

Revue québécoise de didactique des mathématiques

Numéro thématique 1, Tome 2 (2023)

Étude et modélisation didactiques de différentes facettes
de l'activité mathématique de la personne apprenante

DOI : [10.71403/zbwzf859](https://doi.org/10.71403/zbwzf859)

Comité éditorial

Sarah Dufour, éditrice invitée

Patrick Gibel, éditeur invité

Patricia Marchand, éditrice

Coordonnatrice

Marianne Homier

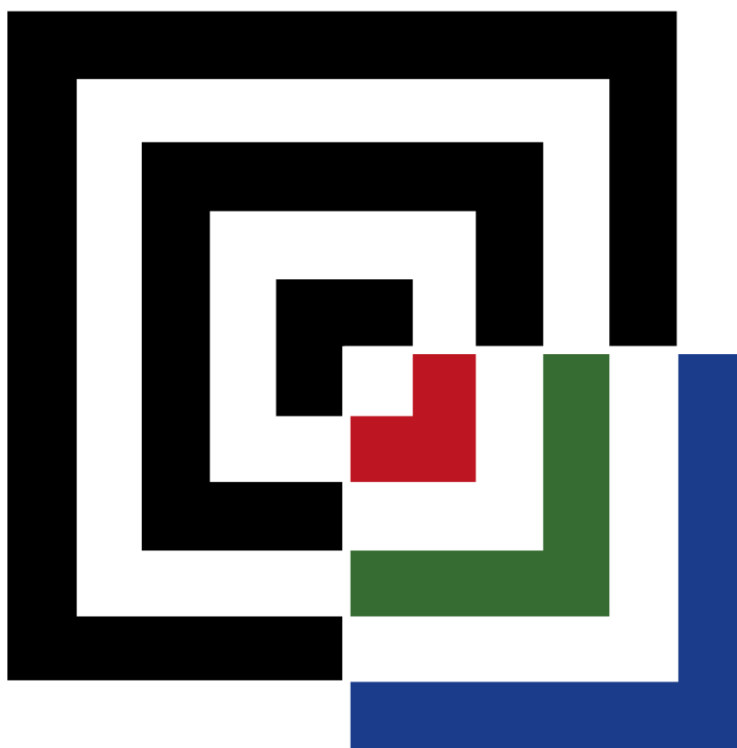


Table des matières

Mot éditorial du numéro thématique Sarah Dufour, Patrick Gibel et Patricia Marchand	1
 ARTICLES	
Activité mathématique des élèves et construction des apprentissages en géométrie plane Sylvie Blanquart.....	5
Étude des correspondances entre les activités mathématiques des élèves placés en résolution de problèmes et celles des mathématiciens Rox-Anne L'Italien-Bruneau	38
Émergence de signes personnels chez des élèves de 3^e secondaire dans un contexte d'interprétation graphique avec le capteur de distance CBR Valériane Passaro, Mireille Saboya et Fabienne Venant	66
Proximités discursives entre le discours de l'enseignant et les activités des élèves pendant les cours : l'exemple de l'introduction de la définition formalisée du sens de variation des fonctions Aline Robert et Fabrice Vandebrouck.....	106
La dialectique du générique et du singulier dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique Corine Castela	144



Mot éditorial du numéro thématique : Étude et modélisation didactiques de différentes facettes de l'activité mathématique de la personne apprenante

Sarah DUFOUR

Université de Montréal

sarah.dufour.3@umontreal.ca

Patrick GIBEL

Université de Bordeaux

patrick.gibel@u-bordeaux.fr

Patricia MARCHAND

Université de Sherbrooke

patricia.marchand@usherbrooke.ca

Le comité éditorial a le plaisir de vous proposer cinq articles dans ce deuxième tome de ce numéro thématique, un premier tome ayant été publié à l'hiver 2022. À la suite de notre appel à contribution, nous avons reçu une réponse très positive de la communauté et une dizaine de textes ont été soumis dans le cadre de ce numéro thématique. Considérant ce nombre élevé d'articles, le comité éditorial avait pris la décision de proposer deux tomes pour cette thématique.

Rappelons d'abord la thématique de ce numéro qui a su motiver et orienter la production de ces textes. L'intention de ce numéro thématique est de porter notre regard sur la modélisation de l'activité mathématique en classe aux différents ordres d'enseignement et de confronter nos réflexions didactiques s'y rapportant. Le questionnement ainsi que la réalisation de l'étude peuvent prendre différentes formes selon le paradigme considéré, le cadre théorique mobilisé et selon le contexte dans lequel elle est sollicitée, qu'il soit scolaire, extrascolaire ou culturellement différent. En ce sens, une étude sur l'activité mathématique de la

personne apprenante peut être conduite en prenant en considération l'environnement de ces personnes, l'enseignement vécu, les médiations anticipées et réalisées, les situations et le matériel mis de l'avant guidant ainsi cette action. La question centrale qui oriente cette réflexion didactique pour ce numéro thématique est la suivante :

Comment l'activité mathématique de la personne apprenante, analysée en prenant en considération les conditions de sa réalisation, étudiée par la mise en œuvre d'un outillage didactique, contribue-t-elle à nous informer précisément sur le processus d'apprentissage d'un concept mathématique ou le développement de compétences?

Nous avons, dans le texte de cadrage, regroupé un certain nombre de questions sous différents thèmes. Voici les principales questions qui semblent avoir guidé les réflexions didactiques des études de ce deuxième tome :

Comment analyser l'activité de la personne apprenante lorsque cette dernière est confrontée à une ingénierie ou à un dispositif pédagogique spécifique visant notamment à lui accorder une place centrale dans la construction ou l'usage de notions ou de concepts, objets d'apprentissage(s), dans l'enseignement primaire, secondaire ou supérieur?

Quels outils d'analyse la personne chercheuse doit-elle utiliser afin de rendre compte de la place accordée à l'activité de l'élève dans la mise en place d'une séance à travers ses différentes phases, notamment lors de la phase de mise en commun des productions?

Comment définir, caractériser et analyser précisément l'activité de la personne apprenante de différents points de vue (disciplinaire, langagier, gestuel, matériel ou du point de vue de la personne enseignante ou des médiations) lorsque cette dernière est confrontée à une tâche mathématique en classe?

Chacun des textes proposés dans ce deuxième tome apporte un éclairage sur ces questions, selon le ou les cadres théoriques convoqués. Dans ce qui suit, un sommaire des recherches menées pour chacun de ces articles est exposé. Ce premier coup d'œil permet d'explorer l'angle d'analyse de ces derniers et ainsi leur contribution à l'avancement des connaissances de ce champ de recherche.

Le premier article de ce numéro porte sur une étude menée par l'auteure, Sylvie Blanquart. Cette recherche a été réalisée avec la théorie des situations didactiques dans le contexte de l'enseignement de la géométrie plane auprès

d'élèves en fin de primaire et début de secondaire. Dans cet article, la chercheuse présente une analyse de l'activité mathématique des élèves en se concentrant sur les formes et les fonctions des raisonnements produits en situation. En effet, elle identifie et caractérise les différents types de raisonnements observés au cours de cette activité, en mettant notamment l'accent sur ceux qui orientent les choix des élèves. Pour mener cette étude, l'auteure a mis en place une ingénierie didactique basée sur une séquence de duos de situations impliquant l'apprentissage des relations géométriques du losange ayant lieu dans le méso-espace. Ainsi, en s'appuyant sur la théorie des situations didactiques et sur le modèle d'analyse des raisonnements de Bloch et Gibel (2011), entre autres, cette étude éclaire l'activité mathématique d'élèves lorsqu'ils sont confrontés à des situations de reproduction de figure plane dans le méso-espace.

Le deuxième article de ce numéro est écrit par Rox-Anne L'Italien-Bruneau. Elle propose de décrire et caractériser l'activité mathématique d'élèves en s'appuyant sur l'activité mathématique des personnes mathématiciennes. Pour ce faire, elle s'appuie sur une conceptualisation du travail des mathématiciens qu'elle a construite à partir d'une revue de littérature. Dans cet article, elle présente des séances en classe où des élèves de primaire sont engagés dans des activités de résolution de problèmes. Elle a analysé ces séances de discussion en grand groupe en se référant aux actions liées à l'activité mathématique des personnes mathématiciennes qu'elle propose dans sa conceptualisation. Elle souligne que le contexte de résolution de problème mis en place dans les séances observées favorise la correspondance de l'activité des élèves et celle des personnes mathématiciennes.

Valériane Passaro, Mireille Saboya et Fabienne Venant présentent, dans le troisième texte, une étude visant à explorer des tâches permettant le développement des habiletés à la modélisation de situations réelles chez des élèves du secondaire. Pour ce faire, elles ont observé et analysé les signes personnels d'élèves. En effet, les auteures ont mis en place une activité dans laquelle les élèves sont invités à modéliser une situation réelle à l'aide d'un outil technologique, en l'occurrence le CBR. Elles ont décrit les signes personnels d'élèves à travers leur utilisation du langage courant, entre autres, et ce, en s'appuyant sur la théorie de médiation sémiotique (TSM). Ainsi, elles proposent une analyse fine de ces signes en discutant de leur émergence, de leur évolution et de la signification qu'ils prennent pour les élèves.

Fabrice Vandebrouck et Aline Robert nous offrent un écrit novateur portant sur l'analyse de l'activité des élèves en classe ordinaire, en lien étroit avec les pratiques du professeur. Leur recherche s'inscrit principalement dans le cadre de la théorie

de l'activité. Cette étude est centrée sur les analyses discursives des différents acteurs, élèves et professeur. Les auteurs nous proposent une définition et une classification des proximités discursives d'objets, inspirées de la ZPD, afin de rendre compte des liens que l'enseignant développe ou s'efforce de développer en relation avec les formulations des élèves, lors des moments d'exposition de connaissances. Les auteurs souhaitent mettre en évidence que, du point de vue du savoir visé, l'efficacité des moments de cours serait en partie étroitement liée à la qualité des proximités discursives, relatives aux échanges entre les différents acteurs. Les auteurs étayent leur propos en présentant l'analyse didactique d'une séquence en classe ordinaire, au lycée, sur l'étude du sens de variation d'une fonction numérique, en s'attachant ainsi à nous faire partager une analyse détaillée des proximités discursives, mettant en lumière la nature et la fonction de ces dernières.

Dans le cinquième article de ce deuxième tome, Corine Castela nous livre sa réflexion inhérente à la question centrale, en didactique des mathématiques, de la dialectique singularité/généricité. La chercheuse, en portant un regard distancié et critique sur une part importante de ses recherches, dans le domaine de la résolution de problèmes, réinterroge le choix de son cadre théorique de référence, la théorie anthropologique du didactique, lorsqu'il s'agit d'étudier les relations entre généralité et singularité. Cet article met notamment en lumière en quoi l'étude d'un questionnement sur cette dialectique, à l'aune d'une théorie non utilisée habituellement par la chercheuse, permet de changer son regard, d'initier de nouveaux points de vue et d'introduire ainsi un nouveau questionnement. Pour illustrer et rendre compte de la dialectique objet d'étude, Corine Castela, nous propose ensuite l'analyse didactique riche et détaillée d'une activité au lycée, dans le domaine de la géométrie euclidienne, en utilisant l'outillage théorique de la théorie anthropologique du didactique.

Pour terminer ce mot éditorial, nous tenons à remercier très chaleureusement l'ensemble des collègues didacticiens qui, par leurs propositions de textes riches, variés et originaux ou par leurs relectures effectuées avec soin et rigueur, souvent à plusieurs reprises, ont permis l'évolution et la transformation des textes que vous avez découvert dans le volume précédent et que vous pourrez dès à présent lire dans ce second numéro.

Bonne lecture!



Activité mathématique des élèves et construction des apprentissages en géométrie plane

Sylvie BLANQUART

INSPE de l'académie de Bordeaux – Lab E3D

Sylvie.blanquart@u-bordeaux.fr

Résumé : L'objet de ce travail est d'analyser l'activité mathématique d'élèves confrontés à une ingénierie didactique qui leur assigne une place centrale dans la construction des apprentissages. Le domaine d'étude est la géométrie plane en fin de primaire, début de secondaire. Nous étudions l'activité mathématique des élèves par l'intermédiaire des raisonnements produits et des connaissances mobilisées. Plus particulièrement nous cherchons à identifier les caractéristiques des raisonnements produits par des élèves lors des phases d'action et de formulation d'une situation de reproduction de figures dans le méso-espace.

Mots-clés : géométrie, raisonnements, méso-espace, apprentissage

Pupils' mathematical activity and construction of learning in plane geometry

Abstract: The purpose of this research is to analyze the mathematical activity of pupils confronted with didactic engineering that places them at the heart of the process of constructing their learning. The field of study is plane geometry at the end of primary school and beginning of secondary school. We examine pupils' mathematical activity through the reasoning they produce and the knowledge they apply. More specifically, we seek to identify the characteristics of the reasoning produced by pupils during the action and formulation phases of a situation involving the reproduction of figures in meso-space.

Keywords: geometry, reasoning, meso-space, learning

Introduction

L'objet de ce travail, issu d'une recherche menée dans le cadre d'une thèse, est d'analyser les raisonnements produits par des élèves confrontés à des situations à dimension adidactique (Mercier, 1997; Bloch, 1999), qui leur attribue une place

centrale dans la construction des apprentissages. Notre domaine d'étude est la reproduction de figures en géométrie plane au cycle 3 qui comprend les deux dernières classes de primaire et la première année de l'enseignement secondaire en France (élèves de 9 à 12 ans). Nous étudions l'activité mathématique des élèves par l'intermédiaire des raisonnements produits et des connaissances mobilisées avec pour cadre théorique de référence la théorie des situations didactiques (TSD), (Brousseau, 1998). Notre étude vise à prendre en considération les raisonnements produits par les élèves en situation d'action et de formulation, qu'ils soient valides ou erronés. Nous souhaitons pouvoir caractériser les raisonnements destinés à justifier, argumenter, prouver, mais aussi ceux qui guident les décisions dans l'action, orientent les choix tout au long de l'activité de l'élève lors d'une activité de reproduction de figure en géométrie plane. Plus précisément, l'objectif de cet article est d'apporter des éléments de réponse à la question suivante : quelles sont les caractéristiques des raisonnements produits par des élèves lors des phases d'action et de formulation d'une situation de reproduction de figure plane dans le méso-espace?

Après avoir présenté les éléments théoriques utiles à notre étude, nous abordons la méthodologie de recherche employée avant d'explicitier nos analyses et principaux résultats.

1. Cadre de référence

Concernant les éléments théoriques, nous exposons des éléments relatifs au domaine d'étude, la géométrie, (section 1.1), puis des composantes de notre cadre théorique principal, la théorie des situations didactiques (section 1.2). Nous présentons ensuite l'outil d'analyse des raisonnements que nous avons mobilisé dans le contexte de cette recherche (section 1.3) pour finir par la description de l'ingénierie didactique retenue (section 1.4).

1.1 Étude du savoir visé : la géométrie

Dans cette partie, après avoir évoqué la distinction entre connaissances spatiales et connaissances géométriques nous présenterons une modélisation des différentes tailles d'espace puis une réflexion sur la visualisation des figures.

1.1.1 Connaissances spatiales et connaissances géométriques

Depuis les travaux de Berthelot et Salin (1992), deux champs de connaissances sont souvent distingués dans les recherches françaises relatives à l'enseignement de la géométrie : les connaissances géométriques et les connaissances spatiales. Caractériser plus précisément ces deux champs de connaissances et leurs interactions, étudier le rôle des connaissances spatiales dans le développement des connaissances géométriques soulèvent de nombreuses questions dont rendent

compte les cours et le débat¹ sur le thème de la géométrie de la 19^e École d'été de didactique des mathématiques (Houdement, 2019; Mathé et Mithalal, 2019; Soury-Lavergne et Maschietto, 2019).

Les connaissances géométriques portent sur les objets géométriques (objets idéels qui ne sont pas directement accessibles par les sens) et sur leurs relations (Petitfour, 2015; Mathé et Mithalal, 2019).

Les travaux internationaux considèrent le spatial en relation avec des apprentissages qui dépassent souvent le domaine de la géométrie. Ils étudient notamment les corrélations entre réussites à des tests de compétences spatiales et connaissances scientifiques (Houdement, 2019).

Dans les travaux français, les connaissances spatiales sont caractérisées par les problèmes qu'elles permettent de résoudre, les situations dans lesquelles elles s'expriment (Houdement, 2019). Selon Soury-Lavergne et Maschietto (2019), cela inclut : « la caractérisation des formes, de l'orientation, des positions et des mouvements » (p. 101).

Il y a consensus pour placer l'usage de représentations sémiotiques de l'espace environnant au cœur du champ de ces connaissances. Cerner les connaissances spatiales mises en œuvre lors de tâches de reproduction de figures est plus complexe et fait objet de débat. Pour Houdement (2019), le travail autour de la visualisation des figures relève du spatial. D'après Mathé cité par Bessot, Chaachoua et Perrin-Glorian (Débat 19^e EE, 2019), le travail sur des dessins en géométrie relève de pratiques différentes de celles employées dans la résolution de problèmes pratiques. Aussi, elle suggère de distinguer les connaissances procédurales utiles dans la construction de dessin des connaissances spatiales mobilisées lors de la résolution de problèmes pratiques, ce qui n'est pas l'avis d'autres chercheurs. Ainsi, Bessot, Chachoua et Perrin-Glorian (Débat 19^e EE, 2019) précisent que des connaissances spatiales peuvent se manifester dans un travail sur feuille de papier, par exemple quand un sujet prend des repères par rapport aux bords de la feuille.

Soury-Lavergne et Maschietto (2019) soulignent l'importance de ce qu'elles nomment « espace graphique » à l'interface entre ces deux champs de connaissances spatiales et géométriques et le rôle pivot que cet espace graphique peut ainsi jouer. En effet cet espace graphique permet à la fois la modélisation de problèmes spatiaux posés dans l'espace sensible et l'interprétation de ce modèle produit comme une représentation d'objets géométriques (figure 1).

¹ Ce débat occupe les pages 117 à 126 des Actes. Nous le référencerons par Débat 19^e EE, 2019.

Elles précisent : quand un problème est posé dans l'espace sensible ou l'espace graphique, les connaissances spatiales peuvent être suffisantes pour le résoudre.

Les connaissances spatiales sont efficaces pour résoudre les problèmes posés dans l'espace sensible ou graphique et le passage aux connaissances géométriques n'est requis que dans un second temps, lorsqu'un travail de modélisation s'avère nécessaire pour résoudre le problème. Réciproquement, les connaissances géométriques sont nécessaires et incontournables lorsque le problème se pose dans le champ géométrique, les espaces graphique ou sensible offrant un moyen d'explorer le problème. À l'école primaire, la priorité n'est pas aux problèmes purement géométriques. En revanche, les problèmes géométriques, traitables dans l'espace graphique et pouvant donner lieu à une problématisation dans le champ conceptuel des connaissances spatiales sont ceux à privilégier, comme l'indiquaient déjà Berthelot et Salin (1993; 1995). (Soury-Lavergne et Maschietto, 2019, p. 103)

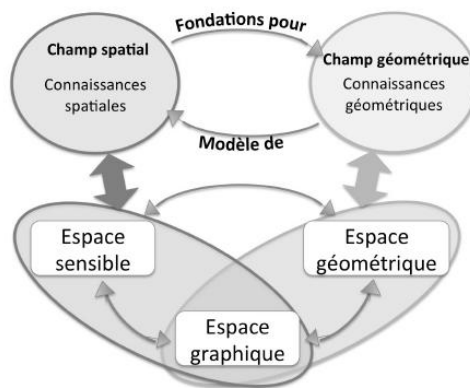


Figure 1. Rôle pivot de l'espace graphique dans la mise en relation des connaissances spatiales (Soury-Lavergne et Maschietto, 2019, p. 103)

Nous en retenons que la reproduction de figures joue un rôle essentiel dans l'articulation entre connaissances spatiales et géométriques, mais qu'il est difficile de circonscrire précisément les connaissances spatiales en jeu.

1.1.2 Les différentes tailles d'espaces

Selon l'espace avec lequel le sujet est en interaction, celui-ci développe des modèles conceptuels différents. Berthelot et Salin (1992) et Brousseau (2000), considèrent trois types d'espaces : le micro-espace; le méso-espace et le macro-espace. Le micro-espace est l'espace des interactions liées à la manipulation des petits objets, le méso-espace celui des déplacements domestiques, le macro-espace recouvre un territoire plus vaste dans lequel la vue ne permet plus que le contrôle d'une petite partie de l'espace d'interaction.

Quand un sujet travaille dans un micro-espace, il est à l'extérieur de cet espace. Il perçoit l'objet qu'il étudie dans sa globalité. Toutes les positions relatives entre sujet et objet sont possibles, fournissant au sujet des informations exhaustives sur cet objet. Les actions sont peu coûteuses et leurs effets immédiatement perceptibles (Brousseau, 1983 et Gálvez, 1985; cités par Berthelot et Salin 1992). Pour un élève, c'est par exemple l'espace de la table de travail. Quand le sujet est confronté à des tâches dans le méso-espace, il fait partie de l'espace dans lequel il travaille. Il peut s'y déplacer rapidement et change alors de point de vue sur les objets qui y sont placés. Ses déplacements le confrontent à différentes perspectives qui peuvent modifier sa perception des relations spatiales par lesquelles il identifie les objets dans le micro-espace. La salle de classe, la cour d'école sont des exemples de méso-espace pour les élèves. Le sujet est aussi à l'intérieur du macro-espace et s'y déplace tandis que les objets sont fixes. Mais cette fois-ci, la vue ne permet plus que le contrôle d'une petite partie de l'espace d'interaction, celle qui est autour du sujet et par conséquent varie tout au long de son déplacement (Berthelot et Salin, 1992, p. 101). Ainsi, le sujet doit reconstruire une représentation globale du macro-espace à partir de visions partielles. Le macro-espace (immeuble, quartier, ville) ne sera pas convoqué dans ce travail.

1.1.3 La visualisation des figures

De nombreuses recherches récentes dans le domaine de la géométrie soulignent l'importance du regard porté sur les figures par les élèves pour produire des raisonnements en géométrie. Ces recherches proposent des situations dont l'objectif est de faire évoluer le regard des élèves sur les figures et visent a priori une meilleure utilisation de la figure avec pour horizon l'entrée dans la Géométrie 2 (Houdement, 2007) en prenant appui sur les travaux de Duval (Bulf et Celi, 2016; Perrin-Glorian et Godin, 2014).

Duval (1994) relève qu'une figure ne « montre » pas la même chose à l'élève de primaire, de collège ou de lycée qu'à son enseignant : cela l'amène à différencier deux types de visualisation : la visualisation iconique et la visualisation non iconique. « Par visualisation, il faut entendre un processus actif et situé : le sujet s'engage dans un problème et à cette fin organise (de manière consciente ou non) sa perception des formes » (Mathé et al., 2020, p. 35).

« La visualisation iconique repose sur une ressemblance entre la forme reconnue dans un tracé et la forme caractéristique de l'objet à identifier » (Duval, 2005, p. 15). Dans ce type de visualisation, la forme est discriminée à partir de son contour et apparaît stable, indépendante des opérations que l'on pratique sur elle. Il y a une résistance à sortir du contour fermé de la figure qui ne peut pas être décomposée en d'autres formes semblables ou différentes dans une démarche heuristique

(Duval, 2005). Ce mode de visualisation constitue un obstacle dans l'entrée dans la géométrie.

La visualisation non iconique se fonde sur la décomposition des formes perçues en unités figurales de même dimension ou de dimension inférieure. Duval (2005) considère que l'apprentissage de la géométrie sollicite trois modes de visualisation non iconique; la décomposition méréologique, la décomposition instrumentale et la déconstruction dimensionnelle. Ils ont en commun un enrichissement heuristique de la figure pour y faire apparaître des formes que le regard ne perçoit pas immédiatement. La décomposition méréologique est une décomposition en unités figurales de même dimension que la figure d'origine. La décomposition instrumentale est déclenchée par la construction des figures à l'aide des instruments. Avec la déconstruction dimensionnelle, l'espace est considéré du point de vue de ses dimensions. La visualisation repose alors sur une décomposition en unités figurales de dimension inférieure à celle de la figure initiale : points (0D) ou lignes (1D) dans le cadre de la géométrie plane. Elle est étroitement corrélée à une activité discursive sur la figure étudiée. Ainsi, une unité figurale 1D peut être désignée directement : segment, droite. Cette désignation peut également se faire selon son appartenance à une unité figurale de dimension supérieure : rayon d'un cercle, diamètre d'un cercle, diagonale d'un polygone, côté d'un polygone. Enfin cette même unité figurale 1D peut être désignée par l'intermédiaire de sa relation à une autre unité figurale de même dimension (perpendiculaire, parallèle, symétrique) (Duval, 2014).

1.2 Éléments issus de la théorie des situations didactiques

Pour Brousseau (2012), en situation d'enseignement, le milieu est pour un sujet, l'environnement avec lequel il interagit. Il comprend des éléments matériels, physiques mais aussi des objets virtuels, règles, contraintes, représentations sémiotiques et peut être transformé par l'activité de ce sujet. Ce milieu peut également contenir d'autres sujets (élève, professeur) en interaction.

Brousseau (1998) appelle situation didactique, une situation dans laquelle se manifeste, implicitement ou explicitement, une intention d'enseigner une connaissance comme moyen de traitement de la situation. Une situation adidactique est une situation didactique associée à une connaissance (ou un savoir), clairement identifiée par l'enseignant, dans laquelle l'intention d'enseigner est effacée pour laisser à l'élève le plus d'initiative possible et lui permettre d'agir, réfléchir, prendre des décisions de lui-même. Nous parlons de situation à dimension adidactique à l'instar de Mercier (1997) et Bloch (1999) pour dénommer les situations qui permettent des moments d'interaction adidactique du sujet avec le milieu. Ces situations à dimension adidactique sont caractérisées

par : « un milieu offrant une certaine marge pour l'activité mathématique de l'élève, ainsi que pour l'exploitation de cette activité lors du processus d'institutionnalisation » (Bloch, 1999, p. 138).

1.2.1 Des connaissances au savoir

Dans ce cadre de la TSD, les connaissances sont de l'ordre du privé, dépendantes de l'activité du sujet en contexte. Liées à l'histoire du sujet comme résultats intériorisés de son expérience individuelle, elles se manifestent essentiellement en situation comme moyens non nécessairement (ou facilement) explicitables de résoudre une situation. Elles permettent la prise de décision en vue de parvenir à un but (Brousseau et Centeno, 1991). Elles se placent donc du côté du contrôle de la situation par l'élève (Bloch, 1999) sans être obligatoirement formulées : « Une connaissance est ce qui réalise l'équilibre entre le sujet et le milieu, ce que le sujet met en jeu quand il investit une situation » (Margolinas, 2014, p. 15).

Les savoirs sont le fait d'une construction collective dans une institution (celle des mathématiciens ou celle des programmes de mathématiques), ils sont formulés, formalisés, validés. Ils ne dépendent ni du contexte ni du sujet qui les emploie : ils sont décontextualisés, détemporalisés, dépersonnalisés (Margolinas, 2014). Ils se placent du côté de la communication et de la validation (Bloch, 1999). Ils sont légitimés par des motifs rationnels propres aux mathématiques : les raisons de savoir (Bessot, 2011).

Une connaissance mise en œuvre dans une situation, puis identifiée, formulée, reconnue comme utile pour d'autres situations, a vocation à devenir une référence, être mémorisée et acquérir un statut institutionnel de savoir. Ce processus est « l'institutionnalisation ».

1.2.2 Le répertoire didactique

Les connaissances et savoirs qui sont construits au sein d'une classe se structurent au fur et à mesure des apprentissages. C'est ce qui constitue le répertoire didactique de la classe. Gibel (2018) définit ce répertoire didactique de la classe comme « l'ensemble des moyens que le professeur pense pouvoir attendre des élèves, par suite de son enseignement » (p. 26). Mais, comme il le précise : « le répertoire didactique d'un élève, autrement dit le répertoire utilisé par un élève lorsqu'il est confronté à une situation, peut bien évidemment différer du répertoire didactique de la classe » (Gibel, 2018, p. 27).

La construction du répertoire didactique de la classe est organisée pour permettre aux élèves de mobiliser rapidement les éléments dont ils ont besoin quand ils s'engagent dans une tâche mathématique.

Les éléments du répertoire didactique liés à l'apprentissage d'une notion mathématique peuvent être du vocabulaire (désignation orale ou écrite d'objets, de relations), des représentations sémiotiques, des techniques (algorithmes de calcul, techniques de construction), des propriétés associées à cette notion, des propriétés d'objets qui s'y rattachent, des procédures de résolution d'une classe de problèmes et les différents champs d'utilisation de cette notion.

L'élève en situation d'apprentissage mobilise des éléments de son répertoire didactique, qui fait potentiellement partie du milieu. C'est sur ce répertoire didactique déjà construit que l'enseignant pourra s'appuyer pour proposer des situations amenant les élèves à acquérir de nouvelles connaissances et savoirs.

1.2.3 Les niveaux de milieux

Nous poursuivrons cette présentation par l'étude du modèle de structuration du milieu introduit par Brousseau (1986), modifié par Margolinas (1995) et complété par Bloch (1999). La fonction de ce modèle tel qu'il est présenté par Bloch (1999) est en particulier de « mieux analyser les contraintes et les libertés réelles du professeur qui cherche à gérer une situation adidactique » (p. 135).

Le modèle que nous allons présenter a pour première fonction de prévoir les interactions élève/milieu à travers les connaissances mises en jeu à chaque niveau, en considérant que les élèves sont dans un rapport interne à la situation (Bloch, 2002). Il sera un point d'appui pour étudier les raisonnements produits par les élèves lors d'une situation à composante adidactique.

Ce modèle se présente sous forme d'emboîtement de situations, repérées par leur « niveau », modélisant les différents rôles de l'élève et de l'enseignant. Chaque situation d'un niveau n constitue le milieu du niveau immédiatement supérieur $n + 1$. L'ensemble des niveaux négatifs correspond aux situations adidactiques, le niveau de base ($n = 0$) étant celui de la situation didactique (Margolinas, 1995).

Au niveau inférieur ($n = -3$), le sujet (acteur objectif) « effectue des actions non seulement formulables simplement, mais aussi culturellement repérées, répertoriées et qui sont supposées connues de l'élève puisqu'elles doivent lui être communiquées. Il s'agit donc de procédures, d'algorithmes » (Brousseau, 1986, p. 59). Cet élève objectif, en interaction avec le milieu matériel, définit la situation objective (Figure 2).

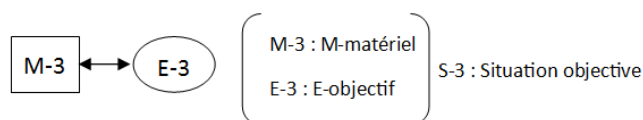


Figure 2. Modélisation de la situation objective

Au niveau immédiatement supérieur, les rapports effectifs de l'acteur objectif avec le milieu objectif constituent la « situation de référence ». L'élève agissant (E - 2) interagit avec le milieu objectif (M - 2) avec pour enjeu la résolution d'un problème. Il mobilise des connaissances pour agir et interpréter les rétroactions. Le milieu objectif (M - 2) s'enrichit de ces actions et des informations perçues en retour.

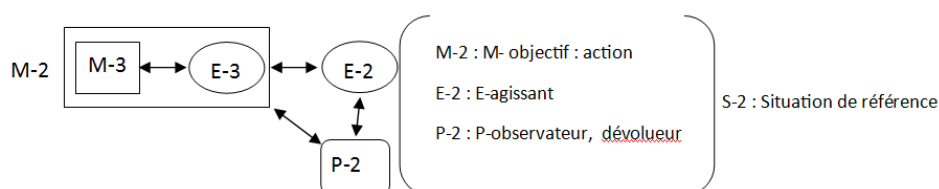


Figure 3. Modélisation de la situation de référence

Dans la situation d'apprentissage (niveau M - 1), le sujet « établit des rapports non plus avec le milieu objectif, mais avec une intériorisation des rapports qu'un sujet agissant (lui ou un autre) a avec le milieu objectif » (Berthelot et Salin, 1992, p. 42). Ainsi le milieu de référence (M - 1) comprend non seulement les actions construites au niveau (M - 2) mais aussi des énoncés qui rendent compte de ces actions et de leur bien-fondé.

La présentation schématique de l'ensemble rend compte de l'emboîtement des situations, tandis que la synthèse sous forme de tableau permet une vision plus globale des différentes positions du milieu, de l'élève, et du professeur (**Erreur ! Source du renvoi introuvable., Erreur ! Source du renvoi introuvable.**).

Dans nos analyses, nous ferons fonctionner ce cadre dans le contexte de la géométrie.

Tableau 1. Niveaux de milieu (Bloch, 2005, p. 55)

M0 : M-d'apprentissage : institutionnalisation	E0 : Élève	P0 :Professeur enseignant	S0 : Situation didactique	
M-1 : M-de référence : formulation validation	E-1 : E-apprenant	P-1 : P-régulateur : aide à l'argumentation	S-1 : situation d'apprentissage	
M-2 : M-objectif : action	E-2 : E-agissant	P-2 : P-observateur, dévoluteur	S-2 : situation de référence	Niveaux adidactiques
M-3 : M-matériel	E-3 : E-objectif		S-3 : situation objective	

Comme nous cherchons à analyser les raisonnements produits par des élèves confrontés à des situations à dimension adidactique, nous allons maintenant nous intéresser à ce que sont les raisonnements.

1.3 Étude des raisonnements

Dans cette section après avoir apporté des éléments de réponse à la question « Qu'est-ce qu'un raisonnement? », nous présenterons un modèle d'analyse des raisonnements que nous utilisons dans nos travaux.

1.3.1 Qu'est-ce qu'un raisonnement?

Pour Blanché (1973), « raisonner c'est donc faire une inférence ou combiner des inférences » (p. 15). Cette définition première sert de référence dans de nombreux travaux de didactique qui portent sur l'argumentation, la preuve ou la démonstration (Cabassut, 2005; Douaire, 2006; Pedemonte, 2002). Nous retrouvons également des énoncés proches dans les travaux de Jeannotte et Corriveau (2015) et Gauthier (2015).

Selon Gibel (2018), les raisonnements produits par les élèves en classe de mathématiques sont majoritairement modélisables par une inférence ou une suite finie d'inférences coordonnées suivant les règles de la logique. Cependant, il note que lors d'une situation d'apprentissage, tous les raisonnements produits par les élèves ne sont pas formulés verbalement. Par ailleurs, certaines formulations, syntaxiquement correctes, relèvent d'une citation mémorisée et non pas d'un véritable raisonnement construit par le sujet.

En accord avec ces propos il nous apparaît que les raisonnements élaborés dans le cadre de la Géométrie 2 (Houdement, 2007), où le mode de production des connaissances est le raisonnement hypothético-déductif à partir de définitions et théorèmes textuels, sont facilement identifiables. Mais la production de connaissances dans le cadre de la Géométrie 1 n'est pas réductible à un travail sur des énoncés. Ainsi, définir les raisonnements uniquement en termes d'inférences ou de successions d'inférences ne permet pas de rendre compte de la diversité des raisonnements qui peuvent être générés par les élèves dans le paradigme G1.

Afin de circonscrire plus précisément ce que nous retiendrons comme raisonnement nous nous référons donc aux travaux de Brousseau et Gibel (2005).

Ces auteurs établissent quatre critères qui permettent de déterminer si un raisonnement présumé peut être qualifié de raisonnement effectif :

- Il peut être explicité de manière même partielle par le sujet, qui dispose des connaissances nécessaires à son élaboration.

- Il est intentionnel. Il est produit volontairement par le sujet dans un but déterminé.
- Dans la recherche du but à atteindre, le raisonnement supposé modifie de façon positive l'environnement du sujet. Il enrichit le milieu avec lequel le sujet interagit par l'apport d'une nouvelle connaissance. Il réduit une incertitude, permet une action.
- Il est motivé, justifié par sa valeur intrinsèque, par des arguments de « pertinence, de cohérence, d'adéquation, d'adaptation » (Brousseau et Gibel, 2005, p. 15).

En conséquence, nous ne considérerons pas comme raisonnement effectif :

- Toute action ou formulation involontaire;
- Toute action, formulation ou décision qui ne peut pas être explicitée, même sommairement, par le sujet;
- Toute action qui ne peut pas être construite avec les connaissances dont dispose le sujet;
- Toute action ou formulation qui ne serait pas conduite en fonction d'un but; qui ne procure pas d'avantage au sujet par rapport à l'état initial.

1.3.2 Un modèle d'analyse des raisonnements

Bloch et Gibel (2011) proposent un modèle d'analyse des raisonnements, fondé sur la TSD et sur lequel nous nous appuyons pour nos analyses. Le modèle de structuration du milieu utilisé, lors de l'élaboration de ce modèle d'analyse des raisonnements, est celui de Bloch (2005), issu du modèle de Margolinas (1995), modifié afin de tenir compte du rôle du professeur dans les niveaux didactiques de milieux. Dans les situations didactiques ou à dimension didactique, les différentes étapes de la situation peuvent être à l'origine de raisonnements variés dont la fonction est liée au niveau de milieu en jeu : du côté de la situation de référence, la confrontation à un milieu heuristique (milieu objectif) permet l'élaboration de raisonnements pour l'action; le passage à un milieu de référence dans la situation d'apprentissage favorise l'élaboration de raisonnements pour justifier la validité des méthodes et établir le caractère de nécessité des propriétés utilisées plus ou moins implicitement.

Pour Bloch et Gibel (2011), l'identification des fonctions des raisonnements aide le chercheur à repérer la position des élèves dans ces niveaux de milieux. Nous avons montré (Gibel et Blanquart-Henry, 2017) comment, dans le cadre de la géométrie plane, les fonctions du raisonnement sont effectivement liées à des niveaux de milieux et comment ces fonctions manifestent aussi ces niveaux de milieux.

Nous avons ainsi retenu trois axes du modèle de Bloch et Gibel (2011). Le premier axe d'analyse porte sur la fonction des raisonnements produits en lien avec le niveau de milieu dont ils témoignent en situation d'action ou de formulation. Le deuxième axe repère et organise les représentations et signes qui seraient des observables des raisonnements. Enfin, en lien avec ces observables, le troisième axe d'analyse cherche à identifier les connaissances mobilisées par les élèves, les éléments du répertoire didactique sollicités et leur évolution. Dans les sous-sections suivantes, nous développons le premier axe et présentons plus rapidement les deux autres.

Pour analyser les fonctions des raisonnements, nous commençons notre étude par les raisonnements produits en situation d'action avant d'envisager ceux produits en situation de formulation.

1.3.2.1 Fonctions des raisonnements produits en situation d'action. Dans la présentation qui suit, nous conduisons une réflexion théorique de toutes les fonctions possibles des raisonnements qui peuvent apparaître lors d'une situation adidactique d'action ayant pour enjeu la reproduction d'une figure plane, indépendamment des variables retenues pour une situation donnée.

Dans les situations adidactiques d'action, les raisonnements sont produits par les élèves comme moyens pour établir leurs décisions (Gibel, 2008). Pour établir a priori les fonctions des raisonnements qui peuvent être produits par les élèves lors de la reproduction de figures planes nous commençons par identifier les actions qu'ils sont amenés à prendre lors de la réalisation d'une telle tâche.

Pour cela, nous proposons une classification des actions instrumentées qui peuvent être réalisées par les élèves dans l'espace sensible, avec la médiation d'un artéfact. À chaque catégorie d'action nous associons la fonction des raisonnements qui peuvent la sous-tendre. Ce travail d'analyse a priori est théorique, il conviendra, lors des analyses, de s'assurer qu'une action donnée dénote bien un raisonnement en référence aux critères énoncés ci-dessus. Nous distinguons les actions à réaliser sur le modèle des actions à produire sur le dessin, puis séparons ces actions selon qu'elles visent une prise d'information sur l'objet considéré (médiation épistémique) ou une modification de cet objet (médiation pragmatique) (Rabardel, 1995). Croiser ces deux critères nous amène à définir quatre catégories d'actions :

- Prise d'information sur le modèle à reproduire;
- Prise d'information sur l'objet graphique en construction (le dessin);
- Modification du modèle à reproduire (enrichissement de ce modèle pour repérer des propriétés);
- Modification de l'objet graphique en construction.

Nous définissons ensuite les fonctions des raisonnements qui peuvent être en lien avec chacune de ces catégories d'actions à partir des travaux de Gibel (2015). Enfin, nous regroupons les fonctions des raisonnements identifiées selon qu'elles concernent l'usage des artéfacts, les caractéristiques du modèle à reproduire, l'interprétation des rétroactions ou l'organisation générale des actions. Cela nous conduit à la liste de fonctions possibles des raisonnements que nous retiendrons pour conduire nos analyses :

Concernant l'usage des artéfacts :

- Choix de l'artéfact.
- Adaptation ou construction de schèmes d'usage de l'artéfact.

Concernant les caractéristiques du modèle à reproduire :

- Intuition ou conjecture ponctuelle sur les relations entre objets graphiques ou matériels composant le modèle.
- Identification par le biais d'instruments de caractéristiques du modèle.
- Identification de caractéristiques géométriquement significatives du modèle que doivent satisfaire les objets graphiques produits.
- Intuition ou conjecture ponctuelle concernant des objets qui ne sont pas encore dessinés.

Interprétation des rétroactions :

- Validation ou non d'une conjecture.
- Production d'une nouvelle conjecture.
- Identification de relations entre objets matériels.
- Validation ou non de la procédure en cours.
- Ajustement de l'action en conséquence : poursuite ou abandon/adaptation de la procédure.

Raisonnements d'organisation :

- Identification sur le modèle d'objets déjà reproduits.
- Organisation de la succession d'actions élémentaires pour permettre la reproduction, l'ordre des tracés pouvant conditionner la réussite.

Par exemple, les raisonnements concernant l'usage des artéfacts peuvent avoir pour fonction soit le choix de l'artéfact soit l'adaptation (ou la construction) de ses schèmes d'usage. Ainsi, lorsqu'un groupe d'élèves rend compte oralement de l'utilisation de l'équerre en carton pour fabriquer un gabarit d'angle alors que cette technique ne fait pas partie du répertoire didactique de la classe, nous identifions la production d'un raisonnement par construction de schème d'usage d'un artéfact.

1.3.2.2 Fonctions des raisonnements produits en situation de formulation. De même que nous avons proposé une classification des fonctions des raisonnements spécifiques à l'action, nous avons identifié les raisonnements qui peuvent caractériser la formulation dans le cadre spécifique de la reproduction de figures.

Les raisonnements susceptibles d'être produits au niveau du milieu de référence (M - 1) ont pour fonction la formulation (plus ou moins explicite) ou la justification des raisonnements produits au niveau du milieu objectif. En reprenant les rubriques précédentes, cela nous conduit à identifier les fonctions que nous détaillons ci-dessous.

Concernant l'usage des artéfacts

- Des justifications explicites ou en partie implicites du choix d'un instrument ou de son usage en lien avec les propriétés et les caractéristiques de la figure comme : « Oui, on a pris l'équerre comme quoi ça fera, ça fait un angle droit. »

Concernant les caractéristiques du modèle à reproduire

- La formulation d'une caractéristique du modèle à reproduire et sa validation par une preuve pragmatique. Par exemple, après avoir vérifié par l'intermédiaire du tasseau que tous les côtés d'un losange donné en modèle sont isométriques les élèves concluent : « C'est tous la même longueur ».
- La justification explicite ou en partie implicite de la procédure mise en œuvre en lien avec les caractéristiques du modèle à reproduire. Comme : « Ensuite on a remarqué qu'y avait des, des angles droits, là-bas avec l'équerre, du coup ben on a construit des, on a construit les angles droits ».

Concernant l'interprétation des rétroactions

- L'interprétation et la formulation des rétroactions : « Mais // ce qu'on avait un peu du mal à faire c'était trouver la, la moitié en fait »

Raisonnements d'organisation

- L'explicitation de l'organisation des tâches (raisonnement d'organisation) :
Alors, heu, au début donc on a pris le bâton, donc on a mesuré la heu, la diagonale, là [Montre du doigt la petite diagonale]. [...] Puis ensuite heu, on a [...] On a mesuré là-bas sur heu la figure // Pour avoir notre deuxième diagonale

1.3.2.3 Analyse sémiotique et identification des connaissances et des savoirs. Le deuxième axe que nous retenons repère les signes qui seraient des observables des raisonnements. Ces signes peuvent être des paroles, des tracés, des gestes ou la façon d'utiliser les artéfacts. Pour appréhender les éventuels raisonnements

produits par les élèves, nous avons besoin d'identifier les objets qu'ils considèrent (sur lesquels ils agissent ou dont ils parlent), et les relations qu'ils perçoivent entre ces objets. Pour cela nous essayons de relever la production et l'évolution des différents signes émis par les élèves, non pas indépendamment les uns des autres, mais dans leur relation les uns aux autres (Arzarello, 2006) toujours en relation avec les actions menées (vision synchronique). Dans le foisonnement des signes produits, nous retenons les plus saillants, ceux qui nous apparaissent en lien avec l'activité géométrique en cours.

Enfin, en lien avec ces observables, nous cherchons à identifier les connaissances mobilisées par les élèves, les éléments du répertoire didactique de la classe sollicités et leur évolution. Cela constitue le troisième axe d'étude.

1.4 L'ingénierie retenue

Nous terminons cet exposé du cadre de référence par la présentation de l'ingénierie didactique retenue. Notre ingénierie est composée de ce que nous nommons « un duo de situations ». Après avoir défini le sens de cette expression dans notre travail nous présentons l'ingénierie mise en œuvre puis ses potentialités.

1.4.1.Principe général des duos de situations

Notre thèse concourt à la valorisation de l'alternance de travail dans des espaces de tailles différentes pour engager les élèves dans une problématique de modélisation au sens de Berthelot et Salin (1992). Nous nommons « duo de situations » un ensemble de deux situations, rencontrées de façon successive par les élèves, qui ont le même objectif d'apprentissage et un enjeu similaire pour les élèves. Ici, la production ou la reproduction de losanges. Les deux espaces de tailles différentes sont l'espace graphique d'une feuille de papier (micro-espace) pour l'une des situations et un espace graphique délimité au sol dans le méso-espace pour la deuxième. En nous inspirant des « duos d'artéfacts » de Soury-Lavergne et Maschietto (2019), nous recherchons dans les situations proposées des éléments de complémentarité, de redondance et d'antagonisme qui permettent a priori l'enrichissement des connaissances par la mise en correspondance des deux situations.

Dans ces duos de situations, l'espace graphique du méso-espace est un support plan de taille supérieure à la taille des sujets et permettant leurs déplacements. Les travaux de Perrin-Glorian et Godin (2014, 2018) ont souligné le rôle des instruments dans le travail géométrique, notamment la possibilité ou non d'utiliser un instrument de mesure conventionnel comme la règle graduée. Nous faisons l'hypothèse, comme Perrin-Glorian et Godin, que l'approche des figures

en travaillant les grandeurs (longueurs, angles) sans permettre leur mesure faciliterait l'entrée dans la Géométrie axiomatique ou Géométrie 2 (Houdement, 2007). C'est pourquoi nous associons au travail dans le méso-espace un choix d'artéfacts spécifiques qui ne permettent pas le mesurage.

1.4.2 Présentation de l'ingénierie

Notre ingénierie est composée d'un duo de situations ayant pour objet d'apprentissage les relations géométriques du losange. Elle est organisée sur trois séances. Les deux premières séances sont consacrées à une situation de communication ayant pour enjeu la reproduction d'un losange dans le micro-espace, la troisième séance est réservée à la situation de reproduction de losange dans le méso-espace. Les deux situations ont en commun la présence d'une phase adidactique d'action qui a pour enjeu pour les élèves la reproduction d'un losange donné sous forme de modèle découpé dans du papier. Dans les deux cas, les modèles utilisés dans la classe sont de différentes dimensions, pour pouvoir dégager des propriétés de l'objet théorique losange. Elles permettent en fin de séance le contrôle de la validité de leur production par les élèves eux-mêmes. Les deux situations de reproduction diffèrent essentiellement par la taille de l'espace de travail et les outils à la disposition des élèves.

La situation dans le micro-espace est une situation de communication qui se déroule sur deux séances. Nous ne la détaillons pas ici car nos analyses portent principalement sur la situation dans le méso-espace.

La situation dans le méso-espace est une situation de reproduction de losanges découpés dans un papier résistant et souple, dont les côtés mesurent entre 65 cm et 80 cm. La séance est structurée en trois temps : après une phase de dévolution de l'activité, les élèves sont mis en situation d'action pendant une vingtaine de minutes. Enfin ils sont regroupés pour valider leurs productions et formuler leurs procédures.

Pour la situation d'action, les élèves sont répartis par groupes sous le préau. Chaque groupe se voit attribuer un modèle (grand losange découpé) qui ne peut pas être déplacé en dehors d'une zone bien délimitée, appelée dans cet article « zone des modèles ». La consigne donnée est de représenter le plus précisément possible cette figure par un dessin, au sol, dans un espace réservé, appelé « zone de dessin ». Cette zone de dessin est éloignée de la zone où se trouve le modèle. Ce modèle peut être manipulé, plié, pour prélever des informations. Il permet aussi l'inscription de traces graphiques.

Ensuite, à tour de rôle, chaque groupe expose à l'ensemble de la classe et au professeur comment il a procédé pour effectuer le tracé. Les instruments et outils

mis à disposition des élèves sont : ficelle, ciseaux, un tasseau de bois de 2 m environ par groupe, équerres en carton, feutres, craies de différentes couleurs et brosses pour effacer.

Quand tous les élèves ont terminé leur tracé, à tour de rôle, chaque groupe formule à l'ensemble des élèves de la classe les étapes de sa construction et explicite les procédures qu'il a utilisées. La validité de la procédure est discutée collectivement. Une validation pragmatique dans l'espace sensible par superposition du modèle sur le dessin réalisé termine l'exposé du groupe.

1.4.3 Potentialités de l'ingénierie

Dans cette situation de reproduction de figures dans le méso-espace, les élèves sont d'abord confrontés à une situation d'action dans laquelle ils doivent prendre des décisions pour tracer une figure superposable à une autre. La superposition entre la figure modèle et la figure tracée ne sera autorisée que pour valider ou invalider la production et une fois la tâche considérée achevée. La distance entre la figure modèle et la zone de dessin est telle que les contrôles sur l'action ne sont pas possibles en continu. La reproduction de la figure nécessite donc de la part des élèves une anticipation des actions à partir d'informations partielles. Cet éloignement entre le modèle et sa reproduction, associé à la taille de l'espace et à l'absence de repères spatiaux usuels comme les bords de la feuille, favorise la prise d'informations sur la figure à reproduire, donc le relevé de propriétés et par conséquent le recours aux connaissances de géométrie. Par ailleurs, l'utilisation d'artéfacts non usuels comme la corde ou des tasseaux de bois nécessite souvent la coordination d'au moins deux élèves, ce qui renforce la nécessité d'anticiper les actions. Apparaîtront sans doute des échanges entre élèves sur la technique à mettre en place, des formulations, par des gestes et/ou le langage oral, de l'objectif à atteindre et des contraintes à respecter pour y parvenir. C'est ainsi que la situation proposée favorise a priori l'élaboration de raisonnements variés et l'enrichissement des connaissances.

Après cette présentation de l'ingénierie nous abordons la méthodologie employée.

2. Méthodologie

Dans cette partie dédiée à la méthodologie nous présentons les données collectées puis l'organisation de nos analyses.

2.1 Données collectées

Notre recherche se base sur des analyses cliniques d'interactions entre élèves ou entre élèves et enseignante dans des classes de cycle 3 en France lors d'une séquence de géométrie identique. Cette séquence, construite par des chercheurs,

est constituée du duo de situations présenté dans le paragraphe 1.3. La même fiche descriptive de la séquence a été fournie aux enseignants pour les expérimentations. Au total, 15 séances d'environ 55 min ont été observées dans 4 classes. Toutefois, seule une classe de CM1-CM2 (9-11 ans) est considérée pour cet article. Ceci représente trois séances. Le corpus de données brutes comporte les productions d'élèves et l'enregistrement vidéo de toutes les interventions de l'enseignante lors des phases didactiques, les enregistrements en continu des actions et échanges au sein de certains groupes d'élèves pendant les phases adidactiques et un enregistrement vidéo en plan large de toutes les séances observées. Pour les analyses, un grand nombre de ces données ont été transcrites sous forme de texte, accompagné de photographies.

2.2 Organisation de nos analyses

Pour apporter des éléments de réponse à notre problématique, nous analysons plus particulièrement la mise en œuvre de la situation dans le méso-espace dans une classe de primaire. Les élèves travaillant par groupes de trois ou quatre, nous étudions chaque groupe séparément. L'étude pour un groupe donné suit toujours la même méthodologie : nous étudions les raisonnements produits en situation d'action si nous avons pu filmer le groupe considéré pendant cette phase. Sinon nous reconstituons la procédure employée à partir des éléments dont nous disposons comme les images de la caméra placée en plan large. Ensuite, nous identifions les raisonnements produits par les élèves du groupe lors de la phase de formulation.

Nous présentons ici les analyses menées avec un groupe d'élèves de fin de primaire (CM1-CM2). Ce groupe a été choisi pour plusieurs raisons : il est représentatif des raisonnements produits par les élèves de sa classe; nous disposons d'enregistrements vidéos des phases d'action et de formulation.

3. Analyses et résultats

Cette partie propose une présentation générale des résultats, suivie des phases d'action et de formulation. Nous terminons la partie avec une synthèse.

3.1 Présentation générale

Ce groupe de 3 élèves a reçu comme modèle un losange de 80 cm de côté dont un angle a pour mesure 80 degrés. Lors de la phase de dévolution, l'enseignante a indiqué une fois à l'oral que la figure représentée est un losange. La recherche se décompose en deux temps : les élèves effectuent un premier dessin qu'ils effacent pour en produire un second. Quand nous commençons à filmer le groupe, ils terminent le premier dessin. Nous disposons d'enregistrements vidéos de la fin de

la première construction, de la deuxième construction et de la phase de formulation.

Nous détaillons ici les analyses effectuées pour la phase d'action puis celles relatives à la phase de formulation avant d'en présenter une synthèse.

3.2 Phase d'action

Nous présentons les essais de construction ainsi que les analyses correspondantes.

3.2.1 Phase d'action – premier essai de construction – analyses

Les élèves dessinent trois côtés consécutifs du losange en reportant leur longueur par l'intermédiaire d'une ficelle coupée à la dimension voulue. La même ficelle est utilisée pour les trois côtés. Le quadrilatère est complété par un quatrième côté, sans tenir compte de sa longueur. Ainsi, le premier objet graphique construit est un quadrilatère dont trois côtés seulement ont la même longueur que les côtés du modèle. Les diagonales ne sont pas représentées.

En ce qui concerne les raisonnements, nous notons l'identification de caractéristiques géométriquement significatives du modèle que doit satisfaire l'objet graphique produit. Cependant, seule une partie des caractéristiques du modèle est prise en compte : les élèves ne contrôlent ni la longueur du quatrième côté dessiné ni la longueur d'une diagonale. Ils n'effectuent pas non plus de report d'angle. Par ailleurs, une vision 2D semble prédominer.

Nous notons également une adaptation des schèmes d'usage de la ficelle qui est employée pour construire des côtés isométriques à un côté du modèle (M - 2).

Une connaissance est utilisée implicitement : trois côtés du modèle sont isométriques.

Le dessin achevé, une élève se relève, se déplace d'environ un mètre et observe la production. Elle remet alors en cause la validité de ce dessin : « Heu, y'a un côté un peu plus écarté que l'autre ».

Concernant les raisonnements, il y a interprétation des rétroactions du milieu au niveau M - 2 après un contrôle visuel de la forme globale du dessin (vision 2D).

Du point de vue des signes, le terme « écarté » relève du langage spatial.

À l'aide d'une ficelle les élèves comparent la longueur de la petite diagonale de leur dessin avec celle du modèle. Les longueurs ne sont pas isométriques. Les élèves concluent qu'ils ont fait un mauvais usage de la ficelle.

Il y a interprétation des rétroactions du milieu après un contrôle instrumenté de l'isométrie entre une diagonale du dessin et la diagonale correspondante du modèle. Le raisonnement afférent se situe au niveau (M - 2). La non-conformité du dessin est imputée à une erreur de mesurage, sans remise en cause de la procédure de construction. Nous notons toutefois une évolution dans les connaissances en jeu dans la mesure où une nouvelle caractéristique du modèle est prise en compte.

Par ailleurs, nous notons une adaptation des schèmes d'usage de la ficelle qui est employée pour comparer des longueurs (M - 2).

Les élèves effacent le dessin et entreprennent alors une nouvelle construction.

3.2.2 Phase d'action – deuxième essai de construction – analyses

Les principales étapes de la construction sont représentées ci-dessous. Nous nommons les points par souci de clarté. Sur les dessins des élèves, les points ne sont pas nommés.

Tableau 2. Les étapes de construction pour le deuxième essai

Étape 1.	Étape 2.	Étape 3.	Étape 4.

Étape 1. Les élèves utilisent l'équerre pour tracer deux droites perpendiculaires. Parmi les échanges qui accompagnent leur action nous notons :

El1 : On va tracer deux droites perpendiculaires

El2 : Ah oui, il faut l'équerre[...]

El1 : Il faut tracer deux droites perpendiculaires pour faire un losange.

Du point de vue des raisonnements, il y a explicitation de l'organisation générale des actions au niveau (M - 1). Cette organisation prend en compte les caractéristiques du modèle (M - 1). L'artéfact idoine (l'équerre) est désigné (M - 2). Une connaissance du répertoire de construction est mobilisée et transférée dans le méso-espace en référence à l'objet géométrique en jeu. Elle mobilise l'identification d'éléments 1D et leur relation, et dénote une décomposition instrumentale du modèle à reproduire. S'agissant des signes produits, un langage géométrique adapté est utilisé.

Étape 2. À partir de marques sur le tasseau, les élèves s'apprêtent à reporter la longueur d'une diagonale du modèle sur une des droites perpendiculaires déjà représentées.

El1 : Il faut tracer de jusque-là à en bas [L'élève montre une marque sur le tasseau puis une de ses extrémités].

El2 : Attends, attends, la moitié. Ça c'est pas la moitié. [L'élève montre le point d'intersection des deux droites].

Du côté des raisonnements, les élèves identifient et verbalisent une caractéristique du modèle que doivent satisfaire les objets graphiques qu'ils s'apprêtent à dessiner (M - 2). La connaissance sous-jacente est une propriété du losange : le point d'intersection des diagonales d'un losange est le milieu d'une diagonale. Concernant les signes, le point d'intersection des deux droites est désigné par un geste. La formulation orale qui accompagne ce geste emploie le terme « la moitié » en lieu et place du terme « milieu ».

Étape 3. Pour rendre compte de cette étape, nous nommons I, le point d'intersection des deux droites dessinées. Nous nommons A et B les extrémités du segment en construction.

Les élèves utilisent la ficelle pour comparer les longueurs IA et IB des demi-diagonales. Ils ajustent la position du tasseau jusqu'à obtenir l'égalité $IA = IB$ et verbalisent en désignant le point I : « C'est au milieu ».

Étape 4. Ils procèdent de même pour la seconde diagonale et valident « C'est pile-poil ».

Pour ces deux étapes, s'agissant des raisonnements, des caractéristiques géométriquement signifiantes du modèle sont prises en compte pour produire des objets graphiques (M - 2). Nous notons, comme précédemment, une adaptation des schèmes d'usage de la ficelle qui est employée pour comparer des longueurs (M - 2). La connaissance sous-jacente à cette construction est une propriété du losange : le point d'intersection des diagonales d'un losange est le milieu de chacune d'entre elles. Dans les signes produits nous observons des gestes en lien avec l'action instrumentée et l'usage de la langue naturelle pour valider le dessin produit. Le point d'intersection des deux droites dessinées est désigné par les élèves par des gestes déictiques accompagnés de l'emploi de termes spatiaux « C'est au milieu ».

Étape 5. Les élèves terminent par la représentation des côtés du losange.

3.2.3 Bilan de la phase d'action

Durant cette phase d'action, des raisonnements variés sont produits relevant du milieu objectif comme du milieu de référence. Lors du premier essai de construction, les raisonnements se situent au niveau du milieu objectif. Le dessin achevé, l'interprétation des rétroactions après un contrôle visuel global amène les élèves à invalider le dessin produit et à remettre en cause leur technique de mesurage. Lors du deuxième essai de construction des raisonnements variés, qui relèvent du milieu objectif et du milieu de référence sont observés : identification et verbalisation de caractéristiques que doivent satisfaire les objets graphiques produits (M - 2), organisation générale des actions en lien avec les caractéristiques du modèle (M - 1). Du point de vue des connaissances, nous notons également une évolution entre les deux essais de construction. Tandis que le premier dessin est un contour fermé de la figure qui évoque une vision 2D et ne considère qu'une partie des propriétés du modèle, le second nécessite l'identification d'éléments 1D et leur relation et prend en compte l'ensemble des propriétés nécessaires et suffisantes à la reproduction du modèle. Le regard porté par les élèves sur le dessin semble avoir évolué d'une vision iconique à une vision non iconique au sens de Duval (2005).

L'organisation de cette seconde construction correspond à une procédure présentée en classe le matin et qui prend appui sur les propriétés des diagonales d'un losange (elles sont perpendiculaires, leur point d'intersection est le milieu de chacune d'entre elles). Notons que cette construction du matin utilise en acte la réciproque de la propriété citée : tracer deux droites perpendiculaires, placer deux points symétriques à même distance du point d'intersection sur l'une, faire de même sur l'autre, et joindre les quatre points pour obtenir un losange.

Concernant les signes produits, les élèves accompagnent leur action d'échanges en langage mathématique ou spatial qui témoignent de leur appropriation de cette procédure. Des éléments 1D et leur relation sont évoqués dans un langage géométrique adapté tandis que les éléments 0D sont désignés par des gestes déictiques complétés par des termes spatiaux.

3.3 Phase de formulation

Nous présentons dans cette partie les analyses liées à la phase de formulation.

3.3.1 Phase de formulation - analyses

L'exposé de leur procédure à la classe par ce groupe dure 2 min 55 s. Nous présentons ici uniquement la partie des échanges en lien avec l'explicitation de cette procédure.

El1 : Heu, en fait on a pris la, enfin heu ici. On a pris la longueur avec le, le [montre le tasseau du doigt] //

Du point de vue des raisonnements, l'élève verbalise une prise d'information sur le modèle à partir d'un artefact (M - 2). Concernant les signes produits, les gestes apportent des informations complémentaires au discours.

Ens : la longueur de quoi?

Par son questionnement l'enseignante incite l'élève à désigner l'objet graphique évoqué non pas par geste mais par l'emploi d'un terme adapté.

El1 : De, de, enfin la longueur de la//

El2 : Diamètre

Dans cet extrait, s'agissant des signes, l'élève interrogé ne parvient pas à désigner oralement l'objet graphique en jeu. Un autre élève, que nous notons El2, répond. Il emploie le terme géométrique « diamètre » qui qualifie une unité figurale 1D mais n'est pas correct dans le contexte.

Ens : Le diamètre c'est pour les cercles.

El1 : Après //

Ens : On a pris les longueurs des?

El1 : Des, de//

Ens : La mesure des longueurs des?

El1 : Diamètre.

Ens : Diagonales. Diamètre c'est pour les cercles [...]

El1: Diagonales

L'enseignante renouvelle sa demande de désigner plus précisément l'objet graphique en jeu. En réponse, les élèves utilisent à deux reprises le terme géométrique « diamètre » qui ne correspond pas à l'attendu. Le terme géométrique « diagonale » a du mal à émerger du discours des élèves, c'est l'enseignante qui le formule.

Nous notons que le terme « diagonale » désigne une unité figurale de dimension 1 en lien avec son appartenance au losange, unité figurale de dimension 2. À l'étape de la construction évoquée par les élèves, ce losange n'est pas encore dessiné.

Ens : Ensuite?

El1 : Après, on l'a tracé, après on a fait, ben on a trouvé le milieu de, de notre //

Relativement aux raisonnements, il y a verbalisation des actions (M - 2). Du point de vue des connaissances, le milieu de la diagonale est évoqué.

En ce qui concerne les signes, l'énonciation : « On l'a tracé » évite de nommer l'objet en question. La difficulté de désignation par l'emploi du terme « diagonale » persiste.

Ens : Diagonale

El1 : Diago, diagonale et du coup après on a tracé, du coup ça a formé deux, deux droites perpendiculaires.

S'agissant des raisonnements, nous notons la formulation d'une caractéristique de l'objet graphique (M - 1). La connaissance en jeu est la perpendicularité des diagonales d'un losange. La formulation employée par l'élève peut laisser penser que la perpendicularité des droites est le fruit du hasard alors que nous avons vu que cette construction a été anticipée. En ce qui concerne les signes, l'élève reprend l'expression « droites perpendiculaires » qui a été utilisée par le groupe pendant la phase d'action. Les termes géométriques sont ici utilisés à bon escient. Ils désignent deux unités figurales 1D par l'intermédiaire de leur relation et correspondent au statut de ces éléments figuraux au moment où ils ont été dessinés.

Ens : Très bien.

El1 : Et après on a, enfin, vu que ça, ça prenait ça et ça [montre les sommets], on les a rejoins et ça fait une//

Du point de vue des raisonnements, il y a verbalisation de l'action. Nous notons dans les signes produits de nombreux gestes déictiques qui accompagnent le discours pour désigner des objets graphiques 0D qui ne sont pas nommés.

Ens : Vous avez relié les extrémités des segments, ça faisait le losange. C'était la stratégie montrée ce matin.

3.3.2 Bilan de la phase de formulation

Les raisonnements produits durant cette phase de formulation dénotent le milieu objectif et le milieu de référence. Nous identifions la verbalisation d'actions (M - 2), l'explicitation de l'organisation des tâches ainsi que la formulation d'une caractéristique de l'objet graphique (M - 1).

Du côté des connaissances, les élèves utilisent en acte la réciproque des propriétés caractéristiques des diagonales d'un losange : elles sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu. Cette formulation condense en fait trois propriétés : les diagonales d'un losange sont perpendiculaires, leur point d'intersection est le milieu de l'une, il est aussi le milieu de la seconde. Ces trois propriétés restent largement implicites. La perpendicularité, relation entre deux objets 1D, est évoquée tandis que le point d'intersection, objet 0D, n'est pas désigné explicitement.

En tant que signe, l'objet graphique désigné par l'élève ne renvoie pas au même objet géométrique pour l'élève et pour le professeur : l'élève y voit des droites perpendiculaires, le professeur des diagonales. Il y a ce que nous appelons une « variation temporelle de la désignation » des objets géométriques au cours de la construction. Les élèves emploient le terme géométrique qui correspond au statut de l'objet géométrique désigné au moment de sa production. Le professeur utilise le nom de l'objet géométrique visé.

3.4 Synthèse

Dans cette partie une synthèse des résultats et des analyses est proposée.

3.4.1 Une dialectique action-rétroaction

Lors de la phase d'action, l'interprétation des rétroactions du milieu conduit les élèves à invalider leur premier dessin. Comme nous l'avons anticipé dans la section 1.4.3, nous notons ici le rôle joué par la taille de l'espace. C'est le déplacement qui permet à une élève de modifier sa perception des relations spatiales entre les différents éléments du dessin et d'émettre la conjecture que ce dessin ne répond pas à l'attendu. Nous y voyons la manifestation de connaissances spatiales qui permettent un contrôle perceptif du dessin produit dans l'espace graphique. Le contrôle instrumenté que les élèves effectuent ensuite mobilise une adaptation des schèmes d'usage de la ficelle. Il amène ensuite les élèves à convoquer des connaissances récentes, mises en œuvre dans le micro-espace, pour envisager une nouvelle procédure de construction dans le méso-espace. L'identification de cette connaissance comme utile dans une nouvelle situation favorise sa mémorisation et son institutionnalisation. En effet, Allard (2015) note que l'institutionnalisation repose sur au moins deux processus : le processus de

contextualisation, décontextualisation et recontextualisation (noté PCDR) et un processus de transfert et généralisation (PTG) qui englobe un ou plusieurs PCDR. Dans un cycle de PCDR, qu'Allard (2015) associe à une situation, la connaissance est utilisée en contexte lors d'une situation d'action tandis que la phase de formulation permet sa décontextualisation. La recontextualisation peut intervenir ultérieurement, par exemple lors de phases de rappel (Allard, 2015). Les analyses effectuées montrent la mise en fonctionnement de ce processus. La situation dans le micro-espace (que nous n'avons pas développée) permet la mise en fonctionnement d'un cycle de PCDR. Lors de la situation dans le méso-espace, pour le groupe d'élèves considéré, l'interprétation des rétroactions du milieu favorise la mise en correspondance des deux situations et ainsi le déploiement d'un deuxième cycle de PCDR.

3.4.2 Des raisonnements riches

Les raisonnements des élèves ne s'expriment pas nécessairement avec un langage géométrique. Les élèves travaillent majoritairement sur des objets de l'espace sensible : c'est un dessin qui est produit. Les termes employés à propos de ce dessin relèvent parfois du langage courant, les élèves énoncent des relations spatiales perçues. Ainsi les rétroactions du milieu sont analysées d'un point de vue spatial. Par exemple, la non-conformité du premier dessin par rapport à l'attendu est exprimée en termes d'écartement. À d'autres moments, du langage géométrique est utilisé pour désigner des unités figurales 1D et leur relation. Dans les échanges (entre pairs ou à destination de l'enseignant), nous remarquons aussi le rôle important des gestes qui accompagnent ou complètent le discours oral avec des fonctions multiples (heuristique, argumentation, formulation). Ils servent en particulier à désigner les unités figurales 0D.

Cependant, les raisonnements sous-jacents sont riches, ils ont pour fonction d'organiser et justifier la construction en lien avec les relations perçues et dénotent un positionnement au niveau du milieu de référence $M - 1$. Ils sont portés par des connaissances variées souvent implicites.

3.4.3 Des raisonnements peu visibles pour l'enseignant

Ainsi, de nombreux raisonnements produits par les élèves en phase d'action et rendus visibles au chercheur par un protocole adapté ne sont pas formulés explicitement en présence de l'enseignant. Par exemple, pour le groupe observé, nous avons noté que l'adaptation d'un artéfact nouveau (la ficelle) pour comparer deux longueurs ne fait pas l'objet d'une verbalisation de la part des élèves. De même, l'essai infructueux n'est pas évoqué lors de la phase de formulation en présence de l'enseignante. Nous avons également identifié que les élèves parviennent à considérer dans l'action plusieurs propriétés du losange

simultanément, mais ils n'en rendent compte que très partiellement lors de la phase de formulation.

3.4.4 Dialectique action-formulation et questions langagières

Nous notons que les élèves du groupe étudié désignent les premiers objets construits directement ou par l'intermédiaire de leur relation avec une unité figurale de même dimension. Ils ne les désignent pas par rapport à une unité figurale de dimension supérieure (figure englobante), car celle-ci n'est pas encore représentée. Nous avons observé qu'ils conservent cette désignation une fois le dessin achevé alors que d'autres désignations seront nécessaires pour rendre compte des propriétés mathématiques de la figure englobante construite. Ainsi, le terme « diagonale » est requis pour rendre compte de certaines propriétés des quadrilatères.

Il y a ce que nous nommons une « variation temporelle de la désignation » liée à la dynamique de construction. Cette variation temporelle n'est pas spontanément perçue par les élèves. Nous y voyons un avatar de la double désignation (Duval, 2005).

4. Discussion et conclusion

Dans cet article, nous avons cherché à apporter des éléments de réponse à la question : quelles sont les caractéristiques des raisonnements produits par des élèves lors des phases d'action et de formulation d'une situation de reproduction de figure plane dans le méso-espace?

Pour ce faire, nous avons adapté le modèle d'analyse des raisonnements de Bloch et Gibel (2011) au contexte de la reproduction de figures en géométrie plane. Après avoir explicité les choix opérés pour cette adaptation (section 1.3), nous avons mis en fonctionnement le modèle présenté. Nous avons alors réalisé l'analyse des raisonnements produits en phase d'action et de formulation pour un groupe d'élèves confrontés à une situation à dimension adidactique ayant pour enjeu une reproduction de figure et issue d'une ingénierie. L'une des limites de ce travail est qu'il porte sur un seul groupe d'élèves et sur un temps relativement court d'enseignement.

Les analyses effectuées ont permis de relever certaines caractéristiques des raisonnements produits par les élèves. Ainsi nous avons mis en évidence la richesse et la diversité des raisonnements produits en phase d'action, en appui sur des connaissances spatiales. Les rétroactions du milieu et la nécessité de coopérer pour atteindre un but commun dans une action conjointe amènent les élèves à échanger pour ajuster leur action, choisir la stratégie la plus adaptée. Ces échanges conduisent à la production de raisonnements qui relèvent du milieu de référence.

Des connaissances abordées dans le contexte du micro-espace sont convoquées dans le méso-espace. Cette mise en correspondance des deux situations par l'intermédiaire de l'interprétation des rétroactions du milieu nous semble favorable à l'élaboration d'un processus de contextualisation-décontextualisation-recontextualisation (Allard, 2015) et contribue à une possible généralisation sur un temps qui dépasse celui des expérimentations. Néanmoins, les raisonnements ou connaissances mobilisés par les élèves lors de la phase d'action, et que nous avons pu identifier, ne sont pas tous explicités en présence de l'enseignante lors de la phase de formulation. Les élèves travaillent dans et sur l'espace et mobilisent pour cela des connaissances géométriques, mais aussi des connaissances spatiales, qu'ils pourraient sans doute mettre en mots, mais pour lesquelles il n'existe pas de « texte de savoir », comme le souligne Bessot (Perrin-Glorian et al., 2019, p. 127). Ainsi il n'existe pas de texte de référence pour des connaissances pourtant indispensables aux élèves et qui sous-tendent leurs raisonnements. Il nous apparaît dès lors complexe pour l'enseignant ou l'enseignante de prendre en compte les raisonnements produits par les élèves.

Par ailleurs, de nombreux travaux en didactique des mathématiques mettent en évidence une difficulté des enseignants à institutionnaliser (Butlen et al., 2009; Coulangue, 2012; Laparra et Margolinas, 2008; Houle, 2016). Dans le domaine de la géométrie, les difficultés des professeurs à prendre appui sur l'activité des élèves sont soulignées par plusieurs auteurs (Bulf et Celi, 2019; Allard et al., 2017).

Dans notre thèse nous avons analysé les raisonnements produits par l'ensemble des groupes d'élèves de deux classes de cycle 3. À partir d'une synthèse de ces analyses nous envisageons de poursuivre l'étude en cherchant à identifier quels sont les obstacles ou points d'appui potentiels rencontrés par les professeurs pour institutionnaliser des savoirs corrélés à l'activité mathématique des élèves.

Références

Allard, C. (2015). *Étude du processus d'Institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas de l'enseignement des fractions* [thèse de doctorat, Université Paris-Diderot, France]. <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01249807>

Allard, C., Guille-Biel Winder, C. et Mangiante-Orsola, C. (2017). De l'étude de pratiques enseignantes en géométrie aux possibilités d'enrichissement de ces pratiques : focale sur l'exercice de la vigilance didactique. Dans S. Coppé et É. Roditi (dir.), *Nouvelles perspectives en didactique : géométrie, évaluation des apprentissages mathématiques. Actes de la 19^e École d'été de didactique des mathématiques* (p. 19-45). Éditions La Pensée sauvage.

Arzarello, F. (2006). Semiosis as multimodal process. Dans L. Radford et B. D'Amore (dir.) *Sémiotique, culture et pensée mathématique* (p. 267-299). Relime.

Berthelot, R. et Salin, M. H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire* [thèse de doctorat, Université de Bordeaux]. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00414065>

Berthelot, R. et Salin, M. H. (1993). L'enseignement de la géométrie à l'école primaire. *Grand N*, 53, 39-56.

Berthelot, R. et Salin, M. H. (1995). Un processus d'enseignement des angles au cycle III. *Grand N*, 56, 69-116.

Bessot, A. (2011). L'ingénierie didactique au cœur de la théorie des situations. Dans C. Margolinas et M. Abboud-Blanchard (dir.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques. Actes de la 15^e École d'été de didactique des mathématiques* (p. 29-56). Éditions La Pensée sauvage.

Bessot, A., Chaachoua, H. et Perrin-Glorian, M.-J. (2019). Débat sur le thème de l'enseignement de la géométrie. Dans S. Coppé et É. Roditi (dir.), *Nouvelles perspectives en didactique : géométrie, évaluation des apprentissages mathématiques. Actes de la 19^e École d'été de didactique des mathématiques* (p. 117-126). Éditions La Pensée sauvage.

Blanché, R. (1973). *Le raisonnement*. Presses universitaires de France.

Bloch, I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 135-193.

Bloch, I. (2002). Différents niveaux de modèles de milieux dans la théorie des situations. Recherche d'une dialectique scientifique entre analyses théoriques et contingence. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot et R. Floris (dir.), *Actes de la 11^e École d'été de didactique des mathématiques* (p. 125-139). Éditions La Pensée sauvage.

Bloch, I. (2006). *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur* [note de synthèse pour une habilitation à diriger des recherches, Université Paris 7]. TEL. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00012153>

Bloch, I. et Gibel, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en didactique des mathématiques*, 31(2), 191-228.

Brousseau, G. (1986). La relation didactique : le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9(3), 309-336.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Éditions La Pensée sauvage.

Brousseau, G. (2000). Espace et géométrie. *Actes du Séminaire de Didactique des Mathématiques du Département des sciences de l'éducation de l'Université de Crète à Réthymnon*, 67-83.

Brousseau, G. (2012). Des dispositifs piagétien aux situations didactiques. *Éducation et didactique*, 6(2), 103-129.

Brousseau, G. et Centeno, J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques*, 11(2.3), 167-210.

Brousseau, G. et Gibel, P. (2005). Didactical handling of students' reasoning processes in problem solving situations. *Educational Studies in Mathematics*, 59, 13-58. https://doi.org/10.1007/0-387-30451-7_2

Bulf, C. et Celi, V. (2016). Essai d'une progression sur le cercle pour l'école primaire – une articulation clé : gabarit-compas. *Grand N*, 97, 21-58.

Bulf, C. et Celi, V. (2019). Conceptualisation en classe de géométrie : mise à l'épreuve d'une situation et d'un cadrage théorique en termes de circulation école. Dans S. Coppé et É. Roditi (dir.), *Nouvelles perspectives en didactique : géométrie, évaluation des apprentissages mathématiques*. Actes de la 19^e École d'été de didactique des mathématiques (p. 241-258). Éditions La Pensée sauvage.

Butlen, D., Charles-Pézarid M. et Masselot, P. (2009). Gestes et routines professionnels, un enjeu pour intervenir sur les pratiques enseignantes. Dans A. Kuzniak, M. Artigue et N. Bednarz (dir.), *Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation*. Actes du colloque Espace mathématique francophone (p. 222-233). Université Cheikh Anta Diop, Sénégal.

Cabassut, R. (2005). *Démonstration, raisonnement et validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et en Allemagne* [thèse de doctorat, Université Paris Diderot]. TEL. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00009716>

Coulangue, L. (2012). *L'ordinaire de l'enseignement des mathématiques, Pratiques enseignantes et leurs effets sur les apprentissages des élèves* [note de synthèse pour une habilitation à diriger des recherches, Université Paris 7]. TEL. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00801863>

Douaire, J. (2006). *Analyse didactique des processus de preuve dans le domaine numérique au cycle 3 de l'école primaire* [thèse de doctorat, Université Paris-Diderot]. TEL. <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01258086>

Duval, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères IREM*, 17, 121-138.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 10, 5-53.

Duval, R. (2014). Ruptures et oublis entre manipuler, voir, dire et écrire. Histoire d'une séquence d'activités. Dans C. F. Brandt et M. T. Moretti (dir.) *As Contribuições da Teoria das Representações Semióticas Para o Ensino e Pesquisa na Educação Matemática* (p. 17-38, en portugais et 227-251 en français). Éditions Unijui.

Gibel, P. (2008). Analyse en théorie des situations d'une séquence destinée à développer les pratiques du raisonnement en classe de mathématiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 13, 5-39.

Gibel, P. (2015). Mise en œuvre d'un modèle d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques à l'école primaire. *Éducation et didactique*, 9(2), 51-72. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.2278>

Gibel, P. (2018). *Élaboration et usages d'un modèle multidimensionnel d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques* [note de synthèse pour une habilitation à diriger des recherches, Université de Pau et des Pays de l'Adour]. TEL. <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01919188>

Gibel, P. et Blanquart-Henry, S. (2017). Favoriser l'appropriation des propriétés géométriques des quadrilatères à l'école primaire : étude d'une situation d'apprentissage dans le méso-espace. *Revue des sciences de l'éducation*, 43(1), 37-84.

Houdement, C. (2007). À la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège. *Repères IREM*, 67, 70-84.

Houdement, C. (2019). Le spatial et le géométrique, le yin et le yang de l'enseignement de la géométrie. Dans S. Coppé et É. Roditi (dir.), *Nouvelles perspectives en didactique : géométrie, évaluation des apprentissages mathématiques. Actes de la 19^e École d'été de didactique des mathématiques* (p. 19-45). Éditions La Pensée sauvage.

Gauthier, J. (2015). *Enseignement de la géométrie en première secondaire et conceptions d'élèves : une oscillation entre la perception, la mesure et la théorie* [thèse de doctorat, Université de Montréal]. Papyrus. <https://papyrus.bib.umontreal.ca/xmlui/handle/1866/13047>

Houle, V. (2016). Situations misant sur l'abstraction de régularités mathématiques pour favoriser la liaison entre les processus de dévolution et d'institutionnalisation. Dans A. Adihou, J. Giroux, D. Guillemette, C. Lajoie et K. Mai Huy (dir.), *La diversité des mathématiques : dimensions sociopolitiques, culturelles et historiques de la discipline en classe. Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec* (p. 84-94). Université d'Ottawa.

Jeannotte, D. et Corriveau, C. (2015). Utilisation d'un matériel symbolique en 3^e année du primaire : une analyse des raisonnements mathématiques des élèves et de leur accompagnement. Dans A. Adihou, L. Bacon, D. Benoit et C. Lajoie (dir.), *Regards sur le travail de l'enseignant de mathématiques. Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec* (p. 119-129). Université de Sherbrooke.

Laparra, M. et Margolinas, C. (2008). Quand la dévolution prend le pas sur l'institutionnalisation. Des effets de la transparence des objets de savoir. *Les didactiques et leur rapport à l'enseignement et à la formation*. HAL. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00779656>

Margolinas, C. (1995). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. Dans C. Margolinas (dir.), *Les débats de didactique des mathématiques* (p. 89-102). La Pensée sauvage.

Margolinas, C. (2014). Connaissance et savoir. Concepts didactiques et perspectives sociologiques? *Revue française de pédagogie*, 188, 13-22.

Mathé, A.-C. et Mithalal, J. (2019). L'usage des dessins et le rôle du langage en géométrie : quelques enjeux pour l'enseignement. Dans S. Coppé et É. Roditi (dir.), *Nouvelles perspectives en didactique : géométrie, évaluation des apprentissages mathématiques. Actes de la 19^e École d'été de didactique des mathématiques* (p. 47-85). Éditions La Pensée sauvage.

Mathé, A. C., Barrier, T. et Perrin-Glorian, M. J. (2020). *Enseigner la géométrie élémentaire. Enjeux, ruptures et continuités*. Academia - L'Harmattan.

Mercier, A. (1997). Le milieu et la dimension adidactique des relations didactiques. Dans J. Brun et F. Conne (dir.), *Analyse de protocoles entre didactique des mathématiques et psychologie cognitive* (p. 5-23). Institut de recherche et de documentation pédagogique.

Pedemonte, B. (2002). *Étude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques* [thèse de doctorat, Université Joseph Fourier]. TEL. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00004579/>

Perrin-Glorian, M.-J. et Godin, M. (2014) De la reproduction de figures géométrique avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-École*, 222, 23-36.

Perrin-Glorian, M.J. et Godin, M. (2018) *Géométrie plane : pour une approche cohérente du début de l'école à la fin du collège*. HAL. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01660837v2>

Perrin-Glorian, M.-J. et al. (2019). Débat sur le thème de l'enseignement de la géométrie. Dans S. Coppé et É. Roditi (dir.), *Nouvelles perspectives en didactique : géométrie, évaluation des apprentissages mathématiques*. Actes de la 19^e École d'été de didactique des mathématiques (p.117-126). Éditions La Pensée Sauvage.

Petitfour, É. (2015). *Enseignement de la géométrie à des élèves en difficulté d'apprentissage. Étude du processus d'accès à la géométrie d'élèves dyspraxiques visuo-spatiaux lors de la transition CM2-6^e* [thèse de doctorat, Université Paris-Diderot]. TEL. <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01228248>

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.

Soury-Lavergne, S. et Maschietto, M. (2019). Connaissances géométriques et connaissances spatiales dans les situations didactiques avec la technologie. Dans S. Coppé et É. Roditi (dir.), *Nouvelles perspectives en didactique : géométrie, évaluation des apprentissages mathématiques*. Actes de la 19^e École d'été de didactique des mathématiques (p. 87-116). Éditions La Pensée sauvage.

Textes des programmes, documents d'applications

Ministère de l'Éducation nationale. (2015) *Programmes d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), du cycle de consolidation (cycle 3) et du cycle des approfondissements (cycle 4)*. Éduscol.

Ministère de l'Éducation nationale. (2018) *Modification des programmes d'enseignement du cycle de consolidation : Bulletin officiel n° 30 du 26 juillet 2018*.



Étude des correspondances entre les activités mathématiques des élèves placés en résolution de problèmes et celles des mathématiciens

Rox-Anne L'ITALIEN-BRUNEAU

University of Auckland

r-a.litalien-bruneau@auckland.ac.nz

Résumé : La résolution de problèmes est parfois décrite comme une façon de faire vivre les mathématiques aux élèves. Pour la promouvoir, certains avancent que les élèves en résolution de problèmes mettraient en route des activités similaires à celles des mathématiciens. Cette similitude est étudiée dans cet article à travers une conceptualisation du travail des mathématiciens développée pour l'analyse des activités des élèves placés en résolution de problèmes. Ce travail met en lumière les correspondances entre le travail des mathématiciens et celui des élèves et illustre comment le contexte de résolution de problèmes favorise ces correspondances.

Mots-clés : résolution de problèmes, activités mathématiques, activités des élèves, mathématiciens

Investigation of students' mathematical activities in problem-solving contexts

Abstract: Researchers have sometimes referred to mathematicians and their daily activities to promote problem solving in mathematics classrooms. For many, problem-solving environments allow students to experience what mathematicians do in their daily tasks for their research. This hypothesis is at the heart of this paper. One way to examine students' work in problem-solving contexts is to describe the work of mathematicians, as an analysis tool. This paper illustrates the correspondences between mathematicians' and students' activities and offers insights into how problem-solving contexts frame these correspondences.

Keywords: problem solving, mathematical activities, activities of students, mathematicians

Introduction

Les mathématiciens ont une posture importante en didactique des mathématiques alors qu'ils sont souvent utilisés pour informer le travail qui pourrait être fait dans la classe, avec les élèves. Cette référence aux mathématiciens, lorsqu'utilisée pour faire la promotion de la résolution de problèmes, se trouve au cœur du travail présenté dans cet article. En particulier, je cherche à étudier les correspondances entre le travail des mathématiciens et celui des élèves en contexte de résolution de problèmes. Pour ce faire, j'illustre d'abord de quelle façon certains travaux en didactique des mathématiques assument ces correspondances pour supporter la place de la résolution de problèmes en classe de mathématiques. J'offre ensuite une conceptualisation possible du travail des mathématiciens, axée ici sur la dimension de production de mathématiques, avant de détailler le processus d'analyse appuyé par cette conceptualisation. Par la suite, je présente, avec différents exemples d'activités d'élèves, le genre d'analyse menée dans le cadre du projet. Tout ceci permet finalement de tirer certaines conclusions quant à l'impact du contexte de résolution de problèmes sur les activités des élèves placés dans un tel contexte.

1. Origine du questionnaire

La résolution de problèmes est parfois présentée comme une occasion de « faire vivre » les mathématiques aux élèves. Dans cette perspective particulière de la résolution de problèmes, celle-ci ne sert pas nécessairement à l'enseignement de concepts précis, ou encore, à entraîner les élèves à résoudre des problèmes, mais plutôt à faire faire des mathématiques aux élèves (Stanic et Kilpatrick, 1989). Pour supporter cette façon de travailler avec les élèves en classe, certains auteurs se réfèrent explicitement aux mathématiciens et expliquent que la résolution de problèmes offrirait aux élèves de « vivre » les mathématiques à travers la mise en route des activités des mathématiciens.

Un premier exemple de référence aux mathématiciens pour appuyer la résolution de problèmes provient de Lampert (1990a, 1990b). Selon elle, le travail non linéaire des mathématiciens, axé sur les déductions, les conjectures, la réflexion et le développement d'arguments, doit être vécu par les élèves. Pour Lampert (1990a), la résolution de problèmes permettrait ce rapprochement alors que, comme les mathématiciens, les élèves :

- feraient des mathématiques en s'impliquant dans un travail collaboratif qui porte sur des questions sincères et qui demande humilité, curiosité et honnêteté.
- exploiteraient leurs connaissances mathématiques en appuyant leurs idées sur des observations et arguments de nature mathématique.

- établiraient les vérités mathématiques de la classe à travers des discussions mathématiques supportées par une argumentation logique.

Un autre exemple de référence aux mathématiciens pour appuyer la résolution de problèmes en classe provient des travaux de Richards (1991). Ce dernier s'intéresse aux différents types de discours associés aux mathématiques. Il avance que le « discours de recherche », un discours appartenant aux mathématiciens et axé sur l'exploration, les conjectures et la réfutation et validation de ces conjectures, pourrait inspirer la classe de mathématiques. Principalement, il propose d'y introduire le « discours investigateur », un discours basé sur celui des mathématiciens qui permet d'agir de façon mathématique. Selon lui, ce discours permettrait de mettre en avant la culture mathématique singulière des mathématiciens :

Le comportement mathématique est l'activité des mathématiciens. Le discours de recherche, comme activité humaine socialement construite, a une culture et tradition unique [...] Je regarde la nature de cette culture dans le but d'étudier son unicité et son potentiel comme assises du discours investigateur. (Richards, 1991, p. 22, traduction libre¹)

Richards ne réfère donc aux mathématiciens, et à leur discours, qu'afin de promouvoir le discours investigateur en classe. Ce discours s'aligne sur la résolution de problèmes, car il place les élèves au cœur du travail mathématique et est centré sur les questionnements, les conjectures et l'argumentation.

Un dernier exemple de références aux mathématiciens pour inspirer le travail des élèves provient de Schoenfeld (1991, 1994). Afin de promouvoir la résolution de problèmes en classe, l'auteur s'appuie sur ce que font quotidiennement les mathématiciens :

Si on croit que la communauté mathématique se heurte à des problèmes mathématiques sérieux en collaborant, en faisant des tentatives d'explications aux phénomènes qu'elle étudie et en revenant constamment sur ces explications, alors les pratiques dans nos classes devraient refléter ces croyances. (Schoenfeld, 1994, p. 60-61, traduction libre²)

¹ « Mathematical behavior is the activity of mathematicians. Research mathematics, as a socially constructed human activity, has a unique culture and tradition. [...] I look at the nature of this culture in order to examine how it is unique and how this culture provides a basis for inquiry maths. » (Richards, 1991, p. 22)

² « If we believe that mathematical community grapples with serious mathematical problems collaboratively, making tentative explanations of these phenomena, and the cycling back through those explanations [...], then our classroom practices must reflect these beliefs. » (Schoenfeld, 1994, p. 60-61)

En se référant ainsi aux mathématiciens, Schoenfeld souligne la nécessité d'offrir aux élèves l'occasion de se poser des questions, de tenter d'y répondre, de donner du sens aux concepts avec lesquels ils travaillent et d'échanger avec leurs pairs pour déterminer la validité de leurs idées mathématiques. Pour plonger les élèves dans un tel travail, Schoenfeld propose la résolution de problèmes qui, selon lui, amènerait les élèves à mettre en route des activités similaires à celles des mathématiciens.

En somme, les travaux présentés ci-haut illustrent la façon avec laquelle les mathématiciens et leur travail sont utilisés pour appuyer un enseignement axé sur la résolution de problèmes. Bien que le rôle des mathématiciens comme modèle pour la classe de mathématiques puisse être remis en doute (Maheux et al., 2019), il demeure que pour plusieurs auteurs, la résolution de problèmes alignerait le travail des élèves sur celui des mathématiciens. Toutefois, ces correspondances entre le travail des mathématiciens et celui des élèves en contexte de résolution de problèmes demeurent une hypothèse qui mérite d'être explorée plus en détail. Le projet de recherche présenté ici porte principalement sur ces correspondances et cherche à répondre à la question suivante : De quelles façons sont mobilisées les activités des mathématiciens chez les élèves placés en résolution de problèmes?

2. Cadre de référence

Pour donner un sens plus précis à cette question de recherche, deux conceptualisations ont été développées. La première concerne le contexte de résolution de problèmes et la deuxième aborde les activités des mathématiciens. Ces deux conceptualisations sont détaillées dans ce qui suit puis la question de recherche est ensuite précisée.

2.1 Le contexte de résolution de problèmes

Le contexte de résolution de problèmes au cœur du travail présenté ici correspond à celui abordé par les travaux qui sous-entendent que la résolution de problèmes permet de rapprocher le travail des élèves à celui des mathématiciens. Dans cette perspective de la résolution de problèmes, appelée résolution de problème comme « art » par Stanic et Kilpatrick (1989), l'objectif est d'amener les élèves à vivre une activité mathématique dite authentique sans viser l'apprentissage de concepts mathématiques ou de méthodes de résolution de problèmes en particulier. Des exemples de ceci, comme les « problèmes ouverts » d'Arsac et al. (1988), les « situations-problèmes » de Brousseau (1998) ou encore les « tableaux verticaux » (Liljedahl, 2016), ont permis de dégager certaines caractéristiques du contexte de la résolution de problèmes comme art (L'Italien-Bruneau, 2020) :

- 1) Les interactions entre les élèves, problèmes et solutions : les élèves ont accès aux idées et solutions de leurs pairs, et peuvent intervenir sur ces propositions.
- 2) La liberté mathématique : les élèves ont l'occasion d'explorer les idées, questions et stratégies qui leur semblent intéressantes tout en ayant la responsabilité de rendre ces explorations importantes pour l'avancement de la résolution de problèmes.
- 3) L'incertitude : les élèves sont confrontés à l'incertitude et doivent trouver des façons de déterminer la validité des propositions ainsi que démêler ce qui fonctionne et ne fonctionne pas.
- 4) L'autorité mathématique à la classe : les élèves sont responsables de déterminer la validité des propositions offertes et de convaincre les autres élèves ainsi que l'enseignant de cette validité ou invalidité.

Tel que l'illustrent les exemples de contexte de résolution de problèmes mentionnés ci-haut, les façons d'instaurer la résolution de problèmes comme « art » et ses quatre caractéristiques sont nombreuses et variées, certaines appelant davantage à une gestion particulière de la classe par l'enseignant, et d'autres nécessitant la formulation d'un certain type de problème. Toutefois, peu importe la façon avec laquelle l'environnement de résolution de problèmes est instauré en classe, l'hypothèse au cœur de ce travail demeure : cet environnement permettrait de rapprocher le travail des élèves à celui des mathématiciens.

2.2 Les activités des mathématiciens

La deuxième conceptualisation au cœur de la question de recherche concerne ce que font quotidiennement les mathématiciens dans le cadre de leurs travaux de recherche. Cette conceptualisation s'accorde avec les différents travaux présentés dans la section précédente alors qu'elle vise à mettre en avant ce qui est entendu par « activités des mathématiciens » dans ma question de recherche, soit le « comportement mathématique » comme l'appelle Richards (1991, p. 2). L'objectif de cette conceptualisation est de dégager les différentes activités mobilisées par les mathématiciens pour ensuite s'y référer lors de l'analyse du travail des élèves en résolution de problèmes.³

En particulier, cette conceptualisation a été développée à partir de la recension de différents travaux s'intéressant au travail des mathématiciens : 1) des études qui rapportent des entrevues menées auprès de mathématiciens (p. ex. Burton, 2004; Burton et Morgan, 2000), 2) des livres écrits par des mathématiciens sur leurs propres expériences (p. ex. Davis et Hersh, 1981) et 3) des travaux empiriques

³ Voir L'Italien-Bruneau (2020) pour plus de détails sur la construction de cette conceptualisation.

portant sur les façons de faire des mathématiciens (p. ex. Lockwood et al., 2016; Silver, 1994; Heinze, 2010).

À travers ces différents travaux, trois dimensions ont été dégagées dans le travail des mathématiciens et concordent avec les différentes motivations qui alimentent ce que font les mathématiciens. Ces trois dimensions sont les suivantes :

- La « production des mathématiques » regroupe des activités qui ont pour but de développer des résultats mathématiques et contribuer de manière significative aux connaissances mathématiques de leurs communautés.
- La « communication des mathématiques » correspond aux activités qui visent à partager et à rendre publics des résultats mathématiques, autant sous forme d'articles, de livres, que de conférences ou de séminaires.
- La « validation des mathématiques » englobe les activités liées à la validation et à l'évaluation des résultats de leurs communautés. Les mathématiciens s'assurent ici que les résultats correspondent aux attentes des communautés mathématiques.

Ces dimensions interdépendantes et non linéaires sont un premier niveau de conceptualisation du travail des mathématiciens. Elles offrent une première entrée dans la compréhension de ce que font les mathématiciens dans leurs travaux et permettent aussi d'organiser la conceptualisation développée. Comme elles ne sont qu'une première entrée, il est ainsi possible qu'une même action puisse être associée à plus d'une dimension, selon le contexte. Notamment, dans L'Italien-Bruneau (2020), le travail avec des exemples se retrouve dans chacune des trois dimensions et est mobilisé différemment, selon la dimension décrite.

2.2.1 La production des mathématiques

Dans un but de concision, seulement la dimension de « production » sera abordée dans la suite de l'article. Celle-ci regroupe des activités qui contribuent à l'exploration et l'élaboration de résultats mathématiques. Entre autres, les mathématiciens cherchent à produire des mathématiques en généralisant des résultats et en déduisant des structures et des propriétés d'objets mathématiques (Burton, 2004; Davis et Hersh, 1981). En ce sens, les résultats sur lesquelles travaillent les mathématiciens peuvent être aussi vastes que des définitions, des conjectures, des théorèmes, des preuves, des arguments et des méthodes. Dans ce qui suit, six composantes sont décrites et exemplifiées pour illustrer ce que mettent en route les mathématiciens pour progresser dans leurs travaux de recherche et ainsi, contribuer à leurs communautés.

Formuler des problèmes. Selon plusieurs mathématiciens rencontrés par Misfeldt et Johansen (2015), la formulation de problèmes permet de cadrer et d'orienter leur

travail d'exploration. Ces problèmes sont souvent choisis pour que leurs résolutions contribuent à la communauté tout en concordant avec les expériences et intérêts des mathématiciens qui les formulent (Silver, 1994). Les problèmes sont donc souvent issus d'autres résultats qui sont explorés davantage (Burton, 2004). De plus, comme le mentionne un mathématicien dans Misfeldt et Johansen (2015), la résolution d'un problème est une façon de générer des idées et de trouver de nouvelles questions à explorer.

Un exemple de formulation de problèmes chez les mathématiciens provient de la résolution du problème du théorème des quatre couleurs énonçant que quatre couleurs suffisent pour colorier n'importe quelle carte géographique sans que deux régions partageant une limite aient la même couleur (Walters, 2004). En bref, la conjecture de ce théorème a d'abord été formulée par Guthrie puis explorée sous l'angle des régions. Kempe, un autre mathématicien, l'a reprise en transposant la conjecture à la théorie des graphes et a tenté de résoudre la preuve en réduisant les configurations possibles à quatre cas. Sa preuve fut acceptée pendant quelques années avant d'être invalidée. D'autres mathématiciens, Appel et Haken, se sont ensuite réapproprié le problème et ont utilisé des ordinateurs pour tester les nombreux cas réduits possibles. Ici, le travail d'une « même » preuve est donc approché de diverses façons, selon les intérêts et les expériences des mathématiciens qui se penchent sur la question.

Concevoir des liens. La production de résultats mathématiques passe souvent par la mise en relation d'idées et de concepts mathématiques chez les mathématiciens (Davis et Hersh, 1981). Les mathématiciens établissent ces liens entre des idées afin de mettre en lumière certaines propriétés des objets avec lesquels ils travaillent. Ceci leur permet de mieux comprendre, ou de comprendre différemment, certains résultats mathématiques et ainsi alimenter le développement de résultats mathématiques.

Un exemple de production des mathématiques liée à la conception de liens est issu du travail de Klein (Struik, 2012). En réponse au manque de connexions entre différents domaines mathématiques, Klein a établi des relations entre deux champs de recherche en conceptualisant le domaine de la géométrie à travers la théorie des groupes. Appuyé par cette façon de comprendre les géométries, Klein a ainsi développé certaines propriétés et théorèmes géométriques qui l'ont éventuellement amené à créer la bouteille de Klein :

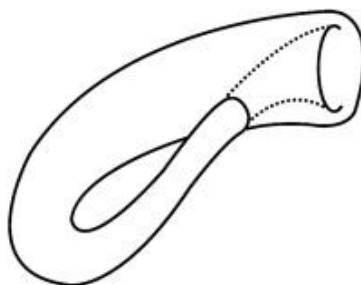


Figure 1. Bouteille de Klein (Gay, 2014, p. 148)

Générer et étudier des exemples. Les mathématiciens travaillent avec des exemples et des contre-exemples pour définir des objets mathématiques, identifier et étudier des propriétés, mieux comprendre un résultat mathématique (Lynch et Lockwood, 2017). Les mathématiciens trouvent, choisissent et étudient des exemples qui leurs permettent donc de progresser dans le développement de leurs résultats mathématiques. Dans certains cas, l'étude de contre-exemples permet de préciser un résultat mathématique parce qu'il met en lumière des éléments à retravailler.

C'est entre autres ce qui est illustré dans le livre de Lakatos (1976), où le récit de quelques résultats mathématiques est présenté. L'auteur raconte qu'un cube creux qui contredisait une version antérieure de la formule d'Euler a été étudié et a permis de restreindre le domaine d'application de la formule. Ceci montre que les contre-exemples trouvés ne sont pas la fin d'un résultat mathématique, mais sont plutôt, comme les exemples, la source d'un important travail mathématique.⁴

Créer et exploiter le symbolisme La représentation symbolique prend une place importante dans le travail des mathématiciens lorsqu'ils développent des résultats mathématiques. Cette composante est si vaste qu'elle est déclinée sous trois sous-composantes :

Représentation et manipulation symboliques. Lors de la production de mathématiques, les mathématiciens se servent de symboles pour représenter des objets, relations, opérations et ainsi rendre possible ou faciliter l'avancement des idées. Un exemple de ceci est la notation fonctionnelle ci-dessous :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

⁴ Cet exemple de la composante **Générer et étudier des exemples** montrent bien qu'il est possible d'associer deux dimensions à un même travail mathématique. Ici, le travail sur le contre-exemple a d'abord permis d'invalider une idée mathématique, ce qui peut être associé à la dimension de « validation », avant de supporter un travail de « production » axé sur le changement du domaine d'application.

La fonction f est ici définie en utilisant des symboles mathématiques qui ont des sens précis et qui permettent de faire appel de façon simplifiée à différentes idées telles que : les nombres naturels, les relations, la puissance deux. Le travail mathématique pouvant être fait avec la fonction f est ensuite simplifié : il suffit d'employer le symbole pour faire appel à la fonction et sa signification, sans toutefois la définir de nouveau. Le travail avec les représentations symboliques implique aussi l'association, la transformation, l'ajout ou le retrait de symboles. Toutes ces manipulations se font en fonction du sens que représentent les symboles, mais aussi de l'objectif de ces manipulations (Davis et Hersh, 1981). La manipulation symbolique implique donc des allers-retours constants entre les symboles, les idées qu'ils représentent et le but de ces manipulations.

Élaboration de symbolisations nouvelles. Dans certains cas, les mathématiciens ont besoin de mettre en place des notations qui représentent des nouveaux concepts. Par exemple, la symbolisation $n!$ pour la factorielle d'un nombre, correspondant au produit des n premiers nombres naturels positifs (Struik, 2012). D'une certaine façon, lorsque les mathématiciens travaillent avec de nouveaux objets, ils ont besoin de les représenter pour rendre possible un certain travail sur ces objets. Par la suite, l'utilisation des nouveaux symboles par la communauté dépend de ce qu'en fait cette communauté. Les symboles mathématiques connus aujourd'hui ont gagné leur signification à travers l'utilisation fréquente et cohérente qu'en ont faite les mathématiciens au fil du temps.

Explorations permises par la symbolisation. L'exploitation du symbolisme chez les mathématiciens se caractérise aussi par l'exploration d'idées mises en lumière par la symbolisation. Comme le symbole n'est pas exactement et uniquement l'objet qu'il représente ni sa définition, il arrive que les mathématiciens se servent d'une notation particulière pour rendre évidentes des idées laissées implicites par la définition, mais rendues claires par la notation employée (Davis et Hersh, 1981). À titre d'exemple, Davis et Hersh abordent la notation de Leibnitz pour les dérivées d'ordres supérieurs : Df pour la dérivée première, D^2f pour la dérivée seconde, D^3f pour la dérivée troisième, etc. De façon plus générale, la notation $D^a f$ a permis de s'intéresser aux différentes valeurs de a et à la signification de la différenciation lorsque a prend des valeurs rationnelles ou négatives. Cette symbolisation a donc permis de générer de nouvelles explorations mathématiques.

Appliquer des méthodes. Chez les mathématiciens, des méthodes sont fréquemment utilisées pour faire avancer efficacement la production des mathématiques (Burton, 2004). Ces méthodes, comme des algorithmes, des techniques ou des opérations, sont souvent présentées comme une suite d'étape à appliquer pour obtenir un résultat qui sera considéré comme valide. En ce sens,

lorsque les mathématiciens appliquent des méthodes, ils ne considèrent pas les raisons et arguments derrière chaque étape et assument que le résultat obtenu sera valide.

Un exemple de ceci provient de Davis et Hersh (1981) alors que les auteurs discutent d'un mathématicien qui a recours aux séries de Taylor afin de trouver la limite d'une équation donnée en 0. En bref, les séries de Taylor permettent d'approximer une fonction à l'aide d'une somme infinie, construites à partir des dérivées successives de la fonction. Ceci permet de simplifier le travail nécessaire à l'aide d'une méthode considérée comme valide sans avoir besoin de questionner et d'expliquer chaque étape de la méthode. En d'autres mots, c'est une méthode établie, reconnue par la communauté de mathématiciens.

Créer des mathématiques. Les composantes précédentes (concevoir des liens, exploiter le symbolisme, appliquer des méthodes, formuler des problèmes, étudier des exemples) contribuent à progresser dans la production de mathématiques. À partir des idées travaillées au travers ces autres composantes, les mathématiciens vont aussi parfois innover : ils identifient des structures et des propriétés ou développent des définitions, des méthodes et des conjectures. Ces innovations peuvent servir à progresser dans leur production de mathématiques ou encore, contribuer significativement à la communauté mathématique.

Un exemple de création mathématique est la conjecture du théorème des quatre couleurs abordé plus tôt. Guthrie a formulé sa conjecture en 1852 après avoir colorié une carte des régions d'Angleterre puis remarqué qu'il était possible de le faire avec seulement quatre couleurs sans que deux régions limitrophes n'aient la même couleur (Walters, 2004). C'est alors qu'il a voulu savoir si sa conjecture était vraie pour n'importe quelle carte et s'il était possible de la prouver. La bouteille de Klein abordée plus tôt est aussi un exemple de création mathématique et cet objet est encore utilisé aujourd'hui en topologie comme exemple de surface avec des propriétés particulières.

Pour conclure cette section à propos des activités des mathématiciens, cette conceptualisation se distingue d'autres conceptualisations du travail des mathématiciens puisqu'elle met en lumière ce que mettent en route quotidiennement les mathématiciens pour produire des mathématiques. D'autres conceptualisations, axées par exemple sur l'intuition (Dieudonné, 1975), la créativité (Sriraman, 2009) ou le travail de la preuve (Balacheff, 1987), entrent de façon très précise sur ces aspects et dans leurs rôles dans le travail des mathématiciens. Ces éléments sont essentiels dans le travail des mathématiciens, mais ils ne permettent pas d'illustrer ce que *font* les mathématiciens. Dans le cadre du travail proposé ici, la conceptualisation offerte permet de détailler ce qui se

retrouverait dans le travail des élèves placés en résolution de problèmes selon les divers arguments présentés à la section 1. En ce sens, les composantes abordées ci-haut sont reprises dans le travail d'analyse présenté à la section 4.

2.3 Précision de la question de recherche

À la lumière des conceptualisations du contexte de résolution de problèmes et du travail des mathématiciens sous la dimension production des mathématiques, il est possible de préciser la question de recherche et de la décliner en quelques sous-questions : Est-ce que les composantes du travail des mathématiciens se retrouvent dans le travail des élèves placés en résolution de problèmes? Comment se manifestent ces composantes? Comment la résolution de problèmes et ses caractéristiques suscitent-elles et encouragent-elles la mise en oeuvre des activités des mathématiciens chez les élèves?

3. Méthodologie

L'environnement de résolution de problèmes, tel que décrit à la section 2.1, est au cœur du projet présenté ici. Dans le but de tenir compte de ce contexte pour l'étude des activités des élèves, la méthodologie qualitative/interprétative est employée car elle « permet au chercheur de comprendre, de l'intérieur, la nature et la complexité des interactions d'un environnement déterminé » (Savoie-Zajc, 2018, p. 193). D'une certaine façon, cette méthodologie propose de considérer les particularités du contexte et des interactions qui y ont lieu pour l'étude des activités des élèves.

Ensuite, les données de recherche analysées pour étudier les activités des élèves en contexte de résolution de problèmes proviennent d'un autre projet de recherche mené par le professeur Jérôme Proulx (Proulx, 2020). L'objectif principal de ce projet était d'étudier les raisonnements et stratégies des élèves en calcul mental. Des séances de travail en groupe-classe ont été organisées dans le but de faire émerger ces raisonnements et avaient, de manière générale, la structure suivante :

- Un problème est proposé aux élèves qui doivent d'abord tenter de le résoudre individuellement.
- Le chercheur-enseignant demande aux élèves de partager leurs réponses et les écrit au tableau, ou invite les élèves à partager leurs résolutions.
- En plénière, les stratégies et solutions sont alors remises en question, reformulées, expliquées, comparées, mises à l'épreuve et exemplifiées par les élèves et le chercheur-enseignant.
- Tout ce travail est non linéaire alors qu'en cours de résolution, il arrive que de nouveaux problèmes émergent et soient explorés par la classe.

En cherchant à faire émerger les raisonnements et stratégies mathématiques des élèves, le chercheur-enseignant organise leur travail de façon à instaurer un environnement de résolution de problèmes comme entendu dans cet article (voir section 2.1). Il favorise d'abord les interactions entre élèves, problèmes et solutions en invitant les élèves à partager leurs questions, solutions et stratégies. Il met ensuite à profit les idées partagées en invitant les élèves à s'y intéresser à travers des questionnements supplémentaires. Il travaille donc avec les idées proposées pour alimenter l'émergence de raisonnements et des stratégies supplémentaires. Ensuite, le chercheur-enseignant laisse place aux propositions des élèves, car celles-ci sont centrales dans son travail de recherche. Cette « liberté » offerte aux élèves vient, en contrepartie, avec des demandes d'explications et justifications nécessaires pour le travail de recherche du chercheur-enseignant. De plus, « l'incertitude » est un outil important du chercheur-enseignant lui permettant de creuser et de faire émerger certains détails et limites des raisonnements d'élèves et se retrouve donc au cœur du travail fait en classe. Cette incertitude devient aussi parfois un moteur pour le développement de stratégies et raisonnements supplémentaires par les élèves. Finalement, en laissant l'autorité à la classe, le chercheur-enseignant alimente le partage de raisonnements et stratégies axé sur l'argumentation et la justification. Tout ceci montre que l'environnement particulier qu'instaure le chercheur-enseignant à travers ses propres objectifs de recherche s'aligne sur le contexte de résolution de problèmes abordé ici. Ce qui est décrit ici met l'accent sur la gestion du chercheur-enseignant qui crée un environnement de résolution de problème en classe. Bien que l'on aurait pu se concentrer sur d'autres aspects de cet environnement, tels que le problème lui-même, le cas étudié met plutôt en avant la gestion de l'activité par l'enseignant.

Les 13 séances ont été organisées dans une classe de 5^e année (10-11 ans) regroupant 27 élèves. En général, elles étaient d'une durée de 35 à 40 minutes et ont été enregistrées sur vidéo. Les traces laissées au tableau blanc interactif à chaque séance ont aussi été sauvegardées et analysées. Le processus d'analyse mené est inspiré du modèle de Powell et al. (2003) développé particulièrement pour l'analyse de données dans un contexte de travail mathématique ancré dans la résolution de problèmes. Ce modèle permet donc d'étudier ce que font les élèves mathématiquement à travers les étapes suivantes :

- 1) Visionnements répétés : les séances ont été visionnées plusieurs fois dans le but de développer une certaine familiarité avec leur déroulement.
- 2) Identification et transcription des moments clés : dans les séances, un moment clé correspond à une parole, un geste ou un écrit d'élèves qui contribuent à l'avancement des mathématiques de la classe.

- 3) Codage des moments clés : chaque moment clé est associé à une ou des composantes du travail des mathématiciens. Cette étape est effectuée à l'aide de grilles d'analyse inspirées de la conceptualisation du travail des mathématiciens présentés à la section 2. Ces grilles ont été développées en adaptant le travail des mathématiciens à la classe en résolution de problèmes afin d'anticiper certains observables qui permettent de reconnaître le travail des mathématiciens dans ce que font les élèves.
- 4) Construction de sens : les moments clés associés à une même composante ont été étudiés pour en dégager des tendances sur la façon avec laquelle les élèves mettent en route chaque composante du travail des mathématiciens.

4. Analyse des données et interprétations

Pour illustrer le type d'analyses menées dans la recherche abordée ici, des extraits d'une même séance de résolution de problèmes sont présentés de façon chronologique. Ces extraits, représentatifs du genre de travail fait par les élèves dans les séances analysées, sont ici mis en relation avec une composante du travail des mathématiciens. Bien que plusieurs composantes du travail des mathématiciens puissent être associées à un même extrait, une seule composante est abordée pour chaque extrait dans le but de rendre claire et précise l'analyse menée pour chaque composante. De plus, le travail d'analyse sur les extraits est ici orienté sur ce que font les élèves pour étudier si ceci correspond au travail des mathématiciens. En ce sens, les gestes, paroles et écrits des élèves sont considérés même s'ils conduisent parfois à des erreurs ou des idées invalides. Finalement, pour chaque composante présentée, des exemples supplémentaires d'activités d'élèves provenant d'autres séances sont aussi présentés puis brièvement étudiés afin d'offrir un portrait plus clair des résultats obtenus.

4.1 Début de la séance

La séance était orientée autour du problème suivant :

46, 70, 81, 106 - Parmi ces nombres, lesquels sont divisibles par 2 ?

Le problème a été affiché au tableau de la classe et les élèves ont eu quelques secondes pour réfléchir à une réponse. Ils ont ensuite été invités à lever la main pour répondre à la question.

4.2 Appliquer des méthodes

Chez les mathématiciens, l'application de méthodes passe par l'utilisation d'une suite d'étapes qui permettent d'obtenir des résultats sans remettre en doute la validité des étapes et de la réponse trouvée. C'est ce que fait ici Simon pour déterminer que le nombre 46 est pair.

Extrait 1

Un premier élève, Guillaume, répond que 46 est un nombre pair et explique:

Guillaume : 4, on peut le... le 4... on peut le séparer et le 6 aussi.

Ch.-ens. : qu'est-ce que vous en pensez?

Vincent : Je le divise par deux, ça fait 23.

Le chercheur-enseignant dit vouloir revenir plus tard sur cette réponse et demande aux élèves ce qu'ils pensent de la stratégie de Guillaume. Simon lève sa main et explique :

Simon : C'est comme si tu regardes le 4 et le 6 pour savoir si c'est un nombre pair ou impair. Les deux, ce sont des nombres pairs, à cause de 0-2-4-6-8, et les nombres pairs se divisent par deux

Le travail de Simon et Guillaume dans cet extrait est caractérisé par l'efficacité de leur raisonnement. Dans leurs explications, les deux élèves ne s'intéressent pas aux détails de la méthode et appliquent la suite d'étapes : regarder chacun des chiffres qui composent un nombre et s'il se divise par deux, alors le nombre est divisible par deux. Lorsque le chercheur-enseignant demande aux élèves ce qu'ils pensent de la stratégie de Guillaume, Simon décortique la méthode, mais dans ses explications, il insiste de nouveau sur les étapes, et non sur la signification mathématique de ces étapes. Bien que la méthode ne soit pas valide avec n'importe quel nombre, elle est traitée comme une méthode connue des élèves, qui ne nécessite pas d'explication ou de justification des étapes. Ceci rappelle la façon avec laquelle les mathématiciens utilisent des méthodes qui ont gagné une certaine reconnaissance avec le temps, et qui peuvent être employées sans considérer leur validité (Davis et Hersh, 1981).

Un autre exemple d'**application de méthodes** chez les élèves provient d'une séance dans laquelle, au cours de la résolution du problème initial, un élève souhaitait faire la soustraction $132 - 125$. Après avoir plutôt écrit $125 - 132$ et obtenu 143, un autre élève lève sa main et explique : « Si tu avais fait 132 moins 125, tu aurais barré ton 3, tu aurais mis un 2 avec le 1 à côté du 2, ça donne 7. 2 moins 2, zéro, et 1 moins 1 c'est zéro. » Il est possible de reconnaître ici l'algorithme de soustraction qui a été appliqué, sans toutefois aucune mention explicite d'emprunts, de retenues ou de valeur de position. Alors que ces détails auraient permis de comprendre le fonctionnement de l'algorithme, ils ont été omis pour laisser place à l'efficacité de la méthode.

4.3 Concevoir des liens

Pour produire des résultats mathématiques, les mathématiciens mobilisent des idées pour les mettre en relation avec d'autres. Ceci leur permet d'alimenter leurs

compréhensions mathématiques. C'est ce que fait ici Vincent avec sa réponse au problème initial :

Extrait 2

Simon : C'est comme si tu regardes le 4 et le 6 pour savoir si c'est un nombre pair ou impair. Les deux, ce sont des nombres pairs, à cause de 0-2-4-6-8, et les nombres pairs se divisent par deux

Le chercheur-enseignant demande ensuite aux élèves de tenter de comprendre la méthode de Guillaume. Vincent lève sa main et explique

Vincent : 4 divisé en deux donne 2, et que 6 divisé en deux donne 3, donc 23.

Ici, Vincent met en relation sa propre résolution du problème avec celle de Guillaume. Entre autres, il considère le 4 et le 6 séparément, comme le fait Guillaume, et il montre que ces deux nombres sont pairs puisque la division par deux donne respectivement 2 et 3. Il ajoute que ce 2 et ce 3 deviennent 23, c'est-à-dire sa réponse donnée précédemment. D'une certaine façon, Vincent donne un sens à la méthode de Guillaume en s'appuyant sur sa propre réponse au problème posé, mais donne aussi un sens à sa réponse avec la méthode de Guillaume. Ceci rappelle les mathématiciens qui développent des compréhensions en établissant des liens.

Un exemple supplémentaire de **liens établis** par les élèves provient d'une séance où il est demandé aux élèves de trouver différentes façons d'écrire la fraction cinq dixièmes. Les élèves soulèvent rapidement le concept de « fraction équivalente » en expliquant devoir multiplier le numérateur et le dénominateur par un même nombre pour générer des fractions équivalentes. Pour expliquer cette méthode au chercheur-enseignant, Simon explique :

C'est comme si tu faisais une suite. Si tu multiplies par un nombre différent les deux [numérateur et dénominateur], ça donnera pas une suite. Mais si tu fais fois deux, fois deux, fois deux, fois deux, ça donne toujours des fractions équivalentes à cinq dixièmes.

Ainsi, Simon établit un lien entre les fractions équivalentes et les suites de nombres et appuie sa compréhension des fractions équivalentes sur ce lien avec les suites.

4.4 Formuler des problèmes

Lorsque les mathématiciens formulent des problèmes, ils soulèvent des interrogations à propos des résultats mathématiques qu'ils rencontrent. Ces problèmes s'alignent sur leurs intérêts et alimentent la production des mathématiques. C'est ce qu'on retrouve dans l'intervention d'Océanne à propos d'une proposition de Nico.

Extrait 3

Après un travail sur le nombre 106, Nico, un élève, lève sa main et dit :

Nico: Il y a un autre nombre qui se divise aussi, c'est 70.

Le chercheur-enseignant demande ensuite aux élèves en accord avec ceci de lever la main. Il fait la même chose avec ceux en désaccord et questionne Océanne sur son désaccord. Elle répond :

Océanne : Parce que 7, c'est un nombre impair...

Ch.-ens. : Ok, donc ce que tu dis, c'est que 70, on n'est pas certains que c'est pair parce que la méthode de Guillaume, de regarder le 7 et le 0, marche pas tout à fait hein? 7 est impair...

Un élève se propose ensuite pour résoudre ce problème au tableau.

Dans cet extrait, Océanne souligne à la classe qu'il y a une incompatibilité entre la réponse de Nico et la méthode de Guillaume. En insistant que le 7 de 70 est un nombre impair, elle insinue que la décomposition du nombre 70 ne peut être faite comme sur le nombre 46 et qu'il n'est alors pas possible de conclure que le nombre 70 est pair. Toutefois, une nuance est à faire ici puisqu'Océanne ne rend pas son questionnement clair à la classe. C'est plutôt le chercheur-enseignant, instrumental dans la formulation de problèmes que fait Océanne, qui fait de l'interrogation d'Océanne un « problème » aux yeux de la classe. Ceci distingue le travail des élèves de celui des mathématiciens qui prennent la pleine responsabilité de se questionner, mais aussi de formuler clairement les questions qu'ils se posent.

Une autre **formulation de problèmes** est effectuée chez les élèves lors d'une séance portant encore une fois sur les fractions équivalentes. En particulier, Lily, une élève de la classe, affirme que la fraction représentée dans la croix de gauche est deux cinquièmes. Pour justifier cette affirmation, Lily déplace certains ronds et montre qu'on peut y voir deux carrés verts coloriés sur cinq.

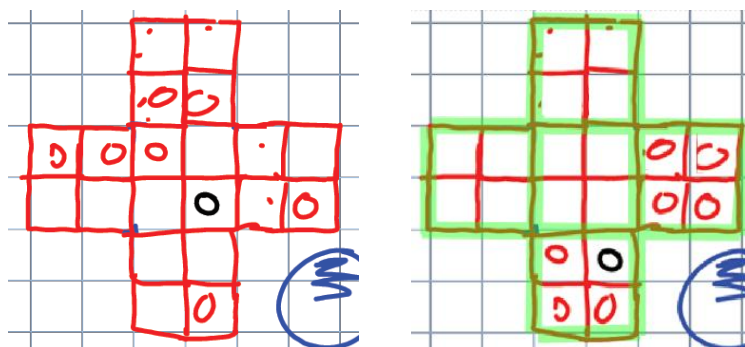


Figure 2. Dessins de Lily pour montrer la fraction deux cinquièmes

Toutefois, un autre élève a questionné cette méthode en disant : « Je ne comprends pas la croix à Lily, avant qu'elle les bouge, pourquoi c'était deux cinquièmes? ». À travers cette question est formulé un problème portant sur la validité de la transformation de figure effectuée par Lily. L'élève soulève une question qui vise à clarifier et s'assurer du lien entre les deux figures de Lily.

4.5 Créer et exploiter le symbolisme

Les mathématiciens exploitent entre autres le symbolisme de deux façons différentes : D'abord, les mathématiciens font des allers-retours entre les manipulations des symboles, le sens des symboles et l'objectif de ces manipulations pour progresser dans leur travail. Ensuite, les mathématiciens remarquent de nouvelles pistes d'explorations mises en lumière par une symbolisation particulière. Vu la nature du problème proposé en début de séance, ces façons de faire des mathématiciens se retrouvent dans plusieurs activités des élèves. Toutefois, elles sont particulièrement saillantes dans le travail de Francis présenté ici :

Extrait 4

Après le problème posé sur le nombre 70 et la méthode de Guillaume, Nico se propose pour aller au tableau et répondre à la question :

Francis : On sait que 30 plus 30, c'est égal à 60 et que 60, c'est 10 de moins que 70. [Francis écrit alors ceci au tableau et poursuit]

$$\begin{array}{r} 30 \\ + 30 \\ \hline 60 \end{array}$$

Figure 3. Première étape du calcul effectué par Francis au tableau

Ch.-ens. : Donc 60, c'est pair hein? Deux groupes pareils.

Francis : Ouais, donc déjà là, 60, c'est divisible par deux, pis là, je viens de me rendre compte que 70, c'est 10 de plus, donc...

Ch.-ens. : ...70, c'est 10 de plus que 60, qui est déjà divisible par 2.

Francis: Faque là, je me dis, je vais effacer les zéros, et je vais venir les remplacer par les 5 [figure 4]. Faque là, ça me donne 10, donc je mets 1 en haut, et ça fait 6 + 1, donc 70.

$$\begin{array}{r} 35 \\ + 35 \\ \hline 70 \end{array}$$

Figure 4. Remplacement des 30 par des 35 par Francis dans son calcul

Le travail est ensuite redirigé vers le nombre 81, issu du problème initial.

Ici, Francis travaille symboliquement la différence de 10 entre 60 et 70 et transforme les 0 de 30 en 5 pour obtenir la somme $35 + 35 = 70$. Ainsi, Francis exploite les symboles de chiffres, mais aussi le positionnement de l'algorithme d'addition pour arriver à montrer, à partir de 60, que 70 est un nombre pair. Toutefois, ce jeu de nombre est implicite, car la symbolisation permet à Francis de simplifier son travail sans faire référence au positionnement des nombres dans l'algorithme, par exemple. De plus, comme c'est le cas chez les mathématiciens, le symbolisme employé par Francis semble avoir permis un certain travail mathématique. Lorsque Francis écrit la somme $30 + 30 = 60$, il dit se rendre compte, à l'instant même, que 60 est « à 10 de moins que 70 ». C'est donc à travers sa première représentation symbolique que Francis trouve une façon de montrer que 70 est pair.⁵

Un exemple supplémentaire de **création et d'exploitation de symbolisme** provient d'une séance où le problème était de déterminer le nombre de sandwiches représentant le $\frac{5}{4}$ d'une collection de 30. Alors que les élèves n'avaient jamais rencontré de fraction plus grande que 1, trois d'entre eux ont cherché à élaborer une façon de représenter symboliquement cette fraction. À travers différents dessins, arguments et discussions, ils ont fini par établir une représentation symbolique qui a été acceptée par le groupe. Ceci rappelle la façon avec laquelle un symbole mathématique est établi par et pour la communauté de mathématiciens.

⁵ Il aurait aussi été possible de regarder cet extrait sous l'angle de la dimension « communication des mathématiques » et ainsi analyser comment Francis se sert du symbolisme pour rendre public son travail mathématique. Ceci illustre encore une fois que les dimensions abordées dans la conceptualisation du travail des mathématiciens ne sont qu'une première entrée sur leur travail.

4.6 Générer et étudier des contre-exemples

Les mathématiciens travaillent avec des exemples et des contre-exemples de différentes façons. Dans les cas de contre-exemples à un résultat, ceux-ci provoquent un travail supplémentaire car les mathématiciens étudient ces contre-exemples et précisent le résultat pour le rendre valide. C'est ce que fait Simon dans l'extrait suivant :

Extrait 5

Après le travail de Francis au tableau, le chercheur-enseignant rappelle une partie du travail déjà effectué sur le problème initial. Le chercheur-enseignant souligne les différentes décompositions trouvées pour chacun des nombres et demande aux élèves d'en trouver d'autres pour 106. Il écrit les réponses $53 + 53$, $50 + 50$, $50 + 56$, $86 + 20$, $46 + 60$ et $36 + 70$ au tableau et discute, avec les élèves, de ces différentes réponses. Jeanne lève sa main et dit :

Jeanne : On voit qu'il y a beaucoup de 3 et de 6

Ch.-ens. : Ben oui, et c'est drôle, 106, c'est un nombre pair et on l'a découpé en plein de nombres pairs.

Vincent : J'ai remarqué quelque chose, à chaque fois que tu divises par deux, ça donne un nombre impair.

Simon : Ok, mais 100 divisé par deux, ça fait 50, c'est pair

Comme les mathématiciens, Simon identifie un contre-exemple à une proposition mathématique. En particulier, il trouve le nombre 100 qui, divisé par deux, donne un nombre pair. Ce contre-exemple lui permet de montrer que la proposition de Vincent n'est pas valide : ce n'est pas toutes les divisions par deux qui donnent un nombre impair. De plus, comme chez les mathématiciens, ce contre-exemple a permis de générer des explorations supplémentaires pour déterminer ce qui est valide dans la proposition de Vincent. C'est grâce à ce travail qu'une deuxième proposition est étudiée dans la suite de la séance (voir section 4.7).

Un second exemple **d'étude de contre-exemple** provient d'une autre séance durant laquelle, au cours de la résolution du problème proposé, les élèves s'intéressent à la relation entre un rectangle et un carré. C'est de nouveau Simon qui utilise un contre-exemple pour raffiner les idées de la classe. Après que Jessie ait proposé que deux carrés forment un rectangle, Simon affirme qu'un rectangle n'est pas toujours deux carrés puisqu'en prenant un « rectangle vraiment plus long », il n'est pas possible de le couper en deux carrés. Bien que ce contre-exemple ne corresponde pas tout à fait à la proposition de Jessie, il a tout de même amené les élèves à explorer et retravailler l'énoncé.

4.7 Créer des mathématiques

Lorsque des mathématiciens créent des mathématiques, ils établissent de nouvelles méthodes, conjectures, théories et définitions. À partir d'exemples, symboles, liens et méthodes, les mathématiciens remarquent des structures et propriétés et en font des idées innovantes. Dans l'extrait suivant, c'est ce que fait Sabine alors qu'elle offre une nouvelle conjecture à la classe.

Extrait 6

Afin de tester la proposition de Vincent qui est contredite par Simon (voir extrait 5), le chercheur-enseignant propose aux élèves de travailler en équipe de deux sur l'énoncé et de mieux comprendre pour quels nombres il fonctionne ou non. Durant le travail en équipe, il remarque ce que fait Sabine puis, après quelques minutes, le chercheur-enseignant demande aux élèves de lui donner les nombres pour lesquels la division par deux donne un nombre pair, et les nombres pour lesquels la division par deux donne un nombre impair [voir figure 5]. Il invite ensuite Sabine à partager son travail.

Sabine : Quand l'unité d'un nombre est 2 ou 6, je pense alors que la division par 2 donnera un nombre impair.

Ch.-ens. : Qu'est-ce que ça veut dire ça, quand ton unité est 2 ou 6, donne-moi un exemple?

Sabine [en pointant au tableau] : Exemple, 82.

Ch.-ens. : Ah oui, ça fonctionne. Et 6 aussi tu as dit, et on a 106 ici [pointe 106 du côté des réponses impaires] Et après, c'est quoi la suite?

Sabine : Quand 0, 4 ou 8 est à la position des unités, la division par 2 donne un nombre pair.

Ch.-ens. : La même chose, si on regarde au tableau, on a des exemples qui fonctionnent. Mais attends un peu, on a un zéro du côté impair [en pointant la division $10 \div 2 = 5$].

$82 \div 2 = 41$	$208 \div 2 = 104$
$62 \div 2 = 31$	$52 \div 2 = 26$
$10 \div 2 = 5$	$32 \div 2 = 16$
$106 \div 2 = 53$	$120 \div 2 = 60$
$18 \div 2 = 9$	$36 \div 2 = 18$
$66 \div 2 = 33$	$104 \div 2 = 52$
$30 \div 2 = 15$	$500 \div 2 = 250$
	$56 \div 2 = 28$

Figure 5. Listes des nombres dont la division par deux donne une réponse paire ou impaire

Comme les mathématiciens, Sabine développe ici une conjecture à propos d'une structure, d'une récurrence. Sabine contribue ainsi activement à l'avancement des idées de la classe alors que sa conjecture présente un potentiel intéressant pour une méthode permettant de déterminer si la division par deux de n'importe quel nombre pair donne un résultat pair ou impair. Plus encore, la conjecture proposée par Sabine se rapproche aussi du travail des mathématiciens puisqu'elle est issue du regard particulier que porte Sabine à la tâche du chercheur-enseignant. Alors que de nombreux élèves répondent en donnant des exemples de nombres pour lesquels la proposition de Vincent fonctionne ou pour lesquels elle ne fonctionne pas, de son côté, Sabine donne une conjecture plus générale. Comme chez les mathématiciens, c'est le regard singulier que porte Sabine au travail demandé qui est porteur pour le développement de résultats mathématiques.

Un autre exemple de **création mathématique** provient d'une séance où le problème est d'estimer le résultat de la division $918 \div 4$. Dans une première solution offerte, l'élève dessine quatre paquets dans lesquels elle distribue les centaines et les unités pour obtenir $200 + 25 + 2$. Un élève reprend ce calcul et propose de décomposer la dizaine restante de la manière suivante : 2 dans chaque paquet, puis, pour les deux unités restantes, 0,5 dans chaque paquet. Les élèves ont été plutôt surpris de cette façon de faire, alors que selon l'un d'eux, il aurait plutôt fallu traiter les deux unités restant comme des « restes de la division ». D'une certaine façon, l'élève s'est servi des nombres décimaux d'une façon nouvelle et a pu trouver une manière innovante pour la classe de traiter les restes d'une division.

4.8 Générer et étudier des exemples

Les mathématiciens se servent d'exemples pour étudier certaines propriétés et en tirent des conjectures ou des définitions. En ce sens, les exemples étudiés sont choisis avec soin. Aussi, les mathématiciens se servent de ces exemples pour mettre en image un résultat mathématique et mieux le comprendre. C'est ce que raconte avoir fait Sabine dans l'extrait suivant :

Extrait 7

Après avoir discuté de la validité de la conjecture de Sabine, le chercheur-enseignant lui demande :

Ch.-ens. : Qu'est-ce que tu essayais de faire ici? Tu voulais trouver comment ça fonctionne?

Sabine : J'ai pris 100, 102, 104, 106, 108, et ainsi de suite avec les 200 et 300 aussi.

Étude des correspondances entre les activités des élèves...

Le chercheur-enseignant insiste que la conjecture de Sabine est intéressante, malgré qu'elle ne fonctionne pas « tout à fait comme Sabine le voudrait ». La séance se termine ensuite.

Comme les mathématiciens, Sabine se sert d'exemples afin de mieux comprendre le résultat mathématique proposé par Vincent. L'élève génère 15 exemples de nombre qui lui permettent d'explorer la division par deux, la parité de la division par deux de ces nombres, et finalement, trouver une certaine structure dans ces divisions par deux. De plus, le choix des exemples choisis par Sabine rappelle aussi la façon contrôlée avec laquelle les mathématiciens travaillent avec des exemples. Dans le cas de Sabine, les nombres étudiés ne semblent pas être générés au hasard, mais plutôt sélectionnés systématiquement : elle prend les 5 premiers nombres divisibles par deux après 100, puis fait ensuite varier le nombre de centaines à deux reprises pour obtenir 200, 202,... 208, 300, ... ,308. D'une certaine façon, cette variété d'exemples témoigne d'une certaine sensibilité de Sabine par rapport aux nombres choisis.

Un exemple supplémentaire de **l'étude d'exemples** provient d'une séance lors de laquelle les élèves offrent des représentations de la fraction deux cinquièmes. Au final, c'est plus d'une douzaine de dessins qui sont faits au tableau et qui sont ensuite discutés, vérifiés et expliqués avec les élèves. Ce travail a permis aux élèves de mettre en lumière certains liens entre les exemples de représentations en plus d'explorer les fractions équivalentes à deux cinquièmes qui étaient illustrées.

5. Discussion

Les analyses menées à propos de la mise en route des activités des mathématiciens chez les élèves en résolution de problèmes montrent que de nombreux gestes, paroles et écrits d'élèves peuvent être associés au travail des mathématiciens. Plus encore, étudier le travail des élèves à travers la conceptualisation du travail des mathématiciens met en lumière le genre d'impact que peut avoir l'environnement de résolution de problèmes sur le travail des élèves. Dans ce qui suit, les caractéristiques de la résolution de problèmes dégagées dans la section 2 sont reprises pour détailler l'impact de ce contexte sur la façon avec laquelle les élèves y déploient les activités des mathématiciens. Le rôle essentiel de l'enseignant dans le travail des élèves est aussi mis en lumière à travers certaines nuances à faire dans les correspondances entre les activités des élèves et celles des mathématiciens.

5.1. Interaction entre élèves, problèmes et solutions

Comme les élèves sont constamment en contact avec les réponses, stratégies, questions, explications et arguments de leurs pairs, ils ont continuellement

l'occasion de produire des mathématiques à partir des idées de la classe. Par exemple, Océanne questionne une réponse de Nico et « formule un problème » (section 4.4), problème qui sera résolu à travers « l'exploitation de symbolisme » (section 4.5) que fait Francis. C'est donc dire que la réponse de Nico, dans un contexte où il y a interactions entre les élèves et leurs idées, a permis à des élèves de s'impliquer dans les mathématiques de la classe et de mettre en oeuvre des activités des mathématiciens.

De plus, la collaboration des élèves qui travaillent ensemble pour résoudre un problème rappelle la collaboration entre mathématiciens. Par exemple, le travail de différents élèves a contribué à la « création mathématique » de Sabine : la décomposition des nombres de Guillaume, les questionnements de l'enseignant, la proposition de Vincent à propos de la division par deux qui donne toujours un nombre impair, le contre-exemple de Simon (section 4.6). Ceci rappelle la façon avec laquelle les mathématiciens, lors de séminaires ou de groupes de travail, entre autres, reprennent des idées de leurs collègues, les questionnent, les creusent et les développent davantage pour en faire de nouveaux résultats.

5.2 Liberté mathématique

En résolution de problèmes, les élèves ont l'occasion d'explorer diverses pistes, stratégies et solutions sans indications précises. Par exemple, lorsque Sabine, à la fin de la séance, élabore une conjecture et « crée des mathématiques », elle détermine elle-même la façon avec laquelle elle entre dans l'exploration demandée par l'enseignant : l'élève sélectionne des exemples, les étudie et en dégage une structure qu'elle formule ensuite sous forme de conjecture (section 4.7). La liberté mathématique rapproche donc le travail des élèves à celui des mathématiciens puisque les élèves ont eux aussi l'occasion de questionner, tester et fouiller des pistes de résolution de problèmes qui leur semblent intéressantes pour l'avancement des mathématiques.

Toutefois, comme mentionné par Lampert (1990b), cette liberté vient aussi avec la responsabilité d'argumenter la pertinence et la validité des pistes explorées. Par exemple, lorsque des élèves s'investissent à « établir une symbolisation » pour représenter la fraction $\frac{5}{4}$, ceux-ci sont devenus responsables de leurs propositions qu'ils ont dû présenter et expliquer aux autres élèves de la classe. En ce sens, les élèves rendaient claire la façon avec laquelle la fraction recherchée était visible à travers les nouvelles symbolisations en identifiant ce qui était le tout, et ce qui était le cinquième quart à y ajouter.

5.3 Incertitude

En résolution de problèmes, l'incertitude agit comme moteur du travail des élèves. C'est souvent pour résoudre les incertitudes que les élèves s'investissent dans les mathématiques de la classe et déploient les activités des mathématiciens. Par exemple, lorsque Vincent « conçoit des liens » entre sa réponse et celle de Guillaume (section 4.3), il répond à un doute soulevé par l'enseignant qui cherche à mieux comprendre comment fonctionne la méthode de Guillaume. Cette façon de réagir à l'incertitude rappelle le travail des mathématiciens, qui, de leur côté, travaillent constamment à résoudre des incertitudes et des doutes.

D'un autre côté, le travail des élèves est aussi une source d'incertitude alors qu'il est questionné par l'enseignant ou d'autres élèves. Entre autres, Océanne, en « posant un problème » soulève une question à propos d'une affirmation de Nico (section 4.4). De la même façon, les incertitudes qui alimentent le travail des mathématiciens proviennent aussi souvent de curiosités qui ont été formulées à propos de résultats ou propositions développés par des pairs. Ainsi, chez les élèves comme chez les mathématiciens, le travail mathématique est une source d'incertitude qui engendre, à son tour, un travail mathématique supplémentaire.

5.4 Autorité mathématique à la classe

Comme il est attendu des élèves en résolution de problèmes qu'ils agissent comme autorité mathématique de la classe (Lampert, 1990b), il arrive que les élèves produisent des mathématiques pour s'assurer que les idées proposées soient justes. Ceci est illustré dans les liens qu'établit Vincent entre sa réponse et la méthode de Guillaume (section 4.3). D'une certaine façon, Vincent met en lien les deux réponses et contribue à vérifier la validité de chacune d'elle. En ce sens, l'autorité mathématique prise en charge par la classe amène les élèves à reprendre des idées et à les retravailler pour s'assurer qu'elles sont valides.

Tout ceci montre que l'environnement de résolution de problèmes joue un rôle important dans la mise en route des activités des mathématiciens chez les élèves. Le cadre qu'offre la résolution de problèmes amène les élèves à s'engager dans les mathématiques, mais surtout, à le faire selon certaines balises. Ce sont ces balises, telles que le besoin de justifier et d'expliquer ses raisonnements, ou encore, la possibilité de travailler sur les idées des autres élèves, qui favorisent le rapprochement des activités des élèves à celles des mathématiciens.

5.5 Rôle de l'enseignant dans les activités des élèves

Le contexte de résolution de problèmes étudié ici, permettant d'illustrer le rapprochement du travail des élèves à celui des mathématiciens, met à la fois en lumière une nuance à apporter à ce rapprochement. Tel que mentionné dans la

section 3, le chercheur-enseignant s'implique activement dans le travail des élèves afin de faire émerger les raisonnements et stratégies et instaure du même coup, l'environnement de résolution de problèmes. Le genre de travail que mène le chercheur-enseignant le place dans une posture particulière dans le travail des élèves alors qu'il organise et alimente la résolution de problèmes. Par exemple, dans l'extrait 6, le chercheur-enseignant a orienté et déclenché un travail d'explorations chez les élèves en leur demandant de trouver pour quels nombres fonctionne, ou pas, la proposition de Vincent contredite par Simon. Cette demande du chercheur-enseignant a mené Sabine à « créer des mathématiques » et à « étudier des exemples » pour l'élaboration de sa conjecture. À travers les autres extraits, le chercheur-enseignant dirige aussi parfois l'attention des élèves sur certaines idées, reformule et souligne certaines propositions et contribue à l'avancement de la résolution de problèmes. Ces exemples montrent que le chercheur-enseignant participe de différentes façons à la mise en route d'activités des mathématiciens chez les élèves. Cette posture particulière n'a pas d'équivalent chez les mathématiciens qui, sauf lors d'un travail en collaboration, ont le plein contrôle des activités qu'ils déploient pour avancer dans leurs travaux de recherche. En ce sens, le rôle de l'enseignant dans le travail des élèves soulève une nuance importante quant au rapprochement du travail des élèves en résolution de problèmes à celui des mathématiciens.

Ceci montre que dans certains contextes de résolution de problèmes, et particulièrement ceux où l'enseignant joue un rôle actif pour mettre en place ce contexte, ce rôle devient délicat, voire contradictoire. Tel qu'illustré dans les sections précédentes, l'environnement de résolution de problèmes rapproche effectivement le travail des élèves à celui des mathématiciens. Toutefois, en voulant établir cet environnement, l'enseignant a un impact important sur le travail des élèves, et par cette action éloigne l'activité des élèves de ce que font les mathématiciens. En ce sens, la posture que prend l'enseignant pour installer la résolution de problèmes en classe a un double-impact sur le travail des élèves : il rapproche le travail des élèves à celui des mathématiciens mais les distingue du même coup.

Conclusion

Le travail présenté dans cet article offre des pistes de réponses à la question de recherche à propos de la mise en route des activités des mathématiciens par les élèves en contexte de résolution de problèmes. L'élaboration d'une conceptualisation possible du travail des mathématiciens a permis de mettre en lumière de nombreuses correspondances entre les activités des élèves et celles des mathématiciens. Il est ainsi possible de conclure que les élèves placés en contexte

de résolution de problèmes s'investissent dans les mathématiques de la classe de manière similaire aux mathématiciens. Entre autres, l'environnement de résolution de problèmes amène les élèves à développer des résultats mathématiques, à se servir d'exemples, de symboles et de méthodes pour produire ces résultats, à formuler des problèmes et à établir des liens pour explorer différentes idées. En ce sens, la nature particulière des activités mathématiques des élèves en résolution de problèmes invite à repenser la façon d'aborder les activités des mathématiciens alors qu'au final, elles sont partagées avec les élèves en résolution de problèmes, et n'appartiennent plus uniquement aux mathématiciens. D'une certaine façon, les activités des mathématiciens deviennent, dans le cadre de ce travail, les activités mathématiques des mathématiciens et des élèves.

D'un autre côté, les analyses mettent en lumière le double impact qu'a l'enseignant sur le déploiement des activités mathématiques chez les élèves. Pour amener les élèves à s'impliquer dans l'avancement de la résolution de problèmes, l'enseignant prend certaines décisions et pose certains gestes qui plongent les élèves dans la résolution de problèmes. À travers ses interventions, l'enseignant transforme, oriente et influence le travail des élèves qui n'est alors pas tout à fait comme celui des mathématiciens.

Tout ceci soulève des questions supplémentaires quant à la posture de l'enseignant qui cherche à instaurer un environnement de résolution de problèmes. Entre autres, il serait intéressant d'étudier les activités mathématiques des élèves placés dans des contextes de résolution de problèmes où l'enseignant est plus effacé, comme les tableaux verticaux (Liljedhal, 2016). Plus encore, dans le cadre du projet présenté ici, les séances analysées n'étaient pas situées dans le temps les unes par rapport aux autres. Toutefois, comme le mentionnent Lampert (1990b) et Liljedhal (2016), l'environnement de résolution de problèmes se transforme et s'installe à long terme, entre autres, grâce au travail constant de l'enseignant et l'implication des élèves. En ce sens, il est possible de se questionner sur l'évolution, dans le temps, de la mise en route des activités mathématiques par les élèves placés en résolution de problèmes. De quelle façon se transforment les activités mathématiques des élèves placés en résolution de problème à long terme? Comment l'implication de l'enseignant dans ces activités se transforme-t-elle lors d'un travail à long terme en résolution de problèmes? Ces questions sont importantes pour continuer d'étudier l'impact du contexte de résolution de problèmes sur les activités mathématiques des élèves, mais aussi pour explorer le double impact de l'enseignant sur le travail des élèves en résolution de problèmes.

Références

- Arsac, G., Germain, G. et Mante, M. (1988). *Problème ouvert et situation-problème*. Université de Lyon, Institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques.
- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situation de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2) 147-176. <https://doi.org/10.1007/BF00314724>
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Éditions la Pensée sauvage.
- Burton, L. (2004). *Mathematicians as Enquirers. Learning about Learning Mathematics*. Springer.
- Burton, L. et Morgan, C. (2000). Mathematicians writing. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 429-453. <https://doi.org/10.2307/749652>
- Davis, P. et Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience*. Mariner Books.
- Dieudonné, J. (1975). L'abstraction et l'intuition mathématique. *Dialectica*, 29(1), 39-54.
- Gay, D. A. (2014). *Explorations in Topology: Map Coloring, Surfaces and Knots*. Elsevier. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-416648-6.00009-8>
- Heinze, A. (2010). Mathematicians' individual criteria for accepting theorems and proofs: an empirical approach. Dans G. Hanna, H. N. Jahnke et H. Pulte (dir.), *Explanation and Proof in Mathematics* (p. 101-111). Springer.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge Philosophy Classics.
- Lampert, M. (1990a). Connecting inventions with conventions. Dans L. Steffe (dir.), *Transforming children's mathematics education* (p. 253-265). Lawrence Erlbaum Associates.
- Lampert, M. (1990b). When the Problem Is Not the Question and the Solution Is Not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching. *American Educational Research Journal*, 27(1), 29-63. <https://doi.org/10.3102/00028312027001029>
- L'Italien-Bruneau, R.-A. (2020). *Étude des activités mathématiques des élèves en contexte de résolution de problèmes* [mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal]. Archipel. <http://archipel.uqam.ca/id/eprint/14362>
- Liljedahl, P. (2016). Building Thinking Classrooms: Conditions for Problem-Solving. Dans P. Felmer, E. Pehkonen et J. Kilpatrick (dir.), *Posing and Solving Mathematical Problems* (p. 361-386). Springer.
- Lockwood, E., Ellis, A. et Lynch, A. G. (2016). Mathematicians' example-related activity when exploring and proving conjectures. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2(2), 165-196. <https://doi.org/10.1007/s40753-016-0025-2>

Lynch, A. G. et Lockwood, E. (2017). A comparison between mathematicians' and students' use of examples for conjecturing and proving. *The Journal of Mathematical Behavior*, 53. 323-338. doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.07.004

Maheux, J.-F., Proulx, J., L'Italien-Bruneau, R.-A., et Lavallée-Lamarche, M.-L. (2019). Referring and proffering: An unusual take on what school mathematics is about. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. <https://hal.science/hal-02421395>

Misfeldt, M. et Johansen, M. W. (2015). Research mathematicians' practices in selecting mathematical problems. *Education Studies in Mathematics*, 89(3), 357-373.

Powell, A. B., Francisco, J. M. et Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *The Journal of Mathematical Behavior*, 22(4), 405-435. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2003.09.002>

Proulx, J. (2020). Institutionnalisation et enseignement en contexte de résolution de problèmes. *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, 1, 70-109.

Richards, J. (1991). Mathematical discussions. Dans E. Glasersfeld (dir.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (p. 13-51). Springer.

Savoie-Zajc, L. (2018). La recherche qualitative/interprétative en éducation. Dans T. Karsenti et L. Savoie-Zajc (dir.), *Introduction à la recherche en éducation* (p. 191-217). Presses de l'Université de Montréal.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the learning of mathematics*, 14(1), 19-28.

Schoenfeld, A. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. Dans A. Schoenfeld (dir.) *Mathematical thinking and problem solving* (p. 53-70). Lawrence Erlbaum

Sriraman, B. (2009). The characteristics of mathematical creativity. *ZDM*, 41, 13-27.

Stanic, G. et Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. Dans R. I. Charles and E. A. Silver (dir.), *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving* (vol. 3) (p. 1-22). National Council of Teachers of Mathematics.

Struik, D. J. (2012). *A concise history of mathematics* (4^e éd.). Courier Corporation.

Schoenfeld, A. (1991). On mathematics as sense making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. Dans D. N. Perkins, J. Segal, et J. Voss (dir.), *Informal reasoning and education* (p. 311-343). Routledge.

Walters, M. (2004). It Appears that Four Colors Suffice: A Historical Overview of the Four-Color Theorem. *American Mathematical Association*.



Émergence de signes personnels chez des élèves de 3^e secondaire dans un contexte d'interprétation graphique avec le capteur de distance CBR

Valérie PASSARO

Université du Québec à Montréal

passaro.valeriane@uqam.ca

Mireille SABOYA

Université du Québec à Montréal

saboya.mireille@uqam.ca

Fabienne VENANT

Université du Québec à Montréal

venant.fabienne@uqam.ca

Résumé : L'interprétation graphique occupe une place importante au sein du processus de modélisation de situations réelles. Cette interprétation repose sur l'articulation entre les représentations sémiotiques impliquées et l'expérience concrète. Dans cet article, nous proposons une analyse des signes personnels qui ont émergés chez des élèves de 3^e secondaire (14-15 ans) lors de l'étude du déplacement d'une personne appréhendée à l'aide d'un capteur de distance (CBR). L'analyse de ces signes dans le discours révèle les défis rencontrés pour interpréter les variations de vitesse représentées par des changements d'allure du tracé graphique. Les modulations d'expression langagière montrent comment les élèves font face à ces difficultés et permettent d'anticiper les défis subséquents à considérer lors de l'orchestration du passage aux signes mathématiques.

Mots clés : interprétation graphique, modélisation, médiation sémiotique, signes personnels, embodiment

Emergence of personal signs in Grade 9 students in a context of graphic interpretation using a CBR distance sensor

Abstract: Graphic interpretation occupies a prominent role in the process of modeling real situations. This interpretation is based on the connection between semiotic

Revue [québécoise](#) de didactique des mathématiques, 2023, Numéro thématique 1 (Tome 2), p. 66-105. <https://doi.org/10.71403/4edt0p77>

representations and concrete experience. This article proposes an analysis of the personal signs that emerged in grade 9 (14-15 years old) pupils when examining the movements of individuals tracked using a distance sensor (CBR). Analysis of these signs in speech reveals the challenges of interpreting the speed variations represented by changes in the pace of plotting. Modulations in language expression show how students respond to these challenges and help anticipate subsequent challenges to take into account when managing the transition to mathematical signs.

Key words: graphic interpretation, modeling, semiotic mediation, personal signs, embodiment

Introduction

Dans le programme de formation de l'école québécoise, l'étude des fonctions occupe une place importante en mathématiques au 2^e cycle du secondaire (élèves de 14 à 17 ans). Cette étude vise à explorer des tâches permettant à l'élève de comprendre le monde qui l'entoure et donc à développer des habiletés en modélisation de situations réelles; une approche qui favorise aussi la mise en place de liens entre les mathématiques et les sciences à travers le traitement de données issues d'expériences (Choquette, 2009). Dans le processus de modélisation de situations fonctionnelles, différentes représentations se côtoient, mais les liens entre elles ne sont pas perçus d'emblée par les élèves (Choquette, 2009; Janvier, 1987; Gagatsis et al., 2006; Knuth, 2000). Il apparaît donc nécessaire de concevoir des situations didactiques permettant spécifiquement d'articuler différentes représentations. Dans cette optique, nous avons conçu et expérimenté des tâches visant l'articulation d'une situation concrète et du graphique représentant la relation entre deux grandeurs mises en jeu dans cette situation à travers l'utilisation d'un capteur de distance CBR (Computer-based Ranger)¹.

Pour mieux comprendre les enjeux de cette articulation chez des élèves débutants, nous cherchons à dégager les signes personnels (Bussi et Mariotti, 2008) émergeant dans l'action lors d'un travail en équipe. L'identification de ces signes s'avère essentielle pour la planification de l'orchestration du passage aux signes mathématiques. Dans cet article, nous nous concentrons sur l'analyse des signes personnels d'élèves de 3^e secondaire (14-15 ans) dans le cadre de tâches expérimentales avec l'outil CBR suscitant la coordination du déplacement d'une personne face à un capteur de distance et de la représentation graphique de la distance entre ce capteur et la personne en fonction du temps. Nous prenons cette

¹ La version utilisée dans les expérimentations relatées dans cet article est le CBR 2™ produit par Texas Instrument©. La prise en charge par l'ordinateur des données collectées par le capteur est effectuée par le logiciel Logger Lite de Vernier Software and Technology.

analyse des signes personnels comme témoin des enjeux d'articulation de registres impliqués dans le processus d'interprétation graphique.

1. Problématique

Nous explorons l'interprétation graphique qui est une activité mathématique posant des difficultés aux élèves. Le contexte de la modélisation de situations concrètes est l'approche que nous privilégions. Cette approche permet en effet d'ancrer la situation dans l'expérience sensible pouvant même se concrétiser par la mise en action du corps en entier. C'est notamment cette possibilité qu'offre le CBR choisi comme outil de médiation sémiotique.

1.1 Interprétation graphique

Dès la fin des années 1970, plusieurs chercheurs mirent en exergue les difficultés rencontrées par les élèves relativement à l'interprétation graphique dans le contexte de l'étude des fonctions réelles (Beichner, 1994; Janvier, 1978, 1981, 1987; Leinhardt et al., 1990; Wainer, 1992). Les origines de ces difficultés ont rapidement été associées au phénomène du passage d'une représentation à une autre (Brasel et Rowe, 1993; Duval, 1993; Janvier, 1987). En effet, chez ces auteurs, le processus observé est celui de l'interprétation de graphiques impliquant le décodage de signes graphiques auxquels on doit donner un sens dans le contexte de la situation représentée.

Le graphique, comme tracé dans un plan cartésien, est une représentation mathématique conventionnelle qui a ses signes et conventions propres. Interpréter un graphique implique, d'une part, de connaître et reconnaître ces signes et conventions et, d'autre part, lorsque le graphique représente une relation entre des quantités ou des grandeurs associées à un contexte extramathématique, d'établir le lien entre les signes graphiques et les éléments de la situation (Passaro, 2007). Ce passage du graphique à la situation peut être observé à travers la lunette des conversions entre registres de représentation sémiotiques (Duval, 1993, 1995). La conversion d'un registre à un autre implique une mise en correspondance entre des éléments signifiants de chacun des registres. Les unités signifiantes relatives à des registres différents doivent d'abord être discriminées, puis une correspondance entre ces éléments signifiants doit être établie. Par exemple, l'interprétation graphique implique le repérage d'éléments signifiants (appelés variables visuelles) dans le registre graphique auxquels on pourra associer des éléments signifiants dans les registres de la situation (verbal et/ou figural). Cette mise en correspondance, tributaire des caractéristiques de la situation étudiée ainsi que de la non-congruence des registres, peut s'avérer complexe. La mise en correspondance des éléments signifiants des registres impliqués nécessite un traitement cognitif complexe qui ne se résume pas à l'application d'une technique.

Ainsi, l'interprétation graphique requiert une compréhension suffisante de la situation qui peut notamment être suscitée par un va-et-vient entre les différents registres. La coordination des registres permet une meilleure compréhension des situations et de leurs représentations, particulièrement en contexte de modélisation de phénomènes scientifiques (Kohler et Chabloz, 2020). Cette coordination repose sur l'observation puis l'anticipation des impacts dans le registre d'arrivée d'un changement effectué au sein du registre de départ. Généralement peu présente dans les dispositifs didactiques de la classe et laissée à la charge de l'élève, la coordination de registres peut induire des malentendus qui pourraient être évités par une utilisation plus délibérée et plus explicite (Kohler et Chabloz, 2020).

Pour Leinhardt et al. (1990), le sens donné aux éléments graphiques peut être associé à une « observation globale et générale » du tracé ou à une « observation locale et spécifique » de certaines caractéristiques de ce tracé. Le type d'interprétation graphique requis dépend principalement de la situation représentée par le graphique et des questions qu'on se pose à propos de cette situation. Par exemple, Janvier (1978) proposait de porter une attention particulière à la variation de la fonction dans une variété de situations représentées graphiquement (ex. évolution d'une population de microbes en fonction du temps, vitesse d'une voiture de course en fonction du temps, durée d'un trajet Paris-Montréal en fonction de la vitesse de l'avion, etc.). Sa proposition permettait de développer l'observation globale du graphique et renforçait la prise en compte du lien de dépendance entre les grandeurs mises en relation. L'attention portée sur la variation s'opérait à travers un questionnement particulièrement orienté permettant à l'élève d'observer le graphique dans sa globalité et de se détacher des points pour observer ce qui se passe entre ces points. Ce regard appelle à visualiser le dynamisme du phénomène réel (par ex. en observant la forme de la courbe qui représente la variation de la vitesse de la voiture de course en fonction du temps : on imagine la voiture ralentir et accélérer, on la voit mentalement parcourir la piste, voir figure 1).

L'exploitation de contextes extramathématiques ou scientifiques permet d'enrichir l'activité d'interprétation graphique (Beichner, 1994), notamment parce qu'elle permet le recours au langage naturel qui joue un rôle important dans le passage d'un mode de représentation à un autre – les mots favorisant la mise en correspondance entre des éléments de chacune de ces représentations (Janvier, 1987). Cette mise en contexte apporte toutefois son lot de difficultés dans la mesure où on ne sait pas ce que ce contexte évoque chez l'élève (Janvier, 1981). La confusion entre la représentation graphique de la relation entre deux grandeurs dans une situation donnée et la représentation d'un objet de la situation est

fréquente. Janvier (1983) parle d'interférence du mode source dans le mode cible dont l'exemple le plus connu est celui de la piste de course (voir figure 1).

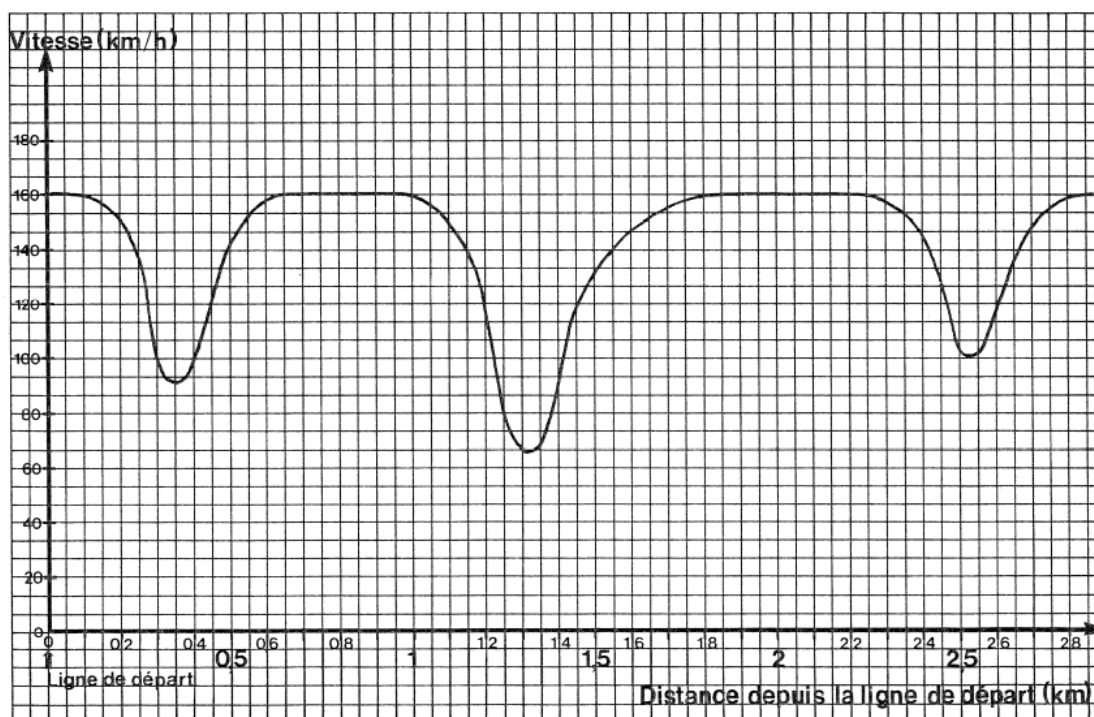


Figure 1. Graphique de la vitesse d'une voiture parcourant une piste de course en fonction du temps (tiré de Janvier, 1983)

La source est la représentation de la piste alors que la cible est le graphique représentant la variation de la vitesse d'une voiture qui parcourt la piste en fonction du temps. On demande aux élèves de déterminer le nombre de virages que comporte la piste, puis de choisir la bonne piste. L'erreur la plus fréquente commise par les élèves (15 à 30 % selon le niveau scolaire) est de considérer que la piste doit avoir neuf virages puisque le graphique comporte neuf « virages ». Parmi ces élèves, plusieurs vont par la suite choisir la forme de piste qui correspond à la reproduction directe du tracé du graphique (choix G, voir figure 2).

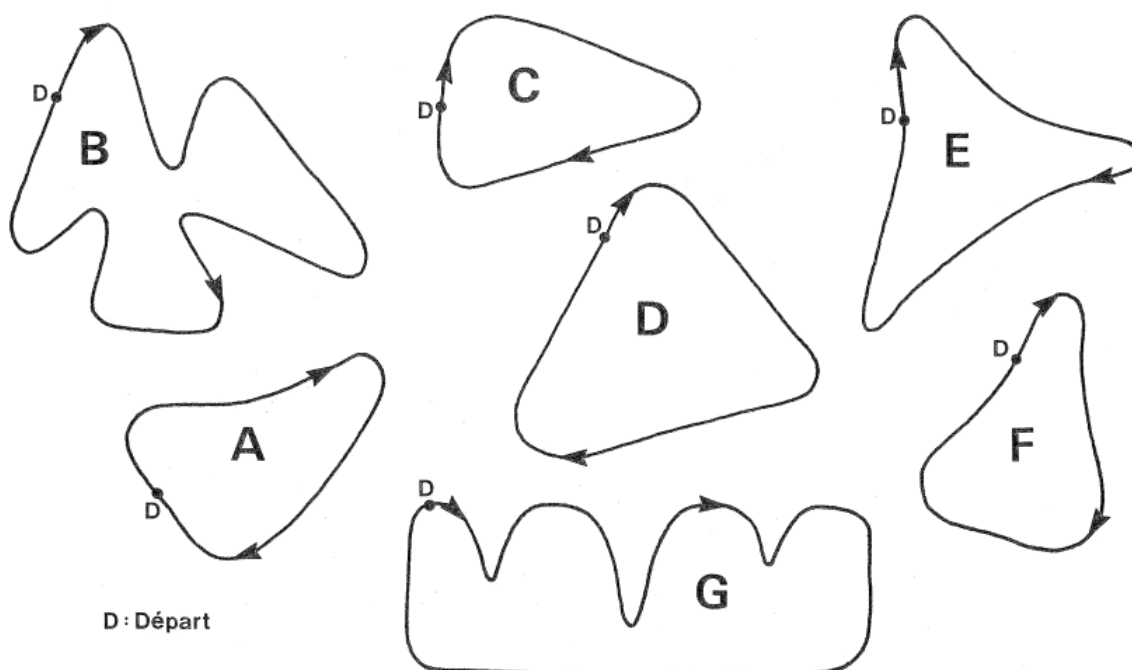


Figure 2. Choix de pistes de course (tiré de Janvier, 1983)

Cette confusion entre les différentes représentations est associée à un effet distracteur visuel du mode source (Janvier, 1993). Les élèves, au lieu de porter leur attention sur les signes graphiques permettant de comprendre la relation entretenue par les grandeurs, confèrent au graphique un statut iconique (Nemirovsky et al., 1998). Contextualiser ne suffit donc pas à favoriser l'interprétation graphique, encore faut-il que les élèves portent leur attention sur la distinction entre les différentes représentations utilisées pour traduire ce contexte et en rendre certains éléments plus apparents. Une interaction progressive entre le graphique et la situation est nécessaire (Bell et Janvier, 1981), les allers-retours entre la situation et le graphique permettant de raffiner l'interprétation.

Dans les années 2000, la recherche sur la modélisation de situations fonctionnelles en mathématiques et en sciences a pris de l'ampleur (Anastopoulou et al., 2011; Arzarello et al., 2012; Passaro, 2009, 2020; Choquette, 2009; Ellis et al., 2018; Hitt et González-Martín, 2015; Lazli, 2012; Robutti, 2006). Cet élan s'inscrit notamment dans la volonté d'ancrer les apprentissages mathématiques dans la vie réelle et de favoriser l'interdisciplinarité. Le processus de modélisation est enclenché à partir d'un contexte réel qui doit être compris; cette compréhension s'appuyant sur les représentations et perceptions individuelles de la réalité (Hankeln et Hersant, 2020). La modélisation comme pratique sociale nécessite ainsi des

expérimentations en classe favorisant l'émergence de perceptions partagées à partir d'un référentiel commun. L'expérimentation présente en outre des avantages spécifiques pour l'étude de situations fonctionnelles.

1.2 La plus-value de l'expérience concrète pour l'apprentissage de la notion de fonction

La notion de fonction est à la fois riche et complexe, notamment parce qu'elle peut être vue sous différents angles (Passaro, 2020). D'un côté, l'aspect de correspondance entre deux variables se révèle plus clairement à travers la construction d'une règle algébrique ou d'une table de valeurs puisqu'on se questionne sur le lien entre les deux valeurs de chaque couple appartenant à la fonction. Ce point de vue mène à établir la définition de la fonction du type « la fonction est une relation qui, à une valeur de la variable indépendante, associe au plus une valeur de la variable dépendante ». D'un autre côté, l'aspect de covariation entre deux variables s'observe bien dans le graphique ou la table de valeurs puisqu'on se questionne sur le lien entre les variations de chacune des variables. Ce point de vue mène à une définition de la fonction comme « une relation pour laquelle la variation d'une variable indépendante entraîne la variation d'une variable dépendante ». Ce deuxième aspect qui s'appuie sur les notions de dépendance et de variation est généralement privilégié lors du travail de la notion de fonction dans un contexte interdisciplinaire et expérimental. En effet, l'expérimentation de situations concrètes s'avère particulièrement intéressante pour favoriser la perception du dynamisme du phénomène observé et de la covariation entre les grandeurs (Passaro, 2007, 2015; Monk, 1992; Hitt et González-Martín, 2015). Des phénomènes physiques sont observés ou simulés de manière que le dynamisme des situations et la variation des grandeurs puissent être observés, voire contrôlés. Par ailleurs, en classe de sciences, Navarro (2012) souligne que l'expérimentation aide à la construction de la connaissance au moyen de visualisations, elle est source de motivation, d'une meilleure compréhension et assimilation des concepts et elle favorise le travail en groupe. En classe de mathématiques, Rodríguez et Quiroz (2016) précisent que l'expérimentation permet aux élèves de donner une nouvelle signification et une meilleure compréhension des notions mathématiques en jeu. En outre, l'expérimentation favorise la motivation des étudiants puisqu'ils perçoivent le lien entre les mathématiques et la vie réelle.

Finalement, des situations permettant l'engagement physique des élèves sont proposées (Carlson et al., 2002; Carlson et al., 2003; Martínez et Mejía, 2015; Nemirovsky et al., 1998; Robutti, 2006; Stylianou et al., 2005). Lorsque l'élève s'engage physiquement au sein du système observé, ce qu'on appelle

l'embodiment, il s'imprègne de la situation. Le corps et les gestes se connectent aux activités cognitives (cognition incarnée). Dans ce contexte, les capteurs de distance font partie des outils privilégiés par les enseignants et les chercheurs (Carlson et al., 2002; Martínez et Mejía, 2015; Radford, 2009).

1.3 Potentiel du capteur de distance CBR

Le CBR est un outil qui permet de capter la distance entre le détecteur et un objet déterminé. Le détecteur transmet les données collectées à un ordinateur (avec l'intermédiaire éventuel d'une calculatrice graphique ou d'un appareil appelé Labquest) qui trace automatiquement le graphique de la variation de la distance au fur et à mesure que le temps passe². L'usage prévu de l'outil est éducationnel, il est indiqué dans le mode d'emploi (Texas Instrument inc., 1997) que :

Le CBR permet d'explorer les relations scientifiques et mathématiques existant entre distance, vitesse, accélération et temps. Pour cela, on utilise les données collectées pour résoudre les exercices proposés. Les élèves peuvent ainsi étudier les concepts mathématiques suivants :

- mouvement : distance, vitesse, accélération
- représentation graphique : axes des coordonnées, pente, intersections
- fonctions : linéaires, quadratiques, exponentielles, sinusoïdales
- calculs : dérivées, intégrales
- analyse statistique des données : méthodes de collecte de données, analyse statistique. (p. 2)

Ainsi, pour capter la variation de la distance, soit on déplace le capteur, soit on déplace l'objet. Dans les activités que nous proposons à la section 3, les élèves sont invités à se déplacer face au capteur, comme illustré sur la figure 3.

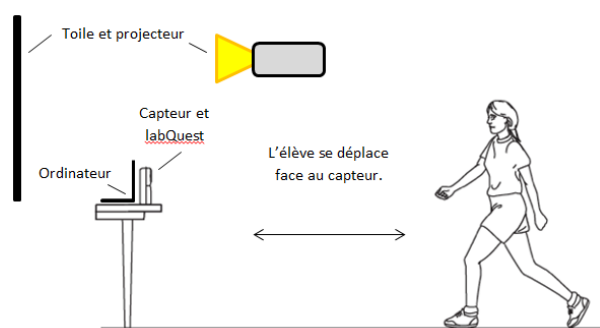


Figure 3. Dispositif d'utilisation de l'outil CBR

² Notez que l'outil permet une étude plus large de l'étude du mouvement puisqu'il est possible d'afficher les graphiques de la vitesse et de l'accélération en fonction du temps. Il est aussi possible d'afficher les données collectées sous forme d'une table de valeurs.

Le CBR est un outil particulièrement intéressant pour travailler le sens du graphique (Arzarello et Robutti 2004; Martínez et Mejía, 2015; Robutti, 2006). En prenant en charge le traçage, il assure une simultanéité entre le déroulement de la situation concrète (le déplacement) et la construction de sa modélisation mathématique (le graphique). Le CBR se constitue en interface permettant l'objectivation non seulement de la situation fonctionnelle (position en fonction du temps), mais aussi de sa représentation graphique. L'élève peut s'appuyer sur ses sens, ce qu'il ressent lors du déplacement, et ce qu'il voit s'afficher simultanément et dynamiquement sur l'écran, pour coordonner la situation concrète et le graphique qui la modélise. Il s'appuie sur son expérience physique pour former une image mentale de la relation qui unit la distance et le temps. Engager les élèves dans la simulation du phénomène étudié constitue une manière de bonifier la création d'images mentales, la compréhension du phénomène et l'intuition quant à la relation entretenue par les grandeurs étudiées (Carlson, 2002; Tall, 2006). L'outil CBR permet la construction d'activités sollicitant les critères d'engagement moteur et d'immédiateté (simultanéité entre l'expérience et la représentation graphique) (Duijzer et al., 2019; Johnson-Glenberg et al., 2014). L'activité cognitive est ancrée dans l'expérience physique (*embodiement*), le corps entier étant mis en action et prenant place au sein de l'environnement expérimental. Les élèves deviennent eux-mêmes un élément du système à modéliser. De plus, inclure le mouvement propre de l'apprenant dans l'activité d'apprentissage aide à modifier les représentations individuelles et à soutenir un dialogue constant entre le concret (ici le mouvement) et l'abstrait (ici la représentation mathématique) (Anastopoulou et al., 2011). Le mouvement physique peut supporter la création et la mise à l'épreuve d'hypothèses que l'apprenant peut tester. C'est ainsi que des associations entre les signes graphiques et les caractéristiques du déplacement peuvent se construire.

Par ailleurs, les représentations graphiques qui représentent des situations dynamiques sont fondamentales pour l'étude des mathématiques et des sciences. L'absence d'une compréhension solide de représentation graphique peut nuire à l'apprentissage du taux de variation et du calcul différentiel (Glazer, 2011). La construction d'activités exploitant l'outil CBR peut permettre ainsi de concrétiser ce dynamisme et de développer un premier référentiel pour l'étude des notions de distance, temps, vitesse et accélération, ainsi que les liens entre ces grandeurs sur lesquels prend appui l'étude du calcul différentiel (Anderson et Wall, 2016; Passaro, 2015, 2020; Robutti, 2006).

1.4 Synthèse et objectifs généraux de la recherche

Interpréter un graphique est un processus complexe qui implique, d'une part, le repérage de signes graphiques selon un objectif spécifique (que veut-on tirer

comme information du graphique donné?) et, d'autre part, l'attribution d'une signification à ces signes en fonction du contexte de la situation représentée. L'un des facteurs de complexité de ce processus réside justement dans l'interdépendance entre la représentation et la situation représentée, d'où l'orientation des travaux de recherche depuis plusieurs décennies sur des approches impliquant la modélisation de situations réelles et permettant le développement des liens de signification entre différents registres de représentation. Dans cette veine, quelques auteurs mettent à l'épreuve des activités avec l'outil CBR afin de développer la compréhension des représentations graphiques de fonctions. C'est le cas notamment de Martínez et Mejía (2015) qui se sont intéressés aux significations construites par des élèves de 15-16 ans à propos des représentations graphiques de fonctions sinusoïdales modélisant divers phénomènes réels (déplacement du corps et mouvement d'un pendule). Ils soulignent que, par l'entremise du travail avec le CBR, les élèves ont réussi à associer l'effet de paramètres (comme la période et l'amplitude) dans la situation réelle (un phénomène périodique) et dans la représentation graphique. Cette association ne s'est toutefois pas avérée simple et a demandé un grand nombre d'essais de la part des élèves. Les auteurs ne s'attardent alors pas à expliciter la nature de ces différents essais et leur évolution vers une association réussie entre la situation réelle et sa représentation graphique. Pourtant, il nous paraît crucial de comprendre comment le CBR peut agir comme outil de médiation sémiotique lors de ces différents essais et de repérer les signes personnels des élèves afin d'envisager le potentiel de l'exploitation de telles situations en classe.

Précédemment, nous avons créé une série de tâches impliquant l'usage de l'outil CBR et visant l'articulation d'une situation réelle et d'une représentation graphique de cette situation (Passaro et al., 2019; Passaro et al., 2020). Dans le présent article, nous proposons une analyse de l'activité mathématique des élèves lors de l'expérimentation de ces tâches en classe. L'importance des signes, le caractère social de la construction du sens ainsi que la présence d'un artefact particulier (le CBR) nous ont amenées à choisir d'observer cette activité à l'aide du cadre de la théorie de la médiation sémiotique (Bussi et Mariotti, 2008).

2. Contexte théorique : la médiation sémiotique

L'interprétation graphique implique l'articulation de représentations sémiotiques régies par des conventions. L'apprentissage de ces conventions mathématiques fait partie d'un processus beaucoup plus large que l'expérience unique de l'élève. Il s'agit d'une construction qui se produit dans l'interaction avec les autres et qui prend appui sur les représentations spontanées des élèves (Passaro, 2007; Hitt, 2004; Nemirovsky et al., 1998). Dans cet article, nous portons notre regard sur

l'activité mathématique des élèves lors de l'interprétation graphique dans le contexte d'une expérimentation en classe et avec le support d'un outil technologique. Nous cherchons donc à analyser une partie du processus de médiation sémiotique.

La théorie de la médiation sémiotique (TMS) est née d'un questionnement sur le rôle cognitif des représentations, mais aussi et surtout des artefacts. L'artefact désigne ici toute structure ou phénomène d'origine humaine, depuis le langage, jusqu'aux applications numériques, en passant par des objets à manipuler, ou le papier et le crayon. La TMS reprend à son compte l'hypothèse fondamentale de Vygotsky selon laquelle l'apprentissage met en jeu un processus d'internalisation essentiellement social et dirigé par un processus sémiotique (Bartolini Bussi et Mariotti, 2008). Vygotsky (1980) définit l'internalisation comme la reconstruction interne d'une opération externe. La construction des connaissances individuelles s'appuie sur des expériences socialement partagées au cours desquelles les processus externes sont transformés en ce que Vygotsky (1997) appelle des « fonctions mentales supérieures ». Étant de nature sociale, ce processus externe possède une dimension communicative qui implique la production et l'interprétation de signes (en premier lieu le langage naturel, mais aussi tout type de signes, depuis les gestes jusqu'aux systèmes sémiotiques mathématiques) dans l'espace interpersonnel (Cummins, 1996). Les signes peuvent être considérés comme des outils de médiation, permettant de soutenir la relation entre les élèves et le savoir, dans la réalisation d'une tâche. La médiation sémiotique est pensée autour de l'émergence de signes au cours de l'utilisation sociale d'un artefact pour résoudre une tâche mathématique. Ces signes sont reliés, d'une part, à la réalisation de la tâche, et donc à l'utilisation de l'artefact, et, d'autre part, au contenu mathématique visé par la tâche et qui est l'objet de la médiation sémiotique (voir figure 4).

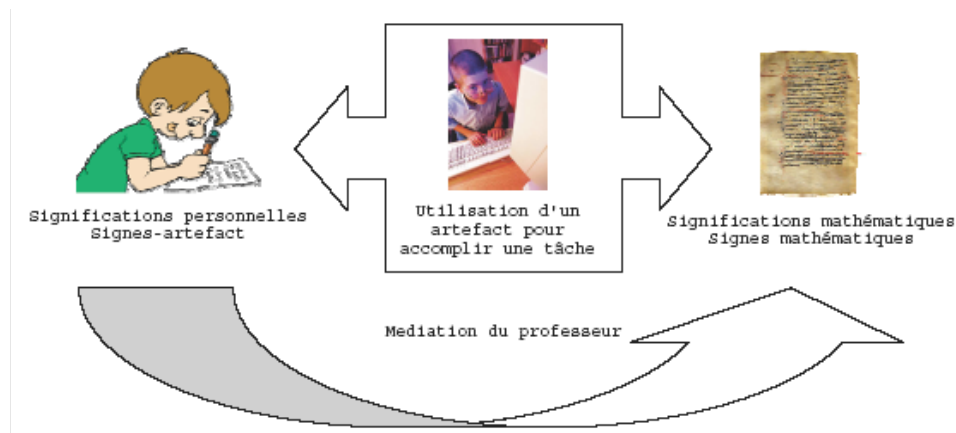


Figure 4. La médiation sémiotique selon Mariotti et Maracci (2010)

Deux systèmes parallèles de signes sont en jeu, les signes personnels, d'une part, et les signes mathématiques, d'autre part. Les signes personnels émergent de l'utilisation de l'artefact. Ces signes sont contingents à la situation, ils renvoient à des significations personnelles intimement liées aux actions exécutées avec l'artefact. Leur production est spontanée, ou explicitement requise par la tâche, et peut emprunter différents modes sémiotiques : vocaux, gestuels, graphiques, etc. Les signes mathématiques expriment, quant à eux la relation entre l'artefact et les contenus mathématiques en jeu. Ce sont des signes culturellement déterminés. Ils cristallisent les opérations menées avec l'artefact et renvoient aux significations mathématiques. La relation entre ces deux systèmes de signes, articulés au sein de l'utilisation de l'artefact, n'est ni évidente ni spontanée. Pour parvenir à des signes mathématiques communs, il est important de favoriser l'émergence de signes personnels liés à l'utilisation réelle de l'artefact, puis de favoriser leur évolution tout au long d'une chaîne de significations, au cours de laquelle la référence externe s'efface peu à peu au profit de significations mathématiques, qui constituent les objectifs de l'enseignement. L'artefact joue alors un double rôle, à la fois comme outil pour accomplir la tâche et comme outil de médiation sémiotique pour atteindre un objectif didactique. Pour que cette fonction sémiotique de l'artefact soit activée, la séquence didactique doit présenter certaines caractéristiques que Bartolini Bussi et Mariotti (2008) décrivent comme un cycle didactique mettant en jeu trois phases de mise en relation des signes personnels et mathématiques (voir figure 5).

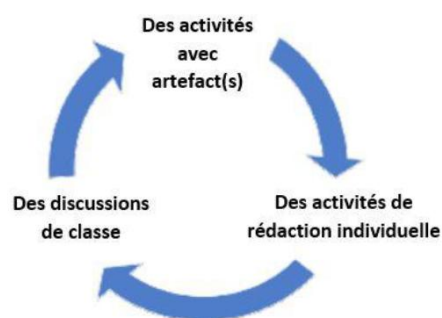


Figure 5. Le cycle didactique (tiré de Mariotti et Maffia, 2018)

Au début de chaque cycle, les activités avec l'artefact favorisent l'émergence de signes personnels spécifiques ancrés dans l'utilisation de l'artefact. Cette phase se réalise en équipe, pour promouvoir les échanges sociaux et susciter le recours à des modes sémiotiques variés (gestes, mots, schémas, sons...). Ces activités sont suivies par un temps de productions écrites (récit d'expérience ou formulation de résultats mathématiques) destinées à être partagées et discutées. Cette phase vise à provoquer l'émergence de signes graphiques qui, par leur nature même,

commencent à se détacher de la contingence de l'action située. Les signes produits lors de cette phase permettent de nourrir la troisième phase, dite de discussion mathématique, destinée à la production collective de signes.

À chaque étape du cycle didactique, l'action de l'enseignant est primordiale, notamment pour orchestrer le travail des élèves, aussi bien du point de vue instrumental que sémiotique. La dimension instrumentale de cette orchestration sous-tend, tout au long de l'activité, l'organisation intentionnelle des artefacts et des acteurs afin d'assister les genèses instrumentales des élèves (Trouche, 2005 et permettre que leur usage de l'artefact se constitue effectivement en instruments de travail mathématiques. Dans notre projet, l'organisation intentionnelle est incluse dans la conception des tâches qui est présentée à la section suivante. De plus, dans cet article nous nous concentrons sur l'analyse de l'activité des élèves pour des tâches durant lesquelles l'orchestration par l'enseignante est minimale. Ainsi, bien que les actions de l'enseignante jouent un rôle clé dans le cycle didactique complet, nous choisissons de placer une loupe sur un aspect particulier de ce cycle à un moment précis. Cette loupe est indispensable pour tirer l'information fine recherchée. Nous n'intégrons ainsi pas l'analyse des actions de l'enseignante hormis ce qui a été pensé dans l'organisation intentionnelle décrite dans la section suivante.

À la lumière de ce contexte théorique, nous pouvons reformuler les objectifs énoncés en 1.4. Ainsi, nous cherchons à mieux cerner le potentiel du contexte de modélisation d'une situation réelle impliquant un outil technologique pour la construction du sens graphique chez les élèves. Nous nous intéressons plus spécifiquement aux signes personnels des élèves qui émergent dans l'action et à l'évolution spontanée de ces signes vers les signes mathématiques visés. Notre objectif est donc d'analyser finement les signes personnels des élèves et leur évolution à travers une série de tâches conçues pour stimuler les interactions entre la représentation graphique et la situation réelle avec le soutien d'un outil technologique (le CBR).

3. Repères méthodologiques et présentation de la séquence de tâches

La lunette de la médiation sémiotique nous a portées à concevoir des tâches suscitant potentiellement l'émergence de signes personnels. Nous décrivons d'abord comment l'expérimentation de ces tâches s'est déroulée en classe et comment les données ont été collectées. Ensuite, nous expliquons les fondements théoriques complémentaires ayant soutenu la conception des tâches. Finalement, les tâches ainsi que leur réalisation effective lors de l'expérimentation sont décrites.

3.1 Contexte général de l'expérimentation et modalités de la collecte de données

Une séquence de quatre tâches a été conçue par les chercheuses, il s'agit d'étudier le déplacement d'une personne; on s'intéresse à la variation de la distance en fonction du temps. Le CBR, en tant qu'artefact, est envisagé comme principal outil de médiation sémiotique. Cette séquence a été expérimentée par deux enseignantes volontaires intéressées par ce sujet qui proviennent de deux écoles différentes. L'une des enseignantes intervient en 4^e secondaire avec des élèves qui sont dans le profil sciences naturelles (15-16 ans), l'autre enseignante est en 3^e année du secondaire avec des élèves en PRE-DEP qui est un parcours scolaire orienté vers la formation professionnelle. La séquence a été présentée à chacune des enseignantes individuellement et les documents élaborés par les chercheuses avec les consignes destinées aux élèves leur ont été fournis. L'expérimentation a pris place pendant deux séances de 75 minutes chacune entre novembre 2018 et janvier 2019. Deux chercheuses étaient présentes en classe pour filmer, chacune des caméras prenant des angles différents de la classe. Des enregistreurs audios ont permis d'avoir accès aux discussions de toutes les équipes. Après la première séance, les productions des élèves ont été ramassées et chercheuses et enseignante ont discuté de ce que les élèves avaient produit afin de préparer la deuxième séance.

Nous avons procédé à une transcription du travail mené par chacune des équipes grâce aux enregistreurs et des captures d'écran de ce qui a été filmé et qui ont permis d'accompagner certains extraits de transcription pour mieux saisir la gestuelle et les déplacements faits par les élèves. Les productions écrites (descriptions verbales et traces sur le graphique) des élèves sont venues compléter le matériau d'analyse.

Dans ce texte, nous nous limitons à l'analyse des signes personnels exprimés dans le langage courant par les 26 élèves en 3^e secondaire, élèves considérés comme faibles et démotivés. Il est à noter que dans ce groupe, en début d'année scolaire, l'enseignante avait travaillé l'étude des fonctions polynomiales de degrés 0 et 1 (fonctions affines).

3.2 Assises théoriques qui ont guidé l'élaboration de la séquence

La coordination de différents registres de représentation est incontournable pour l'interprétation graphique. Pour la conception de la séquence, nous avons pris en considération la difficulté reconnue : la complexité et la variété de conversions entre les registres de représentation sémiotiques impliqués (Duval, 1993, voir 1.1). Dans les tâches conçues, nous envisageons principalement la coordination des registres verbal et graphique. Toutefois, cette coordination s'opère dans un

contexte expérimental dans lequel d'autres « registres » interviennent. En effet, dans un contexte expérimental, la situation concrète est au cœur de l'activité mathématique des élèves. Chaque situation présente toutefois ses caractéristiques propres qui peuvent être plus ou moins associées à des phénomènes physiques pour lesquels des signes sont identifiables. Par exemple, dans un contexte de cinématique, on observe un objet se déplacer et on porte notre attention sur sa position, sa vitesse, le temps écoulé, etc. L'expérience de l'étude de la cinématique fera en sorte d'orienter le regard porté sur les signes de la situation. Toutefois, dans le contexte de la modélisation de situations réelles en mathématiques, on ne s'appuie pas forcément sur l'expérience des phénomènes scientifiques. Il serait difficile de répertorier d'emblée les signes associés à chaque situation. Ainsi, les signes produits lors de l'expérimentation de la situation concrète ne peuvent a priori pas constituer un registre de représentation sémiotique au sens de Duval (1993). L'expérimentation fait plutôt appel à des signes non conventionnels qui émergent de l'interaction entre l'élève et le phénomène. Les gestes posés jouent alors un rôle crucial puisqu'ils sont directement liés aux signes perçus. Bardini et Sabena (2006) considèrent que l'expérience du déplacement revêt un statut particulier en permettant l'articulation entre les dimensions kinesthésiques et sémiotiques. Rappelons que l'engagement moteur a le potentiel de susciter l'émergence de signes personnels, objets de notre observation.

Considérant par ailleurs le rôle crucial du langage dans la coordination de la situation et du graphique ainsi que le caractère social de la construction de représentations sémiotiques, nous proposons d'envisager le processus d'interprétation graphique dans le contexte d'un travail en équipe impliquant l'expérimentation d'une situation concrète. Dans cette situation, l'expérience agit comme moyen de médiation entre la situation et le graphique en impliquant la dimension kinesthésique (*embodiment*) ainsi que les registres verbal et graphique (voir figure 6).

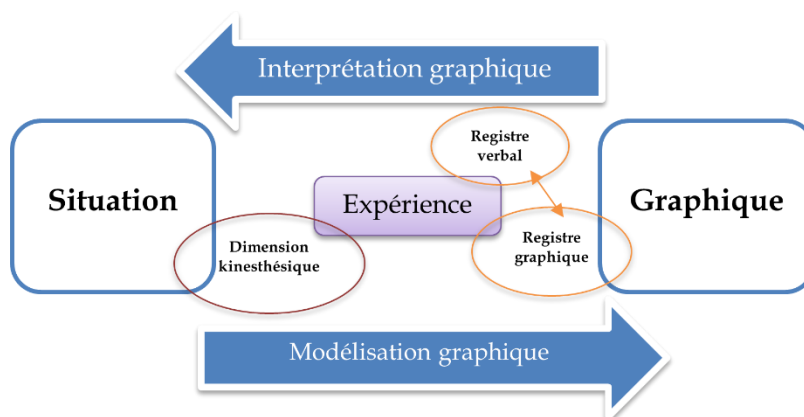


Figure 6. Modélisation et interprétation graphique dans un contexte expérimental

En cohérence avec Janvier et al. (1993), la modélisation graphique correspond au passage de la situation au graphique alors que l'interprétation graphique correspond au passage inverse. Dans la mesure où l'interprétation graphique nécessite des allers-retours entre le graphique et la situation, il nous semble important de considérer la modélisation et l'interprétation graphique comme des activités indissociables.

3.3 Présentation et réalisation des tâches

Comme indiqué précédemment, la séquence construite comprend quatre tâches. Dans les deux premières, il s'agit pour les élèves de reproduire un graphique donné en effectuant un déplacement devant le capteur CBR qui prend en charge le traçage du graphique. Ces tâches nécessitent des allers-retours fréquents entre la situation réelle (le déplacement d'une personne face au capteur de distance) et la représentation graphique (la distance entre la personne et le capteur en fonction du temps). Nous insistons sur le fait que le profil inexpérimenté des élèves avec l'outil et la situation permettrait un ancrage marqué dans l'expérience et l'émergence de signes personnels variés.

L'intention de la tâche I est de laisser les élèves explorer le matériel en grand groupe. L'enseignante projette un graphique au tableau et les élèves sont invités à le reproduire en avant. Pour cela, un CBR est placé sur le bureau de l'enseignante. De plus, afin que les élèves puissent quantifier les grandeurs distance et temps, un ruban à mesurer est collé au sol (pour prélever les distances parcourues séparant la personne du capteur) et un chronomètre est mis à la disposition des élèves (pour mesurer le temps écoulé lors du déplacement). Un livre est également fourni comme surface lisse pour permettre au capteur de collecter les données.

La partie du travail individuel du cycle didactique de Mariotti et Maffia (2018) présentée à la section 2 est en fait réalisée en simultané lors de la tâche I avec l'expérience « en grand groupe » durant laquelle tous les élèves qui le veulent peuvent aller faire l'expérience. Il n'y a pas vraiment de discussions, il s'agit vraiment de laisser les élèves observer, expérimenter et réfléchir. À cet égard, nous avons inclus la phase de travail personnel au sein d'une expérience collective durant laquelle il n'y a pas vraiment de prise de notes.

Pour la tâche II, les élèves se placent en équipe, la classe ayant été organisée en îlots avant le cours. Chaque équipe a le même matériel que celui disposé en avant de la classe (capteur de mouvement, chronomètre et ruban). Le tableau 1 décrit la réalisation des deux premières tâches.

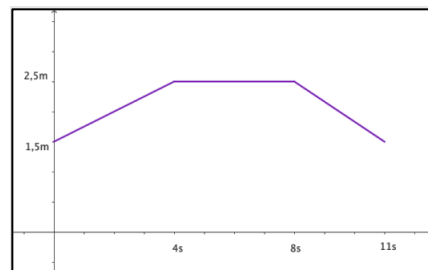
Tableau 1. Vue d'ensemble du déroulement des deux premières tâches

Tâche I : Exploration de l'outil et de la situation

Le CBR est présenté aux élèves par l'enseignante. Cette tâche est réalisée en grand groupe. L'enseignante projette un graphique au tableau de la distance par rapport au temps et demande à des élèves de venir en avant pour reproduire le graphique.



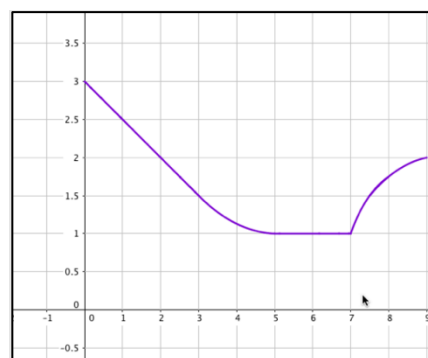
Exemple de graphique présenté :

**Tâche II : Interprétation graphique et production d'une description écrite**

Les élèves sont placés en équipes de 3 ou 4. Un graphique est remis à chacune des équipes. Les élèves doivent écrire un texte qui décrit le déplacement que devra effectuer une personne qui souhaite reproduire le graphique. Chaque équipe possède un CBR afin de tester et préciser les descriptions. Ci-dessous on peut voir une équipe de 3 élèves en avant-plan : l'un d'eux regarde la courbe sur la feuille et décrit à un autre élève comment se déplacer alors que le troisième élève gère le chronomètre.



Exemple de graphique attribué à une équipe :



Pour la deuxième tâche, nous avons conçu trois graphiques différents comportant tous au moins un trait droit oblique, un trait horizontal et un trait courbe. Chacune des sept équipes a reçu l'un de ces graphiques. Il s'agissait d'amener les élèves à interpréter les différentes parties du graphique dans la situation distance-temps. Nous avons misé sur une multiplication des allers-retours entre expérience et graphique favorisant l'évolution des signes personnels. La représentation graphique étant un outil mathématique connu des élèves, nous prévoyions un déplacement progressif vers des significations mathématiques associées à ce registre. Pour cette tâche, l'enseignante a reçu la consigne de donner le moins d'indications possible aux élèves afin de favoriser l'émergence de signes personnels.

Pour la troisième tâche, il s'agit pour les élèves d'interpréter les descriptions écrites par d'autres élèves lors de la tâche II de manière à tracer le graphique « mystère » ayant mené à la description donnée. À cette étape, nous avons choisi de retirer l'outil CBR afin de susciter un passage plus solide aux significations mathématiques. La coordination des registres verbal et graphique est mise de l'avant, et ce, sans accès à l'expérience et donc sans la médiation sémiotique offerte par le CBR.

Alors que pour les trois premières tâches l'enseignant joue davantage un rôle de guide, les élèves cheminant d'eux-mêmes, la quatrième tâche consiste en une synthèse par l'enseignant où il amorce une institutionnalisation en effectuant le passage des signes mathématiques communs à partir des signes personnels des élèves.

Rappelons que cet article propose une analyse du processus d'interprétation graphique à travers l'émergence et l'évolution des signes personnels des élèves. Nous cherchons plus précisément à comprendre comment l'articulation de l'expérience sensible (dimension kinesthésique) et des registres sémiotiques (graphique et verbal) suscitée par les tâches sous-tend l'émergence des signes personnels et leur évolution vers la construction du sens des concepts mathématiques en jeu. Ces signes ayant principalement émergé lors des tâches I et II, nous présentons ci-dessous les signes mathématiques attendus pour ces tâches. Ces signes guideront le regard que nous porterons ensuite sur les signes personnels des élèves.

4. Signes mathématiques en lien avec les tâches

Les signes mathématiques sont directement liés aux concepts mathématiques mis en jeu dans les tâches proposées : variable indépendante (temps), variable dépendante (distance), ordonnée à l'origine, coordonnées d'un point dans le plan cartésien, taux de variation (vitesse) et intervalle. À la tâche I, le graphique projeté

par l'enseignante est composé de trois phases : 1) un segment de droite ascendant, 2) un segment de droite horizontal et 3) un segment de droite descendant (voir figure 7).

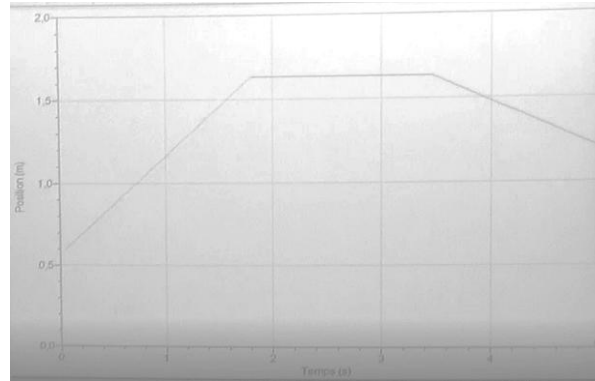


Figure 6. Graphique projeté à la tâche I

L'interprétation du graphique implique la discrimination des éléments signifiants du graphique puis la contextualisation dans la situation réelle de ces éléments. La réalisation de la tâche fait donc appel à cette interprétation mais elle nécessite aussi l'appui sur la dimension kinesthésique. Par exemple, pour savoir comment se placer et se déplacer pour réaliser la première phase du graphique, il faut repérer plusieurs éléments signifiants. Premièrement, un point caractéristique est placé sur l'axe des ordonnées. Ce point permet de déterminer l'ordonnée à l'origine qui, dans la situation réelle, correspond à la distance entre la personne et le capteur quand l'expérience débute (quand $t = 0$). Deuxièmement, le tracé est un segment de droite qui relie deux points, celui sur l'axe des ordonnées repéré précédemment et le point $(1,8; 1,7)$ ³. Dans la situation réelle, ce tracé indique que la distance entre la personne et le capteur augmente de manière constante. Les coordonnées des points permettent de déterminer que lorsque le temps augmente de 1,8 seconde, la distance augmente de 1,1 mètre. De cette interprétation de points caractéristiques et du tracé entre ces points, on peut inférer les actions à poser et donc effectuer une conversion vers la situation réelle du déplacement d'une personne en s'appuyant sur la dimension kinesthésique (voir tableau 2).

³ Ces informations n'étaient pas simples à obtenir sans action sur le graphique, nous aurions dû prévoir une version papier du graphique pour faciliter cette prise d'information.

Tableau 2. Correspondance entre les éléments signifiants du graphique et de la situation réelle prenant appui sur la dimension kinesthésique pour la première phase du graphique (tâche I)

Éléments signifiants du <u>registre graphique</u>	Action à poser (<u>dimension kinesthésique</u>)	Interprétation dans <u>la situation</u>
Le graphique débute avec un point sur l'axe des ordonnées, le point (0; 0,6). L'ordonnée à l'origine est 0,6.	Se placer à 0,6 mètre du capteur.	Au début de l'expérience (temps = 0), la distance entre la personne et le capteur est 0,6 mètre.
Le tracé est un segment de droite ascendant sur l'intervalle [0; 1,8]. Le point de départ du tracé est (0; 0,6), le point final est (1,8; 1,7).	Reculer à une vitesse constante approximative de 0,6 mètre (60 cm) par seconde pendant 2 secondes. S'arrêter à 1,7 mètre du capteur.	Entre 0 et 1,8 seconde la distance augmente de manière constante. Le taux de variation de la fonction est $\frac{1,7-0,6}{1,8-0} = \frac{1,1}{1,8}$. En 1,8 seconde la distance augmente de 1,1 mètre.

En prévision de la tâche III, à la tâche II, différents graphiques ont été distribués aux équipes de manière que les élèves ne travaillent pas tous sur le même tracé. Par la suite, les descriptions verbales écrites des tracés ont pu être distribuées à des équipes qui n'avaient pas décrit le même graphique (tâche III).

Dans l'analyse qui suit, nous regardons les productions des équipes qui ont reçu un graphique composé de quatre phases : 1) un segment de droite ascendant, 2) un segment de droite horizontal, 3) une courbe ascendante convexe et 4) un segment de droite horizontal (voir figure 8).

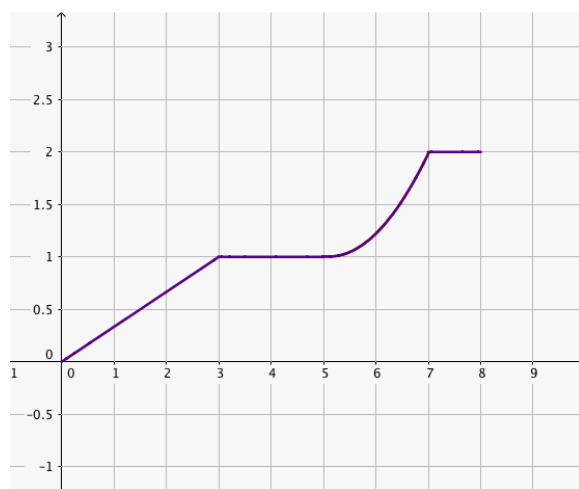


Figure 7. Graphique donné à la tâche II

La tâche II, comme la tâche I, fait appel à la discrimination d'éléments signifiants du graphique, à l'interprétation de ces éléments dans la situation réelle en s'appuyant sur la dimension kinesthésique (voir tableau 3).

Tableau 3. Correspondance entre les éléments signifiants du graphique et de la situation réelle en s'appuyant sur la dimension kinesthésique (tâche II)

Éléments signifiants du registre graphique	Action à poser (dimension kinesthésique)	Interprétation dans la situation
Le graphique débute à l'origine, le point (0; 0). L'ordonnée à l'origine est 0.	Se coller au capteur.	Au début de l'expérience (temps = 0), la distance entre la personne et le capteur est de 0 mètre.
Sur l'intervalle [0, 3] le tracé est un segment de droite ascendant. Le segment relie les points (0, 0) et (3, 1).	Reculer à une vitesse constante approximative de 0,3 mètre (30 cm) par seconde pendant 3 secondes. S'arrêter à 1 mètre du capteur.	Entre 0 et 3 secondes la distance augmente de manière constante. Le tracé représente une fonction linéaire dont le taux de variation est $\frac{1-0}{3-0} = \frac{1}{3}$. En 3 secondes la distance augmente de 1 mètre.
Sur l'intervalle [3, 5] le tracé est un segment horizontal.	Ne pas bouger pendant 2 secondes.	Entre 3 et 5 secondes la distance reste constante.
Sur l'intervalle [5, 7] le tracé est une courbe convexe. La courbe relie les points (5, 1) et (7, 2).	Reculer en accélérant pendant 2 secondes. S'arrêter à 2 mètres du capteur.	Entre 5 et 7 secondes la distance augmente de plus en plus.
Sur l'intervalle [7, 8] le tracé représente une fonction constante.	Ne pas bouger pendant 1 seconde.	Entre 7 et 8 secondes la distance reste constante.

Au-delà des concepts mathématiques énoncés précédemment, on peut constater que la conversion du graphique à la situation réelle en s'appuyant sur la dimension kinesthésique associée à l'expérience physique fait appel à des concepts spécifiques au phénomène étudié : la vitesse et l'accélération. En fait, on peut s'attendre à ce que le tracé courbé soit plus difficile à interpréter dans la mesure où les élèves ont approfondi l'étude du tracé linéaire mais pas du tracé non linéaire. Ce passage, qui nécessite d'envisager un changement constant de vitesse et donc une accélération, est reconnu comme difficile (Anderson et Wall, 2016; Robutti, 2006). Chez les élèves visés dans l'expérimentation, on peut s'attendre à une compréhension intuitive de la vitesse et de l'accélération liée aux expériences de la vie courante. Il est à noter que nous nous attendions à ce que les élèves puissent prendre en considération les distances, les temps et même les vitesses de manière quantitative, mais pas les accélérations.

5. Résultats

Tel que précisé, nous analysons les verbalisations des élèves lors du travail sur les deux premières tâches qui s'est déroulé sur une séance de 75 minutes. Nous avons choisi d'observer les signes personnels des élèves à travers le langage puisque, d'une part, le langage est reconnu comme jouant un rôle crucial dans les passages d'une représentation à une autre, notamment lors du processus d'interprétation graphique (Janvier, 1987) et, d'autre part, parce que l'expression langagière et celle du corps sont intimement liées dans ce type d'activité (Borghi et Cimatti, 2010). De plus, la modalité de travail en équipe et la nature de la tâche (composer un texte) ont fait en sorte que les élèves se sont majoritairement exprimés dans le langage courant. Les signes personnels ont donc émergé dans les quelques interventions verbales en grand groupe (tâche I) et surtout dans les discussions en sous-groupes (tâche II). Il est à noter que les signes produits ont essentiellement émergé lors de l'utilisation du CBR, bien que les tâches incluent d'autres artefacts. L'orchestration que nous avons proposée donne en effet un rôle central au CBR tant sur le plan sémiotique qu'instrumental. Les autres artefacts sont utilisés comme des outils, soit purement techniques (cahier pour capter le signal) soit de soutien du travail de quantification, mais leur rôle n'est pas de se constituer en instruments de travail mathématique, au sens de Trouche (2005).

5.1 Description et analyse des signes personnels : tâche I

La réalisation de la tâche I a permis, comme prévu, la familiarisation des élèves avec le fonctionnement de l'outil CBR et avec la situation d'étude de la variation de la distance en fonction du temps. Après quelques essais par trois élèves volontaires, le déplacement produit un graphique proche de celui recherché (voir figure 9).

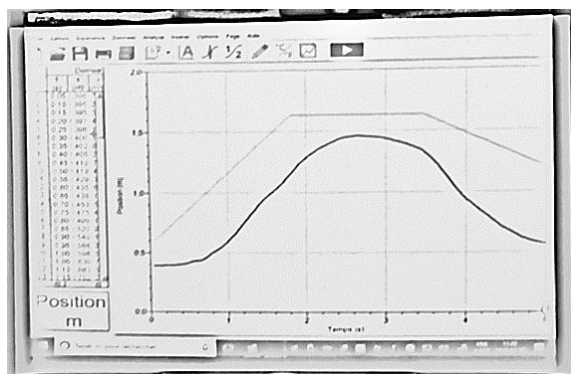


Figure 8. Meilleur résultat obtenu après six essais avec le CBR

S'ensuit un court échange en grand groupe initié par l'enseignante qui demande comment le troisième élève (E3) a procédé pour obtenir le graphique de la figure 9.

E1 : Pour monter, il a reculé et pour descendre il a avancé.

Enseignante (s'adresse à E3) : Est-ce que tu peux expliquer ce que t'as fait?

E3 : Pour monter, j'ai reculé, là je suis resté un peu, puis après je suis descendu.

Enseignante : C'est quoi ce peu?

E2 : La ligne droite c'est quand tu restes.

Enseignante (s'adresse à E3) : En fait pourquoi t'as reculé?

E3 : Je veux être plus loin, ensuite je ne bouge pas, et là j'ai avancé, ça se rapproche.

Dans cet échange, les verbalisations des élèves témoignent d'une analyse globale du tracé (cf. Leinhardt et al., 1990). Les trois phases du graphique semblent bien être distinguées à partir de la perception globale du tracé constitué de trois segments de droite, chaque segment étant associé à une action à poser.

Les signes qui émergent sont ceux attendus puisque les termes utilisés sont « avancer », « reculer » et « rester ». Les significations accordées à ces signes sont explicitées par les élèves qui établissent la correspondance entre les éléments signifiants du graphique et les actions posées. La « ligne droite » correspond au trait horizontal, « monter » décrit le trait ascendant et « descendre » décrit le trait descendant. Cette association entre les signes graphiques et kinesthésiques est rapidement établie grâce à la rétroaction instantanée que fournit le CBR. La prise en charge du traçage du graphique par l'outil permet la réalisation de plusieurs essais en peu de temps et favorise, comme nous l'avions anticipé, la coordination des gestes et du traçage. Néanmoins, les caractéristiques de l'outil influencent l'association de signes puisque pour être bien captée par le détecteur, la personne doit tenir un objet dont la surface est lisse (un livre sur la photo) et placer l'objet face au capteur. L'action de reculer est donc associée à une augmentation de la distance entre la personne et le capteur, alors que l'action d'avancer est associée à une diminution de cette distance. Cette association plutôt contre-intuitive a posé des difficultés lors des premiers essais, mais les élèves se sont rapidement ajustés. Ainsi, l'outil CBR joue son rôle de médiateur sémiotique en favorisant l'émergence de signes personnels permettant l'articulation de la situation et du graphique.

La distinction entre les signes graphiques et les signes kinesthésiques semble toutefois fragile puisque dans l'intervention de l'élève 3 (soulignée dans l'extrait), le trait descendant et l'action d'avancer semblent combinés dans la phrase « je suis descendu ». Il y a donc amalgame entre l'action d'avancer et le tracé descendant. De plus, l'utilisation du signe « un peu » dans « là je suis resté un peu » informe de la perception d'un facteur temporel influençant la longueur du trait. La quantification serait alors possible puisque le graphique est gradué et que les élèves ont à leur disposition un ruban collé au sol et un chronomètre, mais les

élèves ne semblent pas en ressentir le besoin. La lecture du graphique reste donc qualitative, ce qui confirme le regard global porté sur le tracé.

Dans cette première tâche, la production de signes est enclenchée sans que le caractère social de l'émergence de ces signes ne soit vraiment pris en compte. De plus, le graphique proposé comporte uniquement des segments de droite. Cette situation n'incite pas les élèves à décrire davantage la manière d'avancer ou de reculer, la perception globale suffit. Précisons que l'intention dans cette première tâche était que les élèves explorent le matériel en grand groupe. La tâche suivante vise à susciter l'émergence de signes personnels plus précis et plus nombreux, notamment en ce qui concerne la distinction entre le tracé droit et le tracé courbé. Cette distinction nécessite de prendre en compte la vitesse, au moins de manière qualitative. Celle-ci n'a pas émergé de la tâche I.

5.2 Signes personnels : tâche II

Rappelons que, dans cette tâche, les élèves travaillent en équipe de 3-4 et que chacune d'elles a à sa disposition un CBR, un chronomètre, un ruban gradué collé au sol et un livre (surface lisse pour le capteur), matériel qui est également en avant de la classe (pour la tâche I). Un graphique est remis à chaque équipe, la consigne est donnée en deux parties : 1) « Vous devez tenter de reproduire ce graphique en effectuant vous-même le déplacement face au capteur placé sur le bureau » et 2) « En équipe, vous devez écrire un texte (sur la feuille lignée fournie) qui explique à quelqu'un qui n'a pas le graphique sous les yeux comment se déplacer face au capteur pour reproduire exactement ce graphique ».

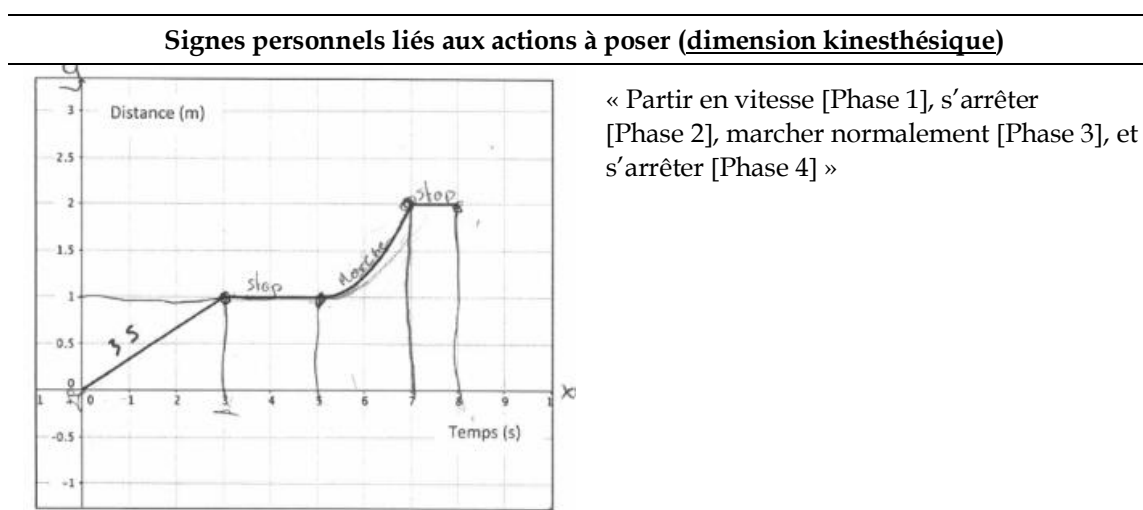
En réponse à la première consigne, les élèves effectuent beaucoup d'essais, les premiers étant effectués spontanément. Par la suite, certains échanges se produisent dans le discours, les élèves cherchant à obtenir un graphique plus près de celui visé. Ces échanges s'intensifient et s'enrichissent dans la deuxième partie de la tâche. La nécessité de produire un texte incite les élèves à raffiner leur description du déplacement.

Nous présentons dans ce qui suit, l'analyse de ce qui a été produit par deux équipes ayant reçu le même graphique (voir figure 8 à la section 4.). Pour l'équipe 1, nous décrivons les signes qui ont émergé lors des discussions en équipe ainsi que dans la description finale écrite par l'équipe. Pour l'équipe 5, nous nous attardons aux nouveaux signes issus de la description finale. Nous avons choisi ces études de cas puisqu'elles sont représentatives de ce qui a été observé globalement pour l'ensemble des équipes.

5.2.1 Analyse de ce qui a été produit par l'équipe 1

Dans la première partie de la tâche, les élèves effectuent des essais et décrivent le déplacement selon les phases repérées sur le graphique. La succession des actions montre les quatre phases (voir tableau 4). Comme dans la tâche I, le tracé horizontal est associé à « stop » et « s'arrêter ». Le regard est toujours global puisqu'aucune indication n'est donnée sur la durée de ces arrêts. La présence de deux tracés ascendants, l'un droit, l'autre courbé, force les élèves à faire évoluer les signes établis à la tâche I. Le tracé droit est alors associé à « partir en vitesse » et le tracé courbé à « marcher normalement ». La notion de vitesse est mise à profit, comme on pouvait s'y attendre, mais sans qu'une signification claire ne lui soit accordée. Pour nous, la marche normale évoque un pas régulier alors que partir en vitesse réfère à une accélération précoce, ce qui ne colle pas aux signes graphiques. Toutefois les élèves semblent suffisamment satisfaits puisqu'ils passent à la deuxième partie de la tâche.

Tableau 4. Signes personnels de l'équipe 1 pour la tâche II



La deuxième partie de la tâche se passe en deux temps.

Dans un premier temps, la description du déplacement est complétée par la quantification du temps, principalement à travers l'ajout de durées. Les élèves cherchent à tirer davantage d'informations en amorçant une analyse locale et spécifique du graphique. Ils identifient graphiquement les points au début et à la fin de chaque phase. Avec des traits verticaux, ils déterminent les temps associés à ces points (voir graphique dans le tableau 4). Ces temps sont utilisés pour déterminer les durées de chaque action : « Tu t'arrêtes, genre pendant 1, 2, 3 secondes [Phase 2], [...] Après tu remontes en ralentissant 1, 2,

3 secondes [phase 3] ». Même si les signes graphiques permettant l'identification d'intervalles sont présents, les élèves ne les utilisent pas comme tels. Ils reconstruisent les durées en partant du premier temps et en comptant chaque seconde suivante. La durée n'est pas le résultat de la différence entre les bornes de l'intervalle, mais plutôt la transposition de l'expérience du temps qui s'écoule durant le déplacement.

De plus, la durée de la première action est à la fois exprimée comme signe verbal et écrit sur le graphique (3 s pour 3 secondes). La notation du « 3 s » le long du tracé constitue une certaine incursion de la situation dans le graphique puisqu'elle indique que le déroulement de ce tracé prendra 3 secondes. Cette interprétation nous paraît être une conséquence directe de la simultanéité du traçage avec le déplacement, les deux actions étant indissociables dans l'expérience effectuée. Le signe verbal issu de la dimension kinesthésique est donc intégré au graphique sans être converti. Cette conversion aurait effectivement pu être faite par identification d'un intervalle du domaine de longueur 3 secondes sur l'axe des abscisses. Par ailleurs, la quantification du temps est utilisée une seule fois dans la discussion pour déterminer ce qui se passe à un instant précis : « Tu dois t'arrêter à 8 secondes ». Ce signe « arrêter » indique ici que l'expérience est terminée, que le graphique s'arrête alors que précédemment, il avait indiqué de ne plus bouger. La signification du signe « arrêter » est double : le graphique s'arrête, la personne s'arrête. Or, ces significations ne se correspondent pas dans la situation. Encore une fois, le registre graphique et la dimension kinesthésique sont amalgamés dans le langage. La notion d'accélération apparaît ainsi nécessaire pour décrire plus précisément l'allure de la courbe.

L'attention portée sur le temps, la grandeur indépendante, amène ainsi les élèves à donner plus d'informations sur les durées des déplacements, mais les distances associées à chaque temps repéré ne sont pas considérées. Cette difficulté à prendre en compte deux grandeurs simultanément, ici temps et distance, n'est pas nouvelle (voir Passaro, 2015). Les ordonnées des points identifiés graphiquement ne sont pas utilisées d'emblée. C'est seulement ensuite que les distances associées aux bornes des intervalles de temps sont utilisées pour placer des repères sur le ruban à mesurer collé au sol (voir figure 10).



Figure 9. Marquage sur le ruban à mesurer

Dans un deuxième temps, alors que les points caractéristiques du graphique et les positions à certains instants clés sont repérés, les élèves reprennent leurs essais de déplacement. La distinction entre le déplacement associé à la première phase et celui à la troisième phase leur pose un problème. Ils constatent que les deux tracés ascendants sont différents, l'un est droit, l'autre courbé. Ils comprennent que le déplacement sera différent, mais ne savent pas comment moduler leurs actions. C'est alors que s'enclenche une série de tentatives pour caractériser le déplacement.

E1 : Donne les consignes et E2 fait les déplacements.

E2 : Recule et E1 compte les pas 1, 2, 3. E2 s'arrête et il met un trait à la position 80.

E2 : « Puis là j'arrête ».

E1 : Oui tu t'arrêtes 2 secondes, tu t'arrêtes sur le petit rectangle. Après, tu recules, mais douuuuacement...

E2 : Coupe la parole et dit « pendant 3 secondes ».

E1 : Oui après tu t'arrêtes.

[...]

E1 : Pour ma courbe, tu ne marches pas au même rythme, tu vas de plus lent à plus vite.

[...]

E1 : Tu fais une course, euh, tu fais une droite « courbante », tu cours droit, tu cours en ligne droite. Après, tu t'arrêtes, tu fais un stop.

E2 : Après?

E1 : Tu commences à faire une marche lente au rapide. Tu marches lentement et tu montes rapidement, et tu marches rapidement. Tu commences lentement, tu marches... Tu fais une marche moyenne rapide et à la fin tu t'arrêtes.

Émergence de signes personnels chez des élèves de 3^e secondaire...

Dans cet échange, on voit que l'élève E2 doit faire le déplacement et que E1 est responsable de lui dire comment faire. Pour le tracé droit (phase 1), le signe utilisé est « Tu cours droit, tu cours en ligne droite ». La course réfère à une vitesse relativement grande, signification reprise de la première partie du travail (« partir en vitesse »). À cela s'ajoutent les signes « droit » et « ligne droite » qui eux décrivent le tracé graphique. La juxtaposition de signes issus de la dimension kinesthésique et de signes issus du registre graphique est flagrante. Pour le tracé courbe, l'élève E1 se reprend à plusieurs fois pour décrire le déplacement. Non pas parce qu'un autre élève le confronte, mais parce qu'il ne semble pas satisfait de ses propres explications. Différentes formulations apparaissent (soulignées dans l'extrait) :

- Tu recules, mais douuuuacement...
- Tu ne marches pas au même rythme, tu vas de plus lent à plus vite.
- Tu fais une course, euh, tu fais une droite « courbante ».
- Après, tu commences à faire une marche lente au rapide.
- Tu marches lentement et tu montes rapidement, et tu marches rapidement.
- Tu commences lentement, tu marches... tu fais une marche moyenne, rapide.

Cette multitude de signes témoigne d'une volonté marquée de mieux décrire le déplacement, notamment en intégrant la notion de vitesse (rythme, lent, vite, rapide). Pour la première tentative, l'élève module sa voix en prolongeant le « ou » de « douuuuacement ». Ce jeu sur la prosodie peut être considéré comme un signe personnel phonétique qui permet d'exprimer la variation de la vitesse perçue physiquement (dans le corps). La deuxième tentative est celle qui correspond à ce qui était attendu et à ce qui se rapproche le plus des signes mathématiques visés. En effet, l'élève indique que le rythme n'est pas le même et qu'on commence lentement pour aller ensuite plus vite, ce qui décrit une accélération. Cette idée est reprise plusieurs fois avec de nouvelles formulations comme « tu commences à faire une marche lente au rapide ». Ces formulations sont régulièrement entrecoupées de retours à une incursion de signes graphiques dans ceux de la situation : « tu fais une droite "courbante" », « tu montes rapidement ». Ainsi, le changement de vitesse est perçu dans la dimension kinesthésique, mais l'interprétation des signes graphiques associés est en construction.

Dans la description finale écrite produite par l'équipe 1, les élèves prévoient trois plans (voir figure 11).

Équipe 1

Il faut monter 3 secondes en vitesse. Ensuite on s'arrête pendant 2 secondes après on fait une marche normal pendant 3 secondes et ensuite on s'arrête.

plan B

on commence au point (0,0) en montant on s'arrête a (3,1) jusqu'a (5,1) on fait une normale au point (7,2) et on s'arrête au point (8,2)

Plan C

Tu cours en ligne droite constamment après tu t'arrête et après tu commence lentement et une marche moyennement rapide. La fin tu t'arrête.

Figure 10. Description finale de l'équipe 1 (tâche II)

On peut remarquer que chacun des plans axe sur différents éléments. Le premier plan, ancré dans la dimension kinesthésique, s'attarde à la durée de chacune des phases alors que le deuxième identifie les points caractéristiques du graphique. Certains éléments de la situation font tout de même une incursion dans cette description graphique puisque les élèves disent par exemple « on fait une normale au point (7,2) ». Le troisième plan présente quant à lui une reformulation du premier plan. Un nouveau signe y apparaît pour indiquer le maintien d'une vitesse constante : « courir en ligne droite constamment ». Ainsi, la production de l'écrit vient asseoir et faire évoluer les signes qui ont émergé précédemment dans la discussion. Toutefois, la présence du deuxième plan montre la difficulté pour les élèves à interpréter tous les signes graphiques dans le contexte de la situation.

5.2.2 Analyse de la description finale de l'équipe 5

Dans l'ensemble, la description finale de l'équipe 5 ressemble à celle de l'équipe 1 en ce qui concerne la séquentialité des actions (voir figure 12). Les élèves se concentrent sur les différentes phases du graphique et identifient facilement les durées de chaque action. Un signe nouveau apparaît toutefois chez cette équipe qui cherche à caractériser le déplacement sur les phases 1 et 3. Comme la description de la caractérisation de la vitesse ne va pas de soi, une observation plus fine de la variation devient nécessaire. Les élèves tentent de relier les deux grandeurs en jeu en indiquant de « reculer de 1 mètre en 3 secondes ». Cette

formulation, qui se rapproche des signes mathématiques associés à la vitesse moyenne (taux de variation), ne revêt toutefois pas cette signification pour les élèves. En effet, ils l'utilisent autant pour la phase 1 (le segment de droite ascendant) que pour la phase 3 (la courbe convexe). Ils ne semblent donc pas se préoccuper de ce qui se passe entre les points.

Description 5A

- Commencer par ^{zéro} 0.
 Première étape reculer de 1 mètres ^{trois} en 3 secondes.
 Deuxième étape rester sur place pendant 3 ^{trois} secondes.
 Ensuite, reculer avec une vitesse de 3 ^{trois} secondes pour 1 mètres
 et pour terminer rester sur place pour la durée d'une seconde.

- Un, Commencer par zéro
 - Deux, reculer de 1 mètres rapidement en 3 secondes.
 - Trois, rester sur place pendant trois secondes
 - Quatre, reculer avec une vitesse de trois seconde pour 1 mètres
 - Pour finir rester sur place pour une durée d'une seconde.

Figure 11. Description finale de l'équipe 5 (tâche II)

L'apparition de ce signe est importante pour l'orchestration du passage aux signes mathématiques puisque la mise en relation d'un accroissement de temps et d'un accroissement de distance permet de définir le taux de variation.

6. Synthèse et discussion

L'analyse des signes nous a amenées à dégager trois résultats qui permettent de mieux comprendre comment s'opère le processus d'articulation du graphique et de la situation par les élèves dans le contexte de l'utilisation de l'outil CBR. Ces résultats permettent de mettre de l'avant les potentialités de ce type d'activité à faire émerger des signes personnels ainsi que les enjeux du passage aux signes mathématiques qui devra être orchestré par l'enseignante subséquemment.

6.1 Le passage du global au local

De manière générale, les élèves débutent l'interprétation graphique par une observation globale du tracé (cf. Leinhardt et al., 1990). Cette observation suffit à

la mise en branle de l'expérimentation avec l'outil CBR 2TM. La facilité d'utilisation de l'outil favorise la réalisation de plusieurs essais qui sont faits de manière intuitive pour tenter de reproduire l'allure du graphique. Ce n'est seulement qu'après ces essais qu'une première discussion s'enclenche. Les premiers signes personnels qui émergent dans l'action témoignent de l'attention portée sur les changements d'allure du tracé associés à des changements dans la manière de se déplacer. Le tracé horizontal est facilement associé à l'action de s'arrêter et de ne pas bouger. Les signes utilisés pour le trait ascendant droit et celui courbé montrent que les élèves perçoivent qu'il y a une différence. Cette différence ne les amène toutefois à approfondir leur analyse que lorsque la tâche le requiert. C'est l'intention de communication imposée par la tâche qui incite le raffinement de l'analyse du graphique. Ce raffinement se concrétise par l'adoption d'un nouveau regard ponctuel et spécifique (cf. Leinhardt et al., 1990) qui mène dans un premier temps à l'identification de points sur le graphique et par la considération de durées dans le déroulement du déplacement puis de moments clés de la situation (fin de l'expérience, par exemple). Dans un deuxième temps, les élèves tentent de caractériser le déplacement qui permet d'obtenir un tracé courbé.

Les signes personnels des élèves qui émergent lors de ce passage à un regard local sur le graphique montrent alors que l'ancrage dans la dimension kinesthésique est fort. Cet ancrage est un avantage puisqu'il stimule l'engagement des élèves et la production de signes variés. Mais il est aussi un inconvénient puisqu'il permet l'évitement de l'analyse de certains signes graphiques et qu'il favorise l'incursion dans le graphique de signes référant à la dimension kinesthésique.

6.2 L'incursion du mode source dans le mode cible

Dans les deux tâches, lorsque les élèves décrivent les actions à poser pour obtenir un certain graphique, leurs formulations démontrent une incursion des signes associés au graphique. Lorsque la distance augmente ils ont tendance à dire « tu montes, tu remontes ». Cette interprétation graphique est liée à l'incursion du mode source (le graphique ici) dans le mode cible (la situation) décrite à la section 1.1. Nous avons noté que, dans les travaux de Janvier (1983), l'incursion mise en évidence était la même que celle lors du passage de la situation représentée schématiquement (une piste de course) à un graphique (représentant la vitesse en fonction du temps d'une voiture sur la piste de course). Ici, c'est l'incursion inverse, du graphique dans la situation, qui apparaît le plus fréquemment. En voyant le tracé du graphique qui monte, les élèves pensent à l'action de monter. Certains élèves ont d'ailleurs essayé de monter le livre qu'ils tenaient face au capteur sans se déplacer pour voir si on obtiendrait le tracé cherché. Des éléments signifiants du registre graphique sont transposés directement dans la dimension kinesthésique sans qu'il n'y ait eu de conversion et donc sans avoir d'abord été

interprétés dans le contexte du phénomène étudié. L'incursion inverse apparaît une seule fois à travers des traces laissées sur le graphique. L'ancrage dans la dimension kinesthésique provoque donc une insertion de signes dans le graphique qui n'appartiennent pas au registre sémiotique graphique.

Depuis longtemps ces confusions sont considérées comme problématiques (Janvier, 1983; Nemirovsky et al., 1998). Toutefois, nos analyses montrent que l'amalgame des modes source et cible donne naissance à une production de signes foisonnante face à la difficulté que pose la distinction des déplacements associés aux traits droit et courbé. On assiste ainsi à une création lexicale traduisant une dynamique dans l'évolution des significations et de la construction de signes qui permettent de décrire le déplacement. Comme les mots manquent, les élèves doivent faire preuve de créativité. Des signes personnels émergent comme le jeu sur la prosodie ou la création d'adverbes exprimant la courbure. C'est ainsi qu'on voit apparaître cette magnifique « droite courbante ». Ces signes pivots, intermédiaires entre l'expérience et le tracé sur le graphique, permettent aux élèves de rendre compte de leurs observations. En cherchant à formuler et reformuler, ils raffinent leur compréhension du phénomène et de sa représentation graphique. Cette étape constitue donc un tremplin vers les significations mathématiques.

6.3 Potentialités des tâches

Comme nous l'avons mentionné plus tôt, plusieurs caractéristiques de la situation ont particulièrement stimulé l'émergence de signes personnels. D'abord, le contexte de communication au sein d'une même équipe et la visée de production d'un texte destiné à d'autres élèves ainsi que la présence de tracés ascendants droits et courbés dans le même graphique ont suscité le passage d'un regard global sur le graphique à un regard plus local et spécifique. Ensuite, à ces éléments s'ajoutent les opportunités offertes par l'outil CBR. L'outil joue en effet son rôle de médiateur sémiotique en offrant une rétroaction immédiate favorisant la recherche de précision et l'émergence de nouveaux signes. L'ensemble de ces caractéristiques a engendré une multiplicité de signes personnels dont l'analyse a permis de réenvisager la confusion entre les modes source et cible non plus comme un obstacle mais plutôt comme une étape essentielle contribuant à la construction de signes pivots.

Par ailleurs, les signes produits montrent que les élèves ont une compréhension intuitive de la vitesse et de l'accélération qui leur permet de moduler leurs actions lors de l'expérimentation. Ces notions ne sont toutefois pas assez solides pour contribuer à l'appréhension des signes graphiques qui leur sont liés. La difficulté d'interprétation graphique s'explique donc ici par une compréhension trop superficielle des notions mathématiques et physiques en jeu. Nous pensons

néanmoins que la réalisation des tâches proposées a permis de faire évoluer cette compréhension. L'émergence de signes comme « reculer de 1 mètre en 3 secondes » qui met en relation un accroissement de temps (durée) et un accroissement de distance montre que les élèves sont mûrs pour passer aux signes mathématiques, notamment en faisant le lien entre taux de variation et vitesse. On peut noter que les artefacts comme le ruban collé au sol (pour la distance) et le chronomètre (pour le temps) ont rendu cette quantification possible, mais ils ont été peu utilisés par certaines équipes même si l'articulation de ces artefacts en lien avec les caractéristiques quantitatives, et leurs liens, est sollicitée dans plusieurs des tâches proposées. Comme nous l'avons mentionné au début de cette section, ces artefacts ont joué le rôle d'outils et non d'instruments (Trouche, 2005). Le fait que leur usage n'ait pas donné lieu à l'émergence de signes personnels liés aux concepts mathématiques visés était prévisible. D'ailleurs, nous aurions pu choisir de ne pas fournir ces outils et laisser aux élèves l'opportunité de créer leurs propres outils de repérage (ils auraient pu par exemple taper un rythme avec les mains pour mesurer le temps).

Conclusions et discussion

Les difficultés d'interprétation graphique rencontrées par les élèves du secondaire peuvent s'expliquer par des problèmes sémiotiques. Les conversions entre registres de représentation sémiotiques ne vont pas de soi (Duval, 1993, 1995) et les situations étudiées peuvent mettre en jeu différentes dimensions sémiotiques autres que les registres mathématiques conventionnels (Hitt et González-Martín, 2015). Dans notre étude, nous avons choisi d'explorer ce processus d'interprétation graphique dans le contexte de la modélisation d'une situation réelle impliquant un outil technologique, le CBR. Ce contexte, exploité dans des recherches antérieures (Arzarello et Robutti 2004; Carlson, 2002; Martínez et Mejía, 2015; Robutti, 2006; Tall, 2006), met à profit l'engagement physique des élèves et favorise l'articulation du registre graphique et de la dimension kinesthésique. L'originalité de notre travail repose sur le regard porté vers les signes personnels exprimés dans le langage courant dans ce contexte. L'apparition de tels signes avait été évoquée par Martínez et Mejía (2015) qui, dans un contexte semblable, avaient relevé le recours par les élèves à un vocabulaire non institutionnel pour décrire l'allure sinusoïdale du graphique. Notre travail va plus loin en proposant des analyses qui permettent de mieux comprendre comment ces signes émergent et évoluent, et quelles significations leur sont accordées par les élèves.

D'une part, nos résultats permettent d'envisager l'engagement corporel comme moteur de l'activité mathématique. Cet engagement a effectivement eu un impact

sur l'émergence et l'évolution des signes langagiers des élèves lors de notre expérimentation. Les productions et les interactions verbales des élèves montrent l'émergence de signes personnels riches liée à un engagement corporel très fort que l'on retrouve dans toutes les équipes. Les élèves s'engagent facilement dans la tâche et n'hésitent pas à puiser dans leur vocabulaire courant pour tenter de décrire les graphiques sur lesquels ils travaillent. Les créations linguistiques autour de la variation ou de la constance de la vitesse (prosodie et adverbes décrivant la courbure) sont des signes qui paraissent jouer le rôle de pivot vers la construction des significations mathématiques reliées à la covariation.

D'autre part, l'observation des signes et de leur évolution nous a permis de cerner ou réinterpréter certaines sources d'obstacles à l'interprétation graphique. Notamment, nous avons constaté que l'incursion du mode cible dans le mode source menant généralement à de mauvaises interprétations graphiques (Janvier, 1983) pouvait être envisagée comme propice à la production de signes pivots. Cette confusion apparaît alors comme un élément potentiellement transitoire ouvrant l'accès aux significations mathématiques. De plus, nos analyses ont permis de mettre de l'avant certaines caractéristiques de situations suscitant l'émergence de signes personnels, notamment la comparaison de tracés droits et courbés dans un même graphique.

Nous avons aussi confirmé que la difficulté à interpréter un graphique en regard d'un contexte donné est intimement liée à la compréhension des concepts mis en jeu dans ce contexte. Dans l'expérimentation menée, le phénomène étudié est particulièrement simple à appréhender. Toutefois, l'interprétation fine du déplacement d'une personne fait appel aux notions de vitesse et d'accélération, notions dont les élèves visés n'avaient qu'une connaissance intuitive liée aux expériences de la vie courante. La variation de la vitesse est une situation familière, mais l'interprétation graphique de cette variation semble constituer un obstacle, notamment parce qu'elle implique la perception concomitante des accroissements des deux grandeurs étudiées et que les élèves ont tendance à n'observer qu'une grandeur à la fois. Le travail de la covariation apparaît essentiel (Passaro, 2015). Cette perspective rejoint celle de Janvier (1987) qui avait déjà ciblé le travail de la fonction sous l'angle de la variation comme une approche favorisant l'interprétation graphique.

Afin de rendre compte de la finesse des analyses, nous nous sommes concentrées dans cet article sur l'analyse des signes de deux équipes d'élèves de 3^e secondaire d'élèves considérés comme en difficulté. Les signes qui émergent dépendant fortement des expériences et des connaissances préalables des élèves, il sera important pour nous de poursuivre l'analyse des groupes de 4^e secondaire et de comparer les résultats obtenus avec différents profils d'élèves. De plus, la loupe

portée sur l'activité des élèves durant un temps limité occulte le rôle important de l'enseignant au sein du processus de médiation sémiotique. L'orchestration sémiotique est plus particulièrement activée dans la phase de discussion collective, ce qui constitue le cœur de notre tâche IV brièvement décrite au paragraphe 3.3. L'objectif premier n'est alors plus d'assister les genèses instrumentales des élèves, mais de développer des significations partagées, reposant sur des formulations explicites, décontextualisées par rapport à l'utilisation de l'artefact, reconnaissables et acceptables par la communauté discursive de la classe. Bartolini Bussi (1998) parle ici d'« une polyphonie de voix articulées sur un objet mathématique » que l'enseignant doit accorder afin que chaque élève de la classe évolue de ses signes personnels vers les signes mathématiques attendus. Ainsi, l'analyse de l'orchestration sémiotique de l'enseignante lors de la tâche IV ne peut se faire qu'en regard des résultats obtenus aux tâches II et III. Cette analyse sera présentée dans un prochain article.

Références

- Anastopoulou, S., Sharples, M. et Baber, C. (2011). An evaluation of multimodal interactions with technology while learning science concepts. *British Journal of Educational Technology*, 42(2), 266-290. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8535.2009.01017.x>
- Anderson, J. L. et Wall, S. D. (2016). Kinecting physics: Conceptualization of motion through visualization and embodiment. *Journal of Science Education and Technology*, 25(2), 161-173. <https://doi.org/10.1007/s10956-015-9582-4>
- Arzarello, F. et Robutti, O. (2004). Approaching functions through motion experiments. *Educational Studies in Mathematics*, 57(3), 305-308.
- Arzarello, F., Ferrara, F. et Robutti, O. (2012). Mathematical modelling with technology: The role of dynamic representations. *Teaching Mathematics and its Applications: International Journal of the IMA*, 31(1), 20-30. <https://doi.org/10.1093/teamat/hrr027>
- Bardini, C. et Sabena, C. (2006). Se donner à coeur (corps) joie aux mathématiques. Dans M. Tremblay et S. Lafortune (dir.), *Actes de la 12e journée Sciences et Savoirs* (p.83-94). Université Laurentienne.
- Bartolini Bussi, M. G. (1998). Verbal interaction in mathematics classroom: A Vygotskian analysis. Dans H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi et A. Sierpiska (dir.), *Language and communication in mathematics classroom* (p. 65-84). NCTM.

Bartolini Bussi, M. G., et Mariotti, M. A. (2008). Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom: Artefacts and Signs after a Vygotskian Perspective. Dans L. D. English, M. Bartolini Bussi, G. A. Jones, R. A. Lesh, B. Sriraman et D. Tirosh (dir.), *Handbook of International research in Mathematics education* (2^e éd., p. 746-783). Routledge Taylor & Francis Group.

Beichner, R. J. (1994). Testing student interpretation of kinematics graphs. *American journal of physics*, 62(8), 750-762. <https://doi.org/10.1119/1.17449>

Bell, A. et Janvier, C. (1981). The interpretation of graphs representing situations. *For the learning of mathematics*, 2(1), 34-42.

Borghini, A. M. et Cimatti, F. (2010). Embodied cognition and beyond: Acting and sensing the body. *Neuropsychologia*, 48(3), 763-773. <https://doi.org/10.1016/j.neuropsychologia.2009.10.029>

Brasell, H. M. et Rowe, M. B. (1993). Graphing skills among high school physics students. *School Science and Mathematics*, 93(2), 62-70. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1993.tb12196.x>

Carlson, M. (2002). Physical enactment: A powerful representational tool for understanding the nature of covarying relationships. Dans F. Hitt (dir.) *Representations and mathematics visualization. Proceedings of the 24th annual meeting of PME-NA* (p.63-77). ERIC.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. et Hsu, E. (2002). Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events: A Framework and a Study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352-378. <https://doi.org/10.2307/4149958>

Carlson, M., Larsen, S. et Lesh, R. (2003). Integrating a models and modeling perspective with existing research and practice. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching, *Beyond constructivism*, 465-478. <https://doi.org/10.4324/9781410607713-35>

Choquette, G.-O. (2009). *Une approche conceptuelle pour l'interprétation des graphiques en cinématique au secondaire* [Mémoire de maîtrise, Université de Montréal]. Papyrus. <https://papyrus.bib.umontreal.ca/xmlui/handle/1866/3451>

Cummins, J. (1996). *Negotiating identities: Education for empowerment in a diverse society*. California Association for Bilingual Education.

Duijzer, C., den Heuvel-Panhuizen, V., Veldhuis, M., Doorman, M. et Leseman, P. (2019). Embodied learning environments for graphing motion: A systematic literature review. *Educational Psychology Review*, 31(3), 597-629. <https://doi.org/10.1007/s10648-019-09471-7>

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5(1), 37-65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Ellis, A., Tasova, H. I. et Singleton, B. (2018). How quantitative reasoning can support graph understanding in algebra. Dans T.E. Hodges, G. J. Roy et A. M. Tyminski (dir.), *Proceedings of the 40th annual meeting of PME-NA* (p. 147-154). University of South Carolina et Clemson University.

Gagatsis, A., Elia, I. et Mousoulides, N. (2006). Are registers of representations and problem-solving processes on functions compartmentalized in students' thinking? *Relime, Número Especial*, 197-224.

Glazer, N. (2011). Challenges with graph interpretation: A review of the literature. *Studies in science education*, 47(2), 183-210.
<https://doi.org/10.1080/03057267.2011.605307>

Hankeln, C. et Hersant, M. (2020). Processus de modélisation et processus de problématisation en mathématiques à la fin du lycée. *Éducation et didactique*, 14(3), 39-67. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.7776>

Hitt, F. (2004). Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques et leur rôle dans une démarche heuristique. *Revue des sciences de l'éducation*, 30(2), 329-354. <https://doi.org/10.7202/012672ar>

Hitt, F. et González-Martín, A. S. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational studies in mathematics*, 88(2), 201-219.

Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations: Studies and teaching experiments*. [thèse de doctorat inédite]. Nottingham University.

Janvier, C. (1981). Use of situations in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 12(1), 113-122.

Janvier, C. (1983). Représentation et compréhension (un exemplaire : Le concept de fonction). *Bulletin de l'AMQ*, 23(5), 22-28.

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. Dans C. Janvier (dir.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (p. 27-32). Lawrence Erlbaum Associates.

Janvier, C. (1993). Les graphiques cartésiens : Des traductions aux chroniques. Dans J. Baillé et S. Maury (dir.), *Les représentations graphiques dans l'enseignement et la formation*. C.E.R.S.E. (p.17-37). Université de Caen.

Janvier, C., Girardon, C. et Morand, J.-C. (1993). Mathematical symbols and representations. Dans P. S. Wilson (dir.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (p. 79-102). Macmillan.

Johnson-Glenberg, M. C., Birchfield, D. A., Tolentino, L. et Koziupa, T. (2014). Collaborative embodied learning in mixed reality motion-capture environments: Two science studies. *Journal of educational psychology*, 106(1), 86-104. <https://psycnet.apa.org/doi/10.1037/a0034008>

Knuth, E. J. (2000). Student understanding of the Cartesian connection: An exploratory study. *Journal for research in mathematics education*, 31(4), 500-514. <https://doi.org/10.2307/749655>

Kohler, A. et Chabloz, B. (2020). La coordination entre registres sémiotiques : Un enjeu important pour l'apprentissage des sciences. *Swiss Journal of Educational Research*, 42(3), 597-609. <https://doi.org/10.25656/01:21544>

Lazli, S. (2012). *Enseignement de la fonction sinus au deuxième cycle du secondaire par le biais de la modélisation et d'outils technologiques*. [mémoire de maîtrise, Université du Québec Montréal]. Archipel. <https://archipel.uqam.ca/4868>

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. et Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of educational research*, 60(1), 1-64. <https://doi.org/10.3102/00346543060001001>

Mariotti, M. A. et Maffia, A. (2018). Dall'utilizzo degli artefatti ai significati matematici: Il ruolo dell'insegnante nel processo di mediazione semiotica. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 4, 50-64. <https://doi.org/10.33683/ddm.18.4.3>

Mariotti, M. A. et Maracci, M. (2010). Les artefacts comme outils de médiation sémiotique : Quel cadre pour les ressources de l'enseignant? Dans G. Gueudet et L. Trouche (dir.), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (p.91-107). Presses Universitaires de Rennes et INRP.

Martínez, M. et Mejía, H. (2015). Significados asociados a las funciones sinusoidales por estudiantes del nivel medio superior. Dans E. Sánchez, C. Acuña, M. Rigo, J. Valdez et O. Torres (dir.), *Memorias del III Coloquio de Doctorado del Departamento de Matemática Educativa* (p. 1-10). Cinvestav.

Monk, S. (1992). Students' understanding of a function given by a physical model. Dans E. Dubinsky et G. Harel (dir.), *The Concept of Function, Aspects of Epistemology and Pedagogy*, vol. 25 (p. 175-194). Mathematical Association of America.

Navarro, E. (2012). La experimentación científica en Secundaria. Argumentos para llevarla a cabo. *Revista digital de educación y formación del profesorado*, 9, 262-274.

Nemirovsky, R., Tierney, C. et Wright, T. (1998). Body motion and graphing. *Cognition and instruction*, 16(2), 119-172. http://doi.org/10.1207/s1532690xc1602_1

Passaro, V. (2007). *Étude expérimentale sur le développement du concept de covariation entre deux grandeurs révélé par une analyse des représentations spontanées d'élèves du premier cycle du secondaire* [mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal]. Archipel. <https://archipel.uqam.ca/7346/1/M9902.pdf>.

Passaro, V. (2009). Obstacles à l'acquisition du concept de covariation et à l'introduction de la représentation graphique en deuxième secondaire. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 14, 61-77.

Passaro, V. (2015). *Analyse du raisonnement covariationnel favorisant le passage de la fonction à la dérivée et des situations qui en sollicitent le déploiement chez des élèves de 15 à 18 ans* [thèse de doctorat, Université de Montréal]. Papyrus. <https://papyrus.bib.umontreal.ca/xmlui/handle/1866/13509>

Passaro, V. (2020). Analyse du déploiement d'un raisonnement covariationnel en situation chez des élèves de 15 à 18 ans. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 20(3), 462-484. <http://doi.org/10.1007/s42330-020-00101-x>

Passaro, V., Rodriguez, R., Saboya, M. et Venant, F. (2019). Utilización de sensores para el estudio de situaciones funcionales a nivel secundario y universitario. Dans E. Nunoz, S. Quiroz, M. Saboya et J. L. Soto (dir.), *Investigaciones teórico-prácticas sobre la modelación matemática en un medio tecnológico* (p.137-160). Colección Matemática Educativa y Tecnología.

Passaro, V., Saboya, M. et Venant, F. (2020). Apport de capteurs de distance pour le développement du raisonnement covariationnel chez des élèves du deuxième cycle du secondaire. Dans C. Corriveau, V. Martin, M. Thibault et A. Savard (dir.), *À quoi ressemble aujourd'hui la recherche en didactique des mathématiques au Québec ? Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec* (p. 196-208). Université Laval.

Radford, L. (2009). "No ! He starts walking backwards!" : Interpreting motion graphs and the question of space, place and distance. *ZDM*, 41(4), 467-480. <http://doi.org/10.1007/s11858-009-0173-9>

Robutti, O. (2006). Motion, technology, gestures in interpreting graphs. *International journal for technology in mathematics education*, 13(3), 117-125

Rodríguez, R. et Quiroz, S. (2016). El rol de la experimentación en la modelación matemática. *Educación Matemática*, 28(3), 91-144. <http://doi.org/10.24844/EM2803.04>

Stylianou, D., Smith, B. et Kaput, J. J. (2005). Math in motion: Using CBRs to enact functions. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 24(3), 299-324.

Tall, D. (2006). A Theory of Mathematical Growth through Embodiment, Symbolism and Proof. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques, Strasbourg, 11, 195-215.

Texas Instruments inc. (1997). *Calculator-Based Ranger™*. Principes d'utilisation du CBR™. <http://profmath.uqam.ca/~boileau/DidAlgebre/cbr-fre.pdf>

Trouche, L. (2005). Instrumental genesis, individual and social aspects. Dans D. Guin, K. Ruthven et L. Trouche (dir.), *The didactical challenge of symbolic calculators: Turning a computational device into a mathematical instrument* (p. 197-230). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-23435-7_9

Vygotsky, L. S. (1997). The collected works of LS Vygotsky. *The history of the development of higher mental functions* (vol. 4). Springer Science et Business Media.

Vygotsky, L. S. (1980). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.

Wainer, H. (1992). Understanding graphs and tables. *Educational researcher*, 21(1), 14-23. <https://doi.org/10.3102/0013189X021001014>



Proximités discursives entre le discours de l'enseignant et les activités des élèves pendant les cours : l'exemple de l'introduction de la définition formalisée du sens de variation des fonctions

Aline ROBERT

CY Cergy Paris Université, Université Paris Cité, Université Paris-Est Créteil, Université de Lille, Université de Rouen, LDAR, F-95000 Cergy-Pontoise, France

robertaline.robertaline@orange.fr

Fabrice VANDEBROUCK

Université Paris Cité, Université Paris-Est Créteil, CY Cergy Paris Université, Université de Lille, Université de Rouen, LDAR, F-75013 Paris, France

vandebro@u-paris.fr

Résumé : Dans cet article nous développons la notion de « proximités discursives » pour analyser le déroulement d'une séance de cours visant à introduire auprès des élèves de la classe de seconde du lycée en France (grade 10) la définition formalisée de croissance d'une fonction numérique. Nous dressons un bilan à la fois sur la difficulté des analyses didactiques des moments de cours et sur les difficultés spécifiques d'enseignement de la définition du sens de variation. Nous illustrons également la pertinence théorique de notre approche, ancrée en théorie de l'activité, et spécifiquement en appui sur la notion de zone de proche développement.

Mots-clés : proximités discursives, cours, activité, ZPD, sens de variation, fonctions

Students' activities during lessons: An example for introducing the definition of the direction of growth of a numerical function

Abstract: In this article we develop the notion of "discursive proximities" as a way to analyze the progression of a lesson aiming to introduce to students in the second year of

Revue [québécoise](#) de didactique des mathématiques, 2023, Numéro thématique 1 (Tome 2), p. 106-143. <https://doi.org/10.71403/kjg96173>

high school in France (grade 10) to the formal definition of growth of a numerical function. We report on both the difficulty of didactic analysis of the moments in the lesson and on the specific difficulties of teaching the definition of variation direction. We also illustrate the theoretical relevance of our approach, which is anchored in Activity Theory and more specifically the concept of Zone of Proximal Development.

Keywords: discursive proximities, lessons, activity, zone of proximal development, functions

Introduction

En didactique des mathématiques, plusieurs entrées théoriques sont proposées pour l'analyse des activités des élèves et des pratiques enseignantes dans la classe. Notre entrée est ancrée en théorie de l'activité. Nous cherchons à opérationnaliser des outils théoriques et méthodologiques proposée par la théorie de l'activité pour comprendre les pratiques et les activités dans le cadre de la classe ordinaire de mathématiques.

Dans cet article, nous développons la notion de « proximités discursives » pour analyser le déroulement d'une séance de cours visant à introduire auprès des élèves de la classe de seconde du lycée en France (grade 10) la définition formalisée de croissance d'une fonction numérique. Dans toute la suite le mot « cours » est utilisé dans le sens restrictif de « exposition des connaissances en classe ». Cette analyse donne à voir à la fois la démarche que nous adoptons pour étudier ces moments de classe particuliers et les difficultés spécifiques à introduire une telle notion, qui apporte essentiellement un nouveau formalisme, mettant en difficulté l'enseignant dans ses pratiques et les élèves dans leur compréhension.

Nous faisons le choix de préciser d'emblée dans la première partie notre positionnement théorique ainsi que notre méthodologie générale d'analyse des activités des élèves en cours, en relation avec le discours de l'enseignant, afin de donner à voir l'apport théorique de cet article : les proximités discursives, un détour pour apprécier les activités qui peuvent être développées par les élèves dans les moments d'exposition de connaissances. Dans la deuxième partie, nous nous focalisons sur le contenu mathématique et la question particulière en jeu, l'introduction en classe de la définition formalisée du sens de variation d'une fonction numérique. Nous développons dans cette partie ce que nous appelons le relief sur la notion à enseigner. En appui sur ces deux premières parties nous exposons la question problématisée dans la partie 3. La problématique croise à la fois la spécificité de l'enseignement de l'introduction d'une notion porteuse d'un formalisme difficile et celle de l'enseignement dans le cadre presque exclusif d'un cours, pendant lequel l'enseignant doit faire des apports explicites de connaissances nouvelles aux élèves. Nous développons ensuite en partie 4 l'analyse du déroulement de la séance de cours observée, intitulée « Surface

agricole », ce qui est le titre de la tâche introductive proposée aux élèves. Nous dressons un bilan à la fois sur les difficultés spécifiques d'enseignement de la définition formalisée du sens de variation et sur la difficulté des analyses didactiques des moments de cours, avant de conclure plus généralement sur la problématique abordée.

1. Notre positionnement théorique et la notion de « proximité discursive »

Dans cette partie, nous présentons notre positionnement théorique, quelques considérations méthodologiques ainsi que le cas étudié.

1.1 Rappels sur la théorie de l'activité et sur notre positionnement

Nous nous plaçons en théorie de l'activité (Leontiev, 1984) dans la lignée de ses développements au sein de l'école française de psychologie cognitive (J. Rogalski, 2008). Cette acception en didactique des mathématiques de la théorie de l'activité implique que nous prenons comme entrée pour étudier les relations enseignement apprentissage d'un contenu mathématique donné, ce qui se fait en vrai dans la classe de mathématique ordinaire, dans son contexte institutionnel relatif aux savoirs en jeu, mais aussi son contexte temporel (l'inscription de la séance dans un scénario global), voire culturel et social (type d'établissement).

La théorie de l'activité prend sa source dans les travaux de Vygotski (1934/1997), développés ensuite par Leontiev. Ce dernier poursuit les travaux de Vygotski sur les processus d'apprentissages individuels et il introduit la dimension collective dans ces processus, utilisant à cet effet un terme russe traduit ensuite par « activité » – au sens de collectif historico-socio-culturel, comme dans « l'activité de classe ». Cette dimension collective de l'activité embarque les différents acteurs, en particulier pour nous l'enseignant et les élèves, dans leurs interactions. Mais Leontiev poursuit aussi l'œuvre de Vygotski sur l'importance des médiations dans les processus d'apprentissages individuels des sujets en action, notamment la question des médiations et de la zone de proche développement (ZPD). Le terme « activité » a donc deux sens qu'il convient de distinguer : l'activité au sens « système d'activité », qui est développé ensuite plus profondément par Engeström et al. (1999) - et l'activité avec une orientation individuelle et cognitive qui est développée dans l'école française en psychologie cognitive puis en didactique professionnelle. La classe est ainsi un système d'activité composé du professeur, des élèves et d'un ensemble de médiations de l'activité interdépendante du professeur et des élèves dans la classe. L'approche cognitive permet d'articuler les apports de Piaget sur les processus développementaux aux apports précédents, fournissant ce que Simon et al. (2018) notent, « un

complément à la théorie socioculturelle » (p. 2). Une autre exploration des complémentarités entre Piaget et Vygotski peut être trouvée dans Cole et Wertsch (1996). C'est dans ces deux doubles orientations – collectif/individuel et socio culturelle/cognitive – que nous situons nos travaux. Les liens entre activité(s) des sujets et activité de classe (système) constituent cependant un chantier de recherche encore à investir.

1.2 Questions méthodologiques générales

Dans notre perspective théorique, les interactions dans la classe, et donc les déroulements de séances de mathématiques, sont aussi cruciaux que les choix des contenus en jeu, des scénarios et des tâches proposées aux élèves. Nos méthodologies d'analyses de scénarios, de tâches et de déroulements ont été largement présentées dans des écrits précédents (Vandebrouck, 2008, 2013, 2018).

Au centre de notre approche, nous plaçons les « activités mathématiques » des élèves (on dira juste « activités »), processus individuels qui embarquent des mises en fonctionnement de connaissances mathématiques, appréciés en tant que vecteurs des apprentissages mathématiques des élèves (J. Rogalski, 2008). Les activités pilotent et sont pilotées par des actions¹, souvent observables, et elles se caractérisent aussi par un motif et un but, aboutissant à une intériorisation mentale, inaccessible directement aux chercheur.e.s.

N'ayant accès qu'à des traces observables de ces activités, mais pas pour tous les élèves, nous distinguons et inférons les « activités attendues » et les « activités possibles » des élèves, issues respectivement des analyses de tâches et de celles des déroulements. Par activités possibles, nous incluons ce qui peut être pensé par les élèves, à partir de l'analyse des tâches en jeu et de ce qui est dit, écrit, fait (ou non) par les élèves et l'enseignant pendant les déroulements. L'analyse des tâches est rapportée au contexte, et notamment aux contenus travaillés. Les activités possibles sont, dans une certaine mesure, partagées, si ce n'est communes. C'est ce qui alimente notre recherche des proximités.

Nous identifions également, en relation avec les tâches à exécuter, des types d'activités correspondantes à des mises en fonctionnement différentes, complémentaires et que nous considérons comme fondamentales en mathématiques (Robert et Vandebrouck, 2014; Vandebrouck et Robert, 2017) : les activités cruciales de reconnaissance, d'organisation et d'applications de

¹ Leontiev distingue les actions des opérations qui les constituent, ce que nous n'avons pas retenu. C'est Galperine (1966) qui dégage l'orientation et le contrôle, en amont et en aval de l'exécution de l'action, ce que nous avons partiellement repris en introduisant le but précisant le motif.

connaissances²– reconnaissance des modalités d’application des connaissances à mettre en jeu, organisation des raisonnements et des traitements (étapes à concevoir, intermédiaires à introduire, interprétations à faire), réalisation des mises en fonctionnement identifiées dans les différents cadres ou registres impliqués. Les élèves peuvent développer plusieurs de ces activités pour réaliser une même tâche.

Nous dégageons aussi différents types d’aides de l’enseignant qui interviennent dans les activités des élèves, procédurales qui donnent des pistes et souvent réduisent la tâche, ou à visée constructives qui, au contraire, amènent les élèves un peu « plus loin » que ce qu’ils ont fait ou pensé. Nous repérons enfin les activités *a maxima*, développées d’emblée par des élèves et associées à la complexité des tâches prescrites, des activités développées *a minima*, sur des tâches redéfinies pour/par les élèves ou avec des aides procédurales proposées par l’enseignant pendant les déroulements (Vandebrouck, 2008).

Nos analyses se font à partir des énoncés d’exercices, voire de présentations de cours, et des transcriptions de vidéos tournées dans les classes, une caméra étant généralement placée au fond de la salle en l’absence de tout observateur. Elles sont référées à une analyse multidimensionnelle préalable des contenus en jeu : mathématique, épistémologique, curriculaire (à partir des programmes), didactique et cognitive, ce que nous appelons le relief sur l’enseignement de la notion en jeu.

Notre méthodologie ne nous donne donc pas directement accès aux « activités effectives » des élèves : leur partie « mentale » est bien sûr totalement inobservable, mais nous faisons des inférences à partir de ce qui est dit et fait. Nous n’avons pas davantage accès aux activités de chacun des élèves : le discours de l’enseignant, qui cherche souvent à homogénéiser l’état cognitif de la classe, peut cependant en donner quelques indices, particulièrement pour l’étude menée ici des moments d’exposition des connaissances.

1.3 La spécificité de l’étude des moments d’exposition des connaissances – le cas étudié

Dans cet article, nous analysons une séance de classe de seconde ordinaire pendant laquelle, après qu’un exercice d’introduction à la notion de variation des fonctions

² Dans d’autres publications, notamment Robert et Vandebrouck (2014) et Vandebrouck et Robert (2017), nous parlons de sous-activités de reconnaissance, d’organisation et de traitement, mais il s’agit bien de la même catégorisation des activités cruciales.

ait été travaillé par les élèves, l'enseignant expose le cours sur le sens de variations des fonctions numériques.

Nous illustrons comment nous complétons nos outils d'analyse pour étudier les moments d'exposition des connaissances, c'est-à-dire le déroulement du cours qui, dans notre cas, suit le travail sur une tâche d'introduction à la notion visée. Il y a en effet une difficulté spécifique à l'étude de ces moments que nous précisons plus loin. Ces moments sont à comprendre dans un sens assez large, qui dépasse notamment le sens d'institutionnalisation sur une connaissance nouvelle, au sens de la théorie des situations didactiques TSD (Brousseau, 1997), dans la mesure où le processus en jeu peut être moins complet que ce que recouvre le terme en TSD.

Dans les moments d'exposition de connaissances, qui suivent éventuellement des tâches d'introduction, les activités possibles des élèves sont très difficilement accessibles, car elles ont peu ou pas de traces à travers des actions observables (rendues en principe visibles sur nos vidéos). Il n'y a pas non plus de tâches mathématiques explicites à analyser, sauf exception. Les tâches des élèves sont ainsi en partie liées à l'écoute³ de l'enseignant en train de présenter un bilan ou même une notion de façon générale (ou un théorème, une propriété ou une méthode...), avec souvent des réponses à des questions ciblées, limitées, intégrées au fil de la présentation. On ne peut étudier que ce que l'enseignant et les élèves disent ou montrent ou écrivent. Nous cherchons alors la manière dont l'enseignant peut « agir » (indirectement) sur les activités des élèves liées à cette exposition de connaissances, y compris en introduisant ces questions ciblées. Nous nous demandons ainsi comment, pendant ce cours, l'enseignant s'appuie sur, ou prolonge, des activités antérieures des élèves, notamment en évoquant lui-même ou faisant évoquer par les élèves des éléments contextualisés, déjà travaillés, pour repositionner ces éléments à un niveau plus général. Pour les élèves seuls, cette généralisation nécessaire peut rester vague, confuse, ou même trop éloignée de ce qu'ils peuvent produire, ce qui n'empêche pas qu'une explicitation adéquate puisse leur donner un premier accès, entendu, et préparer l'intériorisation qui doit avoir lieu ensuite, pour l'apprentissage. Nous interrogeons aussi la manière dont, pendant ce moment de cours, l'enseignant prépare ou accompagne des activités ultérieures des élèves en explicitant (ou faisant expliciter) le passage de connaissances présentées à un niveau général à leur mise en jeu contextualisée, à partir de questions ou de petites tâches qui peuvent être résolues pendant le cours, collectivement. En particulier, nous étudions toutes les occasions repérées dans le discours de l'enseignant (et des élèves entre eux) de s'appuyer sur ce qui vient des élèves. C'est ce que nous appelons des « proximités discursives ». Ce sont ces

³ Voir à la copie de ce que l'enseignant écrit.

apports spécifiques de l'enseignant, voire de certains élèves, éventuellement associés à des questions, obligeant les élèves à répondre en dépassant ce qui vient d'être dit ou fait, qui constituent le détour que nous avons choisi pour analyser ces moments spécifiques.

1.4 Un zoom sur les proximités discursives – la classification utilisée

Les proximités discursives⁴ sont ainsi des rapprochements explicites, dans le discours de l'enseignant, entre ce qui est visé par l'enseignement et ce qui vient des élèves (Robert et Vandebrouck, 2014; Vandebrouck et Robert, 2017; Bridoux et al., 2016). Elles doivent être à la fois suffisamment proches de ce que les élèves savent, ont fait ou peuvent faire, et proches de ce qui est visé, pour qu'ils puissent en tirer parti. C'est cette double proximité, portée par le discours de l'enseignant, entre du nouveau mathématique et ce qui est déjà là ou déjà fait côté élèves, qui est en jeu.

Leur étude se fait à partir des transcriptions, permettant de pointer les éléments dans le discours de l'enseignant qui s'appuient sur des traces des activités effectives des élèves, observables, ou sur leurs connaissances supposées⁵, tout en abordant les connaissances visées. Le relief sur l'enseignement de la notion et l'insertion de l'étude dans son contexte permettent, en grande partie, au chercheur, d'anticiper et d'identifier ces rapprochements dans le discours du professeur. Ce sont alors en réalité des candidats proximités. Cela ne présuppose pas que l'enseignant en soit conscient, ni que cela ait un effet sur les apprentissages, inappréciable de fait. C'est un construit théorique introduit pour mieux appréhender ce qui pourrait participer à la conceptualisation des élèves, supposée favorisée par un travail partagé, actuel et à venir, sur des connaissances non encore acquises, mais proches de l'acquisition.

Ce qui est précisément en jeu dans ces proximités, dans le cas du cours qui va nous intéresser, c'est notamment la possibilité de familiariser les élèves avec les mots généraux qui sont introduits (croissance, variation), sur lesquels ils ont été sollicités d'une manière ou d'une autre, dans les registres numériques et graphiques, et avec les formalisations nouvelles à présenter, qu'ils les aient ou non trouvées, mais auxquelles ils auront été au moins invités à réfléchir. Sont traqués, compte tenu de ce qui s'est passé avant et des difficultés qui seront signalées dans le relief, les connexions, les liens explicites, entre mots et symboles (formules...) visés, et activités mathématiques des élèves provoquées, y compris par des

⁴ Introduites de manière plus générale dans Robert et Vandebrouck (2014).

⁵ Cela peut être supposé par l'enseignant, par exemple s'il dit « vous vous souvenez.. » en évoquant une connaissance antérieurement travaillée.

questions. Pour mieux repérer, qualifier et interpréter ces rapprochements, on introduit une distinction entre les proximités ascendantes, descendantes et horizontales. Les premières (ascendantes) sont des rapprochements entre des activités contextualisées, souvent travaillées dans un énoncé, mettant en acte certaines connaissances, et une forme générale, décontextualisée, des éléments de savoir mathématique correspondant. Cela met en jeu une démarche inductive, souvent difficile pour les élèves peu habitués à généraliser eux-mêmes, à imaginer et à formuler une version hors contexte de ce qu'ils ont travaillé en contexte, numérique, géométrique ou graphique... Ce type de proximité peut intervenir pour éclairer, expliciter même cette démarche inductive. Les secondes (descendantes) sont des rapprochements qui vont dans le sens inverse, du général au contextualisé⁶ : elles sont plus déductives, basées sur l'explicitation des reconnaissances et des substitutions à effectuer par exemple. C'est souvent dans des exercices après un cours sur ce qui est concerné que les élèves se posent des questions amenant à ces proximités, supposées éclairer les mises en fonctionnement des connaissances. Les dernières proximités (horizontales) rapprochent des éléments de même niveau de généralité, mais associés à des aspects différents, comme des changements de registres ou même de vocabulaire par exemple. Cela peut être le cas lorsque l'enseignant indique une autre façon d'exprimer un objet mathématique que celle donnée par un élève : ajoutant, après le cours, à la réponse « courbe qui monte » les mots « représentant une fonction croissante comme nous l'avons vu », par exemple. Il peut indiquer des alternatives (déjà rencontrées) à une méthode suggérée dans la classe. Le travail partagé sur des connaissances proches peut donc se faire par prolongement à partir du connu (l'enseignant met en évidence avec les élèves ce qui est généralisé : proximité ascendante), par insertion du nouveau dans du déjà-connu (l'enseignant met en évidence la manière d'appliquer à des contextes déjà travaillés les nouvelles connaissances : proximité descendante) ou par introduction de liens entre du déjà connu et du nouveau (proximités horizontales).

Cependant le rapprochement que signale l'étiquette « proximité » ne peut se décider, pour le chercheur, qu'en référence à la classe, localement; il y a un aspect conjoncturel, non reproductible dans ces procédés, pourtant utiles dans notre vision théorique. En outre, le label d'une proximité n'est pas toujours clair : il peut dépendre des élèves (et de l'état de leurs connaissances, différent dans une même classe), et une même intervention peut avoir le double statut descendant et ascendant.

⁶ Certains auteurs évoquent l'instanciation du savoir au lieu de sa contextualisation.

1.5 Proximités discursives et zone proximale de développement

Revenons à notre positionnement théorique : la notion de « proximités discursives » correspond pour nous à une opérationnalisation en didactique des mathématiques de la notion de zone de proche développement (ZPD) de Vygotski. Le mot proche est ici attaché à des éléments mathématiques (connaissances ou activités) que les élèves ne peuvent mobiliser, formuler ou réaliser seuls, même après réflexion, parce qu'ils n'y ont pas pensé ou que cela reste trop vague ou trop éloigné de ce qui est disponible pour eux. Mais ce sont des éléments qu'ils peuvent reconnaître, reprendre ou comprendre, au moins en partie, si l'enseignant les partage avec eux – en explicitant ce qu'il fait. L'hypothèse admise, empruntée au modèle de Vygotski et adaptée, est que, lorsque les élèves ne sont pas très « loin » de la résolution ou de la compréhension visée, préparée par leur travail antérieur, ce type d'interventions de l'enseignant devient porteur d'éléments « appropriables », qui participent au développement des connaissances et des activités nouvelles en jeu. Ainsi les élèves peuvent être aidés dans certains de leurs apprentissages, notamment pendant le cours, en étant associés à ce que fait ou dit l'enseignant lors d'un travail qui se déroule.

Cette tentative de préciser ce que peut recouvrir dans ce cas le modèle de la ZPD est cependant adaptée de la notion originelle à deux titres au moins : d'une part, il ne s'agit pas de rechercher des rapprochements dans des interactions individuelles mais souvent collectives, d'autre part, il ne s'agit pas de partager des résolutions de problèmes (même au sens large) mais des présentations de connaissances. En fait, on pourrait suggérer qu'il y a, dans la classe, d'abord, l'émergence d'une sorte de ZPD collective, issue des interactions avec les différents élèves. Cela pourrait avoir lieu avant que chacun d'entre eux ne s'approprie suffisamment ce qui est en jeu pour que se mette en place l'intériorisation attendue à partir des ZPD individuelles (voir Vygotski). Cela se ferait sans doute grâce aux premières recontextualisations dans les premiers exercices proposés, dont la résolution serait facilitée par ce qui a eu lieu pendant le cours.

En résumé, notre objet d'étude est à la fois le contenu des discours des enseignants, en particulier pendant leurs interactions avec les élèves, et l'insertion effective de ce discours dans les activités possibles des élèves lors des déroulements. L'efficacité des moments d'exposition de connaissances dépendrait ainsi, en partie, à la fois des occasions et de la qualité des proximités discursives, comme nous allons l'illustrer maintenant dans notre exemple.

2. Relief sur l'introduction de la définition formalisée de fonction croissante (grade 10)

Dans cette partie, nous présentons l'intérêt de la notion de fonction croissante ainsi qu'une revue de littérature sur l'enseignement des fonctions. Puis, nous nous intéressons aux mathématiques en jeu, aux aspects curriculaires et cognitifs, pour finalement réfléchir aux introductions possibles de la définition formalisée.

2.1 Pourquoi s'intéresser à cette notion?

La définition formalisée de la croissance (resp. décroissance) d'une fonction, étudiée ici, est au programme de seconde générale en France (grade 10), même si l'acquisition n'est attendue que pour la fin de l'année scolaire. Il y a donc une première raison institutionnelle pour cette étude.

En fait, cette formalisation comporte un symbolisme logique élaboré, comportant une implication universelle : une fonction est dite croissante (resp. décroissante sur un intervalle si pour tous a, b de cet intervalle, si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$ (resp. $f(a) \geq f(b)$) ou encore : pour tous a, b de l'intervalle, $a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$ (resp. $f(a) \geq f(b)$). Il s'agit plus précisément d'une définition doublement quantifiée universellement, qui met en jeu deux points a, b de l'intervalle. C'est donc une traduction ponctuelle d'une propriété qui est par nature globale : la croissance (ou décroissance) d'une fonction sur un intervalle.

C'est la première fois qu'on enseigne aux élèves une formalisation d'une telle complexité logique, qui plus est non naturelle, non intuitive, comme nous allons le préciser, exprimée algébriquement et en utilisant la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. La notion de maximum d'une fonction peut avoir déjà été défini formellement en classe, avant la croissance, mais c'est une définition beaucoup plus facile, ne faisant intervenir qu'une expression algébrique, la relation d'ordre sur les réels et un seul quantificateur universel (symbolisé ou non).

La difficulté de la formalisation en jeu ici est renforcée par le fait qu'il y a peu d'exercices mettant en jeu la formalisation et qui sont accessibles aux élèves de seconde, vu leurs capacités algébriques. De plus, la notion de dérivée introduite ensuite en classe de première (grade 11) permettra aux élèves d'éviter le recours à la définition étudiée l'année d'avant pour établir une (dé)croissance, d'où la gageure de réussir cette introduction, dans la mesure où on peut tout de même faire l'hypothèse que cela contribue à familiariser les élèves avec des écritures dont ils vont avoir besoin en analyse ultérieurement (dès le début de l'université par exemple).

C'est pour ces raisons que nous nous intéressons à la question suivante : comment peut se faire, en seconde (grade 10), l'introduction de la définition (nouvelle)

formalisée de la notion de fonction croissante (resp. décroissante)? Ce qui est en jeu est la traduction ponctuelle universelle doublement quantifiée d'une propriété globale sur les fonctions (M. Rogalski, 2008), que les élèves ont déjà rencontrée de façon graphique ou dans des contextes de courbes non nécessairement fonctionnelles (en physique par exemple). Quelles motivations l'enseignant peut-il trouver pendant son cours à cette introduction formelle algébrique? Quelles activités préalables – en termes notamment de reconnaissances, d'organisation ou d'applications – peut-il avoir fait développer aux élèves et comment peut-il s'appuyer sur les connaissances déjà-là et/ou les activités préalables des élèves pour introduire cette définition nouvelle? Avant d'aborder nos analyses de moments de cours pour répondre à ces questions, nous établissons ce que nous appelons le relief sur l'enseignement de cette notion (Robert et al., 2012). Ce relief nous sert de référence didactique pour toute la suite de notre étude.

Cette notion de relief permet de faire le lien entre la théorie de l'activité (qui n'est pas une théorie didactique) et la didactique des mathématiques, les contenus en jeu et les processus d'enseignement-apprentissage des mathématiques. Il s'agit d'une analyse croisée, préalable, mathématique, épistémologique, curriculaire didactique et cognitive sur la notion enjeu de l'apprentissage. Cette étude préalable aux analyses des tâches proposées et aux déroulements en classe permet de situer par rapport aux contenus visés les activités intriquées des élèves et du professeur. Nous passons en revue les programmes d'enseignement, qui permettent de préciser les mathématiques en jeu à ce niveau et avant. Cela permet en particulier de préciser si la notion en jeu est une extension de ce que les élèves connaissent déjà ou si elle peut apparaître dans un problème accessible aux élèves, mais qu'ils ne peuvent résoudre, ou encore si elle s'avère très éloignée de ce qu'ils savent déjà. Nous repérons aussi les exercices possibles sur la notion en jeu. Il s'agit également, compte tenu de nos analyses mathématiques et des programmes, de traquer des éléments cognitifs – en termes d'activités possibles – qui balisent le cheminement des élèves jusqu'à la notion visée [ici la définition formalisée de la (dé)croissance d'une fonction], en signalant en particulier les difficultés déjà repérées et prévisibles des élèves. Nous en déduisons à la fois des tâches d'introduction envisageables, avec les appuis possibles ou impossibles pour le premier cours qui suit et des scénarios plausibles, avec la variété des tâches importantes.

Avant de détailler notre démarche nous donnons des éléments tirés de la littérature sur le sujet, même si souvent le zoom fait par les auteur.e.s diffère du nôtre.

2.2 Une revue de littérature sur l'enseignement des variations des fonctions en fin de secondaire ou en début d'université

L'enseignement et l'apprentissage de la notion de variation des fonctions ont fait l'objet d'un ensemble large de travaux en didactique des mathématiques, soulignant tous la difficulté liée au sens de variation, mais se focalisant moins sur la difficulté supplémentaire liée à la formalisation du sens de variation.

Un aspect fondamental lié à l'enseignement et l'apprentissage des notions fonctionnelles est par exemple la nécessaire prise de conscience par les élèves de plusieurs perspectives (ou point de vue dans certains travaux) sur les fonctions : ponctuelle, globale, locale (Bloch, 2003; M. Rogalski, 2008; Chorlay, 2011; Vandebrouck, 2011) associées respectivement à la nature des propriétés des fonctions travaillées. La notion de croissance (décroissance) est l'une des premières propriétés globales vue par les élèves. Dans le registre graphique, la croissance (décroissance) se visualise globalement sur la courbe et ce registre favorise donc facilement l'adoption de la perspective globale par les élèves. C'est d'ailleurs souvent dans ce registre qu'est abordé la notion de croissance, décroissance des fonctions. La traduction par la définition formalisée est ensuite ponctuelle universelle (doublement quantifiée). Il y a donc une rupture cognitive entre la perspective associée à la variation et la traduction formelle ponctuelle universelle, dont on peut penser qu'elle constitue une difficulté majeure de la formalisation liée à ce changement de perspective. En complément, Bloch (2003) met en évidence comment le registre graphique sur les fonctions permet de travailler à la fois les perspectives ponctuelle et globale sur les fonctions. Il est donc un bon support pour soutenir ce jeu de perspectives.

Les travaux en didactique sur l'enseignement du concept de sens de variation des fonctions se situent cependant souvent en amont des problèmes liés à notre formalisation. Ils portent par exemple sur l'appréhension des fonctions comme covariations entre deux grandeurs en dépassant la seule appréhension comme correspondance ou dépendance (René de Cotret, 1998, Arzarello et Robutti, 2004). Mais le propos ne porte pas encore directement sur le concept de sens de variations au sens d'aspects croissant et décroissant des fonctions. Les travaux de Hitt et Gonzáles-Martín (2016), qui font une revue des articles sur le sujet, constituent plus globalement une source de références récentes pour l'étude de l'enseignement des fonctions.

Une recherche spécifique sur le sens de variation des fonctions est faite dans l'article de Valero Cázarez (2003) : elle identifie sept conceptions alternatives du sens de variation des fonctions chez les étudiants de première année d'université au Mexique. Les conceptions les plus courantes et résistantes au changement sont :

la conception qu'une fonction n'a d'image négative que si elle est décroissante, une fonction est croissante si son graphe monte, sans aucune coordination entre les changements d'abscisse et d'ordonnée, et une fonction est décroissante si son graphique descend⁷.

Cabañas-Ramírez et al. (2020a et 2020b) ont plus récemment proposé une analyse préliminaire épistémologique, didactique et cognitive de la notion de sens de variation des fonctions, sous-jacente à la démonstration du théorème liant le signe de la dérivée d'une fonction et ses variations. Ils en ont déduit une ingénierie didactique destinée aux étudiants de dernière année avant l'université (notre classe terminale). Nous pouvons en retenir certains éléments, même si nous nous intéressons à des élèves plus jeunes : d'une part, dans le premier texte, les auteurs confirment la difficulté de notre formalisation. D'autre part, ils attribuent la persistance de cette difficulté à un manque de travail sur le lien entre les diverses présentations de la notion, en d'autres termes, le lien entre les registres de représentations (Duval, 1993). Voici leur phrase de conclusion : ... « une ingénierie didactique qui favorise la transition entre le travail dynamique et statique lié aux concepts de fonctions croissantes et décroissantes comme faisant partie du traitement du sens de variation d'une fonction » (p. 12, traduction libre⁸). Ils identifient en particulier l'importance de la dialectique dynamique statique, qui est en jeu dans l'appréhension du sens de variation de façon dynamique par l'intermédiaire du graphique, et dans celle de la formalisation qui embarque des aspects statiques.

D'autres articles portant sur le sens de variation semblent escamoter le problème de la formalisation et se situent plutôt en aval de notre questionnement. Par exemple, dans Passaro (2020), les actions mentales associées au passage chez l'élève de « la courbe monte » à « la fonction croît » relèvent de ce que l'on va développer en termes d'activités des élèves. Mais l'article s'oriente rapidement sur les actions mentales qui concernent le taux de variation alors que nous restons centrés sur la caractérisation de la croissance/décroissance d'une fonction en toute généralité.

Si nous revenons maintenant à ce qui relève plus précisément de notre objet d'étude, la formalisation attendue a été établie, semble-t-il, par Osgood en 1912 (Chorlay, 2007). Elle n'est pas facile à comprendre, ni même à retenir pour les élèves. Un certain nombre d'articles insistent ainsi sur la difficulté de cette

⁷ On peut le lire de droite à gauche en fait...

⁸ « a didactical engineering that promotes the transition between the dynamical and static work related to the concepts of increasing and decreasing functions as part of the treatment of the sense of variation of a function » (Duval, 1993, p. 12).

formalisation, liée à la présence d'une implication universelle (il est quelque fois évoqué une double implication). Ainsi, Chorlay (2007) écrit-il :

des études empiriques montreraient sans doute combien cette définition de la croissance est non seulement peu comprise par les élèves mais, de fait, ne devient que très rarement une connaissance ne serait-ce que mobilisable. La distinction par D. Tall et S. Vinner entre concept image et concept définition nous semble ici utile : ... au lycée les élèves se forment un concept image de la croissance, articulant divers registres sémiotiques (allure de courbe, tableau de variation et ses flèches, intuition cinématique) ...; malheureusement cette image du concept ne semble que rarement recouvrir, ..., la définition donnée dans un cadre purement numérique et ponctuel. (p.28)

Dans leur texte, Cabañas-Ramírez et al. (2020b) proposent une ingénierie expérimentée (31 élèves), très bien documentée et très intéressante. Leur cadre est celui de l'ingénierie didactique, dans un contexte expérimental, selon lequel la situation didactique est anticipée au mieux, alors que nous nous situons dans le contexte d'une classe ordinaire où nous cherchons à analyser les activités des élèves et le discours du professeur. Mais l'objectif reste le même en terme d'apprentissage visé. Leur ingénierie se fonde non seulement sur la théorie des situations didactiques, mais aussi sur l'usage des contre-exemples et le débat scientifique dans la classe. Elle a comme objectif de faire comprendre *in fine* aux élèves la définition formalisée de la croissance avec tout son sens, à partir de la discussion sur différentes propositions obtenues dans la classe, et abandonnées suite à des contre-exemples (les fausses définitions). Les auteurs retrouvent l'importance des conceptions intuitives dynamiques, liées au graphique, qui jouent comme obstacle pour implanter la formalisation statique : dans leur ingénierie, c'est le recours au débat scientifique, alimenté par des contre-exemples, qui favorise le passage recherché, notamment dans la phase d'institutionnalisation. Une conclusion nous intéresse particulièrement : ils insistent beaucoup sur le rôle fondamental de l'enseignant dans le processus, à travers l'usage des contre-exemples et la tenue du débat. Cependant cette ingénierie ne saurait être utilisée en seconde en France, dans la mesure où les connaissances logiques des élèves nécessaires pour l'ingénierie, sont pratiquement inexistantes, tout au moins insuffisantes.

Nous pouvons donc confirmer la difficulté de cet enseignement par cette revue de littérature. Nous revenons maintenant à notre étude du relief.

2.3 Les mathématiques en jeu

Nous reprendrons ici l'expression utilisée par l'enseignant, qui évoque la recherche d'une traduction mathématique algébrique, reprenant une question

d'élève : cela marque qu'on cherche à exprimer une propriété « sans référence à des valeurs..., sans référence à une courbe » dit-il. La formalisation de la définition du sens de variations correspond à ce que nous appelons une notion FUG(O)⁹, compte tenu de ce que savent les élèves au moment où elle est introduite : elle formalise la notion de croissance (respectivement décroissance) d'une fonction sur un intervalle, mais de manière nouvelle, formelle, et hors de portée d'imagination des élèves; elle unifie cette notion pour toutes les fonctions déjà rencontrées (linéaires et affines, voire autres); elle contribue à unifier l'approche graphique et l'approche numérique grâce à l'expression formelle; elle permet la généralisation de la notion à d'autres fonctions qui ne sont pas nécessairement encore connues des élèves de seconde. Les approches numérique, graphique et formelle de la croissance sont ainsi reliées.

Mais le plus important tient au (O) pour opérationnaliser. En effet les descriptions dynamiques des variations d'une fonction en termes d'allures de courbes ou celles, numériques, mettant en jeu des augmentations simultanées de valeurs, ne se laissent pas traduire formellement directement dans le langage mathématique précis attendu, même si on dispose de l'expression algébrique de la fonction. C'est ce qu'ajoute la définition formelle étudiée. Le (O) signale ainsi qu'il s'agit d'opérationnaliser une propriété qui est facilement perçue de manière dynamique – graphique ou numérique – mais traduisible en une expression algébrique, statique, avec laquelle on peut travailler.

La difficulté spécifique de l'enseignement des notions de type FUG(O) a particulièrement été développée dans le cas de l'algèbre linéaire puisque ce domaine des mathématiques est une niche de telles notions (Dorier, 1997). Dans des travaux plus récents, on peut citer Corriveau et Tanguay (2007) qui développent comment l'algèbre linéaire est un indicateur des exigences que requiert le passage à la formalisation pour les étudiants, à travers les niveaux d'abstraction et de généralisation qu'il met en jeu.

2.4 Aspects curriculaires (les programmes)

Les séances que nous étudions ici relèvent du programme de seconde de 2009 en France, précédant le nouveau programme entré en vigueur en 2019. En réalité, en ce qui concerne le chapitre des variations des fonctions, il n'y a pas de réel changement à signaler entre les programmes de 2009 et de 2019 (ni d'ailleurs de changements après la parution en 2019).

⁹ F comme Formalisatrice, U comme unificatrice, G comme généralisatrice et O comme opérationnelle. Certaines notions FUG sont plutôt Simplificatrices qu'opérationnelles, notamment en algèbre.

Les fonctions sont abordées dès le collège où les élèves ont découvert des premières généralités sur les fonctions à travers différents registres de représentations : algébrique, numérique, graphique notamment. Ils doivent connaître le vocabulaire de base (image, antécédent, courbe représentative). Ils ont étudié les fonctions linéaires, affines (sans aborder tous les aspects, ils ont les formules et les droites associées graphiquement, sans leurs équations). Ils ont rencontré depuis plusieurs années des courbes quelconques, associées à des phénomènes ou à des grandeurs, et ont été amenés à reconnaître et interpréter qu'une courbe « monte », « descend », est constante, a un maximum, en référence à l'augmentation, la diminution, la constance de ce qui est représenté en ordonnée, mais sans aucun formalisme algébrique.

En classe de seconde du lycée, les objectifs affichés dans les programmes sont de consolider les acquis, d'étendre la panoplie de fonctions de références – avec la fonction carré, racine carré, inverse, cube – d'étudier les notions (nouvelles) liées à la formalisation du sens de variation, des extremums et de la parité. Une nouvelle représentation apparaît avec les tableaux de variations.

Ainsi trouve-t-on cités dans le programme « la croissance, la décroissance, la monotonie d'une fonction définie sur un intervalle et son tableau de variations, ainsi que le maximum et le minimum d'une fonction sur un intervalle ».

Ces variations des fonctions peuvent donner lieu, lorsque la variable décrit l'intervalle considéré, à une perception graphique, globale, sur une courbe (« monte » ou « descend »), à une perception numérique, ponctuelle (les valeurs successives de la fonction augmentent ou diminuent) ou à une définition formelle mettant en jeu un quantificateur (portant sur les couples ordonnés de réels) et une implication portant sur la comparaison de l'ordre des images de ces réels. Mais il y a de grandes différences entre les traductions dans ces trois registres, la troisième, nouvelle, étant plus difficile à cause de l'introduction d'un symbolisme logique. Le seul cas où une formalisation du même type, mais plus simple, peut avoir été rencontrée concerne la formalisation des extremums d'une fonction, souvent donnée avant celle du sens de variation, et peu utilisée de fait.

Les capacités attendues sont les suivantes : décrire, avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variations, le comportement d'une fonction définie par une courbe; dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variations. Cependant pour ces capacités, il n'est nul besoin de la définition algébrique pour réussir les tâches correspondantes. Problématiser cette définition formelle, qu'il appelle algébrique, reste donc très difficile pour le professeur.

Des accents spécifiques sont mis sur la modélisation d'une part, et sur la résolution d'équations/inéquations fonctionnelles d'autre part, ainsi que sur l'usage des

outils numériques (logiciels de géométrie dynamique, tableurs, calculateurs formels et calculatrices notamment). Ainsi dans le premier paragraphe « Fonctions » du programme de seconde (Ministère de l'Éducation nationale, 2009) l'utilisation des logiciels est largement encouragée, mais en même temps, l'élève doit s'interroger sur la façon dont les courbes sont obtenues : en effet, il doit apprendre « à distinguer la courbe représentative d'une fonction des dessins obtenus avec un traceur de courbe ou comme représentation de quelques données ». Plus loin, on indique « il s'agit de faire comprendre que des dessins peuvent suffire pour répondre de façon satisfaisante à un problème concret mais qu'ils ne suffisent pas à démontrer des propriétés de la fonction. » Il s'agit donc de faire comprendre les limites de ce qu'on peut en déduire des courbes obtenues sur un écran graphique comme avec Géogébra par exemple ou des tableaux de valeurs.

Enfin, les commentaires des deux programmes de 2009 et 2019 précisent à un moment donné « Les définitions formelles d'une fonction croissante, d'une fonction décroissante, sont progressivement dégagées. Leur maîtrise est un objectif de fin d'année ». Notre questionnement sur l'introduction de ces notions rencontre donc bien des pratiques de classes appelées par les programmes.

2.5 Aspects curriculaires (les exercices dans les manuels de seconde)

Les registres graphiques, numériques et algébriques, déjà en jeu en troisième, avec quelques incursions dans l'ordre sur les réels, sont renforcés et augmentés de la définition formelle des variations, et cela peut alimenter les exercices en classe de seconde, en incluant des éléments de logique. Rappelons que nous nous situons toujours du point de vue français pour ce qui relève de ces aspects curriculaires.

Cela dit, comprendre et maîtriser ces définitions formelles ne va pas de soi et les tâches qui peuvent y conduire, qui ne sont pas souvent évoquées, sont assez peu nombreuses et peu variées compte tenu des connaissances algébriques et sur l'ordre sur les réels des élèves. Si le professeur se contente de décliner les capacités indiquées dans le programme de 2009, on reste bien loin de la maîtrise de cette définition. En fait, les deux programmes permettent une certaine latitude, suivant le niveau des élèves et les intentions de l'enseignant, entre des tâches simples et isolées autour de la courbe et du tableau de variation et des exercices plus complexes combinant différents aspects dans de véritables problèmes, utilisant éventuellement la définition formelle, qui est difficile – on y reviendra plus bas –, mais il n'y a pas tellement d'exercices adaptés à faire manipuler cette dernière. *A minima*, les activités des élèves peuvent être seulement de constater qu'une courbe monte ou descend sur tel ou tel intervalle donné, ou que des valeurs augmentent ou diminuent, et les élèves peuvent en déduire les variations sans

jamais utiliser la définition (travail sur une mise en fonctionnement réduite des connaissances visées). *A maxima*, les activités portent sur la reconnaissance qu'il s'agit de démontrer algébriquement une (dé)croissance, avec l'organisation et le traitement correspondant (travail pouvant contribuer à la disponibilité de la définition et à sa mise en œuvre grâce à des calculs sur des inégalités algébriques).

Mais, dans les exercices de seconde (voir manuels) il y a peu d'occasion d'utiliser la définition formelle de la croissance comme outil. Souvent on s'appuie sur un graphique pour étudier les variations et l'algébrique ne vient qu'en vérification éventuelle, voire pour apporter une précision ou déjouer une fausse perception, mais dans des cas rares. Vu les connaissances algébriques des élèves, qui ne savent pas encore étudier en toute généralité le signe d'un trinôme du second degré, il y a peu de fonctions données par leur expression algébrique pour lesquelles ils peuvent utiliser la définition pour trouver le sens de variation. La démonstration du fait qu'une fonction affine donnée par la formule $f(x) = ax + b$ est croissante si et seulement si a est positif, permettant l'utilisation « outil » de la définition formelle, n'a pas d'enjeu en classe de seconde et elle est rarement observée dans les manuels et les pratiques. Et le fait qu'il suffise, pour avoir le sens de variation d'une fonction affine sur un intervalle $[c; d]$, de comparer $f(c)$ et $f(d)$, peut perturber l'adoption de la formule dans le cas général; car dans le cas général on ne peut pas se contenter de comparer les images des extrémités de l'intervalle.

On peut aussi réserver l'usage de la formalisation aux exercices qui suivent l'introduction des nouvelles fonctions de référence du programme, comme les fonctions carré ou inverse, mais cela n'aidera pas plus à établir cette formalisation. En fait, c'est le passage au calcul algébrique à proprement parler qui s'avère délicat, vu les difficultés prévisibles des élèves de seconde dès qu'on a affaire à des fonctions un peu compliquées.

Enfin, la notion de dérivée permettra, en classe de première, d'éviter le recours à la définition algébrique, ce qui en minore l'intérêt, au moins pour les enseignants, et justifie de ne pas s'attarder sur ces exercices où la recherche du sens de variation se fait algébriquement.

On pourrait donc s'interroger sur l'utilité de l'introduction de cette formalisation, alors même qu'elle n'est pas très nécessaire dans l'enseignement à ce niveau : nous y voyons un intérêt étant donné que la conceptualisation (Vergnaud, 1990) est un processus long et que cette première rencontre joue un rôle certain de familiarisation.

2.6 Aspects cognitifs

Nous détaillons les activités mathématiques, associées aux différents registres des fonctions en jeu. Le travail sur les variations dans le registre graphique ne met en jeu que la courbe, ensemble de points, et la description correspondante en termes d'allure (montante ou descendante) fait travailler aux élèves la perspective globale sur les fonctions (Montoya et al., 2018). Elle ne fait pas intervenir les deux coordonnées de ces points, ni *a fortiori* leur dépendance et leur covariation, pourtant en jeu. De plus elle est dynamique, mettant en scène un mouvement qui est ajouté. Or, pour une courbe donnée, la fonction qu'elle représente n'est pas visible en tant qu'objet séparé. Il y aura donc à transporter, et ce n'est pas transparent, d'un registre à un autre, non congruent, les notions de croissance (la courbe monte), décroissance, variation. Le problème n'est pas qu'une question de vocabulaire : la courbe monte et la fonction croît. C'est une question d'interprétation d'une visualisation (Duval, 2005) dynamique et globale en dimension 2, en une connaissance sur les fonctions, pour laquelle il n'y a plus qu'une dimension, celle portée par la variable indépendante.

En outre, ce qui est interprété visuellement le plus immédiatement est la variation de y , en ordonnée, celle de x , en abscisse, étant « cachée » dans le sens du parcours, de gauche à droite. Il y a donc une inversion avec le fait que, en phrase ou dans le tableau, on commence par x (en première ligne du tableau). Il y a également une « traduction » souvent laissée implicite de « plus haut » ou « à droite » (on regarde la place sur un axe) en « plus grand » (on introduit un ordre sur les valeurs représentées sur l'axe). Enfin, les intervalles concernés peuvent ne pas être précis, les lectures graphiques ne pouvant être qu'approximatives – même si certaines conventions peuvent être adoptées à ce sujet.

Le travail dans le cadre numérique permet quant à lui de dissocier plus explicitement x et $f(x)$, tout en décrivant leur covariation, par exemple en faisant afficher les valeurs de x et $f(x)$ sur un tableur. La perspective ponctuelle sur la fonction en jeu est concernée, favorisant sans doute un lien avec la définition formalisée qui est ponctuelle universelle. Mais, encore une fois, comment traduire algébriquement que, comme on peut le constater, quand les valeurs de x augmentent, celles de $f(x)$ aussi (pour fixer les idées)? Et sur quels intervalles?

Il y a, pour aborder le troisième registre, un double travail mathématique, précisément une double « astuce » mathématique. En effet, pour traduire de manière statique la notion de (dé)croissance, sans faire appel à l'augmentation, ni au mouvement, il faut comparer les valeurs de $f(x)$ pour deux valeurs a et b de x – perspective ponctuelle dynamique, devenue statique – et, comme c'est évidemment insuffisant, il faut le faire pour tous les couples $(a; b)$, ou, ce qui

revient au même pour un couple « quelconque », c'est-à-dire tel que les valeurs particulières que pourraient prendre a ou b n'interviennent pas. Il y a ainsi un quantificateur sur les couples, et une implication pour un couple donné, qui doit être démontrée de manière générique, sans faire intervenir de valeurs spécifiques : c'est une implication universelle.

Ainsi, en anticipant sur ce qui suit, si une partie de la définition algébrique, en termes d'inégalités – $a < b$ implique $f(a) \leq f(b)$ – est facilement associée au tableau de valeur des couples $(x, f(x))$, voire à la représentation graphique de la fonction (qui « monte »), même si les élèves ne peuvent pas toujours y penser seuls, le fait qu'il est nécessaire que ce soit vérifié pour tous les couples $(a; b)$ tels que $a < b$ est nettement moins intuitif. Trouver la double astuce précédente nous semble inaccessible à la plupart des élèves de seconde. Mais la comprendre nous semble accessible après des explications suivant la donnée de la formule, notamment si le travail dans les cadres numérique et graphique a été bien avancé. Ainsi, une fois la formalisation établie, les élèves peuvent facilement en visualiser la signification sur la courbe ou le tableau de valeurs.

2.7 Les introductions possibles de la définition formalisée

Pour alimenter ces moments d'expositions de la connaissance nouvelle, nous avons trouvé deux grands types de tâches introductives (appelées souvent « activités d'introduction ») dans les manuels selon la façon dont on envisage ce lien courbes/fonctions.

Le premier type permet de faire travailler sur des graphiques directement fournis aux élèves, permettant de réviser les descriptions des courbes et les interprétations correspondantes sur la covariation – extrema, intervalles où la courbe monte ou descend. Ce sont souvent des situations non mathématiques qui sont en jeu, et on ne connaît pas les fonctions associées. Souvent la variable est le temps. Rien dans ce type de tâches n'amène au besoin d'une formulation plus précise, si ce n'est, éventuellement, une certaine approximation des lectures, mais qui ne peut pas être résolue au sein de la tâche. Les activités des élèves, même *a maxima*, peuvent donc n'embarquer que la perspective globale sur les fonctions, si tant est qu'elles soient bien développées dans le cadre fonctionnel. Elles peuvent rester dynamiques et rien ne favorise des proximités discursives vers la définition nouvelle visée.

Le deuxième type d'introduction permet d'aller un peu plus loin. Les élèves ont à modéliser (mathématiser) eux-mêmes une situation de départ et disposent donc d'une expression algébrique. Les activités des élèves sont développées dans le cadre fonctionnel. Cela permet d'aborder la traduction algébrique de la croissance (par exemple), soit en tant que telle, en l'appliquant à la fonction en jeu, soit pour gagner en précision – ce qui reste difficile au vu des connaissances algébriques à

mobiliser – soit pour introduire une problématique plus générale où on ne disposerait ni d’une courbe ni des valeurs de la fonction étudiée. L’exemple étudié est du deuxième type et il est donc plus susceptible d’amener les élèves sur le chemin de la définition.

3. Une problématique « double »

La (nécessaire?) familiarisation et l’acquisition de la formalisation complexe du sens de variation d’une fonction (croissance, décroissance) sont donc particulières et font partie de la conceptualisation attendue à la fin du lycée. Dans ces conditions, notre problématique croise la spécificité de la notion à enseigner, porteuse d’un formalisme unificateur et généralisateur éloigné de ce que les élèves ont déjà rencontré (FUG), et le fait que cet enseignement comporte nécessairement un cours, pas entièrement préparable par des activités d’introduction, et où l’enseignant doit nécessairement exposer les connaissances nouvelles, ayant peu de liens avec ce qui est déjà connu des élèves. Cet enseignement est rendu plus difficile encore du fait du petit nombre d’exercices abordables à ce niveau et qui mettent en fonctionnement la définition, alors même que son intérêt est justement de permettre d’établir le sens de variation des fonctions, et de réaliser son opérationnalité (O). Autrement dit, nous abordons en même temps deux questionnements différents :

- a) une question très générale de méthodologie de recherche, qui s’intéresse à l’étude des moments de cours où les activités¹⁰ des élèves (au centre de nos analyses) sont particulièrement inobservables - comment alors y accéder? Nous illustrons, dans ce cas particulier (et délicat!) le fait que rechercher les proximités peut y contribuer, en permettant d’apprécier, dans une certaine mesure, la manière dont l’enseignant s’appuie ou non sur le déjà-là des élèves, au fur et à mesure que se développent ces activités;
- b) une question plus particulière sur l’exposition d’une notion FUG(O) où il n’y a pas de tâche d’introduction « suffisante » au vu du relief sur l’enseignement de la notion, et où des éléments qui ne sont pas très proches des élèves a priori nécessitent d’être introduits dans un cours, sans beaucoup d’applications ultérieures qui plus est. Cette notion FUG(O) est une des premières où des éléments de logique interviennent en plus des quantificateurs, formalisme encore ignoré des élèves et surtout qui n’est pas dans la continuité des approches intermédiaires préliminaires.

Nous illustrons donc, avec cet outil « proximités », une pratique où l’enseignant, grâce à son choix de tâches « adaptées », joue sur des alternances de proximités

¹⁰ En tenant compte du fait qu’activité ne se confond pas avec action...

ascendantes et descendantes pour rester au plus près de ce font ou disent les élèves de différentes manières, même s'il introduit lui-même *in fine* la connaissance nouvelle qui manque aux élèves.

4. L'exemple détaillé : une activité d'introduction (surfaces agricoles) suivi d'un cours

Dans cette tâche, l'étude de la variation d'une grandeur (la surface d'un champ¹¹) en fonction d'une autre (la longueur du côté), liée à une figure géométrique (rectangle modélisant le champ), est introduite. On cherche s'il y a un maximum de cette surface. Nous n'analysons pas en détail le déroulement du travail des élèves sur la tâche introductive (figure 1) : il se déroule en deux demi-classes et ne permet d'aborder que le tout début du problème. Les déroulements sont assez proches dans les deux demi-groupes. La modélisation et l'exploration sont laissées aux élèves. Par exemple, dans le demi-groupe 1, les élèves cherchent pendant 8 min 30 s. Le professeur intervient à deux reprises collectivement pour signaler qu'il n'y a pas de clôture le long de la rivière et pour encourager à faire un dessin. Il propose des calculatrices aux élèves qui n'en auraient pas. Puis, quand tous les élèves ont fait un dessin, il rappelle les deux questions, celle d'abord de savoir si tous les champs ont la même aire, et, sinon, celle de trouver l'aire maximale. Les élèves travaillent donc d'abord sur la question 1 et se convainquent du fait que les aires diffèrent avec des exemples numériques. Le professeur insiste sur la justification de la réponse, il parle aussi d'argumentation.

Au bout de ces 8 min 30 s, les élèves se mettent en petits groupes et finissent la question 1. Le professeur continue de circuler et de discuter avec les petits groupes. Après 22 min 30 s tous les petits groupes sont passés à la deuxième question. Le professeur reprend la main sur la classe à 26 min. Cela aboutit, à la suite de la proposition d'un petit groupe d'élèves (« On va suivre ce qu'ils nous proposent » dit le professeur), à affecter une lettre à la longueur variable d'un côté et à l'établissement de la formule algébrique de la fonction « aire », appelée $f(x)$. L'enseignant argumente que c'est « pour passer au cas général et parce qu'on ne peut pas juste prendre des exemples, aussi nombreux soient-ils ». La lettre x est affectée à la longueur des côtés perpendiculaires à la rivière, après suggestion d'une élève dans un petit groupe et une discussion collective dans la classe. Ensuite, un certain temps est passé à évaluer le troisième côté (par exemple un élève propose $2x - 750$ au lieu de $750 - 2x$). La justification rapide de la bonne

¹¹ Nous gardons le mot surface pour désigner le champ et son aire, comme l'enseignant. Plus généralement, nous ne modifions pas les mots de l'enseignant dans les citations que nous faisons.

expression est donnée par l'enseignant et la séance se termine par l'écriture par le professeur de la formule de l'aire [$f(x) = x(750 - 2x)$], dictée par plusieurs élèves. L'enseignant évoque, pour finir, un exercice où le même type de modélisation avait été fait. Les questions de variation ne sont donc finalement pas encore abordées, le travail ayant été essentiellement algébrique pour la question 2.

Cette première séance permet toutefois de rapprocher les élèves de questionnements et de réponses possibles sur les variations de l'aire quand la longueur x varie. Même avec leur formule algébrique, les élèves ne pourront répondre qu'en s'aidant du graphique ou d'un tableau de valeurs. Mais leurs réponses resteront nécessairement approchées (choix adéquat des variables didactiques). Cela peut donc être l'un des prétextes pour faire réfléchir les élèves à une formulation algébrique « exacte ».

NOM :	Classe :
Prénom :	Date : / /

Surfaces agricoles

Le long d'une rivière dont les bords sont rectilignes, il a été décidé de délimiter des champs destinés à l'agriculture. Ces champs seront tous de forme rectangulaire, l'un des côtés du rectangle étant le bord de la rivière, ce qui permettra facilement l'arrosage des cultures.

Pour délimiter son champ, chaque famille d'agriculteurs reçoit une clôture de longueur égale à 750 mètres, ainsi que tout le matériel pour installer solidement la clôture. Chaque famille peut donc choisir les dimensions de son champ, pourvu qu'il respecte les contraintes indiquées et soit entouré par les 750 mètres de clôture.

Les champs ainsi délimités auront-ils tous la même surface ?

Si la réponse à la question précédente est négative, existe-t-il une façon d'installer la clôture qui délimite un champ de surface maximale ?

Figure 1. Énoncé distribué aux élèves

4.1 À partir du tableur

Dans la deuxième séance (celle de cours), après avoir résumé ce qui a eu lieu dans la première séance et redonné l'expression algébrique de la fonction en jeu, l'enseignant propose d'abord aux élèves de percevoir et de décrire visuellement les variations grâce à une animation numérique sur le tableur (affiché au tableau). Les élèves peuvent répondre, en affinant leurs formulations. On obtient l'établissement de la covariation numérique, facilitée par les deux colonnes du tableur, qui amènent une perception numérique de la covariation. Voici la transcription¹² de cette phase pour identifier les proximités discursives à ce moment-là (E désigne un élève, pas nécessairement le même; entre parenthèse le minutage de la séance).

(15) Donc ça, nous, c'est ce qu'on propose à l'ordinateur, au tableur et il nous calcule les surfaces. [On voit les deux colonnes du tableur avec x et $f(x)$]. [...]

Alors vous allez regarder ce qui se passe? Dans la colonne de droite évidemment, silence (7'').

Alors regardez bien parce que...

E. Stop.

Quoi stop ?

Alors on peut peut-être s'arrêter là alors qu'est-ce que vous avez remarqué ?

E. Le maximum...

Alors il se trouve que dans la première partie du tableau qu'est-ce qu'on a constaté? ... Donc j'espère que vous avez noté des choses.

E. Ben oui.

Alors vous avez noté que dans la première partie du tableau **on constate que la surface augmente [son doigt suit la colonne en descendant]**.

E. Puis diminue.

Jusqu'à, alors, une valeur qui pour l'instant est maximale.

E. en nombre entier.

En nombre entier. En tout cas 190 on a 70300 et après on constate que, pour l'instant, on va aller au bout... Ça diminue. Alors est-ce que ça continue à diminuer tout le temps.

E. Ouais.

¹² Nous transcrivons exactement les propos de l'enseignant.

On est à la 15^e minute. Le professeur projette le tableur avec les deux colonnes intitulées x et $f(x)$ pour préparer la définition; comme les élèves ont travaillé sur la modélisation dans la première partie, on peut penser que les activités des élèves s'inscrivent déjà dans le cadre fonctionnel et donc qu'ils vont reconnaître ce codage. Mais ce sont des inférences. Le professeur pose des questions sur ce que les élèves constatent. D'abord, c'est le maximum qui est remarqué, mais ce n'est pas repris par le professeur car cela ne contribue pas à l'avancée vers la variation. Il en est de même un peu plus loin du « en nombre entier » qui n'est pas repris car il ne sert pas l'objectif du professeur. Celui-ci reformule la question et s'appuie sur des activités préalables et supposées des élèves : « on constate que la surface augmente ».

Nous constatons alors que les élèves continuent d'emblée la phrase en ajoutant « et diminue » quand le doigt du professeur continue sur la colonne du tableur. On peut donc considérer qu'il y a une proximité discursive car les élèves – ou du moins un élève – s'emparent du « augmente » et continuent avec « diminue ». Le « augmente », même s'il n'est pas prononcé en premier par les élèves, est bien mis en relation par les élèves avec les variations numériques de la surface et donc bien en appui sur les activités des élèves, constituant ainsi un appui pour l'activité suivante.

C'est une proximité horizontale car elle correspond à une lecture descriptive en langage courant du registre numérique, sans changement du niveau de généralité. Cette illustration de la notion de proximité montre que cette dernière est identifiée aussi bien par des activités élèves préalables que par des activités qui suivent (ici une reprise avec « diminue »). On identifie également le début du cheminement cognitif mis à jour dans le relief de l'enseignement de la notion visée. L'interaction continue.

Alors dans la colonne de gauche est-ce que les valeurs augmentent tout le temps?

E. Oui.

Dans la colonne de gauche les valeurs augmentent de 10 en 10 régulièrement de 0 à 375.

Dans la colonne de gauche x augmente tout le temps et du coup tandis que x augmente.

E...

Dans cet épisode, le professeur provoque de la visualisation sur la colonne de la variable indépendante. L'inconnue « x » apparaît. Le discours n'est plus sur « ça augmente » mais « x augmente ». Comme on l'a déjà signalé, les élèves ont déjà eu des activités sur la modélisation fonctionnelle dans le début de la séance. En outre,

dans le tableur affiché au tableau, les symboles « x » et « $f(x)$ » notés en haut des colonnes du tableur sont explicites et l'enseignant s'appuie sur cette projection. Comme dans l'épisode précédent, il faut continuer d'étudier la transcription pour savoir si l'introduction du « x » dans le discours relève bien d'une proximité discursive (ascendante dans ce cas puisqu'on introduit la formalisation nouvelle).

Donc dans la colonne de droite (...).

Voilà à partir de 200 et jusqu'à la fin. J'ai mis 375 parce que ça tombe sur 375 où ça fait 0, bon. Donc **(18)** qu'est-ce qu'on peut déjà dire. Qu'est-ce que ça peut nous permettre de dire cette observation [...].

E. Plus x est grand.

Plus x est grand.

E. Plus la surface est petite.

E. Non.

Alors c'est pas ça. Alors corrigez, J, corrigez

Chut, non vous vous écoutez sinon, comme c'est un peu compliqué il faut vraiment faire un effort.

E. Ben ça augmente mais au bout d'un moment ça rediminue.

Dans un premier, pour certaines valeurs de x ça augmente.

E. Et après ça diminue.

Et après ça diminue. Alors est-ce que c'est clair pour tout le monde ça?

Alors qu'est-ce qu'on pourrait faire comme phrase? [...]

E : ben sur x à un certain moment (19).

Alors sur x . Précisez sur x justement [avec un geste de gauche à droite].

Dans cet épisode, l'enseignant suscite à nouveau de la visualisation sur la colonne de droite pour relier les variations des deux variables. Un élève reprend effectivement « plus x est grand » ce qui nous confirme que le discours du professeur « plus x augmente » de l'épisode précédent est bien dans notre interprétation une proximité ascendante. Plus précisément, la notion d'augmentation des valeurs était déjà identifiée par les élèves dans le premier épisode et ici le « x » est repris par un élève. Donc ce passage au « x » peut bien être considéré comme une proximité ascendante des activités des élèves vers la connaissance nouvelle visée.

Toutefois, on remarque que le « augmente » a été perdu puisque l'élève dit « plus x est grand ». Le professeur reprend à son compte dans un premier temps, mais de

suite fait corriger car « plus x est grand » ne sert pas son propos. Le caractère « grand » n'est pas un synonyme de « augmente ». Pour « grand », un seul « x » dynamique suffit, par rapport à une référence, tandis que pour traduire l'augmentation il faut deux « x » statiques, comparés via la relation d'ordre, et surtout il faut y lier explicitement les valeurs de $f(x)$. Le professeur continue alors de développer son propos « pour certaines valeurs de x , ça augmente » et un élève continue « après ça rediminue ». L'interaction est longue et fastidieuse, mais on identifie que le « x » est bien intégré dans les propos des élèves et donc, pour nous, peut relever de la ZPD des élèves. A la minute 19, c'est ainsi bien un élève qui dit « bah sur x à un certain moment... »

E. Sur x ça augmente, jusqu'à un nombre et après ça diminue.

[...]

E. Ça augmente jusqu'à 190 et à partir de 200 ça diminue.

D'accord donc on part de 0 jusqu'à 190. Quand on prend x entre 0 à 190 on constate que la surface semble augmenter et quand on se met entre 200 et 370 la surface.

E. Diminue.

Diminue. D'accord donc 0 190 c'est un premier **intervalle** [il montre le tableau déjà écrit à gauche] [...]

On constate que sur l'intervalle 0 190, quand on prend x entre 0 et 190, on constate on a une surface qui est en augmentation et puis sur l'intervalle 200 370 **(20)** on a des surfaces qui sont en diminution. Vous voyez ça?

La discussion se poursuit. Un élève dit « sur x ça augmente, jusqu'à un nombre et après ça diminue ». Et le professeur fait une nouvelle proximité ascendante en utilisant le mot « intervalle » en appui sur l'idée « jusqu'à un certain nombre et après ». Ce terme de « intervalle », que les élèves connaissent déjà, sera repris plus loin par les élèves.

Dans ces épisodes, l'enseignant provoque donc chez les élèves des activités associées à du « fait » ou du « dit », puis il pose des questions en appui sur ces activités (7 fois de suite : les constats sur le tableur, les valeurs qui augmentent puis diminuent, le passage à x , les intervalles, la formulation, et une question « est-on certain? » ci-dessous). L'établissement de la covariation numérique est facilité par les deux colonnes du tableur, qui amènent une perception numérique dynamique ponctuelle de la covariation. Les élèves peuvent relier l'observation sur la première colonne à « x augmente » et la deuxième colonne à « la surface augmente sur un intervalle puis diminue sur un autre intervalle ». Sont donc en jeu des activités sur la covariation (x , surface) qui font appel toujours à du dynamique et du ponctuel pour exprimer la variation mais avec l'utilisation de la dénotation x et une

expression approchante de sa variation à l'aide du langage naturel. On est donc à mi-chemin de la covariation $(x, f(x))$ et de fait encore loin de la formalisation finale qui nécessite un point de vue statique.

Le professeur suscite alors une proximité descendante sur l'intérêt d'avoir des résultats exacts en lien avec la formalisation (il évoque l'algèbre¹³ pour obtenir des résultats précis).

Bon. Est-ce que ça veut dire que le maximum on l'a de façon certaine ici

E. Ce n'est pas précis.

Ça n'est pas précis Pourquoi? [...]

...

E. On résout une inéquation.

Ah On résout une inéquation. Donc, est-ce que c'est le tableur qui va nous la faire?

E. Non.

Voilà donc là qu'est-ce que vous pointez comme, comme heu, comment dire comme différences enfin comme options là? Avec le tableur est-ce qu'on peut avoir un résultat exact?

E. Non, approximation.

On va avoir une approximation alors de plus en plus précise J. a raison parce que plus le pas va être petit (21) plus on va peut-être arriver à donner une valeur précise. Mais M. elle voulait résoudre une inéquation donc revenir à de l'algébrique pur. C'est ça [il montre le tableau]. Voilà. **Alors effectivement, on avait vu ça que avec l'algèbre on peut peut-être essayer d'obtenir un résultat précis.**

Cet extrait illustre cette fois le fait que l'enseignant propose aussi une proximité descendante à partir de connaissances déjà là à propos de l'algèbre (qui permet d'avoir un résultat précis dans notre situation de surface agricole). Il suscite le questionnement sur la précision « de façon certaine » et ça lui permet de conclure « avec l'algèbre, on peut peut-être essayer d'obtenir un résultat précis ».

4.2 A partir du graphique

Dans une deuxième phase, en projetant cette fois le graphique proposé par GéoGébra, le professeur organise le même style de discussion avec des proximités

¹³ La formalisation visée ne relève pas de l'algèbre mais du point de vue du professeur c'est plus compréhensible par les élèves à ce niveau d'enseignement de l'inscrire dans le registre algébrique.

du même type. Nous donnons maintenant quelques extraits discontinus à titre d'illustration :

À votre avis qu'est-ce qu'on peut choisir comme mot pour dire que la courbe monte ou que la fonction prend des [gestes vers le haut] valeurs qui augmentent. Alors on a été cherché un **synonyme d'augmenter**

E : Ascendant.

Un autre E : Croissant.

Croissant

[...], donc là vous pouvez noter **qu'on est encore dans l'exploitation de l'exemple des surfaces agricoles** [...].

[...]

E : Ah ben intervalle 0, 187,5.

Voilà, si on fait confiance à GéoGébra pour l'instant on n'a pas... [il écrit et dit] on va dire que sur l'intervalle $[0, 187,5]$ la fonction f est, alors on va mettre en rouge, donc le mot hein **le mot qu'on a choisi**, on aurait pu en prendre d'autres, c'est croissante [écrit en rouge]. Bon alors après [...]

Le professeur pose d'abord la question sur le « synonyme d'augmenter » pour provoquer la proximité ascendante avec le mot croissant. Cela fonctionne puisque le mot « croissant » est bien en appui sur les élèves. Une proximité descendante est proposée aussitôt pour ramener le « croissant » dans le contexte de la surface agricole. Le professeur instaure donc la connaissance nouvelle en appui sur les activités des élèves. Le mot « intervalle » est retrouvé dans les propos d'un élève et donc il y a bien une proximité ascendante à nouveau quand le professeur dit « sur l'intervalle $[0, 187,5]$ la fonction f est croissante ». De façon parallèle, le professeur accompagne la caractérisation FUG de la définition qu'il cherche à installer par du discours métamathématique (c'est-à-dire sur les mathématiques) « c'est le mot qu'on a choisi ». Il rappelle aussi la covariation qui est en jeu et a été travaillée avant.

le tableur par exemple, **dans le tableur on a vu que les valeurs augmentaient (32) et ça correspond à une courbe qui monte sur le graphique**. Ça c'est des choses aussi qu'il faut retenir. Ça c'est le mot précis et derrière ce mot c'est bien d'avoir des références. Donc, dans le tableur les valeurs augmentent, sur la, sur le dessin la courbe monte. Et la fonction on ne dira pas qu'elle augmente ou qu'elle monte, on dira qu'elle est croissante. Ça c'est le mot précis.

Dans cet autre extrait, il y a une proximité horizontale entre ce qui a été établi plus haut sur le tableur et ce qui est en jeu maintenant sur le graphique. Le processus est toujours très long. Nous en sommes à la minute 32 de la transcription et il y a

eu jusque-là un jeu complexe de proximités horizontales, ascendantes, descendantes. Les activités des élèves, associées à ces proximités, embarquent toujours uniquement du dynamique – numérique et graphique – et rien de statique, qui préparerait la définition formalisée. Elle mettent toutefois en jeu la dialectique « ponctuel-global », en appui sur le tableur qui met l'accent sur le ponctuel (discret) puis sur le graphique qui met l'accent sur le global (et le continu), avec l'intervalle.

On n'a cependant toujours pas $f(x)$, même s'il est là en germe, car les activités des élèves sont inscrites dans le cadre fonctionnel grâce à la tâche d'introduction et son exploitation. Le vocabulaire et des commentaires métamathématiques pour justifier l'aspect FUG(O) sont présents, notamment « on décrit les phénomènes par des mots, des mots précis », de l'ordre de l'importance de la formalisation en fait.

4.3 L'apparition de la définition formalisée

On en vient à une troisième phase qui prépare la définition formalisée plus directement.

(34) Alors maintenant on n'a pas répondu à sa question : comment ça se traduit ça. **Ça se visualise en courbe qui monte ou qui descend ou bien en tableau où des valeurs augmentent ou des valeurs diminuent.** Maintenant il faudrait qu'on soit capable de dire ça en termes algébriques...

[...] [il montre le mot « croissant » sur le tableau].

E. ... inférieur.

Mais cette phrase-là **vous êtes d'accord qu'elle n'est pas très opérationnelle en termes de calcul.** C'est du constat, c'est une observation. On utilise le signe comme ça (<) c'est ça? (36).

[...]

(39) Dans une fonction, il y a x et il y a y , il y a x et il y a $f(x)$. Oui alors, mais là j'essaie de voir quelque chose qui serait général, c'est-à-dire sur cet exemple de donner une définition de fonction croissante qui soit une définition générale.

E... sur l'intervalle 0, 187,5 plus x augmente plus y augmente aussi.

Alors plus x augmente plus y augmente. Est-ce que ça ça vous paraît une bonne description? Voilà. Alors ça c'est nouveau plus x augmente plus y augmente. Ça est-ce qu'on peut mettre ça en algèbre? C'est-à-dire écrire ça avec des symboles. Peut-être ce symbole-là [il montre <] il peut être utile.

L'enseignant propose d'abord une proximité horizontale pour relier les deux registres en jeu associé aux deux perspectives en jeu « On visualise en courbe qui monte ou qui descend (global dynamique), ou bien en tableau où des valeurs

augmentent ou des valeurs diminuent » (ponctuel dynamique). Le professeur montre le mot « croissant » sur le tableau. C'est à nouveau une façon de relancer et provoquer de l'activité chez les élèves, en l'occurrence de l'activité sur le changement de registre. De fait, l'un des élèves propose « inférieur », ce qui permet à nouveau au professeur de proposer une proximité ascendante appuyée sur « inférieur ».

Il est plus incertain de dire si « $f(x)$ » dans « il y a $f(x)$ » arrive dans une proximité parce que même s'il a été rencontré dans la première phase avec la colonne du tableur, il n'est toujours pas repris par l'élève à ce moment-là. Ce qui est repris par un élève, c'est « sur l'intervalle 0, 187,5 plus x augmente, plus y augmente aussi ». C'est toutefois déjà un bon appui pour la formalisation. On observe que le professeur reprend la formulation avec le « y » de l'élève et non pas le « $f(x)$ ». Il juge peut-être que c'est encore trop tôt. C'est d'ailleurs là que les élèves décrochent et que le discours ne sera plus en proximité comme l'illustre les passages suivants dans lesquels les élèves ont disparu de l'interaction.

[...] (41) x augmente, ça veut dire quoi? **Ça veut dire que x est de plus en plus grand? [ponctuel dynamique]... Ça veut dire que quand x est de plus en plus grand, en même temps $f(x)$ aussi [covariation ($x, f(x)$)].** Alors le problème c'est que c'est ça qui est compliqué. Cet x augmente de plus en plus. Comment est-ce qu'on peut traduire ça avec ce symbole-là [montre $<$]?

[...]

(45) Qu'est-ce que ça veut dire x augmente? Ça veut dire quand je prends **des valeurs de x de plus en plus grandes [ponctuel dynamique]**, des valeurs de x de plus en plus grandes. Là il y a combien de valeurs de x au tableau?

E.

Ben là on a écrit un x – si je dis je prends des valeurs de x de plus en plus grandes, il faut que j'en prenne au moins **[montre deux doigts] [vers le statique ponctuel]**.

E. deux.

Deux, **sachant qu'il y en a une qui sera plus petite que l'autre [statique ponctuel ordonné]**. Alors deux valeurs de x sachant qu'il y en a une qui est plus petite que l'autre comment ça va s'écrire? Déjà deux valeurs de x , comment on les écrit deux valeurs de x : si j'ai deux valeurs de x différentes, si j'écris ça x , x est-ce que c'est deux valeurs de x différentes?

Le discours se fait beaucoup plus sans réel appui sur les élèves, ni en amont, ni en aval. Il semble que l'enseignant a été au bout des proximités possibles. Il introduit l'aspect covariation x - $f(x)$ à une dimension, mais surtout le passage du ponctuel dynamique au ponctuel statique, puis encore au ponctuel statique ordonné.

Un élève réapparaît dans l'interaction et dit « deux » quand le professeur montre deux doigts. À partir de là, on va retrouver des proximités ascendantes, c'est-à-dire des appuis sur les élèves pour continuer la formalisation. En effet, tout le matériel est présent (mais est-ce bien en résonance avec la ZPD des élèves étant donné le passage sans proximités?), deux valeurs de x dans un intervalle, le signe $<$ pour les ordonner, les $f(x)$ qui leur correspondent qui sont ordonnés aussi. La notation indicielle x_1 et x_2 ne semble pas gêner un élève qui l'introduit mais qu'en est-il des autres? Reste la quantification universelle à nouveau problématique (deuxième astuce), ci-dessous.

Est-ce que ce que j'ai fait là, évidemment c'est des exemples, **est-ce que c'est valable quels que soient [vers la quantification] les nombres x_1 x_2 que je prends dans l'intervalle** à condition que x_1 soit plus petit que x_2 ? (50) Est-ce que si je prends n'importe quel x_1 plus petit que n'importe quel x_2 dans cet intervalle, j'aurais à chaque fois $f(x_1)$ plus petit que $f(x_2)$.

E. oui, ben oui, ben oui.

Donc ça pourrait être une bonne façon de traduire que **la courbe monte** par exemple et **c'est généralisable à n'importe quelle fonction** [méta sur l'aspect G]. **Autrement dit, une fonction est croissante sur un intervalle si quelque que soient les réels x_1 x_2 qu'on prend dans l'intervalle, à partir du moment où x_1 est plus petit que x_2 , $f(x_1)$ est plus petit que $f(x_2)$.**

On est à la minute 50. Le professeur occasionne une proximité descendante, quand il rapproche ce qu'il vient d'établir, même si la formalisation est encore incomplète, de « la courbe monte » (et comme les élèves ont eu de l'activité graphique préalable, c'est un bien rapprochement entre le nouveau visé et les activités graphiques des élèves). On trouve enfin la quantification qui reste un nouveau coup de force sans appui sur les élèves – comme on s'y attendait vu le relief – car c'est le deuxième éclat de génie du mathématicien pour retrouver du global par la quantification universelle, qui est trop difficile pour pouvoir venir des élèves et s'y appuyer.

Au final, le professeur introduit l'étude de la variation d'une grandeur (la surface d'un champ) en fonction d'une autre (la longueur du côté), liée à une figure géométrique (rectangle modélisant le champ). Il s'agit de chercher si toutes les surfaces sont égales puis s'il y a un maximum. La modélisation algébrique est laissée aux élèves, même si elle est aidée par le professeur – d'où l'introduction dans leur activité mathématique d'une fonction du second degré explicite, qui va permettre une amorce algébrique. Mais, dans la première séance en demi-groupe, les élèves ne vont pas au bout de l'activité en ce qui concerne les variations, même pas évoquées dans la tâche d'introduction. Dans la deuxième séance, l'activité des élèves les conduit grâce aux questions de l'enseignant à une étude numérique puis

graphique – avec alors une inévitable approximation des intervalles en jeu qui peut motiver l'introduction de l'algébrique, même si l'étude ne peut être menée jusqu'au bout. Cette reconnaissance de l'approximation, explicitée, joue comme prétexte pour faire réfléchir les élèves à une formalisation nouvelle « exacte ». L'autre prétexte avancé est de s'affranchir de la courbe ou des valeurs pour une étude « intrinsèque » algébrique (voir une élève qui a parlé d'inéquation). Mais les élèves n'arrivent pas jusqu'au bout... malgré les efforts du professeur qui ne se prive pas de nombreuses proximités ascendantes, descendantes et horizontales! Il tente de faire « sortir » la définition mais en vain. Mais dès que la piste de comparer deux valeurs de x est donnée (il lève deux doigts), c'est repris efficacement par les élèves et l'enseignant conclut en ajoutant « pour tout couple » et en s'appuyant sur la courbe pour « vérifier ».

Conclusion

Dans notre approche théorique, l'activité des élèves est étudiée en classe ordinaire, en relation étroite avec les pratiques du professeur, indissociables. Nous avons fait le choix pour cet article de développer la notion de « proximités discursives », adaptée ici pour rendre compte des liens que l'enseignant développe avec « ce qui vient des élèves » pendant les moments d'exposition de connaissances. Selon nos choix théoriques, l'efficacité de ces moments de cours dépendrait ainsi, au moins en partie, des occasions et de la qualité des proximités discursives, sous forme d'échanges avec les élèves et entre eux, les reprises, les explications ou explicitations. Sont en jeu les relations entre ce qui concerne le savoir visé, ou bien les activités nouvelles à développer, et les activités possibles – voire effectives – des élèves, en amont ou en aval, et leurs connaissances déjà-là liées à des activités préalables, sur une tâche d'introduction par exemple.

Bien sûr il conviendrait de développer davantage ce type d'étude avec d'autres contenus et d'autres contextes. Mais notre exemple met en jeu l'exposition de connaissances qui présentent un caractère FUG(O). Il permet de montrer qu'un déroulement truffé de proximités, en tous genres, semble faciliter le suivi des élèves (un certain nombre en tous cas) ainsi qu'un début de prise de sens, comme en témoignent les réponses des élèves aux questions de l'enseignant et leurs interventions spontanées. Mais cela dévoile aussi les limites de ces proximités lorsque le contenu visé est trop loin de ce que savent les élèves, dont nous pensons, compte tenu du relief sur la notion, qu'ils ne peuvent seuls retrouver le formalisme conventionnel : l'exemple montre que, comme prévu dans le relief sur l'enseignement de la notion visée, c'est un cas où seul l'enseignant peut donner *in fine* la formalisation attendue, quitte d'ailleurs à multiplier ensuite des proximités descendantes et horizontales.

Par ailleurs, on ne peut attendre des seuls moments de cours l'acquisition visée pour les élèves : il manque de nombreuses mises en fonctionnement suffisamment variées qui contribuent à développer des activités y menant. Deux enjeux se dessinent ainsi pour les déroulements des cours, outre le choix d'un contenu adapté au programme, à la progression de la classe et aux horaires : d'une part, faire un exposé que les élèves puissent suivre et investir en partie, et d'autre part, donner aux élèves les moyens d'appliquer ce cours, dans des tâches diverses, permettant de continuer le processus engagé, sans doute encore assez formel. On pourrait dire que quand un élève entend un cours, il n'a pas encore la possibilité de conceptualiser complètement ce qui est en jeu. Ce qu'il entend, c'est ce qu'on pourrait appeler en poursuivant selon Vygotski, des pseudo-concepts, plus proches de signifiants (étiquettes, mots et groupes de mots) que de signifiés. Ce sera grâce aux activités que le professeur lui fait faire ensuite, ou peut-être qu'il a déjà développées avant, grâce aux liens qu'on peut établir entre ces activités et le cours (toutes les proximités !), qu'on peut supposer que chaque élève va transformer ce début, ce pseudo-concept en concept.

L'hypothèse qui autorise l'emploi de cet indicateur « proximités discursives » est évidemment inspirée du modèle de la ZPD. Dès lors que l'enseignant s'appuie sur des connaissances déjà là ou bien des activités déjà développées (ou du moins supposées telles) pour présenter des connaissances nouvelles, le discours est supposé être entendu, mieux approprié et intériorisé. Toutefois, comme nous l'avons déjà signalé, le passage de l'individuel au collectif et vice versa est loin d'être résolu. Nos recherches doivent donc continuer, sur d'autres contenus, et en essayant de se donner des moyens pour apprécier certains effets de choix différents de l'enseignant.

Si on revient au niveau théorique et méthodologique, nous partageons notre ancrage vygotkien avec d'autres approches. C'est le cas spécifiquement de la théorie de la médiation sémiotique (Bartolini Bussi et Mariotti, 2008). La notion de chaîne sémiotique, notamment, fait écho à ce que nous avons tenté d'identifier dans nos analyses des interactions, les proximités discursives pouvant être vues comme des moyens pour le professeur de prolonger les chaînes sémiotiques. La perspective est aussi la même, très locale et très contextualisée à une séance, voire à un moment d'interaction. De la TMS peuvent être importés des outils « micro » liés aux types de signes véhiculés par l'interaction et aux différents types d'actions que met en œuvre le professeur pour entretenir la chaîne sémiotique : faire faire des retours à la tâche, focaliser, demander une synthèse... qui sont autant de façons non encore distinguées dans nos travaux, de provoquer des activités élèves en vue d'un appui pour des proximités discursives du professeur. En replaçant enfin nos analyses dans le cadre plus vaste de la théorie de l'activité, nous tentons

de nous donner les moyens d'articuler de telles analyses « micro » au niveau plus « macro » de la classe, de son contexte et de son histoire. Cela rejoint une démarche aussi développée par Jaworski et Potari (2009) et aussi inscrite en théorie de l'activité.

Références

- Arzarello, F. et Robutti, O. (2004). Approaching functions through motion experiments. *Educational Studies in Mathematics*, 57(3), 305-308.
- Bartolini Bussi, M. G., et Mariotti, M. A. (2008). Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom: Artefacts and Signs after a Vygotskian Perspective. Dans L. D. English, M. Bartolini Bussi, G. A. Jones, R. A. Lesh, B. Sriraman et D. Tirosh (dir.), *Handbook of International research in Mathematics education* (2^e éd., p. 746-783). Routledge Taylor & Francis Group.
- Bloch I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu: what forms of knowledge enable students to conjecture and prove. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 3-28. <https://doi.org/10.1023/A:1023696731950>
- Bridoux, S., Hache, C., Grenier-Boley, N. et Robert, A. (2016). Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques, analyse et exemples. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 21, 187-233. <https://doi.org/10.4000/adsc.813>
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer Academic Publishers.
- Cabañas Ramírez N. O., Locia Espinoza, E., Morales Carballo, A. et Merino Cruz, H. (2020a). Didactic engineering for the treatment of variation of functions in pre-university-level: the increasing and decreasing cases *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 5(2). <https://doi.org/10.29333/pr/7846>
- Cabañas Ramírez, N. O., Locia Espinoza, E. et Morales Carballo, A. (2020b). Didactic Engineering in the Study of the Sense of Variation of Functions: Preliminary Analysis. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(2). <https://doi.org/10.29333/iejme/6261>
- Chorlay R. (2007). La multiplicité des points de vue en analyse élémentaire comme construit historique. Dans E. Barbin et D. Bénard (dir.), *Histoire et enseignement des mathématiques : erreurs, rigueurs, raisonnements* (p. 203-227). Institut national de la recherche pédagogique.
- Chorlay R. (2011). "Local-global": the first twenty years. *Archives for history for exact sciences*, 65(1), 1-66. <https://doi.org/10.1007/s00407-010-0070-1>

Cole, M. et Wertsch J. (1996). Beyond the individual-social antinomy in discussions of Piaget and Vygotski. *Human Development*, 39(5), 250-256.
<https://psycnet.apa.org/doi/10.1159/000278475>

Corriveau, C. et Tanguay, D. (2007). Formalisme accru du secondaire au collégial : les cours d'algèbre linéaire comme indicateurs, *Bulletin AMQ*, XLVII(1), 6-25.

Dorier, J-L. (dir.). (1997). *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Éditions La Pensée Sauvage.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, (5), 37-65.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 10, 5-53.

Engeström, Y., Miettinen, R. et Punamäki, R. L. (dir.). (1999). *Perspective on activity theory*. Cambridge University Press.

Galperine, P. (1966). Essai sur la formation par étapes des actions et des concepts. Dans A. Leontiev, A. Luria et A. Smirnov (dir.), *Recherches psychologiques en URSS* (p. 114-132). Editions du Progrès.

Hitt, F. et González-Martín, A.S. (2016). Generalization, covariation, functions, and Calculus. Dans A. Gutiérrez, G. L. Leder et P. Boero (dir.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. The Journey Continues* (p. 3-38). Sense Publishers

Jaworski, B. et Potari, D. (2009). Bridging the macro- and micro-divide: using an activity theory model to capture sociocultural complexity in mathematics teaching and its development. *Educational Studies in Mathematics*, 72, 219-236.
<https://doi.org/10.1007/s10649-009-9190-4>

Leontiev, A. (1984). *Activité, Conscience, Personnalité*. Éditions du Progrès (1^{re} édition, 1975, en russe).

Ministère de l'Éducation nationale. (2009). *Bulletin officiel de l'éducation nationale, de la jeunesse et des sports. Bulletin officiel n° 31 du 23 août 2009*.

Montoya Delgadillo, E., Páez Murillo, R., Vandebrouck, F. et Vivier, L. (2018). Deconstruction with localization perspective in the learning of analysis. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 4, 139-160.
<https://doi.org/10.1007/s40753-017-0068-z>

Passaro, V. (2020). Analyse du déploiement d'un raisonnement covariationnel en situation chez des élèves de 15 à 18 ans. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 20(3), 462-484. <http://doi.org/10.1007/s42330-020-00101-x>

René de Cotret, S. (1998). Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendante. *Petit x*, 17, 5-27.

Robert, A., Penninckx, J. et Lattuati, M. (2012). *Une caméra au fond de la classe de mathématiques. (Se) former au métier d'enseignant du secondaire à partir d'analyses de vidéos*. Presses Universitaires de Franche-Comté.

Robert A. et Vandebrouck, F. (2014). Proximités en acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en didactique des mathématiques*, 34(2/3), 239-285.

Rogalski, J. (2008). Le cadre général de la théorie de l'activité. Une perspective de psychologie ergonomique. Dans F. Vandebrouck (dir.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (p. 23-30). Octarès Editions.

Rogalski, M. (2008). Les rapports entre local et global : mathématiques, rôle en physique élémentaire, questions didactiques. Dans L. Viennot (dir.) *Didactique, épistémologie et histoire des sciences* (p. 61-87). Presses universitaires de France.

Simon, M. A., Kara, M., Placa, N. et Avitzur, A. (2018). Towards an integrated theory of mathematics conceptual learning and instructional design: The Learning Through Activity theoretical framework. *The Journal of Mathematical Behavior*, 52, 95-112. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.04.002>

Valero Cázares, M. S. (2003). *Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca del análisis de funciones en situación escolar* [thèse de doctorat, Instituto Politécnico Nacional]. Tesis. <http://tesis.ipn.mx/handle/123456789/974>

Vandebrouck, F. (dir.). (2008). *La classe de mathématique : activité des élèves et pratiques des enseignants*. Éditions Octarès.

Vandebrouck, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions, *Annales de didactique et de sciences cognitives de Strasbourg*, 16, 149-185.

Vandebrouck, F. (dir.). (2013). *Mathematics classrooms: students' activities and teachers' practices*. Sense Publishers.

Vandebrouck, F. et Robert, A. (2017). Activités mathématiques des élèves avec les technologies numériques. *Recherches en didactique des mathématiques* 37(2-3), 333-382.

Vandebrouck F. (2018). Activity theory in French didactic research. Dans G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt, B. Xu (dir.), *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education* (p. 679-698) ICME-13 Monographs. Springer.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10 (2.3), 133-170.

Vygotski, L. (1997). *Pensée et langage*. Éditions La Dispute. (Ouvrage original publié en 1934)



La dialectique du générique et du singulier dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique

Corine CASTELA

LDAR, Université de Rouen, Université de Paris, Université Paris-Est Créteil, CY Cergy
Paris Université, Université de Lille, France

Corine.castela@univ-rouen.fr

Résumé : Cet article restitue les principaux jalons d'un parcours d'étude suscité par la question : comment la théorie anthropologique du didactique prend-elle en compte la dialectique généricité-singularité au sein des mathématiques? Cette question étant née d'une rencontre avec la modélisation des mathématiques proposée par Sensevy, on en donne une présentation détaillée. Le reste du texte présente d'abord les éléments de réponse à la question, connus de l'auteur avant son enquête, puis ceux qu'elle y a rencontrés. Aux côtés des contributions centrales de Chevallard que sont les organisations praxéologiques et la pédagogie de l'enquête sont introduits des travaux moins connus sur la mémoire didactique et sur l'utilisation du modèle praxéologique dans les environnements informatiques pour l'apprentissage humain (EIAH). Un exemple de résolution d'une tâche géométrique nourrit les réflexions sur la dialectique singularité/généricité.

Mots-clés : Théorie anthropologique du didactique, modélisation des mathématiques, organisation praxéologique, résolution de problèmes

Taking into account the dialectic of the generic and the singular in the framework of the Anthropological Theory of Didactics

Abstract: This article presents the main milestones of a study aiming to answer the question: How does the Anthropological Theory of Didactics take into account the singularity/genericity dialectic within mathematics? To respond to this question, born of an encounter with the modeling of mathematics proposed by Sensevy, we begin with a detailed presentation of this modeling. The remainder of the text presents avenues for answering the question asked by the author before beginning her investigation, as well as new ones encountered along the way. Alongside the central contributions of Chevallard, namely praxeological organizations and the pedagogy of inquiry, we introduce lesser-

known works on didactic memory and the use of the praxeological model in the TEL. An example of solving a geometric task paves the way for further reflection on the singularity/genericity dialectic.

Keywords: Anthropological Theory of Didactics, mathematical modeling, praxeological organization, problem solving

Introduction

Cet article a été initié par une invitation à participer au numéro spécial de la revue consacré à l'étude et à la modélisation de l'activité mathématique de la personne apprenante. Or, la nature même de la didactique conduit à devoir d'abord modéliser les mathématiques. Une telle réflexion sur les mathématiques a été au cœur de mes premiers travaux, elle a fondé les recherches sur la résolution de problèmes et le travail personnel des élèves qui, sans doute, m'ont valu cette invitation à participer au numéro spécial (Castela, 2008b, 2009, 2011). Dans ces travaux, l'approche épistémologique adoptée privilégie les dimensions génériques de l'activité mathématique. Ceci m'a conduite à adopter, à partir de 2007, le cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD), en la considérant comme particulièrement bien outillée avec les concepts d'institution et d'organisation praxéologique pour modéliser les phénomènes génériques. Ces objets et le rapport que j'ai entretenu avec eux au fil de ma biographie de chercheure sont l'objet de la première partie. Mais j'ai saisi l'occasion offerte par la revue pour me confronter à des travaux plus récents, en comptant sur les perturbations induites pour avancer. Certains éléments de la théorie de l'action conjointe en didactique (TACD) ont joué ce rôle. La modélisation proposée par Sensevy (2011), présentée dans la partie 2, prend en compte à la fois les dimensions génériques et les dimensions singulières des activités mathématiques considérées comme jeux de savoir. Ceci me conduit à porter un regard nouveau sur la résolution de problèmes comme sur la TAD, avec le questionnement suivant : comment analyser les relations entre généricité et singularité au sein de la TAD? Suscitée par le besoin d'étudier la notion d'affordance utilisée par Sensevy, la partie 3 revient sur la dimension « généricité » des tâches mathématiques et sur les constructions cognitives qu'elle permet en introduisant le travail de Matheron et Araya-Chacón consacré à la mémoire didactique. La partie 4 s'intéresse à la prise en compte de la singularité, plus précisément des éléments qui distinguent les tâches entre elles en sollicitant les recherches de Chaachoua et Jolivet dans le cadre de la théorie T4TEL¹. Puis l'analyse du traitement d'une tâche d'alignement permet de mesurer les conséquences sur l'activité mathématique du caractère non algorithmique de

¹ T4TEL : T4 renvoie au quadruplet praxéologique (Type de tâches, Technique, Technologie, Théorie) et TEL pour *Technology Enhanced Learning*.

nombreuses techniques. Nous terminons en présentant la pédagogie de l'enquête développée par la TAD en tant que modélisation des activités mathématiques comme processus de production de réponses à des questions. C'est l'occasion de formaliser le travail réalisé dans les sections 4.3 et 4.4 sous la forme d'une grille d'analyse permettant l'étude de textes de démonstration de théorèmes ou de solution de problèmes. Cet article est donc aussi un retour sur mes travaux sur la résolution de problèmes en mathématiques et le travail personnel.

1. Premières prises en compte des dimensions génériques des activités mathématiques par la TAD

Cette partie s'intéresse succinctement aux principaux éléments de l'univers cognitif personnel² relatif à la TAD (Chevallard, 2003) depuis lequel j'ai abordé l'enquête présentée dans ce texte. Autrement dit, quels objets de cette théorie ont été au cœur de mes recherches et quels rapports personnels j'ai construits avec eux, du moins la partie d'entre eux soumise à l'examen de la communauté didactique par la publication d'articles? Cette partie précisera également le sens attribué aux termes « singularité » et « généricité ».

1.1 Institution et rapport institutionnel

Le concept d'institution est l'un des concepts primitifs de la TAD (Chevallard, 1992). Une institution I est une organisation sociale stable au sein de laquelle sont réalisées diverses activités pour lesquelles I fournit des ressources matérielles, organisationnelles et cognitives. Les personnes qui entrent dans I pour y occuper une certaine position³ et accomplir certaines activités sont soumises à un système de contraintes institutionnelles. Ceci est conceptualisé en termes de rapports institutionnels des différentes positions aux objets présents dans I et de sujet de l'institution : une personne qui souhaite opérer durablement dans I en position p doit se soumettre aux attentes définies par l'ensemble des rapports institutionnels pour cette position, elle s'assujettit à I . C'est en tant que sujet, et non à partir des rapports personnels construits au cours de sa biographie, qu'elle agit dans l'institution. Ceci suppose en général une phase d'apprentissage institutionnel.

Cette approche privilégie la généricité des modes d'agir et de penser des sujets d'une institution dans une position donnée, laissant en arrière-plan la singularité des personnes assujetties. Autrement dit, elle fait l'hypothèse que les aspects

² Pour la TAD, l'univers cognitif d'une personne X est l'ensemble des objets connus de X associés aux rapports personnels que X entretient avec ces objets.

³ Exemple, dans l'institution scolaire, se distinguent les positions d'élève, de professeur, de directeur, etc.

invariants qui découlent des ressources et contraintes institutionnelles l'emportent sur les variations nées des différences interpersonnelles.

1.2 Organisations praxéologiques

Dans le cadre de l'approche institutionnelle définie précédemment, la TAD postule que toute activité humaine procède d'une praxéologie.

En toute institution⁴, l'activité des personnes occupant une position donnée se décline en différents *types de tâches* T^5 , accomplis au moyen d'une certaine *manière de faire*, ou *technique*, τ . Le couple $[T, \tau]$ constitue par définition, un savoir-faire. Mais un tel savoir-faire ne saurait vivre à l'état isolé : il appelle un *environnement technologico-théorique* $[\theta/\Theta]$, θ , « discours » rationnel (*logos*) censé justifier et rendre intelligible la technique (*tekhnê*), et à son tour justifié et éclairé par une théorie, Θ , généralement évanouissante. Le système de ces quatre composantes, noté $[T, \tau, \theta, \Theta]$, constitue alors une *organisation praxéologique* ou *praxéologie*. (Chevallard, 1997, p. 38)

À propos de la notion de technique, ajoutons deux précisions sur lesquelles nous reviendrons dans la suite (4.4) :

une technique – une « manière de faire » – ne réussit que sur une partie $P(\tau)$ des tâches du type T auquel elle est relative, partie qu'on nomme portée de la technique. (Chevallard, 1999, p. 225)

Il faut entendre le terme de technique en un sens très large, comme une « manière de faire » particulière, et non selon l'acception courante de procédé structuré et méthodique, voire algorithmique. (Bosch et Chevallard, 1999, p. 84)

1.2.1 Type de tâches, singularité et genericité

Ce premier niveau d'organisation praxéologique souligne donc le rôle joué dans le développement humain par la recherche de relations dans l'ensemble des tâches problématiques rencontrées, déjà traitées ou à traiter. Parmi des tâches singulières, c'est-à-dire distinguées deux à deux en au moins une dimension, il s'agit de repérer un sous-ensemble de tâches dotées de points communs qui rendent envisageable le transfert d'une technique de résolution de tâches déjà traitées à d'autres.

Le couple singularité-genericité est donc sous-jacent à la notion de type de tâches puisque l'intérêt d'un type réside : a) dans le fait qu'il contient plus d'une tâche, b) dans l'hypothétique transférabilité des modes de traitement de certaines tâches

⁴ Le modèle praxéologique est également considéré comme pertinent pour rendre compte de la science d'une pratique qu'une personne porte en elle (Chevallard, 2007, p. 714)

⁵ Dans cet article, les passages en italique dans une citation sont de l'auteur de la citation.

à d'autres distinctes, ce dont rend compte la composante « technique » du modèle. Mais les éléments qui singularisent les tâches ont des effets sur leur traitement qui ne peuvent être tenus pour négligeables, comme l'attestent les deux précisions relatives à la notion de technique.

Comme le montrent les exemples suivants, ces éléments et leur caractère différenciateur dépendent de l'institution de référence. Considérons les types de tâches suivants : T « Vérifier que la somme des mesures des angles intérieurs d'un terrain plat de forme triangulaire est égale à $180^\circ \pm 1' \cdot \sqrt{3}$ »; T^* « Vérifier que la somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle du plan est égale à 180° ». Dans l'institution de la profession de géomètre – topographe dont relève T , la technique consiste à relever les mesures d'angles, puis à en faire la somme. Plusieurs éléments ont des effets considérés par la profession comme non négligeables : le terrain et son environnement (taille, présence d'obstacles, etc.), l'instrument (type, ancienneté de son passage au contrôle métrologique), les opérateurs (formation, niveau de fatigue au moment de l'intervention). Il en résulte qu'à chaque triplet (terrain, instrument, opérateurs) correspond une tâche dont le traitement passe par l'implémentation effective de la technique⁶. Inversement, dans une institution mathématique académique ou dans l'enseignement secondaire français de mathématiques, T^* est réduit à une seule tâche « Démontrer le résultat en toute généralité ». Ceci est permis par la nature idéalisée des objets de la géométrie considérée⁷, dont les mesures d'angles supposées connues exactement, et par l'existence de savoirs traitant de classes d'objets. Ces exemples illustrent un phénomène sur lequel insiste la TAD (Chevallard, 1991, 2007) : toute praxéologie reconnue dans une institution en porte la marque. C'est, selon l'expression empruntée par Chevallard (2006, p. 23) à l'anthropologue Mauss, une idiosyncrasie sociale, ce que je précise en parlant d'idiosyncrasie institutionnelle (Castela, 2020).

1.2.2 Niveaux supérieurs d'organisations praxéologiques

La citation de Chevallard (1997) rappelée au début de cette section définit une praxéologie ponctuelle, associée à un seul savoir-faire $[T, \tau]$. « L'amalgamation de plusieurs praxéologies ponctuelles créera une praxéologie « locale », « régionale » ou « globale », selon que l'élément amalgamant est, respectivement, la technologie, la théorie ou la position institutionnelle considérée » (Bosch et Chevallard, 1999, p. 86). Dans le cas des mathématiques, un usage répandu est de

⁶ Voir (Castela et Romo Vázquez, 2023) pour l'analyse d'une situation plus complexe de topographie et une extension de la réflexion sur la variabilité au contexte industriel.

⁷ Ce serait différent à l'école primaire dans le cadre de la géométrie instrumentée.

parler d'Organisation Mathématique et d'utiliser la notation OM, déclinée en OMP, OML, etc.

En résumé, cette première modélisation des mathématiques en termes d'organisations praxéologiques globales confère aux savoir-faire $[T, \tau]$ qui y figurent une présence équivalente à celle qui est attribuée aux savoirs $[\theta/\Theta]$. Elle rend compte des ressources mathématiques mises à disposition dans une institution⁸ donnée pour traiter des problèmes nouveaux, mais en dit généralement peu du processus de résolution lui-même.

1.3 Institutions et praxéologies dans les travaux de l'auteur

Presque toutes mes recherches s'intéressent à l'utilisation des mathématiques dans des activités qui peuvent être internes aux mathématiques (résolution de problèmes nouveaux) ou relever d'autres domaines scientifiques ou professionnels.

J'ai d'abord travaillé sur le premier cas. Mon expérience d'étudiante puis de chercheuse en mathématiques m'a conduite à accorder un rôle primordial aux aspects génériques de la résolution de problèmes en mathématiques. Cette approche n'est pas unanime en Éducation Mathématique (voir Castela, 2011, chapitre 1 pour une analyse des différentes conceptions du *Problem Solving*). Elle attribue une importance cruciale à un corpus de savoirs pratiques dont le savoir théorique ne rend que très incomplètement compte (Castela, 2000, 2008a). L'identification de types de tâches et le repérage de techniques associées en font partie, ce qui explique qu'absente de l'article de 2000, la modélisation praxéologique soit au cœur de celui de 2008. Mais les usages majoritaires de ce modèle ne laissaient pas de place à la totalité des savoirs pratiques que je voulais considérer, j'ai donc introduit plusieurs développements.

1.3.1 Organisations mathématiques complexes (OMPC)

Castela (2008a) propose un amalgame des OMP qui prend en compte une réalité déjà présente dans le contexte scolaire du lycée français, a fortiori au sein des mathématiques académiques : plusieurs techniques τ_i peuvent être disponibles pour un type de tâches T . Les OMP $[T, \tau_i, \theta_i, \Theta_i]$, dites simples associées à chaque τ_i sont regroupées, formant une OMP dite complexe $[T, (\tau_i, \theta_i, \Theta_i)_i, \theta^T]$ où θ^T , la

⁸ Ces institutions sont de trois types : institutions de recherche mathématique, c'est-à-dire, socialement reconnues comme productrices de mathématiques; institutions d'enseignement; institutions utilisatrices de mathématiques. La circulation des OM produites par les premières vers les autres se traduit par des phénomènes transpositifs, que les limites de cet article ne permettent pas de développer davantage. Voir la postface de Chevallard (1991) et Castela et Romo Vázquez (2011).

technologie associée à T , situe les techniques les unes par rapport aux autres et cerne leurs domaines d'efficacité. La disponibilité d'une telle organisation permet d'envisager, face à une tâche nouvelle relevant de T , la diversité des techniques possibles et de sélectionner les mieux adaptées à la singularité de la tâche (voir 4.3-4.4 pour un exemple)

1.3.2 Composante pratique de la technologie

Par ailleurs, les recherches utilisant le modèle praxéologique en mathématiques privilégiaient dans leur description de la technologie d'une *praxis* $[T, \tau]$, la fonction validation, autrement dit les savoirs théoriques en jeu dans les démonstrations qui prouvent que la technique produit bien ce qu'on attend d'elle. J'ai donc distingué, au sein des praxéologies personnelles autant qu'institutionnelles, une composante pratique de la technologie, développée par les utilisateurs de la technique et visant à en favoriser l'emploi (Castela, 2008a). Quels savoirs contient cette composante? Quelles fonctions peuvent-ils remplir? L'exemple suivant (Castela, 2008a, p. 147) relatif à la technique d'intégration par parties pour le type de tâches « Calculer une intégrale $\int_a^b u(t).dt$ » en donne une idée et illustre les six fonctions distinguées par Castela et Romo Vázquez (2011) : décrire, valider, faciliter, expliquer, motiver et évaluer.

- Décrire : choisir deux fonctions f et g , dont les dérivées sont continues, telles que $u = f.g'$ et appliquer la formule

$$\int_a^b f g'(t) dt = [f(t).g(t)]_a^b - \int_a^b f' g(t) dt$$

- Valider : théorème d'intégrations par parties
- Faciliter : une présentation invariante des calculs telle que $\frac{f(x)}{g'(x)} \frac{f'(x)}{g(x)}$ peut aider à se souvenir de la formule et éviter les erreurs
- Motiver le choix des fonctions : f et g sont choisies de façon à ce que dériver f élimine le problème qui empêche de calculer une primitive de u
- Expliquer l'efficacité : cette technique peut être efficace car, dans certains cas, dériver change la nature de la fonction (ex. $\ln$)⁹
- Évaluer : Cette technique est adaptée quand la fonction à intégrer est un produit, mais elle ne fonctionne pas toujours, il y a d'autres techniques (ex. $u = f'.f^n$).

⁹ Motiver et expliquer sont deux dimensions complémentaires de la fonction « rendre intelligible » présente dans la citation de Chevallard (1997, p. 38) alors que « valider » est un autre terme pour « justifier ».

Cet exemple est interne aux mathématiques. Cependant, la recherche qui a débouché sur l'introduction des six fonctions d'une technologie concerne l'utilisation de la transformation de Lagrange en automatique. Plusieurs institutions sont impliquées : institution de production de mathématiques, sciences de l'ingénieur utilisatrices de mathématiques et institutions de formation d'ingénieurs. La circulation des OM produites par les premières vers les autres se traduit par des phénomènes transpositifs, dont la production d'une composante technologique pratique spécifique des utilisateurs. C'est un thème que les limites de cet article empêchent de développer (voir (Chevallard, 1991) et (Castela et Romo Vázquez, 2011, 2023)).

Pour ce qui concerne les activités mathématiques, à la suite d'autres chercheurs, tels ceux qui autour de Robert ont prôné l'introduction d'une composante « méta » dans l'enseignement des mathématiques (Dorier et al., 1997), je considère que des savoirs pratiques émergent explicitement dans la communauté mathématique. Ils ont donc toute légitimité à être intégrés aux organisations praxéologiques des mathématiques savantes, même si, issus de la pratique, ils ne sont pas régis par le même régime de vérité et de validation que les savoirs théoriques. En tant que tels, ils peuvent être reconnus par les institutions d'enseignement, au moins à partir du secondaire et donc y apparaître comme enjeux explicites d'apprentissage. Cette position a donné lieu à de vifs débats opposant dans les années 1980, Brousseau à Robert et au groupe « méta » (Brousseau, 1986, p. 60-64). On retrouve une expression des objections de Brousseau plus récemment dans une intervention de Perrin-Glorian (2021) sur la TACD. Selon elle, les connaissances liées à la pratique ne sont pas des savoirs mathématiques, elles doivent demeurer au niveau personnel, c'est-à-dire ne peuvent être reconnues, décontextualisées et encore moins institutionnalisées dans la classe. Dans ce cas, revient à l'élève la responsabilité de percevoir dans des situations vécues les aspects potentiellement génériques de certaines actions, de les convertir en connaissances méritant d'être provisoirement retenues jusqu'à ce que des emplois efficaces ultérieurs rendent légitime de les instituer à titre personnel; de même, cette responsabilité est à la charge du mathématicien qui tire les leçons de ses expériences. Il s'agit alors du développement de la praxéologie personnelle du mathématicien ou de l'élève. Notons que ce développement suppose que la personne dont il est question regarde son activité passée comme source de ressources pour des activités futures. Or, de nombreux travaux sociologiques et didactiques (de Certeau, 1980; Bautier et Rochex, 1998, 2004; Butlen et Charles-Pézar, 2003; Perrin-Glorian, 1993; Castela, 2008b) ont montré que cette posture dite de « secondarisation » de l'activité n'est pas spontanément adoptée par tous les élèves, ce qui contribue à l'échec scolaire des enfants d'origine populaire. Avec l'objectif de réaliser la

dévolution à tous les élèves de cette posture réflexive, j'ai plaidé pour la présence explicite dans l'enseignement des mathématiques de moments de construction de certains savoirs pratiques en m'appuyant sur l'hypothèse de la légitimité académique d'une composante pratique des technologies.

En résumé, j'ai abordé la lecture de Sensevy (2011) depuis un univers cognitif centré sur le rôle de la généricité dans les activités mathématiques.

2. La notion de savoir au sein de la TACD : jeux épistémiques

L'objectif de cette partie est de présenter la modélisation des mathématiques proposée par la TACD; j'y citerai donc longuement le livre *Le sens du savoir* de Sensevy (2011).

Pour cette théorie, « un savoir est une puissance d'agir, en situation » (Sensevy, 2011, p. 60), « "le savoir (que le professeur fait apprendre)" est modélisé en termes de jeu épistémique » (Sensevy, 2011, p. 123).

Décrire un savoir en termes de jeu (épistémique), c'est nécessairement le penser comme une pratique, certes non réductible à toutes les autres, mais partageant avec toutes les autres des caractéristiques spécifiques de la praxis. Au sein du paradigme didactique, le savoir peut ainsi être systématiquement décrit comme une praxéologie, qui tient dans une solidarité fondamentale, même si elle est empiriquement diversifiée, la pratique et le discours sur la pratique. [...]

Avec la notion de jeu épistémique, qui modélise une pratique de savoir, la TACD [...] va donc entreprendre de voir tout savoir d'abord comme une pratique de savoir (premier mouvement praxéologique), puis comme un jeu (second mouvement praxéologique), avec ses enjeux, ses règles définitoires, ses règles stratégiques, ses stratégies, le gain qu'il permet d'atteindre, les profits symboliques qu'il permet d'obtenir, etc. (Sensevy, 2011, p. 123- 124)

On retrouve donc la modélisation en termes de praxéologie proposée par la TAD. Voyons ce qu'apporte la modélisation en termes de jeu.

L'étude des travaux de Wittgenstein et de Hintikka conduit Sensevy à postuler qu'il existe trois types d'entités permettant de décrire un jeu donné :

- 1) Des règles définitoires (constitutives). Par exemple, aux échecs le fait que le fou joue en diagonale. [...]
- 2) Des règles stratégiques qui peuvent s'exprimer, au moins jusqu'à un certain point, sous une forme propositionnelle, indépendamment du jeu effectivement joué. Par exemple, aux échecs, le fait qu'il est souvent judicieux de placer des tours sur des colonnes ouvertes [...]
- 3) Des stratégies, qui correspondent au fait que dans l'hic et nunc d'une situation, une ou plusieurs règles stratégiques vont être activées pour

jouer – d’une manière qui peut d’ailleurs reconfigurer pour le futur la ou les règle(s) stratégique(s) utilisées ou donner naissance à une nouvelle règle stratégique. (Sensevy, 2011, p. 41)

Pour éclairer les possibilités offertes par cette modélisation quant à la dialectique singularité-généricité, il est important de noter que le terme de « jeu » est ici utilisé pour désigner une partie (voir la formulation « indépendamment du jeu effectivement joué »). Ceci n’est pas le sens utilisé quand on parle du « jeu d’échec », sens que j’utiliserai dans la suite en opposition au terme « partie ». Ceci étant précisé, on voit que les entités de type 1 et 2 se situent au niveau générique du jeu alors que celles de type 3 réfèrent à la singularité de la partie jouée. Disant cela, j’interprète métaphoriquement l’expression *hic et nunc* en considérant qu’elle renvoie à tout ce qui potentiellement peut distinguer deux parties, non seulement le lieu et le moment où elles se déroulent. Le terme « stratégie » semble utilisé pour désigner la coordination de règles stratégiques adaptées à cette singularité.

J’ai distingué des règles définitoires, qui disent comment jouer au jeu, des règles stratégiques, qui disent comment gagner au jeu, et des stratégies, qui résultent de l’actualisation, de la concrétisation, des règles stratégiques dans un milieu donné. (Sensevy, 2011, p. 202)

La distinction règles stratégiques/stratégies rend compte du fait que les premières sont

déformables, reconstruites en situation par les joueurs en analogie avec les situations précédemment rencontrées, dont on repère la forme/le modèle/le pattern/le motif dans la situation actuelle, modèle auquel on *s’accroche* pour agir au sein d’un jeu auquel on est *attaché*. (Sensevy, 2011, p. 39)

Parmi ces stratégies, il y en a de deux sortes :

- des techniques qui permettent de résoudre d’habitude des problèmes précis [en note : On peut penser ces techniques comme s’étageant sur un gradient qui va d’un pôle « algorithme » à un pôle « technique ouverte »];
- des heuristiques, qui sont des manières d’avancer vers la solution d’un problème pour lequel on ignore la ou les techniques précises qui permettent de le régler. (Sensevy, 2011, p. 109)

Je m’interroge sur l’utilisation du terme « technique » pour désigner certaines stratégies telles qu’envisagées par Sensevy. Au sens du modèle praxéologique de la TAD, auquel Sensevy fait lui-même référence, les techniques relèvent plutôt des règles stratégiques. Selon moi, il en est de même des heuristiques (voir par exemple, Schoenfeld, 1985). Les techniques mentionnées par Sensevy ci-dessus seraient donc l’instanciation dans une partie donnée de techniques au sens de la TAD, sens que je conserverai dans la suite, de même que pour les heuristiques

que je considèrerai toujours au niveau générique. Les stratégies peuvent être un mixte technique et heuristique, notamment du fait que la plupart des techniques ne sont pas des algorithmes (voir section 4.4) et que leur portée reste non caractérisée; leur mise en œuvre pour une partie donnée (une tâche pour la TAD) conserve donc une part d'incertitude. Sensevy (2011) souligne d'ailleurs :

Les jeux institutionnels, *au sein* des institutions, et eux-mêmes *en tant* qu'institutions, confrontent les joueurs à des *situations*¹⁰ – c'est-à-dire à des problèmes- caractérisées par l'incertitude sur l'action (là où l'institution est une machine à prévision, une machine à éliminer l'incertitude) et par la rupture de l'équilibre institutionnel. (p. 97)

On voit que la trilogie règles définitoires/règles stratégiques/stratégies introduite enrichit la modélisation praxéologique proposée par la TAD, car elle prend en compte la question de l'adaptation des techniques génériques à la singularité des tâches. Une approche sémiotique permet de préciser les choses.

On peut *jouer une situation adéquatement* lorsqu'on est capable de participer adéquatement à la production et à la reconnaissance de signes que ce jeu (cette pratique en tant que *situation agie*) demande, lorsqu'on entre adéquatement dans un processus de sémiose spécifique. [...]

Un jeu de langage/forme de vie, lorsqu'il est pratiquement maîtrisé, constitue un système de signes directement perçu, qui certes peut être très souvent rationnellement explicité du dehors, voire par l'agent lui-même, mais dont une caractéristique foncière est qu'il est perçu [...] comme un icône¹¹. [...]

Savoir jouer le jeu, c'est donc, dans une situation donnée, reconnaître les signes pertinents à partir desquels on oriente sa conduite. On sait jouer (dans une situation donnée) parce qu'on reconnaît dans cette situation des complexes de signes qu'on pense avoir déjà rencontrés dans la fréquentation de situations qu'on va considérer comme analogues à celle dans laquelle on se trouve plongée. (Sensevy, 2011, p. 45-46)

Parmi les éléments qui orientent la conduite, sont mises en avant les affordances et saillances¹² présentes dans la partie.

¹⁰ Une note (Sensevy, p. 97) précise qu'« il faut entendre 'situation' en anglais, langue pour laquelle un des sens du mot est celui-ci : "*a critical, problematic, or striking set of circumstances*" ».

¹¹ Ceci renvoie au triplet icône-indice-symbole de la sémiotique de Peirce.

¹² La saillance (de l'anglais *salience*, construit sur *salient*, du français saillant, lui-même du latin *saliens*, « qui saute ») d'une chose quelconque est le fait qu'elle attire l'attention; plus précisément, la mesure dans laquelle elle retient l'attention par rapport aux autres choses présentes dans son environnement.

Quelle que soit leur nature, les stratégies (dont le système peut être mixte – techniques et heuristiques) sont des réponses à des saillances du milieu, des manières articulées de traiter les affordances de ce milieu, de l'état du monde auquel on se trouve confronté dans le jeu. (Sensevy, 2011, p. 109)

Le lecteur aura compris que l'étude du modèle des mathématiques proposé par Sensevy aura perturbé mon rapport à la résolution de problèmes en y introduisant le point de vue de la singularité, me conduisant à me poser la question Q_0 suivante : Quels outils la TAD propose-t-elle pour prendre en compte la dialectique généricité-singularité dans l'activité mathématique ?

3. Affordances, mathématiques et ostensifs

L'étude du texte de Sensevy (2011) a été pour moi l'occasion d'une première rencontre avec le concept d'affordance. Je l'ai pris comme objet d'une étude, qui, sans que je l'aie anticipé, a fourni un premier élément de réponse à la question posée sur la TAD en mobilisant les travaux effectués dans ce cadre par Matheron (2010) sur la mémoire didactique.

3.1 Affordance, de quoi s'agit-il ?

Le concept d'affordance est issu du champ de la psychologie. Il est aujourd'hui utilisé en ergonomie cognitive et psychologie du travail et dans le domaine du design, pour élaborer des modèles de l'usager. Ce néologisme a été proposé par Gibson dans le cadre de sa théorie écologique de la perception.

Gibson propose ainsi d'étudier la perception en tant que moyen d'adaptation pour l'animal. La perception [...] s'inscrit avant tout dans l'interaction entre l'organisme et sa niche écologique et dans les apports mutuels entre la perception et l'action. (Luyat et Regia-Corte, 2009, p. 301)

Dans ce cadre, la notion d'affordance rend compte de la faculté qu'ont les animaux à adapter leurs comportements à ce qu'ils perçoivent de leur environnement.

L'affordance peut se définir comme une opportunité d'action. Par rapport aux propres dimensions corporelles et par rapport aussi aux buts, aux intentions de l'agent, l'affordance est une opportunité pour l'action pour un animal donné. Cette opportunité d'action ne peut être perçue que si l'agent par son expérience, par son exploration, a sélectionné les actions opportunes de celles qui ne le sont pas ou moins. (Luyat et Regia-Corte, 2009, p. 310)

Ces affordances sont-elles des propriétés de l'environnement ? Cette question fait débat parmi les utilisateurs de la notion. Pour Stoffregen (2003), l'affordance n'est une propriété d'aucune des deux composantes prise isolément mais du système agent-environnement. C'est la conception que je retiendrai ici. L'affordance lie certaines ressources matérielles présentes dans l'environnement et certaines

capacités de l'agent. Cette mise en relation est construite par l'agent dans un processus d'exploration lui permettant de déterminer progressivement quelles actions sont opportunes ou inopportunes pour lui dans un environnement donné¹³. On peut considérer que le processus de constitution d'une affordance s'accompagne d'une dynamique sémiotique, et donc cognitive, puisque certains systèmes d'objets perçus dans l'environnement se voient dotés d'une signification en termes de potentialité d'action.

3.2 À quoi ce concept issu de la psychologie peut-il renvoyer en TAD quand il s'agit de didactique des mathématiques?

Cette section relie le concept d'affordance aux travaux de Matheron (2010) sur la mémoire didactique, elle trouvera son aboutissement dans la section 4.3.

Comme l'ont montré les citations de Luyat et Regia-Corte, le concept d'affordance a pour objectif de rendre compte de phénomènes intrinsèquement liés au corps, associant perception et action opportune en situation. Il ne fait pas de différence entre animal et humain et désigne des constructions individuelles. L'usage qu'en fait Sensevy l'étend aux mathématiques, c'est-à-dire à un monde de savoirs et pratiques de savoir socialement construit auxquels les individus n'ont pas d'accès qui ne soit médié par des institutions. Apprentissage, enseignement, production ou utilisation des mathématiques, toutes ces pratiques sont encadrées par un contrat institutionnel, qui constitue donc une composante sociale de leur environnement. La constitution d'une affordance par et pour un individu correspond donc au repérage par celui-ci d'un système de conditions (ou ressources) lui offrant une opportunité d'action dans le cadre d'une institution dont il est le sujet dans une position donnée, ce qui assujettit ses actions aux contraintes du contrat institutionnel. Conditions et contraintes, ces termes sont utilisés ici à dessein, en référence à l'approche écologique développée au sein de la TAD. Une affordance en mathématiques est une construction sous un contrat donné.

Par ailleurs, les objets du monde mathématique ne sont qu'indirectement accessibles aux sens par l'intermédiaire des systèmes d'ostensifs auxquels ils sont associés par des relations sémiotiques. La sémiose de l'environnement qui accompagne la constitution d'affordance porte sur des instruments (de tracé, de calcul, etc.), mais aussi sur des ostensifs qui sont également des instruments de la partie perceptible des actions mathématiques. En reprenant un concept introduit

¹³ Citons un exemple relevant d'un domaine de recherche très actuel : une icône de l'interface d'un Smartphone peut être constituée en affordances par certains usagers et pas par d'autres (voir Morgagni, 2011).

par Matheron (2010) et Araya-Chacón et Matheron (2015) dans le cadre de recherches sur le travail de la mémoire en didactique, le système de signes ainsi constitué fonctionne comme un ostensif déclencheur :

L'ostensif désigné peut réactiver, avec un certain degré d'« automaticité », un non-ostensif. [...] De tels ostensifs jouent en quelque sorte le rôle du parfum de la madeleine de Proust. (Araya-Chacón et Matheron, 2015, p. 59-60)

Dans le cas de l'affordance, la perception de l'ostensif replace l'agent dans la position et sous le contrat institutionnel de construction de l'affordance. Elle déclenche la remémoration de situations antérieurement vécues par l'agent et d'actions déjà réalisées, en même temps qu'elle mobilise les non-ostensifs qu'il associe à ces différents éléments, ostensifs, situations et techniques. On peut supposer qu'au niveau individuel, l'existence d'affordances est sous-jacente à ce que l'on décrit souvent comme l'intuition d'un résolveur de problèmes, du moins dans ce qui le conduit à mobiliser ses expériences antérieures au service d'un problème nouveau perçu comme proche.

Jusqu'à présent, les affordances relèvent des connaissances construites individuellement dans la pratique. Pour rejoindre totalement le travail de Matheron (2010), qui repose sur les concepts de « mémoire collective » et de « cadres sociaux de la mémoire » empruntés au sociologue Halbwachs (1994)¹⁴, il nous faut envisager que des affordances puissent être aussi des construits collectifs, collectifs des chercheurs d'un laboratoire, des spécialistes d'un domaine de mathématiques, d'un professeur et de ses élèves, etc. Nous revenons sur ce point dans la section 4.3.

4. Comment analyser les relations entre généricité et singularité à partir du modèle praxéologique?

Cette partie s'appuie sur les travaux de l'équipe MeTAH (Modèles et technologies pour l'apprentissage humain) qui associe didacticiens et informaticiens dans des recherches consacrées aux environnements informatiques pour l'apprentissage humain (EIAH).

Il en découle nécessairement un travail de modélisation informatique des objets de savoir à enseigner, des connaissances d'un sujet, et des propositions pour doter les

¹⁴ « Du point de vue de l'auteur [Halbwachs], la mémoire est à la fois un fait et un processus collectif, aussi bien au niveau du stockage – d'expériences, de connaissances, etc. – qu'au niveau de l'évocation des événements du passé. Ainsi existe-t-il des ensembles de points de référence, les cadres, de nature sociale et qui forment un système global de repérage du passé, en permettant la remémoration individuelle et collective » (Araya-Chacón et Matheron, 2015, p. 46).

environnements informatiques d'outils de calcul afin de produire des diagnostics, des rétroactions vers l'élève ou le professeur... (Chaachoua et Bessot, 2019 p. 235)

4.1 Types, variables et sous-types de tâches

Dans la perspective définie ci-dessus, Chaachoua a développé au sein de l'approche praxéologique de la TAD, un cadre de référence spécifique, désigné par l'acronyme T4TEL¹⁵ (voir Chaachoua, 2020). Une attention toute particulière y est prêtée à la définition de la notion de type de tâches :

Un type de tâches T est décrit par un verbe d'action et un complément que nous représentons par $T = (\text{Verbe d'action}, \text{Complément})$. Le verbe d'action caractérise le genre de tâches, comme « Calculer » ou « Intégrer ». Le complément peut être défini selon différents niveaux de granularité, du spécifique au générique et, pour prendre en compte ces relations entre le générique et le spécifique, nous avons introduit les notions de système de variables et de générateur de types de tâches. (Chaachoua et Bessot, 2019, p. 238)

Les notions évoquées ne visent pas à décrire la singularité des tâches relevant d'un même type T ; néanmoins, elles permettent de distinguer au sein de T des sous-types de tâches différenciés par les valeurs qu'y prennent certaines variables. Dans la dualité générique-singulier, elles introduisent le niveau intermédiaire du spécifique. Ainsi pour le type « Ajouter deux entiers naturels », les deux variables correspondant au nombre de chiffres de chacun des entiers différencient des sous-types dont on sait bien la pertinence didactique au début du primaire. Dans la section 4.3, nous analysons un exemple lié à l'OMPC (1.3) associée au type de tâches T_{al} « Montrer que trois points distincts sont alignés » qui illustrera l'intérêt mathématique du repérage de sous-types de tâches spécifiques.

4.2 Tâche, contexte définitoire

Les outils précédents ne nous permettent pas de prendre en compte la singularité d'une tâche, ce qui la distingue de toute autre tâche d'un même type. Pour cela, il nous faut explorer plus avant les travaux de MeTAH. La thèse de Jolivet (2018) vise à indexer les énoncés de tâches prescrites en vue d'automatiser l'analyse des énoncés proposés par des manuels. Il propose la définition suivante :

Une tâche est définie par un triplet :

{Action à réaliser; compléments définitoires; compléments facultatifs}

Action à réaliser : elle est le plus souvent définie par un verbe d'action mais peut aussi être matérialisée par d'autres objets ostensifs, soit pour des raisons de langue (par exemple « donner un développement de » relève du même objet non ostensif

¹⁵ Voir note 1.

que « développer ») soit parce que des effets de contrat didactique amènent à l'interprétation d'un objet ostensif (symbole du type « ? » par exemple) comme associé à une action à réaliser.

Compléments définitoires : il s'agit du ou des objets sur lesquels l'action porte. En leur absence la tâche n'existe plus. Ils sont matérialisés par des objets ostensifs.

Compléments facultatifs : il s'agit d'objets ostensifs complémentaires dont la présence n'est pas nécessaire à l'existence de la tâche. En leur absence, une tâche est toujours définie. Ils ont diverses fonctions possibles (orienter vers le choix d'une technique; ingrédient d'une technique; répondre à une attente institutionnelle...). (Jolivet, 2018, p. 119)

On notera que, l'objectif étant d'analyser des énoncés d'origine scolaire, la définition proposée intègre dans les compléments facultatifs des éléments à visée didactique. Chaachoua (2010, p. 8) propose d'associer

à une tâche prescrite dans [une institution] *I* une tâche mathématique. Elle correspond au problème mathématique sans aucune indication sur la technique possible ou attendue et avec une formulation qui reste la plus neutre possible vis-à-vis de la technique. L'énoncé est une mise en texte de la tâche mathématique en ajoutant éventuellement des indications ou des questions qui prennent en charge partiellement ou complètement les étapes de la technique attendue. (Chaachoua, 2010, p. 8)

Mon but étant de travailler sur les pratiques de savoir des mathématiciens ou sur ce qui s'en approche le plus dans un cadre didactique, je me restreindrai dans ce qui suit à des tâches mathématiques au sens défini ci-dessus par Chaachoua, c'est-à-dire, épurées de toute indication destinée à en aider l'étude. Je retiendrai de la définition de Jolivet l'idée que pour définir une tâche relevant d'un type de tâches défini par un couple (verbe d'action, complément), il faut définir tous les objets figurant dans le complément. Dans le cas de la somme de deux entiers, il suffira de choisir les deux entiers à sommer. Qu'en est-il du type de tâches T_{al} ? Pour définir une tâche de ce type, il faut définir les trois points, ce qui ne peut se faire sans introduire un ensemble d'objets initiaux (les données) et un processus de construction des trois points, lequel sera balisé par la production d'objets intermédiaires.

Exemple : Une tâche *t* d'alignement.

- A, B et C sont trois points alignés distincts. Par ces trois points, on mène trois droites distinctes D, D' et D'' parallèles entre elles. Soit M un point de D', distinct de B. La parallèle à (MC), resp. (MA), passant par B coupe D, resp. D'', en I (resp. J). Montrer que M, I et J sont alignés.

Ces objets mathématiques, nécessairement définis par un ensemble d'ostensifs et généralement intégrés dans un texte permettent de définir, dans une institution donnée, une tâche à partir du type de tâches. Il s'agit de ce que je nommerai « le contexte définitoire de la tâche ». Pourquoi indexer le contexte définitoire par une institution? Cette décision, provoquée par les objections d'un relecteur, prend en compte la variabilité institutionnelle des relations entre ostensifs et non ostensifs, même dans le cadre des mathématiques académiques. Il suffit de changer de cadre théorique pour que le même ostensif puisse désigner un objet différent. Ainsi, l'analyse développée à la suite se réfère à la géométrie affine. Ajoutons que l'environnement de la tâche peut contenir des objets complémentaires, non impliqués dans la définition des objets de l'action, par exemple, lorsque la tâche est insérée dans un problème plus vaste.

Le contexte définitoire et les savoirs mathématiques relatifs aux objets qui y figurent caractérisent la singularité mathématique de la tâche, ils conditionnent la mise en œuvre et le succès d'une technique associée au type de tâches, c'est-à-dire le fait que la tâche appartienne ou non à la portée de la technique. La diversité des contextes définitoires possibles explique qu'en mathématiques, la portée d'une technique non algorithmique est rarement caractérisée.

4.3 Retour sur les notions de sous-types de tâches et d'affordances

Cette section est illustrée par la tâche t et le type de tâches T_{al} définis ci-dessus.

T_{al} s'inscrit dans le cadre théorique de la géométrie affine puisque les objets du complément du verbe d'action qui définit le type sont de nature affine. Relèvent de l'organisation praxéologique associée à cette théorie plusieurs techniques. Par exemple, les techniques suivantes sont efficaces pour la tâche t :

- τ_1 : technique analytique dans un repère affine;
- τ_2 : montrer que l'un des points est l'image d'un deuxième par une homothétie de centre le troisième point.
- τ_3 : montrer que deux des droites formées en associant deux des trois points sont parallèles à une même droite.

Mais, parmi toutes les techniques possibles pour traiter T_{al} , il en existe qui sont développées dans le cadre moins général, mais plus riche de la géométrie affine euclidienne, nous les désignerons sous l'expression « techniques euclidiennes »¹⁶.

¹⁶ Je considérerai ici la géométrie affine comme un domaine dont un secteur est la géométrie affine euclidienne, de même qu'en sont la géométrie barycentrique et l'étude des transformations affines. L'étude des homothéties-translations est un thème de ce dernier secteur. Au sein de la géométrie euclidienne, l'étude des angles orientés est un thème. Pour les notions de thème, secteur, domaine, voir Chevallard (2002, p. 42).

Par exemple, c'est le cas d'une technique analytique τ_4 en repère orthonormé avec ou sans nombres complexes, une technique angulaire τ_5 : avec les trois points, définir deux vecteurs non nuls et montrer que la mesure de l'angle orienté qu'ils forment est nulle modulo π . C'est une OMPC $[T, (\tau_i, \theta_i, \Theta_i)_i, \theta^T]$ particulièrement foisonnante qui est associée à T_{al} . Définir des critères permettant, pour une tâche donnée, d'effectuer un tri raisonné repérant parmi les techniques disponibles celles qui semblent les mieux adaptées au contexte définitoire est un savoir utile pour la pratique géométrique. Ces critères satisfont un besoin pratique d'évaluation relative des différentes techniques associées à T , ils relèvent de la composante θ^T et de la composante pratique évoquées dans la section 1.3.

La mise en œuvre des techniques euclidiennes fait intervenir des objets spécifiques de la géométrie euclidienne, leur validation repose sur des théorèmes impliquant des objets et des hypothèses de nature euclidienne. Il est donc vraisemblable qu'elles ne puissent être efficaces pour des tâches dont le contexte définitoire ne contient aucun objet spécifique de cette géométrie comme c'est le cas de t . Ceci suggère l'introduction d'une variable binaire dont le questionnement se situe au niveau théorique des organisations mathématiques : V_{SE} ¹⁷ Le contexte définitoire contient-il des objets de nature euclidienne?

Si non (cas de t), les techniques euclidiennes sont a priori repoussées. Si oui, elles sont privilégiées. La tâche t' suivante (pour laquelle τ_5 est efficace) en est un exemple :

- Soient C et C' deux cercles du plan, sécants en deux points distincts A et B . Soit S la similitude directe de centre A transformant C en C' . Montrer que pour tout point M de C , M , B et $S(M)$ sont alignés.

Notons cependant que, pour $V_{SE} = \text{Oui}$, les techniques affines ne sont pas à exclure totalement, particulièrement si le contexte contient aussi des objets purement affines, par exemple, des droites parallèles dans un contexte contenant un rectangle inscrit dans un triangle. Inversement, pour $V_{SE} = \text{Non}$, pour des raisons que je ne détaillerai pas ici, on ne peut totalement exclure les techniques euclidiennes.

Cette variable permet de définir deux sous-types de tâches, auxquels sont associées des hiérarchisations différentes de l'ensemble des techniques associées à T_{al} . Elle a donc des effets heuristiques, mais l'ensemble des techniques possibles reste large. Continuons donc ce travail de différenciation des contextes définitoires. Un second niveau de variable V_{Th} ¹⁸, plus précis car centré sur chaque

¹⁷ SE est mis pour secteur euclidien.

¹⁸ Th est mis pour thème.

technique disponible, pourrait concerner la présence, dans le contexte définitoire de la tâche, d'instanciation des objets spécifiques du thème dont relève la technologie d'une technique. Pour une tâche donnée, une réponse négative conduit à rejeter (au moins provisoirement) la technique, une réponse positive à la considérer comme envisageable. Par exemple, dans le thème « angles orientés », figure le théorème de l'angle inscrit et de l'angle au centre dont il découle que la présence de cercles dans le contexte définitoire, comme c'est le cas de t' , est un pourvoyeur d'égalités angulaires qui encourage à tenter d'utiliser τ_5 . Dans le thème « homothéties-translations », les configurations de Thalès et les trapèzes permettent de définir des homothéties à partir de l'image de deux points. Or, comme on le voit dans la figure ci-dessous, plusieurs configurations de Thalès croisées sont présentes dans le contexte de t . Ceci conduit à préjuger que cette tâche appartient au sous-type de T_{al} pour lequel il est raisonnable de tenter d'utiliser une technique d'alignement figurant dans le thème. Le sous-type n'est toutefois pas associé à une OMP Simple, car trois techniques d'alignement font intervenir une ou des homothéties.

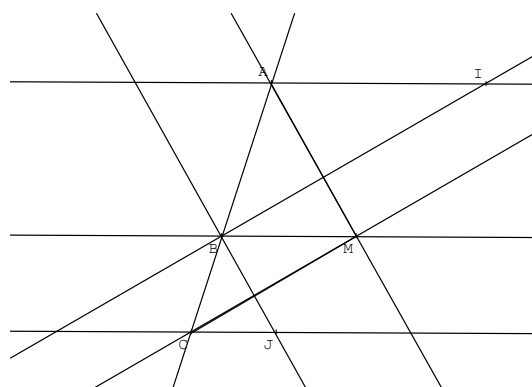


Figure 1. Configuration correspondant au contexte définitoire de t

On entrevoit la possibilité d'introduire, ici dans le cas de la géométrie, deux niveaux de variables portant sur les objets du contexte définitoire de la tâche, permettant d'aller vers la caractérisation de contextes favorables ou défavorables à l'emploi d'une technique donnée, ce que font les variables de Chaachoua pour des types de tâches numériques ou algébriques. Ces variables ne permettent pas de générer des tâches, elles fournissent des outils d'analyse du contexte de la tâche¹⁹, particulièrement utiles dans le cas des OMPC en hiérarchisant les techniques disponibles relativement au contexte définitoire : certaines sont (vraisemblablement) non pertinentes, les autres peuvent être essayées,

¹⁹ En cela, la réflexion proposée ici se rapproche du travail de Jolivet (2018) et de celui de Lesnes-Cuisiniez (2021).

généralement sans qu'on puisse garantir qu'elles soient efficaces, c'est-à-dire que la tâche soit à la portée de la technique. On peut résumer le processus présenté ici de la façon suivante : considérant une description de l'OMPC associée à un type de tâches, indexée à partir des théories $[T, (\tau_{i,j,k}, \theta_{i,j}, \Theta_i)_{i,j,k}, \theta^T]$ ²⁰, le processus définit à partir des blocs $[\theta_{i,j}, \Theta_i]_{i,j}$, des sous-types $T_{i,j}$ pour lesquels les techniques $\tau_{i,j,k}$ sont envisageables alors qu'elles sont à rejeter, au moins dans un premier temps, pour les autres tâches du type. On pourrait dire que $T_{i,j}$ est la trace sur l'OML définie par $[\theta_{i,j}, \Theta_i]$ du type T . Si le thème ne propose qu'une seule technique $\tau_{i,j}$ pour $T_{i,j}$, on a donc produit un sous-type de tâches, caractérisé par des propriétés du contexte définitoire, pour lequel il est opportun de tenter la mise en œuvre de $\tau_{i,j}$: ce n'est rien d'autre que la construction explicite et raisonnée d'une affordance.

On peut s'étonner d'une telle affirmation dans la mesure où le processus décrit précédemment repose sur une analyse du contexte définitoire basée sur la composante technologico-théorique des praxéologies; la pratique ne semble y jouer aucun rôle, ce qui est contraire à ce qui a été dit sur la notion d'affordance. C'est qu'il faudrait affiner la définition des variables de thèmes de façon à préciser quels sont parmi tous les objets qui figurent dans un thème ceux dont la présence favorise l'emploi d'une technique. Or, un tel savoir se développe à l'usage, dans les démonstrations qui établissent les théorèmes du thème et dans la résolution de problèmes. C'est ainsi, par exemple, qu'on peut repérer l'importance des cercles dans un travail utilisant les angles orientés. Nous illustrons cette même idée dans le cas du thème des homothéties-translations dans la section 4.4.

Notons que nous avons retrouvé la dimension sémiotique des affordances et le caractère déclencheur de certains ostensifs dans les exemples précédents. Ce sont certaines configurations spécifiques d'ostensifs qui orientent vers telle ou telle technique, à condition de les extraire de l'ensemble du contexte définitoire.

On pourrait penser que le travail présenté dans cette section débouche sur la détermination de la portée d'une technique. Les lectrices et lecteurs de cette revue savent qu'on en est loin car en mathématique, nombre de techniques ne sont pas algorithmiques. Nous en explorons maintenant les conséquences.

²⁰ Cette description est une description « descendante », allant des théories vers les techniques qu'elles produisent pour T , alors que la description $[T, (\tau_i, \theta_i, \Theta_i)_i, \theta^T]$ est « ascendante » en partant des différentes techniques connues pour T .

4.4 D'une technique non algorithmique à sa mise en œuvre dans un contexte singulier, analyse d'un exemple

Modeste (2012) donne la définition suivante d'un algorithme :

Un algorithme est une procédure de résolution de problème, s'appliquant à une famille d'instances du problème et produisant en un nombre fini d'étapes constructives, effectives, non ambiguës et organisées, la réponse au problème pour toute instance de cette famille. (p. 19)

Ainsi on peut dire qu'un algorithme est une technique dont on connaît (une partie de) la portée, formée d'un nombre fini d'étapes telles qu'à chaque étape, on sait exactement ce qu'il faut faire, avec la certitude que toutes les conditions du succès sont présentes. L'implémentation d'un algorithme exclut donc : 1) d'avoir à effectuer, à une étape donnée, un choix non anticipé (parmi plusieurs techniques ou parmi les objets auxquels appliquer la technique), 2) de rencontrer un obstacle à la mise en œuvre de la technique. Inversement, pour de très nombreuses techniques mathématiques, leur emploi efficace sur une tâche donnée aura confronté le résolveur²¹ à l'embarras du choix et/ou à l'embarras de l'obstacle. Illustrons ce phénomène en analysant une solution possible de la tâche t introduite ci-dessus.

La solution présentée dans l'annexe 1 est basée sur la mise en œuvre de la technique τ_2 qui relève du thème « homothéties-translations » auquel nous a conduits la présence de configurations de Thalès

« Pour démontrer que 3 points sont alignés, démontrer que l'un des points est l'image d'un deuxième point par une homothétie de centre le dernier point ».

Analysons maintenant cette solution en termes de choix et d'obstacles.

Première étape t_1

- Premier obstacle, un manque : le contexte définitoire ne contient aucune homothétie, ainsi l'instanciation de la technique à t introduit une première étape t_1 qui est une instanciation du type de tâches T_1 : définir une homothétie.
- Premier choix : il existe quatre techniques pour T_1 : définir l'homothétie 1) par son centre et son rapport ($\tau_{1,1}$); 2) par son centre et l'image d'un point distinct du centre ($\tau_{1,2}$, portée : les trois points doivent être alignés); 3) par l'image de deux points A et B ($\tau_{1,3}$, portée : si A', resp. B', est le point image de A, resp. B, le quadrilatère ABB'A' doit être un trapèze, croisé ou pas,

²¹ Le résolveur ici considéré est sujet d'une institution académique (ou épistémique). L'analyse ne prend pas en compte ses singularités personnelles.

mais pas un parallélogramme; autrement dit, une configuration de Thalès est présente); 4) par composition de deux homothéties ou d'une homothétie et d'une translation ($\tau_{1,4}$).

L'existence d'une telle OMPC crée un embarras de choix. Par exemple, les trapèzes croisés AIBM et BMCJ permettent de définir deux homothéties transformant A en M et I en B pour l'une, B en J et C en M pour l'autre. Par composition, on obtient sous condition à préciser une homothétie transformant I en J. Cette piste est une impasse car le centre de la composée ne peut être M. La solution choisit d'introduire une homothétie de centre I.

- Deuxième obstacle : dans les données n'existe aucun triplet de points alignés impliquant I, J ou M. Il faut en introduire un.
- Deuxième choix : soit A' le point d'intersection de D et (BJ).

Soit H l'homothétie de centre I, transformant A en A'. Il faut déterminer H(M).

Deuxième étape t_2

t_2 relève donc du type de tâches T_2 : déterminer l'image d'un point par une homothétie que l'on peut restreindre à un sous-type en précisant que l'homothétie est définie par son centre I et l'image A' d'un point A.

- Troisième choix : il existe trois techniques pour T_2 : 1) déterminer le point M' tel que $\overrightarrow{IM'} = \frac{IA'}{IA} \cdot \overrightarrow{IM}$ ($\tau_{2,1}$); 2) déterminer l'image d'une droite passant par M et distincte de (IM), H(M) est le point d'intersection de cette droite image avec (IM) ($\tau_{2,2}$); 3) déterminer l'image de deux droites sécantes en M, ne passant pas par I, H(M) est le point d'intersection des deux droites images ($\tau_{2,3}$).

Le contexte contient trois droites passant par M autres que (IM). Il faut déterminer au moins l'image de l'une.

Troisième étape t_3

t_3 relève donc du type de tâches T_3 : déterminer l'image d'une droite d par une homothétie dans le cas où la droite ne passe pas par le centre.

- Quatrième choix : il existe deux techniques pour T_3 : 1) déterminer l'image de deux points distincts de d ($\tau_{3,1}$); 2) déterminer l'image d'un point et considérer la parallèle à d passant le point image ($\tau_{3,2}$).

$\tau_{3,2}$ s'applique facilement à (AM) puisqu'on connaît l'image de A et que (AM) // (A'B) par définition de A'.

- Troisième obstacle : on ne connaît pas le point commun à (A'B) et (IM). On change donc de droite et on détermine l'image de (BM) = D'.

- Quatrième obstacle : on ne connaît pas $H(B)$.

Quatrième étape t_4

t_4 relève à nouveau de T_2 .

- Quatrième choix : utiliser $\tau_{2,1}$ en introduisant le point B' commun à (IB) et D'' pour lequel on cherche à montrer que $\overrightarrow{IB'} = \frac{IA'}{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$.

Puisque les points I , B et B' sont alignés, la relation vectorielle à justifier peut se reformuler de la façon suivante : $\frac{IB'}{IB} = \frac{IA'}{IA}$

Cinquième étape t_5

t_5 relève d'un quatrième type de tâches T_4 : Montrer une égalité de rapports de mesures algébriques.

- Cinquième choix : il existe deux techniques pour T_4 . L'une est une application directe du théorème de Thalès, il faudrait toutefois démontrer que $(AB) \parallel (A'B')$; l'autre repose sur des égalités successives, obtenues notamment grâce à des configurations de Thalès présentes, en association avec des transformations algébriques

On constatera en revenant à la solution donnée en annexe que la suite d'égalités introduites est marquée de plusieurs choix (choix des configurations de Thalès extraites de l'ensemble, choix de l'égalité de rapports déduite) et de deux initiatives (introduction du point O , transformation algébrique du rapport) permettant de faire face à deux obstacles que nous laissons au lecteur le soin de décrire.

La fin de la démonstration ne comporte ni choix ni obstacle et ceci, notamment du fait du choix du point B' : l'image de (BM) est la parallèle à (BM) qui passe par B' , c'est donc D'' par définition de B' . Si l'on avait défini B' comme le projeté de A' sur (IB) parallèlement à (BA) , l'application de $\tau_{2,1}$ aurait été immédiate. Mais il aurait fallu pour terminer la démonstration établir que B' est un point de (CJ) .

La technique d'alignement choisie ainsi que toutes les autres techniques mobilisées pour traiter les tâches intermédiaires qui sont apparues se sont révélées efficaces pour la tâche t . À quels objets du contexte définitoire de t doit-on cette efficacité? À la présence de points et droites vérifiant respectivement des relations d'alignement et de parallélisme, formant des configurations de Thalès et des parallélogrammes, particulièrement repérables par les ostensifs associés dans la figure. Ces objets ont permis qu'à chaque étape, au moins une des techniques disponibles dans l'OML associée au thème des homothéties-translations se révèle efficace.

Mais la technique ayant été choisie, son succès pour la tâche t n'était pas assuré, il a été permis par les choix du producteur de la solution : choix de technique puisqu'à chaque étape est intervenue une OMPC, choix d'objets ajoutés au contexte définitoire pour surmonter les obstacles rencontrés (points A' , B' et O), choix d'un cheminement parmi les multiples configurations de Thalès disponibles, etc. Ces choix apparaissent comme des actions adaptées au contexte singulier de la tâche.

Dans l'espoir de repérer des façons de faire transférables, c'est-à-dire possiblement génériques, peut-on discerner sur quoi repose cette adéquation? Considérons le choix du point A' : il est défini à partir d'objets figurant dans le contexte définitoire, objets dont les propriétés vont pouvoir être utilisées dans les démonstrations impliquant A' (t_3 , t_5). On peut aussi raisonner à partir de la propriété à démontrer : si pour une homothétie de centre I , $H(M) = J$, alors nécessairement $H(A)$ est le point commun à D et à la parallèle à (MA) passant par J . Ceci est une phase d'analyse à finalité heuristique, technique d'une grande généralité; ici, elle conduit à la caractérisation choisie du point B' .

Quant à la transformation $\frac{AM}{AO} = \frac{AO+OM}{AO} = 1 - \frac{OM}{OA}$, elle donne accès au rapport impliquant les deux côtés parallèles d'une configuration de Thalès, c'est un possible élément de la technologie pratique associée à T_4 .

Pour cet exemple, nous avons fait fonctionner ce que nous considérons comme un outil pour l'étude de l'œuvre, formée par un énoncé décrivant une tâche et une solution ou bien un théorème et sa démonstration. Nous pensons avoir ainsi illustré les conséquences sur l'activité mathématique du caractère non algorithmique de nombreuses techniques : l'implémentation d'une technique pour une tâche singulière est un cheminement qui joue dialectiquement du singulier et du générique, des objets d'un contexte évolutif et des praxéologies disponibles.

5. Que propose la TAD pour modéliser la dynamique des processus de recherche?

Par le modèle praxéologique, la TAD met en avant la généricité des activités humaines, condensée dans des praxéologies stabilisées. Mais un second modèle, introduit plus tardivement, est à même de rendre compte des processus de traitement de problèmes nouveaux : il s'agit du schéma herbartien de l'étude d'une question.

5.1 Dialectique de la recherche et de l'étude, schéma herbartien

La présentation que nous ferons ici des développements proposés par la TAD dans le cadre de la pédagogie des PER (parcours d'étude et de recherche) restera très limitée.

Depuis une dizaine d'années (voir par exemple, Chevallard, 2007; Chevallard et Ladage, 2010), la TAD propose de substituer au paradigme dominant de l'étude scolaire, dit de la « visite des œuvres », un paradigme nouveau, dit du « questionnement du monde ». Celui-ci place, à la racine de l'étude scolaire, l'étude de questions qui se posent sur le monde et auxquelles les étudiants cherchent à répondre. L'étude à mener est un processus dont le moteur est une dialectique des questions et des œuvres : il n'est en effet aucune question humaine qui puisse être résolue grâce aux seules ressources intrinsèques des individus qui l'étudient, la solution utilisera des œuvres déjà produites, qui à leur tour devront être interrogées. Le déroulement d'une telle enquête se concrétise en un certain « Parcours d'Étude et de Recherche » ou PER.

L'état initial d'une enquête correspond au système didactique suivant :

$$S(X, Y, Q_0, M_0)$$

où X désigne l'ensemble des personnes engagées dans l'étude d'une question initiale Q_0 , Y l'ensemble des personnes qui aident ou dirigent l'étude; M_0 est l'ensemble des ressources, y compris cognitives (les connaissances et savoirs), disponibles pour X , c'est-à-dire que X connaît suffisamment, au début de l'enquête pour les utiliser; cet ensemble est nommé milieu, dans un sens emprunté à l'écologie. Le but de l'enquête est d'élaborer une réponse, notée $R^\heartsuit$ qui convienne à X .

X peut s'attaquer à la question qui lui est posée en cherchant à élaborer tout ou partie de la réponse à partir des ressources du collectif d'étude qu'il constitue, en s'appuyant sur le milieu initial de l'enquête. Dans certains cas, ce processus sera couronné de succès grâce à certaines innovations produites par X . Ce postulat est à la base de la notion de situation a-didactique au sein de la théorie des situations didactiques. Les ressources du milieu sont sollicitées en particulier pour écarter des réponses erronées. Plus largement, X peut organiser un dispositif d'expérimentation ou de recueil de données sur le terrain. On peut y reconnaître certaines démarches des chercheurs de métier. Mais, à l'instar de ces mêmes chercheurs, X peut aussi supposer qu'existent dans la culture des savoirs pertinents pour l'étude de la question posée, savoirs qu'il ignore et gagnerait à s'approprier. Il se met donc à la recherche dans tous les médias accessibles

d'éléments susceptibles de lui être utiles²² : des éléments de savoir éclairant la question, des réponses $R^\diamond$ à la question Q_0 déjà produites dans des institutions qui les ont légitimées (d'où le poinçon). X réunit ainsi un ensemble d'oeuvres qu'il devra étudier, c'est-à-dire 1) soumettre à une analyse critique, 2) s'approprier suffisamment pour les utiliser comme nouvelles ressources, autrement dit pour les intégrer au milieu de l'enquête.

Le schéma suivant, dit herbartien (Chevallard et Ladage, 2010, p. 3) représente le processus de l'enquête dont nous venons d'esquisser une description très sommaire, mettant en avant par la première flèche la dynamique de développement du milieu.

$$[S(X; Y; Q) \rightarrow M] \rightarrow R^\diamond$$

Figure 2. Le schéma herbartien de l'enquête

On remarquera que dans ce schéma, la notation initiale Q_0 a été remplacée par Q . C'est que, partant de la question initiale, le processus d'enquête fait vivre une dialectique des questions et des réponses dont la richesse va conditionner la qualité de la réponse finale. Pour un exemple très éclairant, on pourra se reporter à Bosch et Winslow (2015, p. 380-389).

J'avais toujours, jusqu'à présent, envisagé ce modèle dans le cadre d'une pédagogie et les PER mathématiques comme des processus visant à faire apprendre des savoirs et praxéologies mathématiques. Or, l'enquête sur la TAD dont je rends compte dans cet article m'a fait prendre conscience que la modélisation herbartienne est d'abord une modélisation de l'activité des chercheurs en commençant à la racine que constitue l'affrontement à des tâches singulières nouvelles. Les enquêtes réalisées dans différents cadres, scolaires ou non, ont produit des outils permettant d'analyser la dynamique du processus de recherche d'une réponse. Je me contenterai de citer les dialectiques médias/milieus, individuel/collectif, boîte noire/boîte grise, diffusion/réception. Pour une liste exhaustive, voir les rubriques « *Dialectic* » du glossaire proposé dans le livre *Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education* (Bosch et al. (2020)

Comment la modélisation herbartienne prend-elle en compte l'objectif scientifique de passage de la singularité à la généricité, c'est-à-dire de production de savoirs génériques et de praxéologies stabilisées? Dans les éléments très succincts que j'ai donnés, on ne le voit pas. Il faudrait pour cela regarder de plus près les différentes

²² Cette dimension distingue clairement la pédagogie ainsi développée de celle qui est proposée par la théorie des situations didactiques.

dialectiques évoquées ci-dessus, notamment celle des questions et des réponses. Notons que l'organisation didactique des moments de l'étude (Chevallard, 2002) propose une modélisation du processus que doit organiser un professeur pour que des élèves apprennent une praxéologie, c'est-à-dire la reconstruisent pour eux-mêmes. Même s'il est peu regardé comme tel, ce modèle vaut également pour l'activité des chercheurs.

5.1.1 L'exemple de l'enquête présentée dans cet article

Dans le cas de l'enquête dont je rends compte ici, X est réduit à moi-même, M_0 est partiellement présenté dans la partie 1 pour sa composante préalable à la lecture de Sensevy (2011). Les extraits de Sensevy (2011) analysés dans la partie 2, qui a donné naissance à la question Q_0 , appartient également à M_0 , ainsi que, une fois étudiés, les textes relatifs au concept d'affordance cités dans 3.1. Il faut enfin au moins y adjoindre un riche milieu mathématique dont la sollicitation est particulièrement illustrée dans les sections 4.3 et 4.4.

Y rassemble les collègues dont les écrits m'aident à comprendre leurs travaux au point de les intégrer au milieu au fil de l'enquête et d'en déduire des éléments de la réponse $R^\heartsuit$. Les deux relecteurs les rejoignent dont les commentaires ont, sur plusieurs points, relancé ma réflexion, notamment sur la dimension institutionnelle de la généricité.

En ce qui concerne le processus d'enquête, dont la chronologie est respectée par la structure de l'article, je ne peux reformuler ici la suite des questions soulevées. Les questions de premier niveau apparaissent dans les titres (3.2, 4 et 5), celles de deuxième niveau sont formulées dans les sections des parties 4 et 5, mais pas toujours sous forme interrogative. Quant au développement du milieu, il se traduit par l'introduction de plusieurs textes de recherche en didactique et d'un exemple de résolution d'une tâche géométrique.

5.2 Cas où la question est relative à la production d'une démonstration

En mathématique, toute question Q_0 conduit à une ou des questions du genre « Comment démontrer que telle affirmation est vraie? ». Ce genre de tâches occupe largement les mathématiciens, mais aussi les étudiants en mathématiques de l'enseignement supérieur et les lycéens français de spécialité mathématique. La spécification de ce qui est à démontrer conduit à un type de tâches T_0 dont relève la question Q_0 vue comme une tâche singulière, associée à un contexte définitoire donné. Le milieu M_0 pour X peut contenir une organisation praxéologique, éventuellement complexe, relative à T_0 . La partie 4 a amplement montré que, dans de nombreux cas, cela ne réduit pas à zéro le travail à accomplir pour produire une réponse à Q_0 . Même dans cette situation, la plus fréquente dans le cas de

l'enseignement classique des mathématiques où il s'agit d'adapter du générique à une singularité, X peut gagner à disposer d'un exemple de mise en œuvre de la ou des techniques connues pour T_0 . C'est, a fortiori, le cas si M_0 ne contient aucune technique pour T_0 , c'est-à-dire si X n'en connaît pas. X pourra alors se mettre à la recherche dans les médias auxquels il a accès de praxéologies relatives à T_0 ou, a minima, de réponses $R'^\diamond$ à une question Q'_0 , relevant de T_0 mais de contexte définitoire différent de celui de Q_0 . Ainsi, un chercheur pourra entreprendre de transférer à un contexte différent le travail présenté par des collègues à un séminaire ou publié dans une revue. Un étudiant cherchera la solution, donnée par le professeur ou par un recueil d'exercices corrigés, à un problème voisin de celui qu'il doit traiter. Il s'agit alors d'un transfert d'une tâche singulière à une autre tâche singulière. X peut s'en satisfaire ou chercher ensuite à repérer et expliciter des éléments de genericité, c'est-à-dire à construire une praxéologie.

Dans les deux cas, l'étude de l'œuvre, formée par un énoncé décrivant une tâche et une solution ou bien un théorème et sa démonstration, apparaît comme une dimension inévitable du processus de recherche symbolisé par le schéma herbartien. Trouver une telle œuvre dans un média ne suffit pas à l'intégrer au milieu : il faut 1) la valider, activité mathématique tout à fait classique et 2) en faire un outil pour la production de $R^\heartsuit$. Par un jeu de questions, X doit faire dire au texte de solution ce qu'il peut lui apprendre (Voir la dialectique inscription/excription (Chevallard et Bosch, 2020, p. xxiii). L'analyse présentée dans la section 4.4 fournit un outil pour cela, nous en donnons ici une description décontextualisée.

5.3 Outil pour l'analyse de la solution apportée à une tâche singulière

Cet outil comporte plusieurs niveaux.

Le premier est inspiré de Chaachoua (2010, p. 49) qui propose de définir une technique τ comme une suite de types de tâches $(T_i)_i$ et son instantiation pour une tâche comme une suite de tâches $(t_i)_i$, chaque t_i relevant de T_i . Notre analyse de la solution étudiée construit effectivement une première suite $(t_i)_i$ de tâches à accomplir, dont découle une suite de questions $(Q_i)_i$ (Comment accomplir t_i ?), puis une suite de types de tâches $(T_i)_i$ pour lesquels sont connues une ou plusieurs techniques $\tau_{i,j}$ (réponses $R_{i,j}^\diamond$ à Q_i). C'est ici l'analyse de la solution pour t qui produit la suite des types, non l'inverse comme chez Chaachoua. La suite des types n'est donc qu'une description potentielle de la technique, à mettre à l'épreuve d'autres tâches. Dans le cas étudié, l'expérience poussera plutôt à considérer les T_i comme des ingrédients possibles : toute instantiation de la technique fera intervenir certains T_i , pas forcément tous et pas nécessairement dans le même ordre que pour la solution analysée. Complété par une description succincte de la

ou des techniques associées à chaque T_i , ce premier niveau ouvre la voie à la production de savoirs technologiques décrivant la technique τ (voir 1.3).

Le deuxième niveau met en évidence pour chaque t_i les choix auxquels donne lieu la solution : le choix des techniques lors des étapes intermédiaires dans le cas d'OMPC, les obstacles rencontrés et les initiatives prises pour les surmonter. Si l'obstacle est un manque lui est associé le choix d'objets nouveaux qui viennent enrichir le contexte définitoire.

La mise en œuvre de ces deux premiers niveaux produit une modélisation de la solution en termes de choix stratégiques face à la singularité de la tâche. Pour évaluer la possibilité d'un transfert et plus largement y repérer des germes de généralité, situés au niveau des règles stratégiques (Sensevy, 2011, p. 41) et des complexes de signes susceptibles d'orienter l'action future (Sensevy, 2011, p. 46), deux questionnements complètent l'étude :

- À quels objets, non-ostensifs et ostensifs du contexte définitoire de la tâche doit-on le succès de la suite des techniques utilisées?
- Une fois la technique choisie, à quoi peut-on attribuer l'efficacité des choix et initiatives opérés par le résolveur?

Comme on l'a vu dans l'exemple étudié, la première question participe du processus qui peut aboutir à la construction de ce que l'on pourrait nommer une variable d'opportunité d'une technique, associée au thème dont relève cette technique. Il s'agit de déterminer, à partir de l'implication d'une technique τ dans la résolution de plusieurs tâches, des conditions sur le contexte définitoire susceptibles de favoriser l'efficacité de τ et orientant donc vers son emploi dans des tâches ultérieures. Cette affordance, son explicitation en termes de variable relève de la composante pratique de la technologie des techniques produites par le thème.

La deuxième question débouche sur un grain plus fin de l'analyse, elle peut permettre de repérer des éléments spécifiques de la technique. Par exemple, pour l'emploi de τ_5 dans la tâche t' , il sera plus efficace de travailler avec l'angle orienté $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BS(M)})$, plutôt qu'avec l'angle $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MS(M)})$, car B étant commun aux deux cercles, la décomposition $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BS(M)}) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BS(M)})$ introduit deux angles inscrits qu'il est alors possible d'égaliser avec deux angles au centre. Inversement, cette deuxième question peut conduire à des éléments d'une plus grande généralité (les heuristiques évoquées par Sensevy) comme c'est le cas dans notre exemple de la prise en compte des buts à atteindre par un processus informel d'analyse pour choisir un objet nouveau.

Terminons cette section par une observation. L'outil proposé néglige totalement la question de la validité de la démonstration construite et donc des théorèmes impliqués. C'est qu'il se veut complémentaire de l'approche usuelle des œuvres mathématiques, orientée vers la validation et la composante théorique des praxéologies. Mon hypothèse est qu'une telle approche est notoirement insuffisante pour développer la capacité à jouer le jeu mathématique. Si un mathématicien étudie la démonstration d'un théorème, il ne le fait pas seulement pour être certain que le théorème est valide et pour en comprendre et mémoriser le contenu, il le fait aussi pour apprendre de la démonstration des façons de jouer avec les nouveaux objets introduits dans le cadre théorique dont relève l'œuvre : la preuve du théorème « La somme de deux fonctions continues en a est continue en a' est l'occasion d'apprendre à faire fonctionner la définition en (ε, η) de la continuité ».

Étudier la démonstration d'un théorème dans une perspective pratique est une dimension de l'étude du cours de mathématiques extrêmement peu encouragée par les professeurs du secondaire. Mais combien d'entre eux l'ont-ils pratiquée pendant leurs études universitaires, compte tenu de la répartition encore très répandue du topos, la théorie aux professeurs, la résolution de problèmes aux étudiants? Il est plus probable qu'ils aient eu l'occasion, au moins pendant leur travail personnel, d'analyser des corrigés de problèmes pour y dégager des idées pratiques à retenir (Castela, 2004). À supposer qu'ils aient le projet de faire une place explicite dans leurs classes à un tel travail, ce qui n'a rien de certain, se pose la question des techniques didactiques pour y parvenir. L'outil présenté ici peut constituer une ressource utile dans cette perspective.

Conclusion

J'espère avoir montré par cet article l'intérêt qu'il peut y avoir pour un chercheur à ne pas cantonner sa réflexion dans un seul cadre théorique. En l'espèce, je me suis appuyée sur quelques éléments du travail de Sensevy (2011) au sein de la TAD pour aborder avec un regard nouveau la théorie qui a constitué la référence dominante de mes travaux, à savoir la TAD. Chez Sensevy, la notion de jeux de savoir associe dans une même unité les dimensions génériques d'un jeu et les dimensions singulières de chaque partie. Comment la TAD prend-elle en compte cette dualité et les dialectiques auxquelles elle donne lieu? Telle est la question Q_0 qui a enclenché le parcours d'étude que j'ai réalisé au sein de la TAD,

pour produire, sans prétention d'exhaustivité, ma réponse $R^\heartsuit$, présentée dans cet article.

Prise en compte de la généricité

Outillée par les concepts d'objet, de rapport, de sujet et d'institution qui constituent ses fondements, la TAD s'est rapidement intéressée aux aspects génériques des activités humaines et plus particulièrement des mathématiques à travers le modèle des organisations praxéologiques. J'ai personnellement étendu la notion d'Organisation Mathématique Ponctuelle (une technique pour un type de tâches) de façon à prendre en compte les cas où plusieurs techniques sont disponibles pour un même type (OMP Complexe). J'ai également contribué au développement du modèle en défendant la nécessité d'intégrer dans la technologie d'une technique des savoirs pratiques relatifs aux aspects dotés d'une certaine invariance de sa mise en œuvre. Parmi ces savoirs, des critères génériques permettent d'approcher la portée de la ou des techniques au sein du type de tâches, autrement dit, de définir des sous-types spécifiques pour lesquels il est raisonnable d'essayer telle ou telle technique. Une telle démarche de spécification est aujourd'hui théorisée, notamment grâce à la notion de variable empruntée à la théorie des situations didactiques, par Chaachoua et Bessot (2019). Leurs travaux, qui proposent des définitions formalisées des notions de type et sous-type de tâches, relèvent de la théorie T4TEL, développée en référence explicite à la TAD pour répondre aux besoins spécifiques de recherches consacrées aux environnements informatiques pour l'apprentissage humain. Prenant appui sur un milieu M_0 contenant de solides connaissances du domaine géométrique, j'ai pu dans mon enquête concrétiser le lien entre OMPC, savoirs pratiques, variables et spécificité en travaillant sur le type de tâches « Démontrer que trois points sont alignés ». Relativement à une technique donnée de l'OMPC, sont introduites deux variables associées respectivement à la théorie et à la technologie de la technique.

Toujours sur le plan de la généricité, l'enquête que j'ai menée pour en savoir plus sur le concept d'affordance empruntée par Sensevy au champ de la psychologie m'a conduite à intégrer dans ma réponse à la question Q_0 la contribution de Araya-Chacón et Matheron (2015). Dans le cadre de leurs recherches sur la mémoire didactique, ceux-ci ont introduit la notion d'ostensif déclencheur, résultat d'une construction sémiotique prenant en charge, à partir d'expériences singulières une certaine généricité des contextes d'utilisation opportune d'une technique. C'est la dimension ostensive des sous-types spécifiques évoqués plus haut.

Du générique au singulier

Les textes de Chevallard autour du modèle praxéologique reconnaissent le caractère problématique de la mise en œuvre d'une technique dans le traitement

d'une tâche singulière : explicitation du caractère non algorithmique de nombreuses techniques, introduction d'un moment du travail de la technique dans le modèle des moments de l'étude. Mais dans ces textes et les travaux auxquels ils donnent lieu ce passage au singulier de la tâche n'est pas théorisé. Dans le prolongement du travail théorique de Chaachoua, la thèse de Jolivet précise la notion de tâche. Adoptant leur point de vue, j'ai introduit dans cet article la notion de contexte définitoire d'une tâche qui, partant d'un type de tâches, me permet de caractériser la singularité d'une tâche. Les variables évoquées précédemment permettent d'analyser le contexte définitoire, elles guident le choix d'une technique, sans garantie de succès si la technique n'est pas un algorithme du fait de la singularité du contexte définitoire. N'ayant pas rencontré dans mon enquête sur la TAD d'outils permettant d'analyser l'activité réalisée (ou à réaliser) pour actualiser une technique dans un contexte donné (voir Sensevy, 2011, p. 202), j'ai travaillé à partir de la définition du concept d'algorithme de Modeste (2012). Ceci m'a conduit par contraposition à distinguer deux dimensions dialectiquement liées dans la confrontation d'une technique à la singularité : l'embarras du choix et l'obstacle à la concrétisation du choix. J'ai utilisé ces propositions pour analyser une solution à une tâche d'alignement.

Du singulier au générique

Au sein de la TAD, le modèle des moments de l'étude, généralement considéré dans une perspective d'enseignement, peut également modéliser le processus de construction de praxéologies à partir de la confrontation à plusieurs tâches singulières. De même, l'analyse de solution évoquée ci-dessus, si elle est d'abord descriptive (quels choix ont été réalisés? comment ont été surmontés les obstacles?), se poursuit par la recherche des raisons de l'adéquation des initiatives au contexte, dans le but de repérer des éléments transférables à d'autres tâches et de construire du générique à partir du singulier. C'est d'ailleurs ce que je fais en décontextualisant l'outil d'analyse de solution/démonstration illustré dans l'exemple.

Modéliser la dynamique de la résolution de problèmes nouveaux

Je terminerai par ce qui constitue pour moi un changement de point de vue inattendu sur ce qui est désigné par la TAD comme pédagogie de l'enquête. J'ai pris conscience que plusieurs des outils introduits dans cette perspective pédagogique, schéma herbartien de l'étude, milieu de l'étude, différentes dialectiques à l'œuvre dans les PER, permettent l'analyse du processus de résolution de problèmes nouveaux.

Le présent article rend compte de mon enquête au sein de la TAD. Il est clairement un reflet de mon rapport personnel à cette théorie, le lecteur doit bien l'envisager comme

tel, et ce, d'autant qu'il n'a fait l'objet d'aucune présentation institutionnelle à la communauté de recherche développant la TAD²³. J'espère que, par les balises ainsi mises à disposition, il aidera le lecteur à réaliser un parcours analogue.

Références

- Araya-Chacón, A. et Matheron, Y. (2015). Un modèle pour l'évocation des connaissances en classe de mathématiques. Micro-cadre institutionnel de la mémoire didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 35(1), 37-68.
- Bautier, E. et Rochex, J.-Y. (1998). *L'expérience scolaire des nouveaux lycéens. Démocratisation ou massification?* Armand Colin
- Bautier, E. et Rochex, J.-Y. (2004). Activité conjointe ne signifie pas significations partagées. Dans Moro, C. et Rickenman, R. (dir.), *Situation éducative et significations* (p. 197-220). De Boeck.
- Bosch, M., Chevallard, Y., García, F. et Monaghan, J. (2020). *Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education. A Comprehensive Casebook*. Routledge.
- Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1), 77-124.
- Bosch, M. et Winslow, C. (2015). Linking problem solving and learning contents: the challenge of self-sustained study and research processes. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 35(3), 357-399.
- Brousseau, G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 7(2), 33-115.
- Butlen, D. et Charles-Pézard, M. (2003). Étapes intermédiaires dans le processus de conceptualisation en mathématiques. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 23(3), 41-78.
- Castela, C. (2000). Un objet de savoir spécifique en jeu dans la résolution de problèmes : le fonctionnement mathématique. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 20(3), 331-380.
- Castela, C. (2004). Institutional influencing mathematics students' private work: a factor of academic achievement. A comparative study of two French higher education institutions. *Educational Studies in Mathematics*, 57(1), 33-63. <https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000047050.70008.59>

²³ Je remercie le relecteur connaisseur de la TAD dont le rapport a apporté une première évaluation de mon travail du point de vue des chercheurs développant cette théorie.

Castela, C. (2008a). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 28(2), 135-182.

Castela, C. (2008b). Approche didactique des processus différenciateurs dans l'enseignement des mathématiques : l'exemple des apprentissages relatifs à la résolution de problèmes. Dans A. Rouchier et I. Bloch (dir.), *Perspectives en didactique des mathématiques. Actes de la 13^e école d'été de didactique des mathématiques* (p. 89-114). Éditions La Pensée Sauvage.

Castela, C. (2009). An anthropological approach to a transitional issue: analysis of the autonomy required from mathematics students in the French Lycée. *NOMAD (Nordisk Matematikk Didaktikk)*, 14(2), 5-27.

Castela, C. (2011). *Des mathématiques à leurs utilisations, contribution à l'étude de la productivité praxéologique des institutions et de leurs sujets / Le travail personnel au cœur du développement praxéologique des élèves en tant qu'utilisateurs de mathématiques* [note de synthèse pour une habilitation à diriger des recherches, Université Paris Diderot]. TEL. <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00683613>

Castela, C. (2020). Les praxéologies comme idiosyncrasies institutionnelles. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática*, 22(4), 86-102. <http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i4p086-102>

Castela, C. et Romo Vázquez, A. (2011). Des mathématiques à l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 31(1), 79-130.

Castela, C. et Romo Vázquez, A. (2023). Towards an institutional epistemology. Dans R. Biehler, G. Gueudet, M. Liebendörfer, C. Rasmussen et C. Winsløw (dir.), *Practice-Oriented Research in Tertiary Mathematics Education: New Directions* (p. 621-648). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-14175-1>

Chaachoua, H. (2010). *La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique des EIAH. Études de cas : la modélisation des connaissances des élèves* [note de synthèse pour une habilitation à diriger des recherches, Université Joseph Fourier]. TEL. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00922383>

Chaachoua, H. (2020). T4TEL : Un cadre de référence pour la formalisation et l'extension du modèle praxéologique. *Revista do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática*, 22(4), 103-118.

Chaachoua, H. et Bessot, A. (2019). La notion de variable dans le modèle praxéologique. *Revista do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática*, 21(4), 234-247. <http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i4p234-247>

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné* (2^e éd.). Éditions la Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12(1), 73-112.

Chevallard, Y. (1997). Familère et problématique, la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques*, 17(3), 15-54.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 1. Structures et fonctions. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot et R. Floris (dir.), *Actes de la 11^e école d'été de didactique des mathématiques* (p. 3-22). Éditions La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. Dans S. Maury et M. Caillot (dir.), *Rapport au savoir et didactiques* (p. 81-104). Éditions Fabert.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. Dans M. Bosch (dir.), *Proceedings of the IV Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 21-30). FUNDEMI-IQS.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. Dans L. Ruiz-Higueras, A. Estepa et F. J. Garcia (dir.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría antropológica de lo didáctico (TAD)* (p. 705-746). Universidad de Jaen.

Chevallard, Y. et Bosch, M. (2020). A short (and somewhat subjective) glossary of the ATD. Dans M. Bosch, Y. Chevallard, F. J. García et J. Monaghan (dir.), *Working with the anthropological theory of the didactic. A comprehensive casebook*, (p. xviii-xxxvii). Routledge.

Chevallard, Y. et Ladage, C. (2010). *Enquêter pour connaître. L'émergence d'un nouveau paradigme scolaire et culturel à l'âge de l'Internet [communication orale]*. Journée de réflexion sur « Une approche anthropologique du didactique », Université de Liège.

de Certeau, M. (1980). *L'invention du quotidien. 1. Arts de faire*. Gallimard.

Dorier, J-L, Robert, A., Robinet, J., et Rogalski, M. (1997). À propos du levier "méta". Dans J.-L. Dorier (dir.), *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question* (p. 185-213). Éditions La Pensée Sauvage.

Halbwachs, M. (1925, 1994). *Les cadres sociaux de la mémoire*. Presses universitaires de France.

Jolivet, S. (2018). *Modèle de description didactique de ressources d'apprentissage en mathématiques, pour l'indexation et des services EIAH* [thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes]. TEL. <https://theses.hal.science/tel-02079412>

Lesnes-Cuisiniez, E. (2021). *Modélisation didactique de parcours d'apprentissage dans un EIAH pour l'entrée dans le raisonnement géométrique au cycle 4, en appui sur les problèmes de construction de figures planes* [thèse de doctorat, Université Paris Sorbonne]. TEL. <https://hal.science/tel-03404996/>

Luyat, M. et Regia-Corte, T. (2009). Les affordances : de James Jérôme Gibson aux formalisations récentes du concept. *NecPlus « L'Année psychologique »* 109(2), 297-332. <https://doi.org/10.4074/S000350330900205X>

Matheron, Y. (2010). *Contribution à l'étude du travail de la mémoire dans les processus d'enseignement et d'éducation* [note de synthèse pour une habilitation à diriger des recherches, Université de Provence - Aix-Marseille]. TEL. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00586293>

Modeste, S. (2012). *Enseigner l'algorithmique pour quoi? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve?* [thèse de doctorat, Université de Grenoble]. TEL. <https://theses.hal.science/tel-00783294>

Morgagni, S. (2011). Repenser la notion d'affordance dans ses dynamiques sémiotiques. *Intellectica*, 55, 55(1), 241-267. <https://doi.org/10.3406/intel.2011.1170>

Perrin-Glorian, M.-J. (1993). Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans les « classes faibles », *Recherches en Didactique des Mathématiques* 13(1-2), 95-118.

Perrin-Glorian, M.-J. (2021). Dialectique contrat/milieu. Quelle complémentarité entre TACD et théorie des situations? Dans M.-J. Gremmo (dir.), *Actes du 2^e congrès de la TACD. Pour une reconstruction de la forme scolaire* (p. 190-207). Université de Lorraine.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press.

Sensevy, G. (2011). *Le sens du savoir. Éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. De Boeck Supérieur.

Stoffregen, T. A. (2003). Affordances as properties of the animal-environment system. *Ecological Psychology*, 15, 115-134.

Annexe 1 : Une solution de la tâche t

A, B et C sont trois points alignés distincts. Par ces trois points, on mène trois droites distinctes D, D' et D'' parallèles entre elles. Soit M un point de D', distinct de B. La parallèle à (MC), resp. (MA), passant par B coupe D, resp. D'', en I (resp. J). Montrer que M, I et J sont alignés.

Tableau 1. Solution de la tâche t avec la technique τ_2

	Soit A' le point d'intersection de D et (BJ). Soit H l'homothétie de centre I, transformant A en A'. Déterminons l'image de M. H((AM)) est la droite parallèle à (AM) passant par H(A), c-à-d (BJ). H((BM)) est la droite parallèle à (BM) passant par H(B). Il faut donc déterminer H(B). Soit B' le point commun à (IB) et D''. Montrons que H(B) = B'
O étant le point d'intersection de (BI) et (AM), on a	
$\frac{IB'}{IB} = \frac{AC}{AB} = \frac{AM}{AO} = 1 - \frac{OM}{OA} = 1 - \frac{MB}{AI} = 1 - \frac{AA'}{AI} = 1 + \frac{AA'}{IA} = \frac{IA'}{IA}$	
Donc on a bien H(B) = B'. Il s'en suit que H((BM)) = D'' et que H(M) est le point commun à (BJ) et D'', c-à-d J. Ceci prouve que I, M et J sont alignés.	