seules dont nous disposions, proposent des lectures personnelles (il ne peut en être autrement, la nôtre le sera également) influencées par un regard particulier posé par le chercheur. La première (Mura, 1994, 1998) et la troisième étude (Kieran, 2003) portent sur le Canada, bien que des données sur le Québec puissent en être tirées; mais, l'ensemble dépasse largement le cadre du Québec. La deuxième étude porte spécifiquement sur la recherche en didactique des mathématiques au Québec et couvre les années 1970 à 1995 (Lemoyne, 1996).

1.1 Un portrait des didacticiens des mathématiques

En 1993, Roberta Mura a réalisé une vaste enquête[3] auprès des didacticiens des mathématiques travaillant dans les universités canadiennes. Cette enquête fournit un portrait global de ces didacticiens, dans les années 1990 : 70 % d'entre eux sont des hommes, leur âge moyen est de 50 ans, 35 % d'entre eux parlent français au travail, 75 % d'entre eux sont attachés à des départements, ou facultés d'éducation et, plus rarement, 21 % d'entre eux, à des départements de mathématiques (cas de

---

[2] Le travail mené en didactique au Québec s'inscrit dans une certaine historicité qu'il semble essentiel de retracer pour la communauté de chercheurs qui participe à cette entreprise collective. Une telle perspective historique permet en effet de situer le travail réalisé, ses filiations théoriques, les savoirs qui en sont issus, ses retombées. Elle permet également de mieux comprendre les perspectives actuelles, leurs tendances, l'articulation avec la recherche déjà réalisée.

[3] Sur les 158 questionnaires envoyés aux professeurs, 103 ont été retournés et 63 retenus, selon deux critères : occupent-ils un poste dans une université? La didactique des mathématiques est-elle leur principal champ de recherche et d'enseignement?

l'UQÀM et de Concordia), 89 % d'entre eux (46) ont un doctorat en éducation, 8 un doctorat en mathématiques et 2 en psychologie, 29 % d'entre eux ont dirigé la recherche d'au moins un étudiant au doctorat[4].

Outre le fait qu'elle fournit un portrait de ces formateurs-chercheurs en didactique des mathématiques au Canada, cette étude permet de mettre en évidence la conception de la didactique des mathématiques qui est la leur, à partir de la question suivante : » Comment définissez-vous la didactique des mathématiques? ». Une caractérisation du travail en didactique des mathématiques, qui émerge de cette analyse, est celle d'une didactique pensée à partir de ses finalités :

- des finalités définies, par certains, en termes d'analyse, d'explication, de compréhension des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques (Mura, 1998, p. 110);
- par d'autres, en termes de contribution à l'amélioration de l'enseignement des mathématiques et à la facilitation de son apprentissage;
- ces définitions de finalités n'étant pas, par ailleurs, nécessairement exclusives.

Cette enquête menée, rappelons-le, dans tout le Canada, et non seulement au Québec, contribue à mettre en lumière le portrait d'une communauté professionnelle hétérogène : « The portrait drawn by the survey's results is that of a diversified professional community[5] » (Mura, 1994, p. 112).

Nous reviendrons, à la fin de ce texte, sur cette caractérisation de la didactique des mathématiques en regard des travaux que nous avons analysés.

1.2 Une entrée par les objets de recherche sur lesquels portent les recherches en didactique des mathématiques.

L'analyse menée par Lemoyne (1996) a été réalisée à partir de textes publiés de 1970 à 1995 en didactique des mathématiques au Québec : articles dans des revues scientifiques et professionnelles, livres, thèses de doctorat. Elle recouvre aussi des analyses historiques portant sur certains savoirs mathématiques, productions que l'on peut situer à la frontière des recherches en didactique des mathématiques (il s'agit en fait de travaux en histoire des mathématiques).

---

[4] Il serait intéressant de refaire une telle étude pour obtenir un portrait actuel, notamment en ce qui concerne la direction d'étudiants aux études supérieures et la formation de chercheurs, les études de doctorat s'étant considérablement développées depuis cette époque.

[5] Dans ce texte, les citations en anglais sont intégrées au texte afin d'en respecter le format original et ne pas en alourdir la lecture.

Pour organiser l'analyse des publications examinées, le cadre théorique qui guide l'auteure est celui de la « théorie des situations didactiques » (Brousseau, 1998), et celui des travaux menés en France selon cette perspective. Cette théorie, nous rappelle l'auteure, s'inscrit dans un certain projet : elle s'intéresse[6] « à un savoir déjà institué, c'est-à-dire un savoir qui a sa place dans une société déterminée et vis-à-vis duquel existe un projet social de transmission réalisé sous la forme d'un enseignement » (Rouchier, 1991, cité dans Lemoyne, 1996, p. 31).

C'est autour de ce savoir et de son enseignement que s'organisent donc les recherches en ce domaine, en renvoyant à des analyses mathématiques, épistémologiques, didactiques de la notion à enseigner, ainsi qu'à une analyse des connaissances des élèves. Des outils théoriques et méthodologiques cohérents avec ce projet y ont été développés.

> C'est (par exemple) dans le cadre de cette théorie que le problème de la dévolution des situations a-didactiques, ou de l'entrée de l'élève dans une situation d'apprentissage, a été posé, […] que le processus d'institutionnalisation a été examiné, […] que la méthodologie de l'ingénierie didactique a été créée pour une « mise à l'épreuve des constructions théoriques élaborées dans les recherches, par l'engagement de ces constructions dans un mécanisme de production » (Artigue, 1990, p. 285) et pour une « prise en compte de la complexité de la classe ». (Douady, 1987, cité dans Lemoyne, 1996, p. 32)

L'analyse réalisée conduit l'auteure[7] à regrouper les travaux menés au Québec selon trois axes :

1) des analyses mathématiques, historiques et épistémologiques de savoirs à enseigner;
2) des analyses didactiques en lien avec la conception, la réalisation et l'étude de situations d'enseignement, ces analyses didactiques prenant diverses formes : analyses d'enseignement, de manuels, propositions de situations d'enseignement conçues par des chercheurs ou des enseignants (résultant d'analyses de savoirs mathématiques et de choix didactiques), analyses de

---

[6] Ce projet, orienté par une certaine vision de la didactique des mathématiques, délimite, en quelque sorte, l'objet du travail du didacticien. Avec cette définition, tout un pan des recherches actuelles en didactique des mathématiques se trouve en effet écarté, par exemple les recherches en ethnomathématique menées en dehors du contexte scolaire, ou encore les travaux sur les mathématiques construites en contexte professionnel d'entreprise.

[7] Dans cet article, l'auteure, prudente, nous disait à l'époque qu'il serait intéressant de faire une autre lecture de ces travaux à la lumière d'autres cadres théoriques.

problèmes mathématiques pouvant faire partie de situations d'enseignement [8];

3) des analyses du fonctionnement cognitif des élèves dans la réalisation et l'étude des situations didactiques. Les travaux font, dans ce dernier cas, une place aux rapports que la psychologie cognitive entretient avec la didactique des mathématiques et montrent les développements auxquels ils ont donné lieu.

Cette étude, dans un souci d'ouvrir sur des perspectives, fait enfin part de certaines orientations qui devraient être poursuivies dans les travaux à venir : l'importance de conjuguer les analyses mathématiques, épistémologiques, didactiques et cognitives, d'étudier l'enseignement in situ, dans le lieu où il se réalise (l'école, la classe), de mener des recherches sur la modélisation, sur la formation des enseignants et, enfin, d'ouvrir, dans les revues professionnelles, une rubrique consacrée à l'examen des publications des chercheurs sous la forme d'analyses critiques, de commentaires, de questions.

1.3 Émergence d'une communauté de recherche au Québec.

L'étude de Kieran (2003), beaucoup plus vaste que la précédente – dans l'espace (elle porte sur tout le Canada) et dans le temps (elle couvre les années 1920 à 2000) – cherche à retracer la formation d'une certaine communauté de chercheurs au Canada, à travers, notamment, une analyse des événements qui ont favorisé, au fil du temps, son émergence et son développement. Le matériau sur lequel porte l'analyse est constitué de l'ensemble des thèses de doctorat complétées au Canada durant cette période et des projets de recherche subventionnés. Il s'agit donc d'un matériau différent de celui de l'étude de Lemoyne. Le cadre théorique de Wenger (1998), et son concept de communauté de pratique, servent à identifier les indicateurs d'une communauté de chercheurs en développement : présence d'une entreprise collective commune, d'un engagement mutuel des membres de cette communauté et développement d'un répertoire partagé de savoirs, d'actions, de routines, d'outils. « (Community of practice implies) participation in an activity system about which participants share understandings concerning what they are doing and what means in their lives and for their communities » (Lave et Wenger, 1991, p. 98).

Bien sûr, à travers les événements qui ont marqué l'évolution de la recherche au Canada, et notamment la mise sur pied des groupes de didactique québécois et

---

[8] L'auteure pointe à cette occasion des éléments qui demanderaient à être davantage développés : peu de recherches portent notamment sur des analyses documentées de manuels, de pratiques d'enseignement in situ.

canadiens (GDM, Groupe canadien d'étude en didactique des mathématiques [GCEDM]) et leurs rencontres annuelles, il y a l'idée d'un certain nombre d'expériences partagées qui résultent des interactions entre les membres d'une communauté. Mais de quelles pratique et entreprise communes parle-t-on? Peut-on parler, au sens de Wenger d'une réelle communauté de pratique au Canada? En retrouve-t-on vraiment les caractéristiques? Ne devrait-on pas plutôt parler de multiples communautés de pratique, si elles existent, sur le plan local? Quoi qu'il en soit, l'analyse historique menée par Kieran (2003) a le mérite d'aborder la question de l'évolution de la recherche en didactique des mathématiques sous l'angle du développement de sa communauté de chercheurs.

Ainsi, pour le Québec, des événements importants ont joué un rôle dans cette émergence de communautés locales de pratiques : la mise sur pied dans les années 1970 de Permama (Programme de perfectionnement des maîtres en mathématiques) dans lequel plusieurs didacticiens ont été impliqués activement, cette participation influençant en retour l'orientation que prendront leurs travaux; la formation en 1970 du GDM; la mise sur pied du Fonds de chercheurs en action concertée (FCAC) qui permettra de subventionner des recherches en ce domaine au Québec.

À travers l'organisation de colloques internationaux tels le 7e Congrès international sur l'enseignement des mathématiques (ICME; Gaulin et al., 1994) tenu à Québec du 17 au 23 août 1992, la 11e Conférence annuelle du International Group of Psychology of Mathematics Education (PME; Bergeron et al, 1987) tenue à Montréal du 19 au 25 juillet 1987, la 5e Conférence annuelle du North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-NA; Bergeron et Hercovics, 1983) tenue à Montréal du 29 septembre au 1er octobre 1983, ou encore la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques (CIEAEM) tenue en 1973 à Québec, puis en 1987 à Sherbrooke (CIEAEM, 1973; Goupil et Therrien, 1987), il est possible d'entrevoir le rôle qu'ont pu jouer les interactions avec la communauté internationale dans le développement d'une communauté de recherche au Québec.

Cette analyse vient éclairer plus spécifiquement, de notre point de vue, l'émergence de communautés locales de pratiques ayant joué un rôle important dans le développement de la didactique : notamment le Centre de recherche en psycho-mathématique formé par Diénès dans les années 1960 à Sherbrooke; le groupe constitué autour de logo comme outil d'exploration mathématique; la section didactique du Département de mathématiques de l'UQÀM dans laquelle on comptera jusqu'à 17 didacticiens dans les années 1980, tous impliqués à un moment ou un autre de leur carrière dans la recherche; les groupes de recherche subventionnés de Joël Hillel, David Wheeler et, plus tard, d'Anna Sierpinska à l'Université Concordia, de Nicolas Hercovics et Jacques Bergeron (à l'Université de Montréal); ou encore le CIRADE, au sein duquel travaillera un noyau important de chercheurs en didactique des mathématiques. D'autres pionniers contribueront également activement à ce développement : par exemple, Dieter Lunkenbein à l'Université de Sherbrooke dans les années 1980, Fernand Lemay à l'Université Laval dans les années 1970.

1.4 Une nouvelle analyse : dans quel sens? Pourquoi?

Les analyses réalisées précédemment nous fournissent un premier portrait de la genèse de la didactique des mathématiques au Québec à travers les événements qui ont marqué l'émergence de sa communauté de chercheurs, le portrait plus précis de ses chercheurs et les objets de recherche qu'ils ont abordés. Elles constituent une base importante permettant d'amorcer le travail de reconstruction dans lequel nous nous engageons, d'une part, en nous fournissant des indicateurs sur les groupes ou chercheurs clés à considérer pour aller plus loin (Kieran, 2003) et, d'autre part, en ouvrant sur le projet plus large dans lequel s'inscrit ce travail didactique (Lemoyne, 1996). Sous la grille reprise par l'auteure pour aborder sa reconstruction, on trouve en effet un projet plus large, une certaine conception de la didactique qui organise la lecture des recherches. Mais quel est le projet qui était au fondement du travail de ces didacticiens de la première heure au Québec? En nous intéressant à ce projet qui organise en quelque sorte la lecture que ces didacticiens font des événements didactiques, nous cherchons à mieux comprendre l'ancrage de ces travaux de recherche, ce sur quoi ces didacticiens ont étudié, la manière dont ils l'ont fait et ce que recouvrait, pour eux, la didactique des mathématiques.

1.5 Le matériau et la grille de lecture

Dans cette recherche de sens, nous avons ressenti le besoin de retourner aux sources de ces travaux de recherche. Notre choix s'est alors porté sur des groupes de recherche, là où ce projet a plus de chances d'avoir été explicité, dans les échanges qui se sont progressivement construits autour de ses membres. En effet, il y a, dans un groupe, l'idée d'une certaine communauté de pratique réunie autour d'un projet (on retrouve ici le critère d'entreprise commune de Wenger [1998] dans son concept de communauté de pratique). S'y trouve aussi l'idée d'un engagement mutuel des membres de ce groupe de pratique et d'un développement progressif d'un répertoire partagé : une réflexion commune, des manières de faire, des outils théoriques et méthodologiques.

Ce choix d'entrer dans l'analyse de la genèse de la didactique des mathématiques au Québec à travers des groupes de pratique qui ont joué un rôle important dans ce développement a bien sûr aussi des limites, nous en sommes consciente. Il exclut, ou met de côté, une partie importante du travail en didactique des mathématiques qui a eu lieu au Québec durant les années 1970-1990)[9]. Certaines recherches, tout aussi importantes que celles conduites dans des groupes, ont en effet été menées durant cette période, au Québec. Un travail nécessaire reste donc à poursuivre en ce sens.

1.5.1 Les données

Les analyses fournies par Kieran (2003) mettent en évidence un certain nombre de communautés de recherche locales qui ont joué un rôle dans le développement d'une communauté de recherche en didactique des mathématiques au Québec. Il était impossible, dans le temps limité dont nous disposions – quelques mois – de les prendre toutes en compte. Ceci aurait nécessité un travail plus élaboré, systématique, mené par une équipe[10]. Les groupes sur lesquels a porté l'analyse sont les suivants (nous préciserons en même temps les données dont nous avons disposé pour chacun de ces groupes)[11]:

- Le Centre de recherche en psycho-mathématique constitué dans les années 1960 autour de Zoltan P. Diénès à l'Université de Sherbrooke. Les données

[9] On peut penser, par exemple ici, à l'apport de mathématiciens comme Fernand Lemay ou à celui d'autres didacticiens qui n'étaient nullement attachés à un groupe de recherche et qui ont pourtant joué par leurs réflexions, un rôle important.

[10] On peut penser, par exemple ici, à documenter le travail mené par le groupe qui s'est constitué autour de logo, groupe qui réunissait plusieurs formateurs-chercheurs (Montpetit, Taurisson, Côté, Erlwanger, Hillel, Kieran), en s'intéressant aux filiations que ce travail a eues par la suite dans le développement de la recherche sur l'utilisation des technologies en enseignement des mathématiques. On peut également chercher à documenter le travail mené par le groupe de recherche réuni autour de Bergeron et Hercovics et leur modèle de compréhension en mathématiques.

[11] Les traces des travaux de recherche menés dans ces groupes n'ont pas nécessairement été aisées à retrouver, et en ce sens notre travail ne peut prétendre à l'exhaustivité. Par exemple, plusieurs données n'étaient pas disponibles (c'est le cas des différents rapports et textes produits par le Centre de recherche en psycho-mathématique). Nous avons pu, dans le cas du CRD et du CIRADE, bénéficier de l'apport du service des archives et de gestion des documents de l'UQAM. Nous avons également pu bénéficier de l'apport de collègues (pour certains des textes de Lunkenbein ou de Diénès). Je tiens ici tout particulièrement à remercier Richard Pallascio et Bernard Héraud pour leur contribution. Plusieurs des textes produits par les différents groupes considérés ont cependant disparu ou ne sont pas accessibles. Il pourrait être intéressant, dans un projet futur, pour le GDM, de retracer ces documents, de les répertorier, de les archiver, voire de les numériser, de manière à se donner une mémoire collective du travail réalisé en didactique des mathématiques au Québec.

dont nous disposions sont constituées du rapport annuel du centre[12] (Diénès, 1973a) et, de manière complémentaire, de différents textes venant éclairer le projet sous-jacent (Diénès, 1960, 1971, 1973b, 1987; Diénès et Jeeves, 1965; Post, 1981, Sriraman et Lesh, 2007).

- Dieter Lunkenbein, didacticien des mathématiques ayant travaillé dans les années 1980 à l'Université de Sherbrooke. Il est important de préciser ici, en lien avec notre choix présenté précédemment de travailler sur des groupes, les raisons qui nous ont conduite à retenir le travail de ce chercheur. À la fois en continuité avec Diénès, dont il a été l'un des assistants au Centre de recherche en psycho-mathématique, mais aussi en différenciation avec lui, comme nous le verrons par la suite, il a été le moteur d'un groupe de recherche en didactique des mathématiques à l'Université de Sherbrooke et a contribué à établir des liens avec le milieu scolaire (voir le rapport no 18 de l'équipe, 1977). Les données ayant servi de base à l'analyse sont constituées de différents rapports (Lunkenbein, 1977a, 1977b, 1980; Allard et al., 1977) et d'articles écrits par ce chercheur qui permettent d'éclairer son travail (Lunkenbein, 1983a, 1984-1985; Mitchelmore et al., 1983) et sa conception de la didactique (Lunkenbein, 1983b).
- Le Centre de recherche en didactique (CRD) mis sur pied en 1970 à l'Université du Québec à Montréal; nous disposions ici de différents rapports annuels du centre (Morf, 1973-1974, 1974-1975, 1976-1977; Bélanger, 1977-1978) et de textes liés à des séminaires (séminaire sur l'objet, 1971) ou à un important symposium organisé par ce centre en 1971 (bulletin préparatoire 1971, mémos autour du symposium, résumés des conférences, textes de conférences et retranscriptions des échanges entre chercheurs).
- Le Centre interdisciplinaire de recherche sur l'apprentissage et le développement en éducation (CIRADE), réunissant des chercheurs provenant de différentes universités, centre à l'activité duquel nous avons participé dès sa création en 1980, dont nous avons été membre jusqu'en 2004, et directrice de 1985 à 1996. Nous disposions ici des différentes « demandes de centres », de différents textes publiés en lien avec des colloques (voir par exemple Bednarz, 1986, 1987, 1998; Bednarz et al., 1996; Bednarz et Garnier, 1989; Garnier et al., 1991; Janvier, 1987).
- La Section didactique des mathématiques de l'Université du Québec à Montréal, créée dès le début de l'UQÀM autour de la formation des enseignants et qui constituait dans les années 1980 le noyau le plus important, en termes de nombre de didacticiens des mathématiques au

[12] Les différents rapports, documents internes produits par le centre n'ont pu être retracés par nous, ces derniers ayant, à notre connaissance, disparu.

Québec. Les documents sur lesquels nous nous sommes basés sont formés d'articles écrits par les didacticiens de cette section autour de la formation des enseignants, élément central de sa structuration progressive (voir notamment Bednarz, 2001; Bednarz et al., 1995; Bednarz et Gattuso, 1999; Bednarz et Perrin Glorian, 2005; Boileau et Garançon, 1993; Dufour-Janvier et Hosson, 1999; Janvier, 1994, 1996).

1.5.2 La grille de lecture

Nous avons tenté de reconstruire, à partir du discours que nous possédions de ces différents groupes, des réponses aux questions suivantes :

- Quelle est leur vision de la didactique? Sous-jacente à ces travaux partagés par un groupe, une certaine vision de la didactique se dégage-t-elle? De quelle didactique parle-t-on? Que recouvre-t-elle?
- Quelles étaient les finalités de ce travail en didactique des mathématiques, son projet?
- Que vise-t-on à travers ce travail en didactique? En particulier, quels sont ses liens avec la pratique?
- Quelles sont les filiations théoriques de ce travail?
- Des orientations méthodologiques spécifiques se dégagent-elles de ce travail (des manières d'approcher le travail, les études, les analyses)?

Avant d'aborder plus à fond ces travaux de recherche qui ont pris place dans des lieux et contextes différents, et qui se chevauchent partiellement dans le temps, il apparaît intéressant de revenir sur les orientations qu'ont pris les travaux de recherche en didactique des mathématiques dans d'autres pays. Par ce bref aperçu, nous espérons pouvoir situer les projets plus larges dans lesquels s'inscrivent les recherches en didactique des mathématiques, fort différents, comme nous le verrons, d'un groupe à l'autre, montrant ainsi le caractère situé des pratiques didactiques développées. En ce sens, il serait sans doute plus à propos de parler des didactiques des mathématiques que de la didactique. Plusieurs études internationales confirment ce caractère fondamentalement situé, ancré en contexte des travaux de recherche en didactique des mathématiques (voir Sierpinska et Kilpatrick, 1998; Leung et al., 2006). Nous reviendrons brièvement sur ce point dans ce qui suit.

2. Multiréférentialité et complexité de la recherche en didactique des mathématiques

Les orientations que prennent les travaux de recherche en didactique des mathématiques et, par conséquent, les types de savoirs que les chercheurs construisent, sont tributaires des contextes particuliers de leur production (Lave, 1988; Lave et Wenger, 1991). Ainsi des traditions de recherche se sont développées localement avec leurs propres débats épistémologiques, leurs contraintes institutionnelles, leurs questions de recherche, leurs méthodes, leurs résultats et critères (Ernest, 1998). Ce sont, en quelque sorte, ces pratiques qu'il faut tenter de reconstruire, sous l'angle de leur projet, de leurs finalités, de ce qui les fonde, des manières d'approcher la recherche qui les anime. La didactique des mathématiques est ici attachée à la fois à un ensemble de pratiques[13] et à un champ de connaissances, ce qui l'inscrit dans une perspective développée récemment en sociologie des sciences (Latour, 1987). Emprunter une telle perspective permet de comprendre les ancrages des travaux de recherche en didactique, leur multiplicité de points de vue, de cadres de référence, de méthodologies, et met en évidence, nous le verrons par la suite, le rôle structurant du contexte (on retrouve en effet des orientations très différentes d'un groupe à l'autre).

« It is the practice of knowledge-making as it takes place in different contexts alone that specifies what it is » (Ernest, 1998, p. 76).

Nous soulignerons plus particulièrement ici trois exemples illustrant ce qui précède.

2.1 La didactique des mathématiques en France

L'option retenue par l'école française s'inscrit dans une certaine visée d'élaboration d'une didactique des mathématiques en tant que discipline scientifique. Elle implique en ce sens, dès le départ, une distinction nette entre les travaux qui sont menés en didactique et l'innovation pédagogique ou la recherche-action (Margolinas, 1998). L'innovation, la recherche-action réfutent en effet, pour les didacticiens engagés dans des recherches, la possibilité de découvrir des mécanismes dans le processus d'enseignement, dans la conception de situations d'enseignement, qui vont « marcher » sous certaines conditions et qui vont être reproductibles. Il ne s'agit pas, précise Brousseau (1986), d'améliorer l'acte d'enseignement, ce n'est pas le but immédiat de la didactique, mais bien de décrire et d'expliquer « des activités liées à la communication des savoirs et les transformations, intentionnelles ou non, des protagonistes de cette communication, ainsi que les transformations du savoir lui-même » (p. 33). Les concepts théoriques élaborés apparaissent alors comme des moyens de rendre compte de ces phénomènes didactiques tirés d'observations articulées les unes aux

---

[13] C'est ici que j'ai cherché à me situer dans le travail de reconstruction des travaux faits au Québec. Malheureusement, et c'est là une limite du travail, nous n'avions pas accès à ces pratiques passées proprement dites, mais seulement aux différents textes qui parlent de celles-ci.

autres. Cette orientation explique aussi le développement de méthodologies spécifiques, telle l'ingénierie didactique, cherchant à mettre à l'épreuve certaines de ces constructions théoriques (situations d'enseignement élaborées sur la base d'analyses préalables).

Cette orientation particulière donnée en France aux travaux de recherche en didactique des mathématiques est également marquée par l'importance que les didacticiens accordent aux mathématiques produites par les mathématiciens (Sierpinska, 1995), « Didactics is now clearly considered as a legitimate specialization of research in applied mathematics and didacticians employed at tertiary level in mathematics departments are nationally evaluated with the same criteria as other applied mathematicians » (Artigue, 1994).

Les savoirs mathématiques vont ainsi y jouer un rôle-clé.[14] Cette référence à un savoir déjà institué, au centre de la relation didactique, qui organise et structure les recherches en ce domaine, permet de comprendre le caractère particulier de certains concepts produits par cette école, tel, par exemple, celui de transposition didactique.

2.2 La didactique des mathématiques en Italie

La recherche en didactique des mathématiques en Italie a été, contrairement à celle menée en France, liée dès le départ à un mouvement d'innovation dans les écoles, et ce, dès les années 1960, mouvement auquel ont été associés les enseignants. Certains mathématiciens professionnels se sont également engagés dans cette activité. Ces groupes d'enseignants et de mathématiciens ont donné naissance aux premiers groupes de recherche.

Cet ancrage particulier des travaux en didactique a contribué, au fil des années, à l'émergence d'un modèle particulier de recherche articulé sur cette innovation (Arzarello et Bartolini-Bussi, 1998) et orientant progressivement, en retour, ses buts et ses approches.

Ainsi, les recherches en didactique des mathématiques se sont développées en lien avec la production de projets d'innovation curriculaire, de situations d'enseignement, dont on a décrit et documenté soigneusement la réalisation en classe. On trouve donc, dans ces travaux, une forte composante d'expérimentation en classe, permettant de rendre compte de manière détaillée des processus d'enseignement et des apprentissages. Une coopération entre les chercheurs et les

---

[14] Il est à noter que la notion de pratique sociale de référence développée par Martinand (1993) est à la base d'une différenciation importante entre certains travaux menés en didactique des sciences et ceux réalisés en didactique des mathématiques.

enseignants y est très présente, ces derniers intervenant à la fois comme des concepteurs (dans les situations et projets curriculaires) et des observateurs. Dans une telle perspective, les pratiques de recherche (on documente ce qui se passe dans ces projets d'innovation curriculaire, dans ces situations d'enseignement) et les pratiques pédagogiques (nouvelles qui en résultent) se coproduisent.

2.3 La didactique des mathématiques en Hollande

Les recherches en didactique des mathématiques en Hollande, que l'on peut situer dans une perspective de recherche-développement, ont mis l'accent dès leur origine sur l'élaboration d'un enseignement des mathématiques qui correspondrait à l'idée que se faisait Freudenthal des mathématiques comme « activité humaine ».

> Students should be given the opportunity to reinvent mathematics by mathematizing, mathematizing subject matter from reality and mathematizing mathematical matter. In both cases, the subject matter that is to be mathematized should be experientially real for the students. That is why the envisioned education is called realistic mathematics education (RME). Furthermore, the idea of mathematizing implies a high autonomy of the students. Or, in other words, the core principle is that mathematics can and should be learned on one's own authority and through one's own mental activities. (Gravemeijer, 1998, p. 277)

Ces travaux de recherche, qui ont pris place notamment autour du projet IOWO à l'Institut Freudenthal, ont contribué, d'une part, à l'élaboration de nouvelles connaissances (explicitant des théories d'enseignement dans un domaine spécifique en regard de cette RME) et, d'autre part, à l'élaboration de cours prototypiques et de matériel (aspect développement).

2.4 Multiréférentialité de la didactique des mathématiques

Les cas que nous venons d'évoquer illustrent des traditions de recherches très différentes en didactique des mathématiques, prenant ancrage dans des contextes distincts qui permettent de comprendre leur développement. À travers ce qui précède, des finalités distinctes se dessinent, des cadres théoriques et des approches méthodologiques différentes se précisent. On perçoit ici le caractère multiréférentiel de ces traditions, des pratiques qui les caractérisent et des connaissances qui en sont issues (voir tableau 1).

Tableau 1. Trois exemples de traditions de recherches différentes

	DM en France	**DM en Italie**	**DM en Hollande**
Finalité des travaux développés	La DM n'a pas pour but immédiat de favoriser l'acte d'enseignement mais au contraire d'en connaître les conditions.	Une recherche pour l'innovation (projets d'innovation curriculaire)	L'élaboration de théories spécifiques d'enseignement, le développement de situations en liaison avec une certaine conception de l'activité mathématique (RME)
Outils théoriques	En appui à cette compréhension (TSD…)	Puise à différents cadres théoriques pour décrire, analyser	Des concepts théoriques développés par Freudenthal sur RME
Approches méthodologiques	Développement d'approches spécifiques (Ingénierie didactique)	Recherche-action	Recherche-développement (processus cyclique de développement, analyse)
Position par rapport à la pratique	Position externe du chercheur/observation contrôlée	Enseignant cochercheur Forte composante expérimentation en classe	Essais dans des contextes éducatifs divers

En ce sens, on peut parler non pas d'une didactique des mathématiques, mais de didactiques des mathématiques, renvoyant à un ensemble diversifié de connaissances et de pratiques sociales situées (Ernest, 1998). C'est dans cette perspective qu'il nous est apparu intéressant de retracer les travaux de recherche en didactique qui se sont développés au Québec au sein de différents groupes.

3. Reconstruction de travaux de recherche en didactique des mathématiques au Québec : quel(s) projet(s)? Quelle didactique? Quels objets, quelles filiations théoriques, quelles approches?

Dans cette section, les travaux issus de cinq équipes de recherche seront mis en lumière. Une lecture transversale de ces travaux servira de clôture à cette section.

3.1 Le Centre de recherche en psycho-mathématique de l'Université de Sherbrooke

> I (Dienes son is speaking) spent some time visiting the classes in which Zoltan did his teaching. What I notice was not so much the mathematics, it was more about the learning than the mathematics. In fact in some of his classes in Quebec he would have a mixture of mathematics, language and art in the same classroom, with different learning situations where students could choose what they wanted to work on. Often these classes had multiple grades, so the older ones were teaching the younger ones. The other thing he did was he never set up competitive games. The games were always things that didn't work unless you worked together. His strategy was always to focus on the nature of learning. How do we create an environment in which people learn to cooperate, to have fun, and have choices and power over their own learning experience? And create an atmosphere where learning is empowering. (Sriraman et Lesh, 2007, p. 70)

Les années 1960 ont été des années très actives en enseignement des mathématiques au Québec. L'arrivée de Diénès au Canada, un mathématicien de formation, spécialisé en logique, déjà très impliqué dans la recherche en enseignement des mathématiques, constitue ici un événement marquant. Zoltan P. Diénès mettra sur pied en 1967, à l'Université de Sherbrooke, un centre de recherche en psychomathématique[15] , dont il sera le directeur, et qui constituera un pôle d'attraction important pour plusieurs chercheurs québécois en didactique des mathématiques (citons, par exemple, Claude Gaulin, Bernard Héraud, Dieter Lunkenbein, Hélène Kayler qui y feront de fréquents séjours de longue durée). Le centre de recherche de Diénès attirera également des visiteurs venus du monde entier, permettant ainsi aux chercheurs québécois de rencontrer la communauté de recherche internationale en enseignement des mathématiques. Diénès a été directeur de la revue Journal of Structural Learning et a contribué, dans une large mesure, au développement international de cette revue. Il a été activement impliqué dans la mise sur pied en 1968 d'un premier doctorat en psychomathématiques, à l'Université de Sherbrooke, doctorat qui jouera un rôle important dans la formation d'un premier noyau de chercheurs en enseignement des mathématiques.

Diénès, qui avait entrepris, avant son arrivée au Canada, un travail à l'Université de Leicester en Angleterre, à Harvard aux États-Unis et à l'Université d'Adélaïde en Australie, entretiendra de nombreuses collaborations (comme nous le montre l'extrait du rapport annuel ci-dessous) avec des chercheurs de différents pays.

[15] Le libellé du centre ne renvoie pas au terme didactique des mathématiques. Des recherches dans le domaine y seront toutefois menées, influencées par la double composante mathématique et psychologique.

Citons notamment Tamas Varga en Hongrie, Malcolm A. Jeeves à Adélaïde en Australie et John D. Williams en Angleterre.

> Plusieurs centres travaillent en étroite collaboration avec Sherbrooke. Mentionnons : (le) Heidelberg Maths Project, administré par A. Abele; Barcelone, administré par Ricardo Pons; Las Palmas, administré par J. B. Caparros Morata; Neuquéen, Argentine, administré par L. E. Cerdeyra; Porto Alegre, Brésil, administré par P. Grossi; l'Université Simon Fraser, administré par J. Trivett; l'Université de Dalhousie, Halifax, administré par G. Jeffery; The Fleming School, New York, administré par D. F. Correa; le Bulmershe Project, Reading, dirigé par Peter Seaborne; le projet Budapest, dirigé par Tamas Varga. (Diénès, 1973a, p. 24)[16]

Ces quelques données contextuelles étant précisées, nous soulignerons maintenant ce qui ressort de l'analyse des données examinées à partir de notre grille de lecture.

3.1.1 Un travail en didactique des mathématiques orienté par quelle finalité?

Ce projet est énoncé explicitement dans le rapport de 1973 portant sur les travaux accomplis, ou en cours, au centre. Celui-ci justifie en effet son existence dans l'ensemble de la documentation recueillie, d'une part, par le processus d'apprentissage des structures abstraites (ce qui fonde, guide les travaux de Diénès et de ses collaborateurs) et, d'autre part, par l'application de ces travaux dans les écoles (page V du rapport annuel du centre de recherche en psycho-mathématique, Université de Sherbrooke). Une certaine approche de la recherche en didactique des mathématiques y est sous-jacente, articulant les deux composantes : recherche sur le processus d'apprentissage des structures abstraites, expérimentation en classe. Il ne s'agit nullement de travailler sur le processus d'apprentissage des structures sur un plan théorique pour ensuite appliquer ceci dans la classe; les deux composantes sont, pour Diénès, interreliées. Ses travaux de recherches « ont toujours réuni les deux aspects: l'étude approfondie du processus et le travail dans les salles de classe, chacun de ces aspects alimentant l'autre d'hypothèses nouvelles » (page V).

Dans une entrevue récente réalisée avec Diénès, on retrouve le rationnel qui animait ces travaux de recherche, leur motivation profonde, toujours présente dans ses propos, à travers une certaine conception de l'activité mathématique sous-jacente : il parlera d'une certaine manière de penser (a structural thinking), mais aussi d'une certaine conception de l'apprentissage de ces structures.

---

[16] Au moment du rapport annuel que nous avons consulté (juin 1973), le centre avait six ans d'existence.

> Mathematics is characterized by structures, there is no denying this fact and in my opinion it is important to expose students to these structures as early as possible. This does not mean we tell them directly what these structures are but use mathematical games and other materials to help them discover and understand these structures. (Diénès, 2000, cité dans Sriraman et Lesh, 2007, p. 61)

À partir de cette façon de penser, le plaisir qu'il peut y avoir à faire des mathématiques va être au fondement, pour Diénès, de la création d'activités, de matériel, de jeux qu'il exploitera en classe avec les enfants.

> What I have been doing for over 50 years is not so much…but critical thinking about what mathematics is and what it can be used for and to have presented it as fun, as play, and in this sense it can be self motivating because it is in itself a fun activity. I have critiqued mathematics being presented as a boring repetitious activity as opposed to a way to think… as a way to train the mind…, understand patterns and relationships, in ways that are playful and fun. (Diénès, 2000, cité dans Sriraman et Lesh, 2007, p. 64)

3.1.2 Filiations théoriques des travaux menés au centre

Le travail de Diénès va s'appuyer sur une théorie de l'apprentissage des structures abstraites en six étapes (Diénès, 2000), théorie dans laquelle l'élève joue un rôle actif et où les concrétisations sont appelées à jouer un rôle-clé. Il s'agit là d'un des principes qui, pour Diénès, est à la base du processus d'abstraction, le « principe dit des concrétisations multiples ».

> One of the first things we should do in trying to teach a learner any mathematics is to think of different concrete situations with a common essence. (These situations) have just the properties of the mathematics chosen. Then children will learn by acting on a situation. Introducing symbolic systems prematurely shocks the learner and impetes the learning of mathematics.[17] (Diènès, 2000, cité dans Sriraman et Lesh, 2007, p. 61),

ce qu'il précisera davantage plus loin

> I thought of things like… the distributive law for instance. It is very hard to explain this law to somebody who is not a mathematician, but you can invent some games which work in exactly the same way, which you can play. (Diènès, 2000, cité dans Sriraman et Lesh, 2007, p. 62)
>
> The structural features one recognizes from the multiple embodiements – this brings out the essence of abstraction. Symbolism can be thrown in at this advanced stage, not earlier (Diènès, 2000, cité dans Sriraman et Lesh, 2007, p. 67).

[17] Les mises en garde qu'il fait sur le processus de symbolisation amené souvent trop tôt en mathématiques sont aujourd'hui toujours d'actualité.

La théorie de Diénès s'appuie sur certains principes centraux : un principe dynamique qui suggère que le processus d'apprentissage est un processus évolutif impliquant plusieurs étapes; un principe de concrétisations multiples à la base de l'abstraction, l'hypothèse sous-jacente étant que, confronté à diverses concrétisations, différentes en apparence mais présentant la même structure conceptuelle sous-jacente, les enfants tendront à abstraire les éléments semblables lors de leur activité dans ces diverses concrétisations, un principe de variabilité mathématique à la base de la généralisation. Ce principe suggère que la généralisation d'un concept mathématique, d'une structure, n'est possible que lorsque le concept est perçu sous certaines conditions, en faisant varier systématiquement des éléments non pertinents, tout en gardant les éléments pertinents constants (Diénès, 1960; Diénès et Jeeves, 1965; Post, 1981)

3.1.3 Orientations méthodologiques de ces travaux

Les travaux de recherche menés au centre s'inscrivent dans une orientation que l'on pourrait qualifier aujourd'hui de recherche-développement incluant, nous le verrons plus loin, une recherche évaluative. L'accent est mis sur le développement d'activités, de matériel, de programmes en lien avec un modèle théorique, une théorie de l'apprentissage des structures abstraites développée par Diénès que l'on cherche à documenter, dont on cherche à voir le potentiel et à cerner l'impact sur l'apprentissage des enfants. On trouve ainsi des études en classes avec expérimentations, observations, des activités menées à l'occasion dans des laboratoires sur des aspects spécifiques visant à mieux comprendre un aspect particulier (études cliniques) et des recherches évaluatives visant à cerner les effets des approches élaborées.

Lien avec la pratique : Un travail important dans les classes est mené dans cette perspective avec les professeurs et les enfants. Il porte sur des activités mises au point par les chercheurs et fondées sur une théorie de l'apprentissage des structures abstraites. À Sherbrooke, sept écoles sont impliquées. Ailleurs au Québec, d'autres écoles sont concernées : à Laval (3), à Outremont (1). D'autres travaux du même type sont menés ailleurs dans le monde, en collaboration avec d'autres chercheurs : en Allemagne (2 écoles), Angleterre (2), Hongrie (2), Italie (2), Nouvelle-Guinée (2), New York (1).

Un tel travail s'appuie sur une formation des enseignants impliqués dans ces expérimentations dans les écoles. Des ateliers sont ainsi donnés régulièrement aux professeurs par Diénès et ses collaborateurs au sujet des activités, du matériel, des programmes élaborés au centre.[18]

3.1.4 Quels objets?

Nous donnons ci-dessous quelques exemples de travaux de recherche menés au Centre de recherche en psycho-mathématiques dans les années 1970 (voir Diénès, 1973a). Ils illustrent les objets sur lesquels portent les recherches.

On travaille sur des processus, par exemple,

- l'investigation des processus de généralisation;
- l'abstraction et la généralisation : l'emploi de structures de groupes;
- l'interaction de l'abstraction et de la généralisation dans une consigne logique;
- les effets des relations structurales sur le transfert.

Et, en lien avec ces processus, sur certains contenus :

- les relations d'ordre et les suites;
- une approche expérimentale au concept d'ensemble;
- une comparaison de l'efficacité de différentes bases de numération, de différentes bases dans une démarche pédagogique développée pour l'apprentissage des fractions positionnelles;
- le comportement des enfants face aux situations aléatoires, fonction de la fréquence des événements.

D'autres aspects sont également abordés touchant au travail de groupe et à la communication, ou encore à l'articulation entre les mathématiques et d'autres disciplines, comme en témoignent les thèses de maîtrise suivantes supervisées au centre :

- aspects of communication in a group of learning situation (Williams), une étude qui porte sur une analyse de la dynamique de groupe et des communications dans une classe;
- la coordination des sujets dans l'enseignement (Cantieni), une analyse d'un projet coordonnant les arts plastiques et leur application pour un travail sur les structures.

---

[18] La mise au point d'activités et de programmes dans les écoles s'est avérée possible, durant cette période des années 1970, dans la mesure où existait alors au Québec un programme cadre, laissant place à des initiatives locales.

Des recherches évaluatives sont également menées dont voici quelques exemples :

- une comparaison de trois approches (Diénès, Cuisenaire et les méthodes traditionnelles d'enseignement des mathématiques), ayant, pour fin de comparaison, recours à des tests mathématiques, de résolution de problèmes, de compréhension des mathématiques, des questionnaires d'attitude;
- une comparaison des projets réalisés dans les écoles à Sherbrooke et à New York;
- une étude expérimentale des niveaux d'apprentissage d'une structure abstraite par les élèves de l'école élémentaire (1,2,3).

Ce travail de recherche s'appuiera à cette fin sur une construction et une standardisation de banques d'items et de tests.

3.1.5 Des retombées pour l'enseignement

> Like 50 years ago, the multibase blocks I brought in were regarded as absolute nonsense. Why did you do that? How could you possibly think of that as being of any use? Yet, now some people have finally understood. They have realized that it actually does teach children place value, the idea of the power as the exponent… (Diènès, 2000, cité dans Sriraman Lesh, 2007, p. 66)

Le développement, jumelé à ce travail de recherche dans les classes, aura des retombées importantes pour l'enseignement, prenant la forme de matériel, de programmes, d'activités, de jeux, comme en témoignent les productions suivantes :

- la construction d'un programme scolaire pour l'élémentaire réparti sur une période de six ans;
- quelques composantes d'un programme pour les écoles secondaires (basé sur les expériences concrètes de l'enfant) : un cours de logique, un cours sur les anneaux, sur les corps et espaces vectoriels, un cours d'introduction des nombres réels;
- la conception, construction de matériel didactique nouveau : on peut penser ici aux blocs multibases, aux blocs logiques, un matériel encore utilisé aujourd'hui;
- la conception de jeux, de manuels, de fiches de travail, de guides pour les enseignants;
- des publications pour les enseignants sous forme d'articles, ce qui implique une dimension de vulgarisation des recherches pour les enseignants;
- des films en boucle 8 mm;
- une importante production sur différents sujets : nombres; ensembles et logique; géométrie et probabilités; relations et fonctions; intégration de

différentes disciplines (arts, langage et mathématiques; langue et logique, langue et mathématiques).

En guise de conclusion : À travers ce qui précède se dégage une certaine conception du travail de recherche en enseignement des mathématiques et, par là, de la didactique des mathématiques, qui demeure toutefois implicite dans les écrits de Diénès. Cette didactique puise ses fondements dans les mathématiques (associées aux structures), dans une certaine conception de l'activité mathématique (établir des relations, percevoir des patterns, abstraire, généraliser) et dans la psychologie de l'apprentissage[19]. En s'intéressant au processus fondamental d'apprentissage des structures abstraites, Diénès poursuit avant tout des buts « pragmatiques », ce qu'il nous confirme d'ailleurs en rétrospective : « I have always been more practical in my theorizing than people like Piaget or Bruner. Let's stick the facts and see what is possible » (cité dans Sriraman et Lesh, 2007, p. 70)

3.2 Lunkenbein

Les travaux de Lunkenbein et du groupe de didacticiens (voir Allard et al., 1977) qui prend place par la suite à l'Université de Sherbrooke se situent dans la continuité de la pratique didactique mise en place par Diénès : celle-ci reste en effet articulée sur un travail avec les enseignants dans les écoles. Cette continuité semble a priori normale puisque Lunkenbein a été lui-même assistant de recherche au centre de Diénès pendant quatre ans. Il a été l'un des premiers étudiants à s'inscrire au programme de doctorat élaboré par Diénès en psychomathématique, avant de s'inscrire ensuite à l'Université Laval où il a complété ce doctorat. Il se distancie toutefois également, nous le verrons par la suite, de Diénès par les objets sur lesquels il travaille, les ancrages théoriques qui fondent ses travaux et une certaine conception de la didactique.

Ainsi tout en demeurant intéressé par le processus d'apprentissage des enfants (voir par exemple Lunkenbein, 1981, 1984-1985) comme l'était Diénès, et en restant influencé par les structures[20] (voir par exemple Lunkenbein, 1977b), il conduira des recherches différentes, portant sur l'apprentissage et l'enseignement de la géométrie dans les premières années de l'école élémentaire (voir par exemple Lunkenbein, 1980, 1983a; Mitchelmore et al., 1983).

---

[19] La formation première de Diénès est une formation en mathématiques. Il a par ailleurs complété des études en psychologie de l'apprentissage des mathématiques.

[20] Il s'agit moins en fait ici d'une influence venant des mathématiques, comme ce fut le cas pour Diénès, que d'une influence provenant de la théorie piagétienne. Son travail sur la notion de groupement puise en effet ses fondements chez Piaget.

Plusieurs textes de Lunkenbein nous permettent de préciser la conception de la didactique qui guide son travail (voir Lunkenbein, 1977a, 1983b). C'est sur celle-ci que nous reviendrons plus particulièrement maintenant à la lumière d'un article paru en 1983 dans le bulletin de l'AMQ (Association mathématique du Québec). Ce texte permet de comprendre l'ancrage de ses travaux.

3.2.1 Quelle didactique? Que recouvre-t-elle?

Lunkenbein nous rappelle tout d'abord que des conceptions diversifiées de la didactique sont présentes, variant d'un pays à l'autre, d'une institution à l'autre, voire d'un courant éducatif à l'autre. Ce préambule sur ces conceptions diverses de la didactique rejoint notre propos de départ sur la multiréférentialité de ce champ d'études. Ainsi, pour Brousseau (1982, cité dans Lunkenbein, 1983b), la didactique des mathématiques est « l'étude des phénomènes d'enseignement qui sont spécifiques de la connaissance enseignée sans être réductibles au domaine du savoir auquel elle appartient » (p. 27). Le lien avec les savoirs, au centre du travail didactique, est ici bien établi. Wittmann (1982, cité dans Lunkenbein, 1983b) conçoit la didactique comme « an interdisciplinary field of study strongly related to mathematics, pedagogy, psychology and practical teaching » (p. 27). Higginson (1980, cité dans Lunkenbein, 1983b) suggère un modèle « in terms of the tetrahedral interactions of its fundamental disciplines: mathematics, philosophy, psychology and sociology » (p. 27). Des différences ressortent de ces diverses définitions : pour certains, la psychologie et la pédagogie font partie des domaines dans lesquels puise la didactique (Wittmann), pour d'autres, la sociologie et la philosophie sont des sources importantes à considérer pour la didactique (Higginson). Une absente dans ces définitions, sauf chez Wittmann : la pratique de l'enseignement. C'est ce caractère interdisciplinaire présent chez Wittmann et Higginson, au carrefour de plusieurs domaines, que reprendra Lunkenbein, en y insérant la pratique de l'enseignement comme élément contribuant à la définition de la didactique.

Une certaine conception de la didactique des mathématiques.

Pour Lunkenbein, la didactique de la mathématique est conçue comme une théorie de la pratique de l'enseignement orientée par la tâche qui incombe à l'enseignant des mathématiques, une théorie conçue à partir de la pratique de l'enseignement et finalisée par celle-ci, conception que l'on retrouve chez Wittmann (dans Lunkenbein, 1977a). Il parlera ainsi de la didactique de la mathématique comme d'une science professionnelle de l'enseignant de mathématiques (Lunkenbein, 1983b). On retrouve donc en arrière-plan, chez Lunkenbein, une articulation très présente avec des préoccupations liées à la pratique réelle de l'enseignement des mathématiques et une prise en compte de l'enseignant. Cette conceptualisation de la didactique apparaît au carrefour de quatre domaines d'expertise qu'il nomme des « sciences-ressources » pour bien délimiter le rôle et la position qu'elles occupent par rapport au champ spécifique de la didactique des mathématiques. La dimension psychologique exprime la nécessité de tenir compte, selon lui, des processus d'apprentissage et des théories appropriées, dimension dans laquelle il inclura à l'occasion des réflexions de nature philosophique et sociologique[21]. La dimension mathématique exprime, pour lui, le fait que l'étude de l'apprentissage et de l'enseignement en mathématiques doit être centrée sur ce qui est appris ou enseigné. La dimension du savoir est donc ici incontournable. La dimension pédagogique rappelle la nécessité de s'intéresser à l'étude des interventions qui favorisent l'appropriation des connaissances mathématiques; une certaine prise en compte du pédagogique dans le didactique est donc nécessaire. Il est enfin intéressant de noter qu'une de ces ressources est la pratique de l'enseignement, ce qui confirme le rôle-clé joué par la pratique dans sa conception[22] (figure 1). Cette relation très forte entre la didactique des mathématiques et la pratique de l'enseignement est visible à travers les finalités que Lunkenbein poursuit dans ce travail de théorisation (Lunkenbein, 1977a).

> Partant de l'idée que « rien n'est plus pratique qu'un bon modèle théorique », nos considérations auront pour but d'élaborer un ou des modèles <u>qui nous seront utiles dans nos activités d'enseignement</u>. Ces modèles seront à modifier ou à rejeter <u>selon les indications que nous donnera leur utilisation pratique</u>. Plus particulièrement, nous recherchons un modèle qui joue les rôles suivants : offrir au théoricien <u>et au praticien</u> une base commune d'échanges et de discussions; <u>faciliter au praticien</u> la classification et la structuration d'informations et d'expériences; <u>aider le didacticien à garder le lien entre son travail et la pratique et à déterminer la position de son travail relativement à la réalité scolaire</u>; servir à la description objective d'activités d'enseignement, à leur organisation et à leur analyse. C'est dans cette optique que nous tenterons l'aventure de la théorisation. Notre intention n'est pas, en effet, de donner une image plus scientifique à une science essentiellement expérimentale et appliquée. (Lunkenbein, 1977a, p. 8-9)[23]

---

[21] La philosophie et la sociologie présentes chez Higginson comme sources fondamentales ne se retrouvent donc pas ici sur le même plan.

[22] Cette prise en compte de la pratique comme ressource dans la conceptualisation de la didactique arrive ici dès 1983, donc bien avant les travaux qui seront développés en didactique des mathématiques sur les pratiques d'enseignement. En ce sens, la position de Lunkenbein fait figure d'avant-garde. On voit mal, toutefois, dans cette caractérisation, comment cette pratique agit en tant que ressource.

[23] Le souligné dans le texte est de nous. Il vise à mettre en évidence cette articulation avec la pratique de l'enseignement.

L'action didactique va ainsi se vivre dans l'interaction entre des aspects disciplinaires, psychologiques, pédagogiques et la réalité scolaire (figure 1).

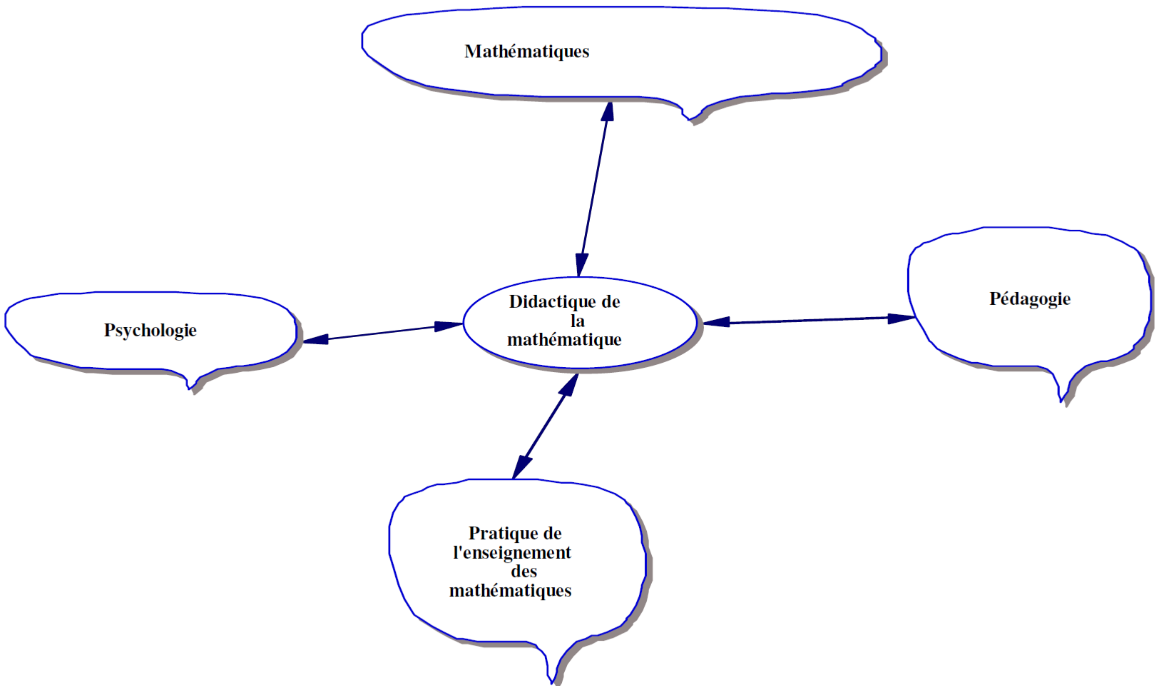


Figure 1 : conception de la didactique des mathématiques (adaptée de Lunkenbein, 1983b, p. 27)

Cette définition met en lumière les influences possibles de la part des sciences-ressources et de la pratique, et permet d'expliciter le jeu d'attentes à l'égard de celle-ci. Cette réflexion nous la reprenons ici, car elle nous semble toujours d'actualité (figure 2). En effet, on perçoit bien à travers cette analyse la situation conflictuelle que vit le didacticien lorsqu'il tente de justifier son travail et de délimiter celui-ci. Du point de vue du mathématicien, pour remplir convenablement la tâche d'un enseignant, une connaissance approfondie du contenu suffit. La didactique des mathématiques se réduit alors à des analyses mathématiques de contenus, niant ainsi le regard spécifique que le didacticien peut être amené à poser sur les mathématiques elles-mêmes. La vision psychologique des problèmes peut être de son côté à l'origine de distorsions considérables, et la didactique des mathématiques, vue comme une application particulière de la pédagogie, conduit au danger de négliger la spécificité de l'activité mathématique dans les analyses réalisées. On conçoit par ailleurs, avec cette analyse, qu'il n'est pas facile pour le didacticien de ne pas céder aux pressions du praticien et de ne pas formuler trop vite des suggestions pratiques à partir de résultats de recherche.

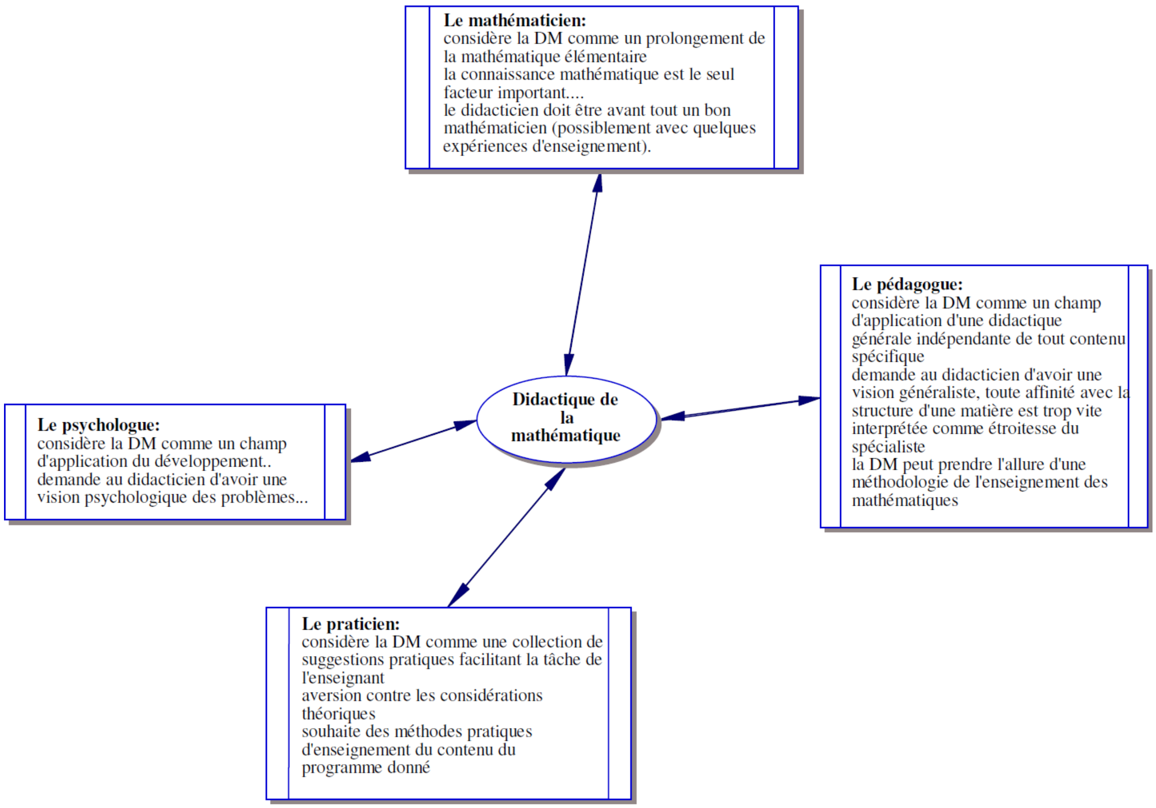


Figure 2 : attentes et influences des sciences-ressources et de la pratique de l'enseignement (adaptée de Lunkenbein, 1983b, p. 29)

3.2.2 Finalités du travail en didactique des mathématiques : quel projet?

Une relation très forte entre les travaux de recherche en didactique des mathématiques et la pratique de l'enseignement apparaît, nous l'avons vu précédemment, dans les finalités du travail poursuivi. Celle-ci rappelle les origines de ce champ d'étude « qui sont l'enseignement scolaire de la mathématique avec les problèmes qu'il soulève » (Lunkenbein, 1983b, p. 27) et les finalités de son travail qui sont « l'amélioration et l'avancement de l'enseignement de la mathématique à tous les niveaux scolaires » (Lunkenbein, 1983b, p. 27).

La distinction que fait par ailleurs Lunkenbein entre divers travaux de recherche en didactique des mathématiques permet de situer, dans le champ de la DM, les préoccupations premières du didacticien enseignant et du didacticien chercheur, associées à des intentions différentes[24]. Dans le premier cas, le travail didactique

---

[24] On peut faire un lien ici avec la distinction que fait Martinand (1993) entre didactique praticienne et didactique prospective (didactique de recherche), à laquelle il ajoutera également la didactique normative (celle des programmes, évaluations).

vise l'enseignement d'une connaissance mathématique donnée et les actions didactiques portent sur

> des activités d'enseignement, (elles consistent) en l'élaboration et la description de méthodologies, en la production de matériel d'enseignement, en la suggestion de programmes, de modes d'évaluation, bref elles comprennent toutes les actions didactiques qui visent à produire, à faire produire ou reproduire une activité d'enseignement… (Lunkenbein, 1983b, p. 27)

Dans le second cas, le travail du didacticien vise d'abord à expliquer les phénomènes d'enseignement.

3.2.3 Filiations théoriques des travaux menés

Les travaux de recherche menés par Lunkenbein sont orientés par une conception, que lui-même qualifiera de « génétique », de l'enseignement de la mathématique, conception influencée par Piaget et Bruner. Nous trouvons clairement ces influences dans ses travaux portant sur la notion de groupement et la formation de concepts en géométrie (voir notamment Lunkenbein, 1977b, 1981)

> La pratique de l'enseignement est envisagée comme lieu privilégié pour stimuler, encourager et diriger le développement chez l'enfant ou l'individu, de structures intellectuelles dont les apprentissages ne se font pas de façon spontanée. La didactique basée sur une conception génétique de l'apprentissage de la mathématique tentera donc d'agir sur la réalité scolaire et sur la pratique de l'enseignement en vue de la construction de connaissances par l'individu lui-même… (Lunkenbein, 1983b, p. 30).

Cette conception vient baliser en retour le rôle des sciences-ressources, la façon dont elles vont être vues (voir figure 3).

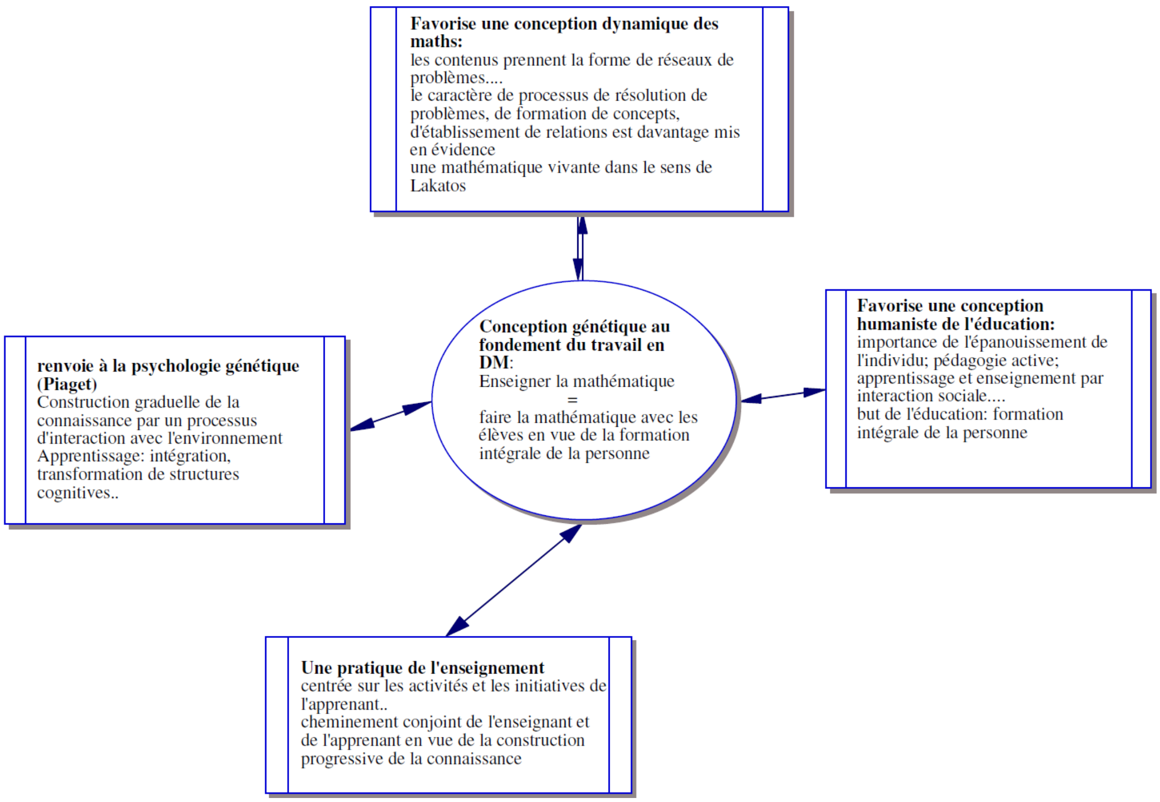


Figure 3 : conception génétique de l'enseignement de la mathématique, influences sur les sciences-ressources et la pratique de l'enseignement (adaptée de Lunkenbein, 1983b, p. 31)

En guise de conclusion : Le travail mené dans les années 1980 à l'Université de Sherbrooke autour de Lunkenbein prend donc une orientation quelque peu différente de celle que lui avait donnée Diénès. Une certaine vision de la didactique des mathématiques[25] prend forme autour d'un projet dont les racines sont à chercher dans la pratique de l'enseignement des mathématiques, les problèmes auxquels il est confronté, et dont la finalité est l'amélioration et l'avancement de cet enseignement. Les influences de la théorie piagétienne seront ici très importantes, guidant le chercheur, lorsqu'il aborde l'enseignement, dans une certaine direction. Les recherches sur l'enseignement de la géométrie à l'élémentaire illustrent clairement cette influence.

Avec les groupes de recherche qui suivent, nous nous déplaçons géographiquement vers une autre région, celle de l'île de Montréal.

---

[25] Le terme didactique est ici explicite, ce qui n'était pas le cas chez Diénès. Rappelons que le centre portait le nom de Centre de recherche en psycho-mathématique.

3.3 Le Centre de recherche en didactique

Le Centre de recherche en didactique[26] (CRD) a été créé le 17 septembre 1969 et il a ouvert ses portes le 1er juin 1970 au pavillon Émile-Gérard de l'Université du Québec à Montréal. Albert Morf[27], attaché au Département de psychologie de l'UQÀM, en a été le premier directeur. Plusieurs autres chercheurs y ont été impliqués, tels Tamara Lemerise de l'UQÀM, Michel Carbonneau et Ali Haramein de l'Université de Montréal et d'autres[28].

Plusieurs étudiants, venant de l'Université de Montréal et dirigés par Albert Morf, y ont mené leurs travaux : Michel Desjardins, Jean-Claude Hétu, étudiants au doctorat, Thérèse Migneron, Robert Cadotte, Martine Ross-Burger, étudiants à la maîtrise. Deux thèses portaient sur l'enseignement des mathématiques, celles de Michel Desjardins et de Jean Claude Hétu.

Plusieurs projets de recherche ont touché, au fil du temps, aux mathématiques, impliquant plusieurs chercheurs et étudiants aux études supérieures (Maurice Bélanger, Michel Desjardins, Jean-Claude Hétu, Hélène Kayler, Claude Dubé, plus tard Nadine Bednarz, Louise Poirier, Sylvine Schmidt). En dix ans, le CRD a connu quelques déménagements jusqu'à sa fermeture en 1980. Dans ce centre, les séminaires étaient nombreux et on discutait ferme. Ces discussions, nous le verrons par la suite, cherchaient à asseoir la didactique sur des principes solides et à lui donner un caractère scientifique. C'est ainsi qu'a germé l'idée, dès 1971, d'organiser un symposium sur la didactique et d'y inviter Jean Piaget du Centre international d'épistémologie génétique de Genève, Jean-Blaise Grize du centre de recherches sémiologiques de Neufchâtel en Suisse, Jack Easley, Klauss Witz de l'Université d'Illinois, tous deux didacticiens des sciences, Pierre Gréco de l'École pratique des Hautes Études à Paris, Seymour Papert du MIT à Boston, Gaston Mialaret de l'Université de Caen en France. Ce symposium a été enregistré et la transcription des cassettes audio, contenant les présentations et les discussions, de même que des traces diverses (programmes, mémos, résumés des conférences) en plus de l'ensemble des rapports annuels, constitue les données qui nous ont permis de mieux comprendre le travail qui était mené dans ce centre. En 1973, un

---

26 Comme son nom l'indique, les travaux du centre ne se situent pas exclusivement en didactique des mathématiques. Nous avons toutefois jugé bon de nous attarder à ce centre qui a joué un rôle important dans la réflexion théorique qu'il a initiée et qui a regroupé en son sein un certain nombre de chercheurs en didactique des mathématiques.

27 Albert Morf a travaillé au préalable avec Adrien Pinard et Thérèse Gouin-Décarie à l'Institut de psychologie de l'Université de Montréal.

28 Nous tenons tout particulièrement ici à remercier Pauline Provencher qui nous a aidée à situer le contexte dans lequel a pris place le CRD.

autre symposium portant sur les fondements scientifiques de la didactique, organisé par Michel Desjardins, Carole Ledoux et Louise Forest, réunissait des conférenciers d'universités québécoises et étrangères, notamment Hans Aebli (Université de Berne), François Bresson (Université de Paris), Jean Paul Brodeur (UQÀM), Jean-Claude Gagnon (Université Laval), Jean-Blaise Grize (Université de Neufchâtel), Gérard Vergnaud (Université de Paris) (voir Morf, 1973-1974, p. 32)

3.3.1 Finalités du travail en didactique : quel projet?

Pour Albert Morf et les chercheurs du centre, la finalité du travail est claire. Il s'agit d'asseoir la didactique sur des principes solides, sur des bases scientifiques, pour que celle-ci puisse être considérée comme une véritable science.

« Les travaux du centre sont destinés essentiellement à contribuer à la construction d'une théorie progressivement scientifique des processus d'enseignement » (voir Morf, 1973-1974, p. 4).

Cette finalité délimite les travaux de recherche qui y seront poursuivis. Ainsi y lit-on : « Les programmes de recherche évitent des études de portée empirique et visent surtout des objectifs qui accroissent les fondements même dans les travaux qui touchent directement la réalité scolaire » (Morf, 1973-1974, p. 4).

L'organisation du symposium de 1971 sur les fondements scientifiques de la didactique (réunissant Piaget, Gréco, Papert, Easley et Witz, Grize, Mialaret, les chercheurs du centre et d'autres chercheurs du Québec) confirme cette orientation donnée aux travaux du centre.

Nous verrons maintenant comment cela se traduit plus spécifiquement dans les recherches conduites en didactique des mathématiques.

3.3.2 Les travaux de recherche menés en didactique des mathématiques : quel projet? quels objets? quelles filiations théoriques? quelles approches

Plusieurs projets de recherche portant sur l'enseignement des mathématiques prendront place entre les années 1970 et 1980 :

- Intervention et évolution des états de connaissance dans la didactique des sciences à l'élémentaire (responsable : Maurice Bélanger). Dans ce travail qui portera sur les mesures, un lien avec les mathématiques peut être fait (ce projet est cité dans Morf, 1973-1974, 1974-1975, 1976-1977);
- Problèmes didactiques dans l'apprentissage des mathématiques au niveau de l'élémentaire en milieux défavorisés (responsable : Maurice Bélanger) (cité dans Morf, 1974-1975, 1976-1977; Bélanger, 1977-1978);
- Algorithme et connaissance (responsable : Michel Desjardins) (cité dans Morf, 1973-1974);

- Communication, symbolisation et initiative en situation didactique (responsable : Michel Desjardins) (cité dans Morf, 1974-1975);
- La compréhension en mathématiques chez l'enfant de l'élémentaire (responsable : Nadine Bednarz)[29] (cité dans Morf, 1976-1977; Bélanger, 1977-1978).

Nous reviendrons plus spécifiquement sur certains de ces projets.

3.3.2.1 Intervention et évolution des états de connaissance dans la didactique des sciences à l'élémentaire (responsable : Maurice Bélanger). Cette équipe, qui a réuni au fil du temps plusieurs chercheurs, enseignants et assistants de recherche[30], a travaillé sur la didactique des sciences à l'élémentaire. Plusieurs programmes, traductions en langue française de programmes américains, approuvés par le ministère de l'Éducation dans le programme-cadre de 1970, sont alors utilisés dans les écoles. Peu de données sont toutefois disponibles, comme le mentionne Morf, 1973-1974 dans le rapport annuel, sur ces programmes et leur influence sur la construction de connaissances par les enfants.

« Les quelques études faites aux États-Unis ou au Canada ne permettent pas de comprendre quels sont les aspects des méthodes qui ont des effets souhaitables sur l'évolution des connaissances scientifiques chez les enfants » (Morf, 1973-1974, p. 5). Cette absence de savoirs sur le rôle des interventions dans l'évolution des connaissances des enfants est à l'origine du présent projet de recherche. Sa visée au départ, comme nous le verrons par la suite, est théorique.

Quel projet?

La visée théorique du projet est clairement énoncée dans le rapport annuel (Morf, 1973-1974 :

> Un grand nombre de recherches en éducation sont faites de façon empirique et ne peuvent alors fournir que des faits qu'il est impossible de relier entre eux. Nous avons voulu élaborer un schème de référence qui nous permette de situer nos résultats, cela explique que la première partie du travail (1971-1972, 1972-1973) soit effectuée surtout à un niveau théorique. (Morf, 1973-1974, p. 6)

---

[29] Avec ce projet de recherche, Nadine Bednarz a été impliquée au CRD vers la fin de la vie du centre. Différents chercheurs sont intervenus dans ce projet portant sur la compréhension en mathématiques à l'élémentaire : Charles de Flandre, Claude Dubé, Hélène Kayler, André Boileau du Département de mathématiques de l'UQAM. Les chercheurs Zoltan Diénès, Gérard Noelting, et Dieter Lunkenbein ont travaillé avec l'équipe à titre de consultants.

[30] L'équipe des sciences était formée, par exemple en 1974-1975, de Maurice Bélanger, Nicole Fortin, Robert Letendre, Elie Martin, Bernard Lefebvre, Alain Constant, Denise Frigonon, Hélène Gagnon, Hélène Lajoie, Bernadette Ostiguy, Céline Roy, André Roux, Guy Boisvert, Lina Tremblay.

Cette visée est confirmée dans le travail anticipé par l'équipe pour 1973-1975 :

« Dans les années 73-74 et 74-75, nous voulons étudier des connaissances précises dans le domaine des sciences pour mettre à l'épreuve notre schème théorique et en même temps construire des types d'interactions utilisables par les maîtres d'école » (Morf, 1974-1975, p. 6). Les connaissances que l'équipe a choisi d'étudier sont celles relatives à la mesure (mesure de longueur, mesure de poids, …) et les interventions qui sont plus spécifiquement ciblées sont ce que les chercheurs appelleront « des interventions-problèmes »[31].

Toutefois on retrouve, par la suite, dans ce projet (Morf, 1974-1975), un aspect pratique, la démarche de recherche mettant l'accent sur l'élaboration de problèmes de sciences en collaboration avec des enseignants ainsi que leur expérimentation dans les écoles (projet nommé « Boîte de sciences ») :

> Avec un groupe de professeurs de Ville de Brossard, nous avons élaboré une série de situations-problèmes qui ont été expérimentées dans leur classe de 6e année. D'autres professeurs se sont ensuite joints au groupe initial et nous avons pu former un matériel de quelques 40 situations-problèmes. Le matériel nécessaire à chaque situation-problème fut présenté dans une boîte séparée d'où le titre du projet : projet boîtes des sciences. Ces boîtes de sciences sont présentement en expérimentation dans deux écoles, ce qui nous permettra au cours de l'année d'évaluer comment cette méthode a favorisé l'évolution des connaissances scientifiques de ces enfants. (Morf, 1974-1975, p. 5-6)

Deux aspects sont ainsi imbriqués :

- un aspect développement issu de la recherche : constitué d'un matériel de 40 situations-problèmes.
- un aspect recherche centré sur : d'une part, l'analyse de la démarche faite par l'enfant pour résoudre un problème issu de ces boîtes de sciences (conception initiale du problème, modification de ses connaissances à partir de l'expérimentation avec les objets); d'autre part, l'étude des « schèmes » d'une équipe de professeurs (système de concepts, valeurs…) dans leur travail d'élaboration d'une didactique, de construction d'une stratégie d'intervention.

On perçoit la visée théorique évidente de ce projet :

> Il ne faut pas négliger l'aspect théorique qui consiste, en relation avec un autre projet du CRD, à déterminer le rôle très important joué par l'ensemble des concepts et des valeurs du créateur de programme dans l'organisation de son programme. Ce système de valeurs, appelé « les schèmes du maître », m'est apparu être la

[31] Interventions articulées sur une situation-problème.

> pierre angulaire de la construction d'une stratégie d'intervention. Le projet « Boîtes des sciences » nous a permis d'étudier les schèmes d'une équipe de professeurs dans leur travail d'élaboration d'une didactique. (Morf, 1974-1975, p. 6)

Quelles sont les filiations théoriques de ces travaux?

Un certain cadre de référence sous-jacent est explicité dans le rapport annuel 1973-1974 (Morf, 1973-1974) à travers les raisons invoquées par le chercheur pour motiver le projet. Ce cadre de référence, que l'on pourrait aujourd'hui associer au constructivisme, a l'intérêt, surtout pour nous, d'être resitué par rapport à d'autres cadres de référence fondant les recherches de l'époque en enseignement des sciences. On perçoit bien à travers ces propos la petite révolution qui est en train de s'opérer :

> 1) Les méthodes actuelles (on fait ici allusion aux recherches de l'époque, surtout anglo-saxonnes) postulent que l'enfant ne possède aucune connaissance au point de départ, ou que, s'il en possède, il n'est pas utile d'en tenir compte; nous travaillons avec l'hypothèse qu'il faut en partie baser l'intervention sur l'organisation initiale des connaissances de l'enfant;
>
> 2) Ces méthodes sont aussi fondées sur le postulat que la connaissance se développe par addition de nouvelles connaissances; nous faisons l'hypothèse que l'évolution se fait par une restructuration des connaissances;
>
> 3) Nous voulons rechercher dans les aspects épistémologiques de l'intervention ses rapports avec la transformation des connaissances chez l'enfant. (Morf, 1973-1974, p. 5)

Quelles approches de recherche?

Une certaine manière d'approcher la recherche transparaît dans le développement de la recherche à travers le temps, comme nous le montre le travail autour du projet « Boîte des sciences » :

« Nous poursuivons un style de recherche qui puisse établir une relation entre un ensemble de concepts théoriques développés jusqu'ici et la pratique de la classe » (Morf, 1973-1974, p. 7).

3.3.2.2 Algorithme et connaissance (responsable : Michel Desjardins). Une équipe formée de chercheurs du CRD, de professeurs du Département de mathématiques de l'UQÀM, de spécialistes en sciences et d'enseignants à l'élémentaire a été impliquée dans ce projet à caractère théorique[32].

Quel projet?

Ces travaux avaient pour objectif principal

> d'étudier les conditions didactiques favorables à l'élaboration d'algorithmes par l'enfant, tant en mathématiques qu'en sciences. L'hypothèse principale était que l'élaboration d'algorithmes représentait une condition utile pour l'opérationnalisation momentanée des états de connaissance de l'enfant ainsi que pour leur transformation subséquente. (Morf, 1973-1974, p. 11)

Quelles approches de recherche?

Les approches développées, très près de celles développées en France par Brousseau, prônent un retour constant à l'expérimentation en classe. Les connaissances des enfants sont ici considérées « comme des produits des situations didactiques » (Morf, 1973-1974, p. 11).

Dix expériences pédagogiques différentes ont ainsi été menées dans les écoles (Outremont, Longueuil, Saint-Mathias-sur-Richelieu), conduisant à la description et l'analyse fine de celles-ci, permettant une compréhension des faits observés sur le plan des connaissances des enfants en lien avec les situations didactiques.

3.3.2.3 Problèmes didactiques dans l'apprentissage des mathématiques à l'élémentaire en milieux défavorisés (responsable : Maurice Bélanger). En 1973, dans le prolongement de la recherche en didactique des sciences à l'élémentaire, un nouveau projet est initié, en collaboration avec les écoles, avec une équipe d'étudiants, de chercheurs de l'UQÀM et de l'Université de Montréal, tous intéressés aux problèmes de l'enseignement et de l'apprentissage chez des enfants de milieux défavorisés.

Un camp d'été destiné aux enfants de ces milieux (dans Pointe-Saint-Charles, Saint-Henri) a été mis sur pied à l'été 1974, camp au cours duquel les étudiants impliqués dans la recherche travaillent en ayant recours aux situations-problèmes développées dans le projet « Boîtes de sciences ». Cette expérience a mené à un certain nombre d'observations sur le processus de résolution mis en œuvre par les enfants de ces milieux : « ces enfants ont une façon particulière de raisonner, de penser et, en général, de faire face à des problèmes, une façon différente de

---

[32] En 1973-1974, par exemple, l'équipe était formée de Michel Desjardins, Viviane Aubé-Tremblay, Daniel Desjardins, Louise Desroches, Claude Dubé, Louise Forest, Andrée Lallo, Carole Ledoux, Reine-Claire Lussier, Guy Boisvert, Denis Ledoux. Guy et Nadine Brousseau sont intervenus comme invités dans le cadre de ce projet.

conceptualiser, de classer les données et même d'entrer en contact avec le plus simple des problèmes » (Morf, 1974-1975, p, 6).

Cette première expérience sera à l'origine d'un projet de recherche qui s'étalera sur plusieurs années.

Quel projet?

On cherche ici à mieux connaître le fonctionnement de ces enfants et à développer des stratégies particulières d'intervention. Le projet rejoint ainsi, dès cette époque, une préoccupation d'adaptation partagée par plusieurs chercheurs actuels en didactique des mathématiques au Québec. Il est centré sur « l'étude d'un sous-groupe d'enfants de milieux défavorisés dans le but de créer pour eux une didactique appropriée » (Morf,1974-1975, p. 5).

Quels objets?

Ce travail amènera les chercheurs à explorer le concept théorique de « connaissance défavorisée, pris ici au sens d'une hypothèse intuitive susceptible de donner de nouvelles orientations de recherche dans le domaine de l'éducation en milieu défavorisé » (Morf, 1973-1974, p. 8). Par ce biais, il les amènera à s'intéresser aux erreurs des élèves, et à l'élaboration d'interventions didactiques appropriées.

Quelles filiations théoriques?

On retrouve clairement, en arrière-plan de ce travail sur les erreurs, les postulats énoncés ci-après, postulats qui sont fondés sur l'épistémologie constructiviste de Piaget :

1) L'analyse des erreurs révèle que la majorité de ces erreurs sont le résultat de processus que l'enfant a lui-même construit.
2) Ces processus donnent de faux résultats du point de vue mathématique, mais ils ont en eux-mêmes une cohérence et une logique interne. Du point de vue de l'enfant, ces processus sont valables.
3) Nous postulons qu'il existe des familles d'erreurs en mathématiques qui sont basées sur ces processus communs.
4) Les processus construits par l'enfant sont souvent le résultat des stratégies d'enseignement, décrites dans un manuel ou utilisées par le professeur.
5) Pour construire des stratégies d'intervention, il est indispensable que le chercheur ou le maître ait analysé l'erreur afin de découvrir le processus construit par l'enfant qui donne ces erreurs mathématiques. (Bélanger, 1977-1978, p. 8)

Quelles approches méthodologiques?

Cette recherche donnera lieu à une série d'études de cas et à l'élaboration de protocoles d'entrevue pertinents à l'analyse des erreurs. On a recours à l'une des méthodologies qui sera particulièrement importante en didactique des mathématiques par la suite, autour de la mise au point de protocoles d'entrevues didactiques.

3.3.3 De quelle didactique parle-t-on?

Le symposium organisé en 1971 sur les fondements scientifiques de la didactique[33] et les notes des échanges entre les chercheurs durant le symposium sont ici particulièrement instructifs. Ils nous renseignent en effet sur différentes conceptions de la didactique présentes au cœur du débat et sur la question des rapports entre la psychologie cognitive et la didactique, un enjeu majeur au moment où se précise le champ de la didactique des mathématiques au Québec.

Ainsi, le symposium mettait en place les éléments nécessaires à une discussion sur ce qu'est la didactique, ce qu'elle recouvre, son objet et les méthodes de recherche qui en découlent. Nous ne reprenons ici que quelques éléments de la discussion[34] pour illustrer les différentes conceptions qui émergent :

> Je vous proposerais de prendre le terme de didactique comme un terme qui couvre les efforts de recherche et de conceptualisation relatifs à l'action sur quelqu'un, pouvant être un élève, une classe, un groupe quelconque, en vue d'intervenir sur le développement de ses connaissances. (Discours d'ouverture du symposium, 1971, p. 2)
>
> Le problème didactique, mot dans lequel je ne vois rien de péjoratif, c'est l'ajustement des méthodes d'enseignement par rapport aux problèmes généraux de la pédagogie. (Discours d'ouverture, discussion, 1971, p. 4)

---

[33] Dans les différents mémos relatifs au symposium, différents titres apparaissent : « La validité de la psychologie génétique comme fondement de la didactique » (plan du symposium, document n° 1); « Fondements scientifiques de la didactique » (mémo); « La psychologie opératoire : sa portée comme science de référence pour la didactique » (compte rendu du symposium, plan provisoire). Quoi qu'il en soit, le symposium se voulait l'occasion de discuter ouvertement de toutes les questions que pose la recherche scientifique dans le domaine de la didactique. On y retrouvait le projet sous-jacent du CRD à travers la question de fond ici débattue : pouvons-nous parler d'une didactique scientifique, au sens de « faire scientifiquement ce qui était fait de façon artisanale autrefois? chercher des faits spécifiquement didactiques à travers une pratique de la didactique, cette pratique pouvant s'appuyer sur des moyens scientifiques d'analyse; identifier-reformuler-résoudre scientifiquement les problèmes d'enseignement qui se posent » (Mémo, 1971, s. p.).

[34] Nous ne prétendons nullement ici à une analyse systématique des propos ce qui demanderait un codage complet des retranscriptions.

> X a dit que la didactique lui paraissait pouvoir et devoir être conçue comme une science et comme une science à part entière, et il a dit à cet égard qu'il était fondé sur – que naturellement la didactique devait fonder – des pratiques d'enseignement et qu'on pouvait la concevoir comme une science théorique. Est-ce que (cette science) c'est simplement la théorisation des actions et des interactions du maître et de l'élève? (Discussion sur la conférence de Grize, p. 11)

> J'inclinerais aujourd'hui à penser que la théorie didactique, s'il doit y en avoir une, est une théorie à plusieurs facettes, parce que la didactique en tant que telle ne me semble pas du tout être une science au sens habituel où l'on prend ce terme, (référant plus loin au terme « technologie ») nous disons technologie parce que l'enseignement et la didactique ne sont pas des sciences, ce sont des pratiques. La médecine n'est pas une science, la biologie est une science, la médecine n'est pas une science. (Discussion sur la conférence de Grize, p. 12)

À travers les propos précédents, la didactique est conçue comme une science permettant de fonder des pratiques d'enseignement ou, à l'opposé, une praxéologie, renvoyant à des pratiques. Le terme est utilisé dans un sens large portant sur les interventions d'un individu sur les connaissances d'autrui (pas seulement celles relatives à l'enseignement) ou, dans un sens plus spécifique, s'intéressant à l'enseignement et aux interactions entre un maître et des élèves.

La relation didactique-psychologie est aussi interrogée et une distance nécessaire par rapport à la psychologie se dégage clairement des discussions. Celle-ci n'apparaît nullement comme une base suffisante et adéquate pour la conception d'enseignements ou de stratégies d'action « sur un élève ». Une importation des concepts, des méthodes est impossible et ceux-ci ne peuvent être choisis déductivement à partir de la psychologie, dira lui-même Piaget :

> [il y a] nécessité de constituer une étude spéciale de la didactique à la fois appuyée sur la psychologie et très distincte de la psychologie […] s'adapter à une classe, c'est vraiment tout autre chose que de faire de la psychologie sur des élèves du même âge. Il est absolument exclu de penser que l'on puisse tirer directement de la psychologie une didactique […] Je pense par exemple à l'enseignement de l'arithmétique, il peut y avoir toutes sortes de manières de présenter les choses. Le psychologue ne peut pas vous dire a priori que celle-là est meilleure que celle-là. Il faut faire des expériences didactiques, et pas des expériences psychologiques, expériences didactiques qui sont, bien entendu, beaucoup plus laborieuses [en raison du temps qu'elles prendront]. C'est donc une science qui me paraît nécessaire à fonder, mais beaucoup plus délicate que la psychologie, beaucoup plus coûteuse parce qu'elle prend beaucoup plus de temps et suppose plus d'efforts. (Discours d'ouverture, Morf, 1971, p. 4-6)

Un dernier élément qui ressort de ce symposium touche à l'importance de la dimension épistémologique qui, elle, apparaît fondamentale pour les travaux de recherche en didactique. Ainsi, si la théorie opératoire apparaît comme un point de repère fondamental[35] pour la recherche en didactique des mathématiques[36] (ce que l'on perçoit bien dans les travaux du centre repris précédemment), c'est plus, comme le dit lui-même Piaget, comme une référence épistémologique.

> Il n'y a pas moyen d'utiliser la psychologie opératoire, quel que soit le parti qu'on veut en tirer, sans mettre l'accent sur l'épistémologie. La psychologie opératoire est née d'une épistémologie. C'est parce que je me suis posé par exemple des problèmes épistémologiques que j'ai rencontré le problème de la conservation. (Discussion sur la conférence, Bélanger, 1971, p. 1)

En guise de conclusion : Il se dégage de ce noyau de chercheurs, un projet spécifique finalisé par l'établissement d'une didactique scientifique, plus proche en cela des travaux de la didactique élaborée en France que des travaux de recherche menés à la même époque dans le centre de recherche de Diénès. Il s'agit de travaux de recherche dont les fondements vont toutefois puiser à la théorie piagétienne et l'épistémologie constructiviste, rejoignant en cela ceux menés plus tard à Sherbrooke avec Lunkenbein.

3.4 La section didactique de l'UQÀM

La section didactique du Département de mathématiques de l'Université du Québec à Montréal constitue l'un des noyaux les plus importants (en termes de nombre) de didacticiens des mathématiques au Québec dans les années 1970-1980. On comptait en effet 17 didacticiens dans cette section dans les années 1980[37].

Plusieurs de ces didacticiens s'impliqueront, dans les années 1970, dans un programme important de perfectionnement des enseignants en mathématiques s'adressant à l'ensemble des enseignants du Québec, connu sous le nom de Permama. De nombreux cours y seront conçus; du matériel, des films en collaboration avec Radio-Québec autour de différents sujets (travail sur les nombres, sur les fonctions, l'algèbre, les statistiques, la pédagogie du projet…) y

---

[35] Avec d'autres épistémologies qui sont également mentionnées dans les discussions (épistémologie des sciences, épistémologie de la pratique).

[36] Cette dimension apparaît particulièrement importante dans les travaux de recherche qui ont été développés au Québec (voir les projets menés au CRD dans les années 1970, les recherches de Lunkenbein dans les années 1980, et par la suite les travaux menés au CIRADE dans les années 1980-1990).

[37] Un premier noyau, provenant du Collègue Ste-Marie, se structure autour de la formation des enseignants en mathématiques, l'un des axes de l'UQÀM dès sa création. On retrouvera dans cette section, notamment Claudette Maury, Liliane Bulota, Bernadette Janvier, Claude Janvier, Gilbert Paquette, Claude Gaulin, Hélène Kayler, Claude Dubé, Jacques Lefebvre, Léon Colas, Nadine Bednarz, Maurice Garançon; s'y sont ajoutés par la suite Charles de Flandre, André Boileau, Louis Charbonneau, Carolyn Kieran, Benoît Côté, Alain Taurisson, Richard Pallascio.

seront réalisés; des cours y seront donnés. Cette expérience de formation continue à grande échelle, avec la réflexion et les échanges importants qu'elle suscitera lors de l'élaboration du matériel, sera un élément déterminant dans l'évolution de certains travaux de recherche en didactique des mathématiques par la suite.

La formation des enseignants constitue l'un des axes de l'université dès sa création, de telle sorte que les didacticiens seront appelés, dès les années 1970, à intervenir en formation initiale dans le baccalauréat en enseignement préscolaire primaire, dans le baccalauréat en enseignement au secondaire, donnant au fil du temps à ce programme une orientation très spécifique et différente de ce que l'on trouvait dans les autres universités à la même période (voir Bednarz, 2001; Bednarz et al., 1995). Ils seront aussi appelés au fil du temps à intervenir dans de nombreux programmes de perfectionnement : certificat en enseignement des mathématiques au primaire, certificat sur la résolution de problèmes, certificat sur l'utilisation de l'informatique dans l'enseignement. Ils seront enfin appelés à intervenir dans la maîtrise en mathématiques, option enseignement, ou la maîtrise en enseignement au primaire, et dès sa création en 1987, dans le programme de doctorat en éducation.

3.4.1 Quel projet pour ce groupe de didacticiens?

Les orientations que prennent les travaux de recherche en didactique à l'UQÀM s'articulent dès le départ sur une préoccupation de formation des enseignants en mathématiques. L'équipe sera en effet amenée, dans l'action, à réfléchir sur la façon dont on peut préparer les étudiants à enseigner les mathématiques, à développer de nouvelles manières de voir l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. L'implication, dans la formation des enseignants au secondaire, dans différentes composantes de cette formation – mathématique, didactique, formation pratique via l'encadrement des stages, histoire des mathématiques ou utilisation de l'informatique dans l'enseignement – donnera lieu à la conception d'un programme intégré et à différentes activités. Seront ainsi élaborés des cours de mathématiques spécifiques (structures numériques, résolution de problèmes, géométrie, initiation à l'analyse) (voir par exemple Boileau et Garançon, 1993), des cours de didactique, avec une forte composante de la prise en compte de l'élève, de son apprentissage et des situations d'enseignement, en articulation avec la pratique réelle d'enseignement (voir Bednarz, 2001; Bednarz et al., 1995; Bednarz et Gattuso, 1999; Dufour-Janvier et Hosson, 1999), des cours intégrant la composante technologie dans l'enseignement des mathématiques (voir Boileau, 2008) ou encore la composante historique (Charbonneau, 1992). Ce travail aboutira à une complexification graduelle des activités proposées, et permettra de préciser a posteriori une certaine didactique de formation (Bednarz, 2001; Bednarz et al., 1995; Dufour-Janvier et Hosson, 1999). On retrouve cette même implication des didacticiens dans les différentes activités du programme dans le cas de la formation des enseignants au primaire (voir par exemple à ce sujet Bednarz et Perrin-Glorian, 2005; Lajoie et Pallascio, 2001).

Les travaux de recherche en didactique des mathématiques qui ont été développés au fil du temps par l'équipe se sont greffés sur ces programmes de formation venant, en retour, alimenter cette formation.

3.4.2 La recherche : ses objets, une articulation avec la formation

Dans les premières problématiques abordées, on trouve d'abord une préoccupation pour l'apprentissage des élèves, permettant d'aller au-delà des observations recueillies. Il s'agit de mieux comprendre les raisonnements, les erreurs, les difficultés des élèves dans différents domaines. On peut penser par exemple aux recherches portant sur la compréhension de la numération par les enfants du primaire (Bednarz et Janvier, 1982, 1984a), sur les difficultés des enfants dans l'apprentissage de la mesure (Bednarz et Janvier, 1984b), sur la notion de fonction et l'interprétation des représentations graphiques par les élèves (Janvier, 1978), sur l'interprétation que les élèves donnent à certaines représentations externes fréquemment utilisées dans l'enseignement des mathématiques (Janvier, 1987) ou encore sur les difficultés que les élèves rencontrent en algèbre (Bednarz et Janvier , 1992). Ce sont autant de travaux permettant d'alimenter et d'enrichir, en retour, le travail fait en formation.

Parallèlement à ce travail portant sur les élèves, les didacticiens ont aussi ressenti le besoin de développer des outils conceptuels pour cerner le sens d'un raisonnement et d'un concept, pour aborder une analyse de situations d'enseignement et permettre un choix de situations appropriées. On peut penser ici aux analyses épistémologiques de la notion de variable (Janvier et al., 1989) ou du raisonnement algébrique (Charbonneau, 1991; Lefebvre, 1991), à l'analyse du concept de volume (Janvier, 1994) ou encore au développement de grilles d'analyse permettant de rendre compte de la complexité des problèmes en algèbre (Bednarz et Janvier, 1994).

Enfin, les didacticiens ont aussi été amenés à se centrer sur l'élaboration d'interventions et de séquences d'enseignement. L'accent est mis alors sur la production « d'idées nouvelles » pour de possibles interventions en montrant comment celles-ci peuvent être fécondes sur le plan de l'apprentissage. C'est le cas, par exemple, du travail conduit avec un même groupe d'élèves pendant trois ans, sur l'enseignement de la numération (Bednarz et Janvier, 1985), du développement d'une séquence d'enseignement sur le volume visant à faire raisonner les formules (Janvier, 1994), ou encore des approches développées en algèbre dans un environnement informatique (Garançon et al., 1990, 1993; Kieran et al., 1989).

On observe donc un double positionnement des recherches en didactique des mathématiques développées au fil du temps, d'une part centrées sur les élèves et leur apprentissage : il s'agit alors d'éclairer, de documenter l'apprentissage des élèves (les raisonnements importants, leurs difficultés, leurs erreurs, leurs modèles implicites et leurs conceptions). Ces recherches sont, d'autre part, centrées sur les situations d'enseignement. On travaille, dans ce dernier cas, à élaborer des situations et à documenter le processus de construction de connaissances en lien avec ces situations. Si, dans ces recherches en didactique des mathématiques, l'enseignant n'est pas présent au départ, la classe l'est : ce sont les élèves réels, des situations d'enseignement expérimentées en classe, souvent sur une longue période de temps.

3.4.3 Quelle didactique?

À travers ce qui précède, se précise une certaine conception de la didactique. Les recherches prennent leur ancrage dans la formation et elles viennent l'alimenter. Il s'agit de comprendre les productions des élèves, d'élaborer des situations d'enseignement fécondes sur le plan des apprentissages, de développer des outils conceptuels, non pas pour élaborer une théorie sur les phénomènes d'enseignement, mais, au-delà des connaissances nouvelles produites dans ces recherches, pour mieux agir sur le plan de la formation. Les savoirs didactiques élaborés n'ont pas comme finalité de créer une didactique scientifique, mais de se donner un cadre de référence pour l'action du formateur. Ce cadre permet d'éclairer, d'alimenter, d'enrichir le travail fait en formation auprès des futurs enseignants. En ce sens, la finalité de ce travail peut être rapprochée de celle d'une didactique professionnelle.

Deux didactiques se précisent au cours de ce travail de recherche et de formation que mènent en parallèle les didacticiens de l'UQÀM :

- Une didactique de recherche, prenant son ancrage dans la formation et l'alimentant en retour, qui agit comme ressource structurante et non comme résultat à transmettre. Elle sert au repérage des objets, des productions d'élèves, des situations d'enseignement, des analyses conceptuelles, sur lesquels le formateur fera travailler les futurs enseignants.
- Une didactique de formation graduellement explicitée, avec les principes qui guident le formateur dans son intervention, les manières d'approcher la construction d'un certain savoir d'action en enseignement des mathématiques. Toutefois, même si celle-ci a été explicitée (voir Bednarz, 2001; Janvier, 1996), peu de données de recherche ont permis d'éclairer son potentiel pour la formation des futurs enseignants.

3.5 Le CIRADE

Le Centre interdisciplinaire de recherche sur l'apprentissage et le développement en éducation (CIRADE) a été créé en 1980, sur recommandation de la Commission des études de l'UQÀM. Comme son nom l'indique, ce centre interdisciplinaire regroupait des chercheurs formés en différents domaines (didactique des mathématiques, des sciences, du français, de la morale, psychopédagogie). De plus, même si ce centre de recherche était institutionnellement attaché à l'UQÀM, il regroupait, non seulement des chercheurs provenant de différents départements de l'UQÀM (mathématiques, linguistique, sciences religieuses, éducation), mais également des chercheurs provenant d'autres universités. La présence, au sein du centre, de chercheurs en didactique des mathématiques[38] est importante: Nadine Bednarz, Claude Janvier, Bernadette Janvier, Maurice Bélanger, Gisèle Lemoyne, Richard Pallascio, Carolyn Kieran, Jacinthe Giroux, Louise Lafortune, Philippe Jonnaert, Caroline Lajoie, Fernando Hitt.

Plusieurs jeunes chercheurs en didactique des mathématiques y ont été formés[39], bénéficiant non seulement de la supervision des chercheurs du centre, en tant que directeurs de thèse ou de mémoires, mais de la vie scientifique intense qui y a eu lieu, à travers la tenue de séminaires, colloques, ou grâce à la présence de nombreux chercheurs invités. Plusieurs chercheurs y ont en effet séjourné, notamment Efraim Fishbein, Colette Laborde, Henrich Bauersfeld, Ernst Von Glasersfeld, Kenneth Tobin, Anncik Weil Barais, Gaalen Erickson, Geoffrey Saxe, Guy Brousseau, Yves Chevallard.

Plusieurs séminaires réguliers et colloques internationaux[40] y ont été organisés, ouverts à une communauté plus large de chercheurs en didactique et de praticiens. On peut penser par exemple au colloque sur les représentations dans

---

[38] Nadine Bednarz était membre de l'équipe fondatrice du CIRADE (1979-1980). Parmi les chercheurs du centre en 1981, figurent Claude Janvier et Maurice Bélanger. Le CIRADE regroupait, à ses débuts, des chercheurs du Département de psychologie, de sciences de l'éducation et de mathématiques de l'UQAM. Une scission s'est produite en 1983, donnant lieu à une réorientation majeure des travaux du centre, autour de la thématique de l'appropriation des savoirs. Claude Janvier a été directeur du centre de 1984 à 1985. Nadine Bednarz en a été la directrice de 1985 à 1991, puis de 1992 à 1996, Richard Pallascio assumant la direction intérimaire de 1991 à 1992. Le CIRADE a été reconnu centre de recherche par le fonds FCAR dès 1986, et ce, jusqu'en 2004.

[39] On peut penser notamment à Jacinthe Giroux, Louise Poirier, Sylvine Schmidt, Suzanne Vincent, Sophie René de Cotret, Lily Bacon, Michel Beaudoin, aux étudiants de maîtrise et doctorat de l'École normale de Marrakech qui y ont séjourné pendant plusieurs années.

[40] Ces séminaires ont été publiés dans les cahiers du CIRADE, et souvent filmés (plusieurs vidéos de ces séminaires sont disponibles); les colloques ont tous fait l'objet de publications externes ou internes.

l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques (voir Janvier, 1987), réunissant des chercheurs invités tels James Kaput, Richard Lesh, John Mason, Ernst Von Glasersfeld, Gerald Goldin, Andrea diSessa, Gérard Vergnaud; au colloque sur les notions d'obstacle épistémologique et de conflit sociocognitif dans l'apprentissage (voir Bednarz et Garnier, 1989) qui réunissait, parmi les invités, des didacticiens des mathématiques (Gérard Vergnaud, Guy Brousseau, Laureen Resnick, Anna Sierpinska), des didacticiens des sciences (Laurence Viennot, Andrée Tiberghien, Samuel Joshua, Jean-Louis Martinand, André Giordan), des psychosociologues (Michel Gilly, Agnès Blaye, Maria Luisa Schubauer Leoni, Serge Moscovici), des épistémologues (Ernst Von Glasersfeld); ou encore, le colloque sur l'émergence et le développement de la pensée algébrique (réunissant des chercheurs invités tels Teresa Rojano, Ricardo Nemirovsky, Luis Radford, John Mason, David Wheeler, Katleen Heid) (voir Bednarz et al., 1996).

Cette activité scientifique intense a constitué un forum important de discussions, d'échanges pour la communauté de chercheurs et d'étudiants du centre, mais aussi pour la communauté éducative plus large, contribuant à l'établissement graduel d'une entreprise commune et d'un répertoire partagé. Quelle conception de la didactique se dégage de ces travaux?

3.5.1 Quelle didactique?

Nous ne retrouvons pas dans le cas du CIRADE, comme dans celui du CRD, de projet explicite portant sur la didactique. Il ne s'agit pas d'un centre de recherche en didactique, mais, de fait, plusieurs didacticiens s'y retrouvent. Le projet du centre est centré sur « l'appropriation avertie des savoirs », une appropriation qu'on cherche à documenter, éclairer, analyser en l'abordant sous différents angles : du point de vue des apprenants, des interactions entre différents acteurs, du point de vue de l'intervenant.

Les échanges autour de ce projet, par leur caractère multidisciplinaire, ont contribué, pour les didacticiens des mathématiques, à une ouverture sur d'autres didactiques (didactique des sciences, du français, des langues secondes, de la morale), qui n'ont pas été sans influence sur la façon de concevoir leurs travaux de recherche dans ce domaine. Par exemple, les travaux menés sur les représentations des sciences (Desaultels et Larochelle, 1989) interrogeant le processus de production d'un savoir scientifique, et plus particulièrement le caractère construit et négocié de ce savoir (Larochelle et Desaultels, 1992), leurs fondements théoriques, puisant notamment au courant de la sociologie des sciences (Callon, 1989; Callon et Latour, 1991; Latour, 1989), ont été à la source d'un recadrage des travaux de recherche en didactique des mathématiques, contribuant à intégrer davantage les dimensions épistémologique et sociologique. En ce sens, la confrontation au sein du CIRADE entre différentes problématiques didactiques a contribué à ouvrir un espace de possibilités pour la didactique des mathématiques elle-même.

Un autre élément ayant joué un rôle non négligeable dans l'évolution des travaux de recherche en didactique des mathématiques au CIRADE a été la mise en place des écoles recherches dès 1990, expérience qui fut à l'origine du développement des recherches collaboratives avec les praticiens de ces écoles, puis d'autres écoles (Bednarz et al., 2001; Desgagné et al., 2001). Cherchant à répondre au constat d'éloignement de la recherche par rapport à la pratique, ces travaux ont permis de développer de nouvelles connaissances en didactique des mathématiques prenant en compte le point de vue des enseignants et leurs savoirs d'expérience dans la construction de nouveaux savoirs didactiques liés à la pratique (Bednarz, 2004).

Enfin, un dernier élément non négligeable dans l'évolution des recherches développées au centre, est le travail de recherche engagé par plusieurs chercheurs en dehors de l'école : notamment, dans les études de Claude Janvier portant sur les raisonnements de techniciens en électronique en contexte de travail, ou celles de Richard Pallascio portant sur le développement de la représentation spatiale chez les Inuits.

De ce travail se dégage donc une conception qui sort du cadre usuel de la didactique des mathématiques : une didactique ouverte à d'autres didactiques dans d'autres disciplines, une didactique cherchant à articuler davantage didactique de recherche et didactique praticienne par le travail dans les écoles-recherches et les recherches collaboratives, une didactique dans laquelle le rôle structurant du contexte apparaît central, en particulier dans les travaux réalisés en dehors du cadre scolaire.

3.5.2 Filiations théoriques des travaux

Une réflexion épistémologique autour du constructivisme est au fondement des travaux de recherche du centre, comme le montrent les différentes demandes de centre réalisées au cours de la période 1980-2004, mais également plusieurs des séminaires et colloques organisés durant cette période et les publications de chercheurs du centre (voir notamment Bednarz et Garnier, 1989; Janvier, 1996; Jonnaert et Masciotra, 2004; Larochelle et al., 1998; Larochelle et Bednarz, 1994).

Cette réflexion puisera aussi à d'autres cadres théoriques. On assiste en effet, au fil du temps, en relation avec la vie scientifique du centre, à un élargissement à d'autres cadres théoriques. Ces cadres théoriques agissent comme ressources structurantes dans le développement de la recherche en didactique des mathématiques. On peut penser, par exemple, à la psychologie sociale et au concept de conflit sociocognitif, présent dans le colloque international organisé en 1986 sur la construction des savoirs (voir Garnier et Bednarz, 1989) ou, plus tard, toujours emprunté au champ de la psychologie sociale, au concept de représentation sociale repris dans les travaux en didactique des sciences. On peut également penser à la perspective interactionniste, très présente chez Bauersfeld et l'école allemande, au fondement des travaux qui seront réalisés sur la culture de la classe en mathématiques (voir par exemple Bednarz, 1998). On peut citer aussi les théories socioculturelles (voir par exemple Garnier et al., 1991), la sociologie des sciences (Latour, 1987) qui jouera un grand rôle dans les travaux en didactique des sciences, ou encore la cognition située (Lave, 1988, 1991) qui influencera fortement les travaux de Janvier sur les raisonnements des techniciens en électronique en milieu de travail, ou encore les travaux menés en recherche collaborative (Bednarz et al., 2001).

Plus spécifiquement, en lien avec les théorisations propres à la didactique, les chercheurs trouveront également des concepts éclairants pour leurs analyses dans la théorie des situations didactiques de Brousseau, la théorie des champs conceptuels de Vergnaud, les concepts développés en didactique des sciences, tels ceux de pratique sociale de référence, de didactique praticienne de Martinand (1993).

3.5.3 Quelques objets novateurs au moment où ils ont été abordés

Nous ne reprenons ici que quelques-uns des objets de recherche abordés dans les travaux du centre qui, au moment de leur exploration, présentaient un caractère novateur[41]. Il en est ainsi, par exemple, des recherches portant sur les questions de changement conceptuel. La clarification du concept d'obstacle, la prise en compte des significations sociales des savoirs (Janvier et al., 1989; Lemoyne et Bertrand, 1989), les questions de développement conceptuel, de traitement didactique des obstacles, à travers l'analyse des conditions d'évolution des conceptions d'élèves et la prise en compte du rôle possible du conflit, sont ainsi au cœur du colloque international organisé en 1986 au CIRADE (Bednarz et Garnier, 1989).

L'analyse des interactions in situ dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques a également été considérée très tôt dans les recherches du centre (voir par exemple Bednarz et Garnier, 1989; Dufour-Janvier et Bednarz, 1989).

Les problèmes de représentation en enseignement des mathématiques ont également constitué un pivot central de la réflexion de plusieurs chercheurs du

---

[41] Le terme novateur est ici pris dans le sens suivant : les thèmes abordés dans ces recherches ont souvent été repris par la communauté de chercheurs en didactique des mathématiques, et ce, bien après que ces thématiques aient été abordées et traitées par les chercheurs du CIRADE.

centre, comme le montre le colloque international organisé sur ce thème en 1984 au CIRADE (voir Janvier, 1987). On peut également penser à l'éclairage apporté sur la contextualisation des apprentissages et la construction de connaissances en contexte, au cœur de plusieurs travaux de recherche du centre, portant notamment sur les apprentissages de techniciens en électronique en milieu de travail (Janvier, 1990, 1991) ou le développement des habiletés spatiales chez les Inuits (Pallascio, 1995).

3.5.4 Une réflexion méthodologique importante

Un travail en profondeur sera également conduit sur le plan méthodologique, visant à fonder les approches de recherche développées par les chercheurs du centre. Les différents colloques et les écoles d'été organisés à cette fin au CIRADE témoignent d'une volonté d'approfondir cette réflexion méthodologique. On retrouve une telle volonté, par exemple, dans les écoles d'été organisées autour de certaines analyses de données : école d'été portant sur le traitement de données multidimensionnelles, à travers les analyses des correspondances multiples ou l'analyse hiérarchique développée par Régis Gras (voir Bednarz, 1987); école d'été sur l'analyse qualitative et la théorisation ancrée. C'est cette même volonté qui est au fondement de l'organisation d'une journée d'étude portant sur l'entrevue au sein de différentes recherches. On peut finalement penser au travail de conceptualisation engagé par les chercheurs depuis plusieurs années, pour expliciter les fondements théoriques et méthodologiques des nouvelles approches de recherche que constituent les approches collaboratives en éducation : explicitation du modèle de recherche, de ses fondements théoriques et épistémologiques, critères de rigueur (voir notamment Bednarz, 1998; Desgagné et al., 2001).

3.6 Retour sur les analyses réalisées sur différents groupes : une lecture transversale

En reprenant la grille de lecture que nous avons précisée au début de ce texte (voir 1.5.2), nous ferons une lecture transversale des analyses réalisées dans les différents groupes de recherche, de manière à mettre en évidence le portrait qui s'en dégage.

3.6.1 Quel projet? Quelle didactique?

Rappelons ici quelles étaient nos questions de départ : quelle est la vision de la didactique qui se dégage de l'analyse de chacun de ces groupes? De quelle didactique parle-t-on? Que recouvre-t-elle? Quelles sont les finalités du travail poursuivi dans chacun des groupes?

Les analyses précédentes mettent en évidence une diversité de conceptualisations de la didactique des mathématiques en lien avec des projets différents guidant le travail des didacticiens dans chacun de ces groupes (voir figure 4).

Dans le cas du CRD, nous sommes plus près de la didactique française et de sa volonté de faire de la didactique une discipline scientifique. Le projet des didacticiens vise ici à asseoir la didactique sur des bases scientifiques solides, fondant une théorie de l'enseignement. Dans le cas des autres groupes de recherche analysés, la perspective est très différente. Le projet qui les guide est davantage articulé sur la pratique. Il prend toutefois des formes très différentes dans le centre en psychomathématique de Diénès, où le travail en est surtout un de développement autour d'une théorie de l'apprentissage des structures abstraites, chez Lunkenbein où la pratique de l'enseignant constitue une ressource contribuant à la définition même de la didactique, ou encore au CIRADE où une prise en compte des savoirs des enseignants, de la didactique praticienne, est au centre des recherches collaboratives développées. Dans la section didactique de l'UQÀM, cette pratique de l'enseignement est également très présente. Nous sommes toutefois plus près, dans ce cas, d'une didactique professionnelle, dans la mesure où, d'une part, les travaux de recherche élaborés sont enracinés dans la formation des enseignants et viennent éclairer en retour cette dernière et, d'autre part, dans la mesure où une didactique de formation est précisée. Enfin, les travaux du CIRADE, en ouvrant sur d'autres didactiques des disciplines, se rapprochent, dans une certaine mesure, d'une « didactique comparée ».

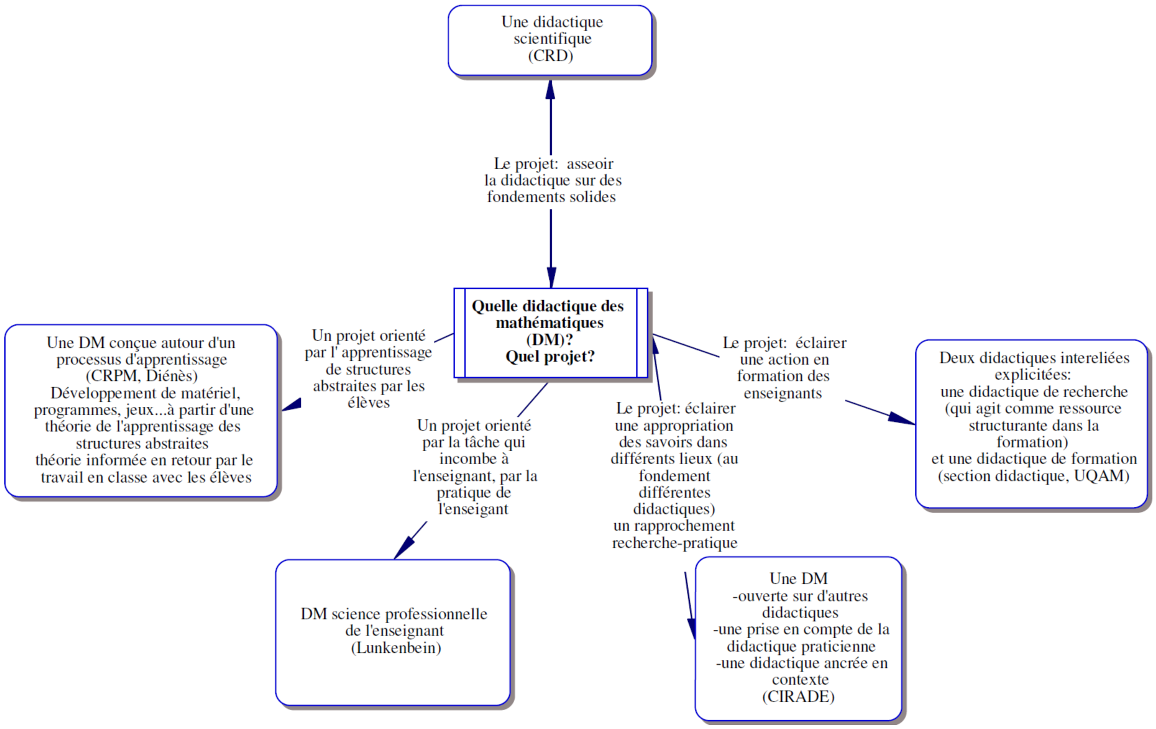


Figure 4 : Vision de la didactique des mathématiques qui se dégage de l'analyse des différents groupes

3.6.2 Quelles filiations théoriques traversent les différents groupes?

Un fil directeur commun traverse clairement les différentes recherches examinées au sein des groupes, celui du constructivisme. On retrouve cette perspective théorique de manière implicite chez Diénès, dont les travaux ont été influencés par Piaget et Bruner. Ces fondements constructivistes sont explicites chez Lunkenbein, avec sa conception génétique de l'enseignement des mathématiques et son concept de groupement emprunté à Piaget. Dans le cas du CRD, il fonde le travail des chercheurs, comme le montre l'organisation du symposium de 1971 et les différentes analyses que nous avons réalisées des projets plus précis en didactique des mathématiques. Il est également très présent dans les travaux de recherche du CIRADE et de la section didactique de l'UQÀM.

Même si ce constructivisme est influencé au départ par Piaget, le rapport entre la didactique et la psychologie génétique est très vite interrogé : on le voit, par exemple, dans les échanges entre les chercheurs du CRD au symposium de 1971. De ce constructivisme, on retiendra surtout la dimension épistémologique, très présente dans les travaux de la section didactique et du CIRADE (voir Larochelle et Bednarz, 1994; Larochelle et al., 1998). Enfin, ces fondements évolueront avec le

CIRADE vers une prise en compte de plus en plus grande de la dimension sociale, faisant place à un socioconstructivisme.

On assiste par ailleurs au fil du temps à une diversification, à un élargissement des cadres théoriques qui fondent les travaux de recherche dans ces groupes: la théorie de l'apprentissage des structures abstraites chez Diénès, les travaux nord-américains en didactique des sciences au CRD, les théories socioculturelles, l'interactionnisme, la psychologie sociale et les concepts de conflits, représentation sociale, la théorie des situations didactiques, la théorie des champs conceptuels, la cognition située avec le CIRADE.

Cette diversification s'accompagne d'une complexification des objets de recherche abordés par les chercheurs dans leurs travaux.

3.6.3 Des orientations méthodologiques spécifiques se dégagent-elles?

Différentes orientations méthodologiques, cohérentes avec les projets explicités précédemment, se dégagent de l'analyse de chacun des groupes. Ainsi, on a recours à :

- des expériences didactiques contrôlées, dans le cas du CRD, permettant de mettre à l'épreuve les constructions théoriques élaborées;
- des recherches-développements dans le cas du centre de recherche en psychomathématique, visant à documenter le processus d'apprentissage des structures abstraites et l'apport des jeux, du matériel, des programmes développés sur cette base. Ces recherches s'accompagnent aussi de recherches évaluatives;
- l'expérimentation de protocoles d'entrevue, de « teaching experiment », de séquences d'enseignement élaborées parfois sur une longue période de temps, ainsi qu'à des analyses qualitatives, interprétatives, visant à mieux comprendre ce qui s'y passe du point de vue des apprentissages, dans le cas de Lunkenbein, de la section didactique de l'UQÀM et du CIRADE;
- des recherches collaboratives développées avec des praticiens du milieu scolaire, visant à éclairer la co-construction de savoirs liés à la pratique, dans le cas du CIRADE.

3.6.4 Quels sont les liens des recherches développées dans ces groupes avec la pratique?

Dans le cas du CRD, le chercheur occupe une position externe par rapport à la pratique : il travaille sur des expériences didactiques dont il contrôle les conditions, expériences menées en classe auprès de différents groupes. La visée est avant tout théorique : elle a pour but de mettre à l'épreuve un certain nombre de schèmes théoriques. L'enseignant est ici absent du corpus de données et de l'analyse.[42]

Plusieurs groupes chercheront à prendre en compte, à l'opposé, la situation réelle de la classe. C'est le cas notamment du centre de recherche en psycho-mathématique, dans lequel du matériel, des jeux, des programmes sont élaborés et expérimentés dans des contextes éducatifs divers, et dont les retombées sont nombreuses : élaboration de matériel, jeux, fiches, livres, films... C'est le cas également des recherches menées par Lunkenbein, par les chercheurs du CIRADE et de la section didactique de l'UQÀM, où des situations d'enseignement sont élaborées auprès de groupes d'élèves ou de classes, sur une longue période de temps. Les retombées de ces recherches, dans le cas de la section didactique de l'UQÀM, prennent la forme d'outils conceptuels, de situations d'enseignement, d'un cadre de référence réinvesti dans la formation. L'enseignant est toutefois absent de la conception de ces situations et de leur analyse, et l'éclairage sur la formation est peu documenté.

Finalement, dans les recherches collaboratives développées à partir de 1990 au CIRADE, l'enseignant est un élément central, intervenant avec le chercheur dans la co-construction de savoirs liés à la pratique en enseignement des mathématiques. Les retombées de ces recherches servent à la fois la recherche et la pratique contribuant, d'une part, au développement professionnel des enseignants impliqués dans ces recherches et apportant, d'autre part, sur le plan de la recherche, un éclairage sur la didactique praticienne et les contributions respectives des enseignants et des chercheurs dans l'élaboration de situations d'enseignement en mathématiques, non seulement fécondes sur le plan des apprentissages mais également viables en pratique.

Conclusion

Les analyses précédentes révèlent la richesse et la diversité des premiers travaux de recherche menés en didactique des mathématiques au Québec au sein des groupes considérés. Une communauté de chercheurs, caractérisée par la diversité, émerge de cette analyse, rejoignant en cela ce que révélait Mura dans l'enquête menée en 1993 (Mura, 1998). Toutefois, à partir de ce qui ressort de l'analyse menée dans ces différents groupes, ce retour aux sources vient considérablement enrichir notre vision de la didactique des mathématiques. Cette dernière dépasse en effet (voir figure 4) la simple dichotomie : analyser, expliquer, comprendre les

---

[42] On observe toutefois, une différence dans le cas du projet portant sur l'apprentissage et l'enseignement en milieu défavorisé. La visée n'y est pas seulement théorique et l'enseignant, par la mise en évidence « des schèmes du maître », fait partie intégrante de l'analyse.

phénomènes d'enseignement des mathématiques, et contribuer à l'amélioration de cet enseignement.

On assiste par ailleurs, au fil du temps, à une diversification et à une complexification des recherches en didactique des mathématiques, à la fois du point de vue des objets abordés, des outils théoriques mobilisés et des approches méthodologiques mises en œuvre. Cette analyse nous permet de reconstruire le sens profond des travaux de recherche menés en didactique des mathématiques au Québec dans différents groupes et de repérer, au delà du portrait diversifié qui en ressort, les filiations théoriques qui traversent ces différentes recherches.

À travers leur vision de la didactique et d'un projet articulé, pour plusieurs d'entre eux, sur la pratique d'enseignement ou (et) des préoccupations de formation, un autre lien les unit. Cette articulation avec la pratique est présente dans le centre de Diénès, chez Lunkenbein, dans le travail de la section didactique de l'UQÀM et dans les recherches collaboratives menées au CIRADE. La richesse des ressources mobilisées et les retombées de ces travaux illustrent par ailleurs la force et le dynamisme de la didactique des mathématiques au Québec durant cette période. Elles montrent l'importance de la poursuite du travail de mise en commun que nous avons amorcée à l'occasion de cette reconstruction.

Références

Allard, H., Bibeau, R., de la Chevrotiere, P., Fortier, M., Goupille, C., Hamel, M., Lunkenbein, D. et Thérien, L. (1977). *Labaction. Ateliers présentés par l'équipe de recherche en didactique de la mathématique* [Rapport no 18, document de travail inédit]. Université de Sherbrooke.

Artigue, M. (1994). Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products. Dans R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strässer et B. Winkelmann (dir.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (p. 27-39). Kluwer Academic Publishers.

Arzarello, F. et Bartolini Bussi, M. G. (1998). Italian trends in research in mathematical education: A national case study from an international perspective. Dans A. Sierpinska et J. Kilpatrick (dir.), *Mathematics education as a research domain: A Search for Identity* (p. 243-262). Kluwer Academic Publishers.

Bednarz, N. (1986). *Actes du colloque Recherches sur l'apprentissage : analyse des correspondances et méthodes statistiques apparentées.* Cahiers du CIRADE, Université du Québec à Montréal.

Bednarz, N. (1987). *Actes de la rencontre MEQ/CIRADE/Commissions scolaires : intérêts et priorités de la recherche*. Cahiers du CIRADE, Université du Québec à Montréal.

Bednarz, N. (dir.) (1998). *Quelques notes et réflexions sur la recherche collaborative et le partenariat dans le domaine de l'éducation.* Journées du CIRADE.

Bednarz, N. (2001) Didactique des mathématiques et formation des enseignants. Le cas de l'Université du Québec à Montréal. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 1(*1), 61-80.

Bednarz, N. (2004). Collaborative Research and Professional Development of Teachers in Mathematics. Dans M. Niss (dir.), *Proceedings of the Tenth International Congress on Mathematical Education* (p. 1-15). Roskilde University.

Bednarz, N. et Garnier, C. (1989). *Construction des savoirs : obstacles et conflits*. Éditions Agence d'Arc.

Bednarz, N. et Gattuso, L. (1999). Professional development for preservice mathematics teacher. Dans Y. M. Pothier (dir.), *Proceedings of the 1998 annual meeting of the Canadian mathematics education study group* (p. 73-83). University of British Columbia.

Bednarz, N., Gattuso, L. et Mary, C. (1995). Formation à l'intervention d'un futur enseignant en mathématiques au secondaire. *Bulletin AMQ (Association mathématique du Québec), 35*(1), 17-30.

Bednarz, N. et Janvier, B. (1982). The understanding of numeration in primary school. *Educational Studies in Mathematics, 13*(1), 33-57.

Bednarz, N. et Janvier, B. (1984a). La numération : les difficultés suscitées par son apprentissage. *Grand N, 33*, 5-31.

Bednarz, N. et Janvier, B. (1984b). Problèmes d'apprentissage de la mesure au primaire et éléments d'apprentissage pertinents. *Bulletin AMQ (Association mathématique du Québec)*, *24*(3), 9-17.

Bednarz, N. et Janvier, B. (1985). La numération : une stratégie didactique cherchant à favoriser une meilleure compréhension. *Grand N, 34*, 5-17.

Bednarz, N. et Janvier, B. (1992). L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une caractérisation du scénario actuel et des problèmes qu'il pose aux élèves. Dans A. Daife (dir.), *Actes du colloque sur la didactique des mathématiques et la formation des enseignants* (p. 21-40). École Normale Supérieure de Marrakech.

Bednarz, N. et Janvier, B. (1994). The emergence and development of algebra in a problem-solving context: an analysis of problems. Dans J. P. da Ponte et J. F. Matos (dir.), *Proceedings of the 18th Annual conference of the International group for the psychology of mathematics education. Volume 2* (p. 64-71). University of Lisbon.

Bednarz, N., Kieran, C. et Lee, L. (1996). *Approaches to algebra: Perspectives for Research and Teaching*. Kluwer.

Bednarz, N. et Perrin-Glorian, M. J. (2005). Formation à l'enseignement des mathématiques : articulation entre formation mathématique, didactique et pratique. *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone* [Cédérom]. Commission Tunisienne pour l'Enseignement des Mathématiques

Bednarz, N., Poirier, L., Desgagné, S. et Couture, C. (2001). Conception de séquences d'enseignement en mathématiques : une nécessaire prise en compte des praticiens. Dans A. Mercier, G. Lemoyne et A. Rouchier (dir.), *Le génie didactique : usages et mésusages des théories de l'enseignement* (p. 43-69). Éditions de Boeck.

Bélanger, M. (1977-1978). *Rapport annuel du Centre de recherche en didactique.* Service des archives et de gestion des documents. Fonds d'archives du CRD (104U-144/1). Université du Québec à Montréal.

Bergeron, J. C., Herscovics, N. et Kieran, C. (1987). *Proceedings of the eleventh international conference of Psychology of Mathematics Education (PME-XI).* Montréal.

Bergeron, J. C. et Hercovics, N. (1983). *Proceedings of the fifth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-NA-V).* Montréal.

Boileau, A. (2008). Une expérience de formation à l'utilisation de la technologie pour de futurs enseignants en mathématiques au secondaire. Dans N. Bednarz et C. Mary (dir.), *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2006.* Éditions du CRP.

Boileau, A. et Garançon, M. (1993). Géométrie et formation des enseignants au secondaire. *Bulletin AMQ (Association mathématique du Québec, 33*(1), 40-49.

Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques* [thèse de doctorat d'état, Université de Bordeaux 1].

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Éditions la Pensée sauvage.

Callon, M. (1989). *La science et ses réseaux : genèse et circulation des faits scientifiques.* Éditions la Découverte.

Callon, M. et Latour, M. (1991). *La science telle qu'elle se fait. Anthologie de la sociologie des sciences de langue anglaise.* Éditions la Découverte.

Charbonneau, L. (1991). Du raisonnement laissé à lui-même au raisonnement outillé : l'algèbre depuis Babylone jusqu'à Viète. *Bulletin AMQ (Association mathématique du Québec), 31*(4), 9-15.

Charbonneau, L. (1992). Les retombées de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement des mathématiques. Dans A. Daife (dir.), *Actes du colloque sur la didactique des mathématiques et la formation des enseignants* (p. 87-102). École Normale Supérieure de Marrakech.

CIEAEM. (1973) *Le développement de l'activité mathématique dans l'éducation. Actes de la 25ème rencontre de la Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques (CIEAEM).* Université Laval.

Désaultels, J. et Larochelle, M. (1989). *Qu'est-ce que le savoir scientifique? Points de vue d'adolescents et d'adolescentes*. Presses de l'Université Laval.

Desgagné, S., Bednarz, N., Couture, C., Poirier, L. et Lebuis, P. (2001). L'approche collaborative de recherche en éducation: un rapport nouveau à établir entre recherche et formation. *Revue des sciences de l'éducation, 27*(1), 33-64.

Dienes, Z. P. (1960). *Building up Mathematics*. Hutchinson.

Dienes, Z. P. (1971). An example of the passage from the concrete to the manipulative of formal systems. *Educational Studies in Mathematics, 3*, 337-352.

Dienes, Z. P. (1973a). *Rapport général et travaux accomplis ou en cours au Centre de Recherches en Psycho-Mathématique.* Université de Sherbrooke.

Dienes, Z. P. (1973b). *Mathematics through the senses, games, dance and art*. The National Foundation for Educational Research

Dienes, Z. P. (1987). Lessons involving music, language and mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 6*, 171-181.

Dienes, Z. P. (2000). The theory of the six stages of learning with integers. *Mathematics in School, 29*, 27-33.

Dienes, Z. P. et Jeeves, M. A. (1965). *Thinking in Structures*. Hutchinson.

Dufour-Janvier, B. et Bednarz, N. (1989). Situations conflictuelles expérimentées pour faire face à quelques obstacles dans une approche constructiviste de l'arithmétique au primaire, (315-333). Dans N. Bednarz et C. Garnier (Dir.). *Construction des savoirs : obstacles et conflits.* / Actes du colloque international Obstacle épistémologique et conflit socio-cognitif. Les éditions Agence d'Arc Ottawa.

Dufour-Janvier, B. et Hosson, N. (1999). L'étudiant futur enseignant en interaction, dans le cadre d'activités géométriques variées : observations et éléments de réflexion. Dans B. Côté (dir.), *De Euclide à Cabri : le point sur la didactique de la Géométrie. Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec (p. 39-53).* Université du Québec à Montréal.

Ernest, P. (1998). A postmodern perspective on research in mathematics education. Dans A. Sierpinska et J. Kilpatrick (dir.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (p. 71-86). Kluwer Academic Publishers.

Garançon, M., Kieran, C. et Boileau, A. (1990). Introducing Algebra : A functional approach in a computer environment. Dans G. Booker, P. Cobb et T. N. de Mendicuti (dir.), *Proceedings of the 14th international Conference for the Psychology of Mathematics Education. Volume 2* (p. 51-58). PME program Committee.

Garançon, M., Kieran, C. et Boileau, A. (1993). Using a discrete computer graphing environment in algebra problem solving: Notions of infinity/continuity. Dans I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu et F. L. Lin (dir.), *Proceedings of the 17th international Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol. II, 25-32). PME program Committee

Garnier, C. et Bednarz, N. (1989). *Actes du colloque sur l'observation*. CIRADE, UQÀM, 211-215.

Garnier, C., Bednarz, N. et Ulanovskaya, I. (1991). *Après Vygotski et Piaget. Perspectives sociale et constructiviste. Écoles russe et occidentale*. Éditions De Boeck.

Gaulin, C., Hodgson, B. R., Wheeler, D. H. et Egsgard, J. C. (1994). *Proceedings of the 7th International Congress on Mathematical Education/Actes du 7e Congrès international sur l'enseignement des mathématiques*. Les Presses de l'Université Laval.

Goupil, C. et Therrien, L. (1987). *Le rôle de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Actes de la 39ème rencontre de la Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques (CIEAEM)*. Université de Sherbrooke.

Gravemeijer, K. (1998). Developmental Research as a Research Method. Dans A. Sierpinska et J. Kilpatrick (dir.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (p. 277-296). Kluwer Academic Publishers.

Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations: Studies and teaching experiments* [thèse de doctorat inédite]. University of Nottingham.

Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and the learning of mathematics.* Lawrence Erlbaum Associates.

Janvier, C. (1990). Contextualization and mathematics for all. Dans T. J. Cooney et C. R. Hirsch (dir.), *Teaching and learning mathematics in 1990s* (p. 183-193). National Council of Teachers of Mathematics.

Janvier, C. (1991). Contextualisation et représentation dans l'utilisation des mathématiques. Dans C. Garnier, N. Bednarz et I. Ulanovskaya (dir.), *Après Vygotski et Piaget. Perspectives sociale et constructiviste. Écoles russe et occidentale* (p. 129-147). Éditions De Boeck.

Janvier, C. (1994). *Le volume, mais où sont les formules? Document d'accompagnement.* Éditions Modulo

Janvier, C. (1996). Constructivism and its consequences for training teachers. Dans L. P. Steffe et P. Nesher (dir.), *Theories of mathematical learning* (p. 449-463). Lawrence Erlbaum.

Janvier, C., Charbonneau, L. et René de Cotret, S. (1989). Obstacles épistémologiques à la notion de variable : perspectives historiques. Dans N. Bednarz et C. Garnier (dir.), *Construction des savoirs : obstacles et conflits* (p. 64-75). Éditions Agence d'Arc.

Jonnaert, P. et Masciotra, D. (2004). *Constructivisme - Choix contemporains. Hommage à Ernst von Glasersfeld.* Presses de l'Université du Québec.

Kieran, C. (2003). The twentieth-century emergence of the canadian mathematics education research community. Dans G. M. Stanic et J. Kilpatrick (dir.), *A history of school mathematics. Volume 2* (p. 1701-1776). NCTM

Kieran, C., Boileau, A. et Garançon, M. (1989). Processus of mathematization in algebra problem solving within a computer environment: A functional approach. Dans C. A. Maher, G. A. Goldin et R. B. Davis (dir.), *Proceedings of the 11th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 26-34). PME-NA Committee.

Lajoie, C. et Pallascio, R. (2001) Role-play by pre-service elementary teachers as a means to develop professionnal competencies in teaching mathematics. Dans J. Novotna et M. Hejny (dir.), *Proceedings of the International Symposium Elementary Mathematics Teaching* (p. 104-109). Charles University.

Larochelle, M. et Bednarz, N. (1994). À propos du constructivisme et de l'éducation. *Revue des sciences de l'éducation, 20*(1), 5-20.

Larochelle, M., Bednarz, N. et Garrison, J. (1998). *Constructivism and education*. Cambridge University Press.

Larochelle, M. et Désaultels, J. (1992). *Autour de l'idée de science. Itinéraires cognitifs d'étudiants et d'étudiantes.* Presses de l'Université Laval et De Boeck

Latour, B. (1987). *Science in action*. Harvard University Press.

Latour, B. (1989). *La science en action*. Éditions la Découverte

Lave, J. (1988). *Cognition in Practice : Mind, Mathematics and Culture in Everyday Life.* Cambridge University Press.

Lave, J. (1991). Acquisition des savoirs et pratiques de groupe. *Sociologie et société, 23*(1), 149-162.

Lave, J. et Wenger, E. (1991). *Situated learning. Legitimate peripherial participation.* Cambridge University Press.

Lefebvre, J. (1991). Qu'est devenue l'algèbre? *Bulletin AMQ (Association mathématique du Québec), 33*(4), 27-32.

Lemoyne, G. (1996). La recherche en didactique des mathématiques au Québec : rétrospectives et perspectives. *Bulletin AMQ (Association mathématique du Québec),* 36(3), 31-40.

Lemoyne, G. et Bertrand, (1989). Des relations additives aux relations multiplicatives : construction socio-cognitive de représentations de ces relations. (286-305). Dans N. Bednarz et C. Garnier (Dir.). *Construction des savoirs : obstacles et conflits.* / Actes du colloque international Obstacle épistémologique et conflit socio-cognitif. Les éditions Agence d'Arc Ottawa.

Leung, F. K. S., Graf, K.-D. et Lopez-Real, F. J. (2006). *Mathematics Education in Different Cultural Traditions. A Comparative Study of East Asia and the West. The 13th ICMI Study*. Springer

Lunkenbein, D. (1977a). *Didactique de la mathématique* [Rapport no 16, septembre]. Université de Sherbrooke.

Lunkenbein, D. (1977b). *Groupements de treillis* [Rapport no 19, novembre]. Université de Sherbrooke.

Lunkenbein, D. (1980). Géométrie dans l'enseignement au primaire [Document inédit]. Université de Sherbrooke.

Lunkenbein, D. (1981). Groupings in the process of concept formation. *For the Learning of Mathematics, 1*(3), 37-42.

Lunkenbein, D. (1983a). Mental Structural images characterizing Van Hiele Levels of Thinking. Dans J. C. Bergeron et N. Hercovics (dir.), *Proceedings of the fifth Annual Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Volume 2* (p. 255-262). Montréal

Lunkenbein, D. (1983b). Didactique de la mathématique : Science professionnelle de l'enseignant. *Bulletin AMQ (Association mathématique du Québec), 23*(1), 27-32.

Lunkenbein, D. (1984-1985). La résolution de problèmes et le processus d'apprentissage en mathématique. *Instantanés mathématiques, Numéro spécial D*, 5-9.

Margolinas, C. (1998) Relations between the theoretical field and the practical field in mathematics education. Dans A. Sierpinska et J. Kilpatrick (dir.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (p. 351-356). Kluwer Academic Publishers

Martinand, J. L. (1993). Organisation et mise en œuvre des contenus d'enseignement. Esquisse problématique. *Recherches en didactiques : contribution à la formation des maîtres*, 135-143.

Mitchelmore, M. C., Lunkenbein, D., Yokochi, K. et Bishop, A. J. (1983). The development of Children's Spatial Ideas. Dans M. Zweng, T. Green, J. Kilpatrick, H. Pollack et M. Suydam (dir.), *Proceedings of the 4th International Congress on Mathematical Education* (p. 171-178). Birkhaüser

Morf, A. (1973-1974). *4e Rapport annuel du Centre de recherche en didactique.* Service des archives et de gestion des documents. Fonds d'archives du CRD (104U-144/1). Université du Québec à Montréal.

Morf, A. (1974-1975). *5e Rapport annuel du Centre de recherche en didactique.* Service des archives et de gestion des documents. Fonds d'archives du CRD (104U-144/1). Université du Québec à Montréal.

Morf, A. (1976-1977). *6e Rapport annuel du Centre de recherche en didactique.* Service des archives et de gestion des documents. Fonds d'archives du CRD (104U-144/1). Université du Québec à Montréal.

Mura, R. (1994). Les didacticiens et les didacticiennes des mathématiques au Canada : un portrait de famille. Dans M. Quigley (dir.), *Proceedings of the 1994 annual meeting of the Canadian mathematics education study group* (p. 91-113). University of Regina.

Mura, R. (1998). What is Mathematics Education? A Survey of Mathematics Educators in Canada. Dans A. Sierpinska et J. Kilpatrick (dir.), *Mathematics as a research domain: A search for identity* (p. 105-116). Kluwer Academic Publishers.

Pallascio, R. (1995). Observations de représentations géométriques et spatiales dans un contexte d'acculturation mathématique. *Actes du colloque sur les représentations dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques*, 193-209.

Post, T. (1981). The role of manipulative materials in the learning of mathematical concepts. Dans M. Lindquis (dir.), *Selected issues in mathematics education* (p. 109-131). McCutchan Publishing Corporation.

Sierpinska, A. (1995). Some reflections on the phenomenon of French Didactique. *Journal für Mathematik Didaktik, 16*(3/4), 163-192.

Sierpinska, A. et Kilpatrick, J. (1998). *Mathematics education as a research domain: A search for identity*. Kluwer Academic Publishers

Sriraman, B. et Lesh, R. (2007). Leaders in mathematical thinking and learning. A conversation with Zoltan P. Dienes. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(1), 59-75.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning and identity*. Cambridge University Press.

Autres notes inédites consultées en lien avec le centre de recherche en didactique

Bélanger, M. (1971). *Les transformations de la psychologie opératoire chez les Américains : exemples de la didactique des sciences à l'élémentaire* [verbatim de l'enregistrement de la conférence (16 pages)]. Service des archives et de gestion des documents. Fonds d'archives du CRD (104U-806/1). Université du Québec à Montréal.

Desjardins, M. et Morf, A. (1971). *Plan provisoire du symposium. Document 1.* Service des archives et de gestion des documents. Fonds d'archives du CRD (104U-806/1). Université du Québec à Montréal.

Morf, A. (1971) *Discours d'ouverture du symposium* [verbatim de l'enregistrement]. Service des archives et de gestion des documents. Fonds d'archives du CRD (104U-806/1). Université du Québec à Montréal.

Bulletin préparatoire no 2 du symposium 1971. Service des archives et de gestion des documents. Fonds d'archives du CRD (104U-806/2). Université du Québec à Montréal.

Compte rendu du Symposium 1971. Service des archives et de gestion des documents. Fonds d'archives du CRD (104U-806/1). Université du Québec à Montréal.

Discussion qui a suivi la conférence de M. Bélanger (*1971)* [verbatim de l'enregistrement de la discussion]. Service des archives et de gestion des documents. Fonds d'archives du CRD (104U-806/1). Université du Québec à Montréal.

Discussion qui a suivi la conférence de A. Morf (*1971) portant sur les conditions d'une théorie autonome de* l'enseignement [verbatim de l'enregistrement de la discussion]. Service des archives et de gestion des documents. Fonds d'archives du CRD (104U-806/1). Université du Québec à Montréal.

Discussion qui a suivi la conférence de J. B. Grize (*1971) portant sur psychologie, épistémologie et didactique* [verbatim de l'enregistrement de la discussion]. Service des archives et de gestion des documents. Fonds d'archives du CRD (104U-806/1). Université du Québec à Montréal.

Discussion qui a suivi l'exposé de S. Papert (1971) portant sur « Est-ce que la genèse s'apprend? » [verbatim de l'enregistrement de la discussion]. Service des archives et de gestion des documents. Fonds d'archives du CRD (104U-806/1). Université du Québec à Montréal.

Le symposium de didactique de Montréal 1971. La recherche. Service des archives et de gestion des documents. Fonds d'archives du CRD (104U-806/1). Université du Québec à Montréal.

Mémo 1971. Fondements scientifiques de la didactique. Service des archives et de gestion des documents. Fonds d'archives du CRD (104U-806/3). Université du Québec à Montréal.

Programme du symposium 1971. Service des archives et de gestion des documents. Fonds d'archives du CRD (104U-806/2). Université du Québec à Montréal.

Résumés des conférences du symposium 1971. [Résumés des conférences de Morf, A.; Bélanger, M.; Piaget, J.; Gréco, P.; Aebli, H.; Easley, J. A. et Witz, K.; Grize, J.B.; Papert, S.]. Service des archives et de gestion des documents. Fonds d'archives du CRD (104U-806/1). Université du Québec à Montréal.