Revue québécoise de didactique des mathématiques

Numéro thématique 2, Tome 2 (2024)

Enseignement et apprentissage de l'algèbre avant la lettre. Un regard sur les ressources et les pratiques enseignantes

DOI : 10.71403/6mx31n16

Table des matières

Université Laval, Québec

ISSN : 2563-6995

Mot éditorial du numéro thématique : Enseignement et apprentissage de l’algèbre avant la lettre. Un regard sur les ressources et les pratiques enseignantes

Izabella OLIVEIRA
Université Laval
izabella.oliveira@fse.ulaval.ca
Floriane WOZNIAK
Université de Montpellier, IMAG.
floriane.wozniak@univ-tlse2.fr
Doris JEANNOTTE
Université de Québec à Montréal
doris.jeannotte@uqam.ca

Le comité éditorial a le plaisir de vous proposer le deuxième tome du numéro thématique sur l'« Enseignement et apprentissage de l’algèbre avant la lettre : un regard sur les ressources et les pratiques enseignantes ». Comme pour le premier tome paru en décembre 2022, les trois articles sont issus des travaux de l’OIPA – Observatoire international de la pensée algébrique – qui ont fait l’objet de présentation dans le cadre du 6e colloque de l'OIPA qui a eu lieu à Montréal.

Le premier article, écrit par Sylvie Coppé, présente le potentiel pour la construction des connaissances algébriques d’une activité d’évaluation formative entre pairs (élèves de 13 à 15 ans) en France. Deux modalités ont été expérimentées auprès de 14 classes dans le cadre d’une recherche collaborative (Bednarz, 2013; Desgagné et al., 2001) issu du projet européen ASSIST-ME (*Assess Inquiry in Science, Technology and Mathematics Education*). Le dispositif repose sur l’organisation d’un débat après que les élèves ont validé les réponses de leurs camarades à un exercice visant la transformation d’un programme de calcul en

Revue québécoise de didactique des mathématiques, 2022, *Numéro thématique 2* (Tome 2), p. 1-2. https://doi.org/10.71403/18kca410

expression littérale. L'auteure propose une analyse des productions des élèves et en particulier leur évolution du point de vue de l'argumentation en appui avec les notions de contrat et de milieu (Brousseau, 1986, 1990). Ceci la conduit à étudier la pertinence du dispositif.

Le deuxième article, écrit par Hassane Squalli et Doris Jeannotte, propose un outil méthodologique pour l'étude des curriculums officiels. Les auteurs l'ont élaboré à partir du cadre conceptuel de l'algèbre et de la pensée algébrique développé par Squalli, (2000, 2015, 2020) et en mobilisant les concepts et les outils de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999). Le modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique (MPRPA) présenté se décline en trois praxéologies algébriques régionales, elles-mêmes structurées hiérarchiquement autour de praxéologies locales et de genres de tâches. Des exemples illustrent ces différents niveaux. Ce modèle d'analyse, vu comme une praxéologie globale, permet aussi l'étude de la transition arithmétique-algèbre dès l'école primaire et a été utilisé pour une comparaison internationale des programmes du Bénin, du Maroc et de la Tunisie (Ben Nejma et al., 2022) ainsi que dans l'analyse des programmes d'études d'Ontario (Jeannotte et Squalli, 2022).

Le troisième article, écrit par Anne-Marie Rinaldi, traite de l'équivalence quantitative et plus précisément, de la production d'expressions numériques équivalentes. Pour l'auteure, la focalisation sur le résultat, valence pragmatique du calcul, au détriment de l'étude des propriétés mathématiques par le calcul (valence épistémique du calcul) pourrait être une explication aux difficultés des élèves. En particulier, l'usage du signe égal comme signe annonçant seulement un résultat et la non-(re)connaissance des propriétés de commutativité et de distributivité. Le texte présente le potentiel d'une séquence de trois séances expérimentées avec des élèves de 7 et 8 ans en France. Cette séquence s'articule autour de la manipulation de collections discrètes (les doigts) ou continues (les bandes), la production d'expressions additives ou soustractives et le calcul en appui avec des décompositions en appui avec 10.

Nous remercions chaleureusement toutes les personnes qui ont contribué à l'élaboration de ce numéro thématique en deux volumes, tant par la richesse des textes proposés que par la qualité des relectures.

Bonne lecture !

Analyse d'une évaluation entre pairs en algèbre au collège en France

Sylvie COPPÉ
Université de Genève, FPSE, équipe DiMaGe
sylvie.coppe@unige.ch

Résumé : Dans le cadre d'une recherche collaborative associant des enseignant·es et la chercheuse, autrice de cet article, sur le thème de l'enseignement de l'algèbre au collège en France, nous avons élaboré et expérimenté une séance d'évaluation entre pairs (selon deux modalités) dans laquelle les élèves devaient transformer un programme de calcul en une expression littérale. Une fois leur réponse produite, elles ou ils devaient se prononcer sur la validité de la réponse d'un·e autre élève ou de celles de l'ensemble des élèves de la classe. Ensuite, l'enseignant·e organisait un débat dans la classe sur les réponses. Dans ce texte, en utilisant les notions de contrat didactique et de milieu, et nos travaux sur les vérifications, nous analysons les réponses et les arguments donnés par les élèves, puis nous montrons la potentialité de ce type d'activités pour la construction des connaissances algébriques.

Mots-clés : algèbre, programmes de calcul, évaluation entre pairs, argumentation

Analyzing algebra students' peer assessment skills at the college (middle school) level in France

Abstract: This article presents the results of a collaborative research project on algebra teaching strategies in middle schools in France. Together with a group of teachers, the author developed and tested a two-step peer assessment exercise in which students were asked to transform a computational program into a literal expression. Once they had produced their answers, students were then asked to assess the validity of either another student's answer or those of the entire class. Next, the teacher organized a class discussion on the answers. We analyze the students' answers and arguments based on our own studies on verification and the notions of didactic contract and didactic milieu, and discuss the potential of this type of activity for building algebra knowledge.

Keywords: algebra, computational program, peer assessment, argumentation

Revue québécoise de didactique des mathématiques, 2022, *Numéro thématique 2* (Tome 2), p. 3-34. https://doi.org/10.71403/sc6jqd43

Introduction

Depuis 2002, la chercheuse autrice de cet article a animé un groupe de recherche collaborative (Bednarz, 2013; Desgagné et al., 2001) avec des enseignant·es[1] de collège en France (élèves de 11 à 15 ans) ayant pour but de produire des ressources pour les enseignant·es et formateur·trices de mathématiques sur l'enseignement de l'algèbre (Cherpin et al., 2022; Coppé, 2020). Ce groupe de recherche, nommé SESAMES Algèbre[2], produit des documents diffusés sur le site PEGAME (http://pegame.ens-lyon.fr/) qui comporte deux entrées : « Enseigner » constituée de propositions d'activités pour les classes, classées par niveaux, explicitées et commentées pour les rendre plus accessibles et « Se former », partie dans laquelle nous proposons des documents qui explicitent nos choix pour les activités et qui devraient permettre aux enseignant·s de se les approprier et d'en comprendre les buts et les enjeux.

De 2012 à 2016, tout le groupe a participé au projet européen de recherche ASSIST-ME (*Assess Inquiry in Science, Technology and Mathematics Education*) dont l'objectif était, d'une part, d'analyser l'influence sur les apprentissages des élèves et les pratiques enseignantes de nouveaux dispositifs d'évaluations formatives en lien avec les évaluations sommatives dans le cadre de démarches d'investigations en sciences, mathématiques et technologie et, d'autre part, de concevoir et de diffuser des méthodes d'évaluations formatives en conformité avec la culture et les pratiques de chaque pays. Dans ce cadre, nous avons conçu et expérimenté des séances dans lesquelles nous avons développé des outils d'évaluation formative pour l'enseignement de l'algèbre. Dans cet article, nous décrivons et analysons une de ces séances dans laquelle nous proposons un dispositif d'évaluation entre pairs à propos d'une tâche d'algèbre visant la conversion d'un programme de calcul (registre verbal) en une expression littérale (registre algébrique).

Dans la première partie, nous donnerons quelques éléments sur nos choix en algèbre, puis, dans la deuxième, nous évoquerons quelques éléments sur l'évaluation formative et notamment l'autoévaluation. Enfin, après avoir décrit l'expérimentation, nous analyserons les productions des élèves et leur évolution en nous centrant sur le point de vue de l'argumentation des élèves.

---

1 Voici la liste des enseignant.e.s qui participent/ont participé au groupe : Christophe Alves, Olivier Arrouch, Véronique Berger, Serge Betton, Maud Chanudet, Anne Sophie Cherpin, Vincent Duval, Stéphane Garapon, Alexandra Goislard, Sylvie Martin-Dametto, Claire Piolti-Lamorthe, Sophie Roubin, Étienne Spaak.

2 Ce groupe a été créé au sein du laboratoire ICAR (CNRS, Université de Lyon, ENS Lyon) et soutenu par l'Institut français de l'éducation (IFE). En 2011, il a intégré le dispositif du réseau des Lieux d'éducation associés (LéA) en association avec le collège Ampère de Lyon.

1. Le contexte de cette étude

Comme nous l’avons mentionné, ce travail collaboratif avait pour but la production de ressources pour les enseignant.es sur l’enseignement de l’algèbre afin de favoriser le développement de connaissances algébriques chez les élèves par le biais notamment de la résolution de problèmes en travaillant sur le sens plutôt que sur les techniques de calcul, mais sans pour autant les négliger. Ainsi, nous avons travaillé dans plusieurs directions. Nous en citons trois qui sont en lien avec cette étude. Tout d’abord, en partant d’un constat partagé dans le groupe selon lequel l’enseignement de l’algèbre restait encore trop formel et ne permettait pas aux élèves de travailler sur le sens, nous avons élaboré des problèmes à mettre en œuvre dans les classes pour introduire l’algèbre. Nous avons suivi en cela ce que Chevallard (1998) appelle les raisons d’être. Pour cela, dans un premier temps, nous nous sommes appuyé·es sur les travaux de Bednarz et Janvier (1996) qui ont défini quatre perspectives principales d’introduction de l’algèbre :

- l’approche par la généralisation/récurrence,
- l’approche par la résolution de problèmes/mise en équation,
- l’approche par la modélisation,
- l’approche technologique/fonctionnelle.

Puis, plus récemment, nous avons utilisé les travaux de Kieran (2007) qui définit trois aspects de l’activité algébrique avec le modèle GTG pour conceptualiser l'activité algébrique : l'activité générative, l'activité transformationnelle et l'activité globale au niveau méta. Cela nous a donc permis d’élaborer plus particulièrement des problèmes de généralisation et de preuves qui étaient peu proposés dans les classes au début de notre recherche (les problèmes amenant à des équations ont toujours été moins oubliés, mais ils sont souvent proposés après de nombreux exercices techniques). Il est cependant à noter que la situation a commencé à évoluer en France à partir de 2005, à la suite de changements de programmes qui préconisent de plus en plus explicitement les activités de preuve en algèbre (notamment dans le programme de 2016) comme en témoignent, dans l’extrait suivant (figure 1), les deux dernières phrases de chaque colonne.

Utiliser le calcul littéral

Mettre un problème en équation en vue de sa résolution. Développer et factoriser des expressions algébriques dans des cas très simples. Résoudre des équations ou des inéquations du premier degré. - Notions de variable, d'inconnue. Utiliser le calcul littéral pour prouver un résultat général, pour valider ou réfuter une conjecture.	Comprendre l'intérêt d'une écriture littérale en produisant et employant des formules liées aux grandeurs mesurables (en mathématiques ou dans d'autres disciplines). Tester sur des valeurs numériques une égalité littérale pour appréhender la notion d'équation. Étudier des problèmes qui se ramènent au premier degré (par exemple, en factorisant des équations produits simples à l'aide d'identités remarquables). Montrer des résultats généraux, par exemple que la somme de trois nombres consécutifs est divisible par 3.

Figure 1. Extrait du programme français mis en place en 2016, cycle 4
(Ministère de l’Éducation nationale, 2015, p. 73)

Pour élaborer ces problèmes, nous avons largement utilisé les programmes de calcul (Alves et al., 2013). Rappelons qu'un programme de calcul (Drouhard, 1995; Chevallard, 2007; Ruiz Monzon, 2010) se présente sous forme d'un texte qui décrit un calcul à faire sur des nombres. Voici deux exemples de problèmes à partir d'un programme de calcul, le premier peut aboutir à une résolution d'équation et le second à l'établissement d'une preuve.

> Je pense à un nombre, j'ajoute 4, puis je multiplie le résultat par 7. J'ajoute le nombre de départ et je trouve 25. Quel était le nombre de départ?
>
> Je pense à un nombre, je le multiplie par 5 puis j'ajoute 3. Je multiplie le résultat par 2 et j'enlève 10 fois le nombre de départ. Fais quelques essais. Que constates-tu? Est-ce toujours vrai? Prouve-le.

Un autre constat portait sur les erreurs récurrentes en calcul littéral. En étudiant les manuels, et grâce à la connaissance du terrain qu'avaient les enseignant·es, nous avons observé que la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition n'était pas suffisamment utilisée comme un élément de justification des calculs. Quand elle est citée (soit dans les traces écrites soit lors des interactions enseignant·e/élève), il arrive assez souvent que ce soit avec des termes courants comme « transformer » ou « simplifier » (qui ne disent rien des opérations mathématiques à faire) ou bien avec des ostensifs au sens de Bosch et Chevallard (1999) comme des flèches ou des couleurs. Or, comme nous l'avons souligné (Assude et al., 2012), ces termes ou ces ostensifs ne permettent notamment pas des contrôles et vérifications performantes. Par exemple, pour l'erreur suivante assez fréquente, lorsqu'un·e élève développe $3(2x + 5)$ en $6x + 5$, elle ou il a bien transformé le produit en une somme, mais ce n'est pas juste.

> Il en résulte que la propriété de distributivité perd sa prépondérance technologique pour justifier et valider les calculs. Il y a donc un risque que les élèves ne l'utilisent pas et se rabattent sur des techniques portant sur les transformations d'écritures exclusivement basées sur des ostensifs, avec des critères de vérification peu opérationnels portant sur la forme. (Assude et al., 2012, p. 55).

Sur l'utilisation de ces termes courants et des ostensifs, il semble qu'il n'y a pas d'évolution en France puisqu'une étude à grande échelle (étude PRAESCO[3]) réalisée récemment dans le cadre de la DEPP[4] (Coppé et al., 2021) montre que 64 % des enseignant·es interrogé·es, pour donner une relance sur une erreur de calcul littéral, utilisent des arguments du type « on n'ajoute pas des pommes et des

[3] Pratiques d'enseignement spécifiques aux contenus

[4] Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance

poires » et que les trois quarts d’entre elles ou eux estiment que ce sont des arguments concrets et faciles pour les élèves.

Enfin un troisième axe de notre travail portait sur le développement des contrôles et des vérifications. Dans notre définition des processus de vérifications (Coppé, 1993), nous considérons que ceux-ci font partie des processus de validation à la différence qu’ils peuvent quelquefois ne porter que sur la vraisemblance et pas sur la certitude, mais pour l’élève c’est suffisant à ce moment-là.

> Dans une situation de résolution de problème, un élève a identifié un résultat partiel ou final et il se pose la question de la validité de son résultat. Nous appellerons vérification tout argument avancé ou toute action mise en œuvre par l'élève pour limiter l'incertitude sur le résultat, si l'élève en a besoin, à ce moment-là et dans cette situation. Une vérification a pour conséquence, soit d'accroître la vraisemblance et éventuellement d'acquérir la certitude du résultat, soit d'engendrer un doute plus grand et, éventuellement, de déboucher sur une phase de rectification. (Coppé, 1993, p. 27)

De plus, nous avons montré que les vérifications relevaient souvent de ce que nous avons appelé le travail privé de l’élève (c’est-à-dire ce qui n’est pas donné à voir à l’enseignant·e), c’est pourquoi on peut avoir l’impression que les élèves ne vérifient pas (Coppé, 1998). Il nous est donc apparu important de donner à voir des démarches et des méthodes de vérifications dans le travail quotidien de la classe, pour que les élèves puissent élargir leur palette. Mais, les vérifications sont fortement liées aux connaissances mathématiques des élèves, comme nous l’avons montré dans une autre expérimentation (Chalancon et al., 2002). Par exemple, pour pouvoir vérifier en testant sur des valeurs numériques, il est nécessaire que l’élève comprenne le statut de variable (c’est-à-dire que dans une expression littérale, x peut prendre n’importe quelle valeur). Le travail fait dans ces séances d’évaluation par les pairs a été l’occasion de développer les vérifications.

2. Mise en place d’évaluations entre pairs

Comme nous l’avons mentionné en introduction, la participation du groupe de recherche au projet ASSIST-ME a été l’occasion pour nous de réfléchir aux processus d’évaluation. Tout au long de notre travail collaboratif, nous avions eu des discussions sur les évaluations sommatives, notamment parce que si on introduit des changements dans les types de tâches proposées aux élèves pendant les séances d’enseignement, on va également modifier ceux proposés en évaluation à visée certificative. Il s’avérait donc nécessaire de vérifier leur compatibilité avec celles de l’institution soit à l’échelle de l’établissement, soit à celle de l’examen de fin de collège.

Le travail dans le projet ASSIST-ME a été l'occasion de travailler sur l'évaluation formative (à noter que les programmes scolaires français de l'époque de notre expérimentation soulignaient déjà l'importance d'évaluations autres que sommatives) ou plutôt sur le caractère formatif de l'évaluation. En effet, les travaux anglophones et francophones (Allal et Mottier Lopez, 2005; Black et Wiliam, 2009) s'accordent sur le caractère continu de l'évaluation formative, qui porte sur des savoirs et savoir-faire déjà enseignés ou en cours d'enseignement, qui peut se dérouler à tout moment d'une séance d'enseignement. Black et Wiliam (1998) indiquent que l'évaluation devient formative quand elle sert à adapter l'enseignement aux besoins repérés des élèves notamment par la notion de feedback. Comme on peut le noter dans la citation suivante, ils incluent les processus d'autoévaluation ou d'évaluation entre pairs dans l'évaluation formative puisque ces processus permettent bien aux élèves d'avoir un feedback sur leurs apprentissages et aux enseignant.es d'adapter leur enseignement selon les informations recueillies.

> Nous utilisons le terme général d'évaluation pour désigner toutes les activités entreprises par les enseignant·es – et par les élèves lors de l'autoévaluation – qui fournissent des informations à utiliser en retour pour modifier les activités d'enseignement et d'apprentissage. Cette évaluation devient une évaluation formative lorsque les données sont effectivement utilisées pour adapter l'enseignement aux besoins des élèves. (Black et Wiliam, 1998, p. 140, traduction libre[5])

Pour Shavelson et al. (2008), comme indiqué sur la figure 2, il y a un continuum entre des évaluations formelles et planifiées (voire des évaluations « prêtes à l'emploi » produites par des chercheurs : « *Embedded-in-the-curriculum formative assessment* »), celles moins formelles dans l'interaction et celles « *on the fly* » qui peuvent arriver de façon spontanée à l'initiative de l'enseignant·e ou d'un·e élève.

Figure 2. Continuum des évaluations formatives selon Shavelson et al. (2008, p. 300)

---

[5] « We use the general term assessment to refer to all those activities undertaken by teachers – and by their students in assessing themselves – that provide information to be used as feedback to modify teaching and learning activities. Such assessment becomes formative assessment when the evidence is actually used to adapt the teaching to meet student needs » (Black et Wiliam, 1998, p. 140).

En ce qui nous concerne, nous avons choisi de travailler sur l'introduction, dans des séquences portant sur l'algèbre, de dispositifs d'évaluation formative comportant de l'évaluation entre pairs en utilisant des questionnaires élèves de positionnement et/ou des votes. Black et al. (2004) précisent qu'il y a différentes organisations possibles pour l'évaluation entre pairs, le principe étant que les élèves soient placés en position de réfléchir sur la validité de la production (orale ou écrite) d'au moins un·e de leurs camarades. Pour nous, l'organisation régulière de séances incluant des évaluations entre pairs (nous nous situons dans « *embedded assessment* ») peut être un moyen de faire entrer les élèves dans l'autoévaluation en leur donnant des occasions (voire des habitudes) d'argumenter sur la validité de réponses produites (et notamment les leurs).

Cela rejoint les propos de Allal (1999) qui souligne l'importance pour les élèves de développer des compétences leur permettant de se positionner par rapport à leur travail ou par rapport aux réponses des autres dans un but de régulation, ce qui devrait permettre, selon elle, d'accroitre l'autonomie de l'élève et une meilleure adaptation au monde.

> En s'autoévaluant, l'élève est amené à expliciter ses représentations, à réfléchir sur ses stratégies, à confronter ses démarches avec celles d'autres élèves, à intégrer des critères externes dans ses cadres de référence, à gérer activement les relations entre les différentes tâches à accomplir. (Allal, 1999, p. 43-44)

Ainsi, en demandant aux élèves de fournir un retour sur les réponses d'autres élèves, nous pensons que cela peut favoriser la mise en place de questionnements sur la validité de leurs propres réponses (et/ou démarches), leur donner des outils de vérification et ainsi les entrainer à avoir pour eux-mêmes ce retour sur leur réponse. Bien sûr, c'est un travail qui se construit sur la durée.

Tous ces dispositifs supposent un changement de contrat dans la classe (dans le sens où les élèves ne doivent pas seulement produire des réponses, mais également se questionner sur leur validité) qui, en accordant davantage de responsabilités aux élèves dans les procédures de validation, a des effets sur les responsabilités respectives de l'enseignant·e et des élèves quant à la construction des savoirs.

3. Cadre théorique

Pour faire l'analyse de cette expérimentation, nous utilisons tout d'abord les notions de contrat et milieu didactiques (Brousseau, 1986, 1990). Ainsi, cette activité vise à modifier le contrat didactique habituel et fréquent de la classe de mathématiques puisque l'élève doit non seulement répondre à la question, mais aussi se prononcer sur la validité des réponses des autres. Il y a ainsi une redistribution des responsabilités entre l'enseignant·e qui ne donne pas son avis notamment lors du débat, et les élèves qui doivent valider des réponses et pas seulement les produire. Ce changement de contrat introduit alors un enrichissement volontaire du milieu en y introduisant les réponses des autres, ce qui, selon nous, devrait permettre à chaque élève de se questionner sur des réponses qu'elle ou il n'a pas forcément envisagées et ainsi, mobiliser des connaissances pour produire des arguments de validation. Mais, comme nous le verrons plus loin, à la fois dans l'analyse a priori et a posteriori, ce n'est pas forcément toujours le cas. Par exemple, les élèves pourraient être d'accord sur une réponse fausse et avoir ainsi un feedback qui renforce leur erreur. On retrouve là les distinctions sur le milieu faites par Perrin-Glorian (1999) qui distingue le milieu « potentiel » et le milieu « activé » ou par Schubauer-Leoni et al. (2007) qui évoquent un milieu qui « ne fait pas milieu ». Ces deux citations de Perrin-Glorian (1999) qui, bien qu'elles concernent des situations a-didactiques de résolution de problèmes plus classiques que la nôtre, montrent bien cette distance entre le milieu cognitif et le milieu tel qu'envisagé par l'enseignant·e.

> Si le rapport personnel de certains élèves n'est pas idoine au rapport institutionnel, ces objets de savoir placés dans le milieu de la situation didactique risquent de ne pas pouvoir apporter les rétroactions attendues aux actions de l'élève. Pour ces élèves, la situation a-didactique ne permettra pas l'apprentissage prévu : la dévolution ne peut se faire convenablement du fait de l'absence dans les connaissances disponibles de l'élève d'éléments supposés dans le milieu. [...] Dans ce cas le milieu avec lequel agit l'élève n'est pas le milieu construit par l'enseignant. (Perrin-Glorian, 1999, p. 294)

> L'absence dans le milieu effectif de certains objets que le maitre y avait prévu (ou la présence d'objets non prévus) concerne surtout des connaissances auxquelles le sujet a besoin de faire appel de lui-même, ce que j'appellerai la partie cognitive du milieu, ou abrégé, le milieu cognitif. (Perrin-Glorian, 1999, p. 294)

Dans ce cadre, nous faisons l'hypothèse que, dans certains cas, lors de la validation d'une réponse, les connaissances mises en jeu peuvent être différentes de celles qui ont permis de résoudre le problème et, par conséquent, cet enrichissement du milieu par les réponses des autres peut permettre de faire évoluer les connaissances des élèves à certaines conditions que nous allons voir dans les analyses.

Pour analyser les arguments des élèves, nous avons utilisé nos travaux sur les vérifications et notamment la distinction entre les vérifications de type interne (liées au savoir mathématique) et celles externes (liées à des éléments de forme ou au contrat didactique comme « j'ai bien utilisé toutes les données du problème »).

> Nous appellerons processus de vérification interne tout processus de vérification mettant en jeu des savoirs ou des savoir-faire typiquement mathématiques, ne

> dépendant pas nécessairement de la situation dans laquelle on les utilise. [...] Les autres processus, qui utilisent des connaissances portant sur d'autres savoirs ou savoir-faire moins mathématiques (notamment ceux qui n'utilisent pas seulement la logique du problème mais qui dépendent davantage du contrat) seront appelés des vérifications de type externe. Ces processus ont la propriété d'être généralisables à tous les problèmes ou à des classes de problèmes très étendues [...]. Certains peuvent être très courts et/ou se limiter à des arguments simples. (Coppé, 1993, p. 36)

On peut faire le parallèle entre des vérifications de type externe et ce que Rhéaume et Oliveira (2015) désignent par « des mises entre parenthèses du sens lors de la vérification ».

Ainsi, nous cherchons à répondre aux questions suivantes : dans le cadre de l'enseignement/apprentissage de l'algèbre (au niveau du collège en France), quelles sont les capacités des élèves à se positionner, en justifiant, sur des réponses qu'ils n'ont pas produites? Quels types d'arguments sont avancés pour justifier? Et finalement, de façon plus générale, dans quelle mesure ce type de dispositif d'évaluation entre pairs visant à ajouter une tâche supplémentaire de validation (jeu sur le contrat didactique habituel) et à enrichir le milieu, peut-il favoriser la construction des connaissances en jeu?

4. Description du dispositif d'évaluation entre pairs

Voyons maintenant le dispositif expérimenté dans des classes de collèges en France au niveau 4e et 3e (élèves de 13 à 15 ans). Nous présentons la tâche en indiquant les objectifs poursuivis, puis nous faisons une analyse a priori des réponses (correctes et erronées) ainsi que des types d'arguments produits pour de possibles vérifications.

4.1 La tâche proposée

Voici la tâche que nous avons proposée. Elle est le fruit d'une élaboration collective, tant pour son contenu que sa mise en œuvre. Elle est proposée dans les premiers mois de l'année au début du travail sur l'algèbre. Plus précisément, cette tâche est la première d'une séquence de reprise sur l'enseignement de l'algèbre (puisqu'en France, cet enseignement commence en classe de 5e). Dans cette séquence, les élèves vont travailler sur les conversions entre des programmes de calcul et des expressions littérales (dans les deux sens) et sur les équivalences des expressions littérales pour notamment produire des preuves ou ensuite résoudre des équations.

Outre l'utilisation du dispositif d'évaluation entre pairs pour faire entrer les élèves dans l'autoévaluation, comme mentionné plus haut, un second objectif concerne davantage l'enseignant·e qui pourra ainsi poser un diagnostic sur la maitrise de savoirs ou savoir-faire anciens dont elle ou il sait, par ailleurs, qu'ils sont source de difficulté. Ainsi, nous nous situons bien dans le cas d'une tâche d'évaluation à la fois diagnostique et formative.

> Voici un programme de calcul
>
> Choisir un nombre
>
> Ajouter 4
>
> Multiplier la somme par 5
>
> Soustraire 8 au résultat
>
> Quelle expression littérale décrit ce programme de calcul?

Figure 3. Le problème proposé aux élèves

Cette tâche, conforme aux programmes français de 2016, est proposée aux niveaux 4^e^ et 3^e^, pour des élèves qui ont déjà rencontré l'algèbre, mais sans que l'on sache de quelles façons, c'est-à-dire avec quelles organisations praxéologiques (au sens de Chevallard, 1998), notamment quels types de tâches ont été travaillés et quels éléments technologiques ont été utilisés. Sachant qu'en France l'algèbre est introduite en classe de 5^e^, on pourrait penser que cette activité est trop facile pour des élèves des niveaux que nous avons choisis. Cependant, même si les programmes préconisent ce genre d'activités, il n'est pas sûr que les élèves les aient déjà rencontrées car les pratiques peuvent être très différentes selon les enseignant·es. Là encore nous renvoyons aux résultats de l'enquête PRAESCO (Coppé et al., 2021) qui montre des pratiques très variées concernant l'introduction et le travail sur l'algèbre. Par exemple 40 % des enseignant·es interrogé·es déclarent commencer les chapitres de calcul algébrique par des exercices de technique comme développer, réduire ou factoriser. Si environ la moitié des enseignant·es déclarent passer autant de temps sur les problèmes et sur les techniques, 40 % déclarent passer davantage de temps sur les exercices techniques. Il se peut donc que certains élèves n'aient jamais rencontré ce type de tâches d'autant plus que l'utilisation des programmes de calcul n'est pas encore si fréquente; on peut le constater dans les manuels.

Le choix (en termes de variables didactiques) de la forme du programme de calcul est justifié par les raisons suivantes qui portent sur la mobilisation de la lettre, sur les aspects syntaxiques et sur les justifications des calculs :

- Déterminer si les élèves mobilisent le calcul littéral (ce qui est explicitement demandé) plutôt que le calcul numérique. Ici comme il n'y a pas de finalité autre que celle de produire une expression littérale, on peut penser que les élèves peuvent difficilement utiliser un nombre comme exemple générique comme elles ou ils pourraient le faire dans une activité de preuve.

- Déterminer si les élèves maitrisent les règles de calcul comme la priorité des opérations et l’usage des parenthèses et également si elles ou ils peuvent écrire une expression littérale plutôt qu’un calcul séquentiel.
- Déterminer si les élèves peuvent justifier l’équivalence de différentes écritures et avec quels arguments (niveau technologique) puisque les élèves peuvent écrire différentes expressions (réduites ou non) et que cela peut engendrer des discussions sur les différentes formes des expressions et sur leurs équivalences.

4.2 Le dispositif expérimental

Nous avons testé cette activité, en utilisant deux protocoles qui diffèrent par l’utilisation de Plickers (https://plickers.com) (celles et ceux des enseignant·es qui n’étaient pas familier·ères ou pas équipé·es pour l’utilisation de Plickers n’ont pas introduit cet outil), dans neuf classes de la région lyonnaise de 4e (élèves de 13-14 ans) ou de 3e (élèves de 14-15 ans) avec cinq professeurs qui font partie du groupe de recherche collaborative, notés P1 à P5. Nous avons choisi à la fois des classes en réseau d’éducation prioritaire (REP)[6] et des classes non REP. Nous avons filmé la séance dans seulement quatre classes (avec une caméra pointée sur l’enseignant·e, ce qui nous permet d’analyser les débats). Nous avons collecté les feuilles de travail des élèves pour toutes les classes sauf deux (mais nous avons le film avec les réponses des élèves). Nous avons aussi les traces des votes Plickers et certaines copies de tableau blanc. À noter que ce dispositif questionne aussi le travail fait lors des phases de mises en commun (constituées ici d’un débat), dont on sait qu’elles sont difficiles à mettre en œuvre pour les enseignant·es.

Le tableau suivant rend compte des différents cas.

Tableau 1. Récapitulatif des classes selon l’enseignant·e (Pn, n de 1 à 5 désigne l’enseignant·e), le niveau de classe, le protocole 1 ou 2.

Protocole 1	Protocole 2	Film	Documents élèves
	P1 3e D REP		oui
	P1 3e F REP		oui
	P2 3e REP		oui
	P5 4e		oui
P1 4e A REP		x	oui
P1 4e E REP		x	oui
P3 3e A		x	non
P3 3e B		x	non
P4 3e B REP		x	oui

[6] Ce sont des établissements qui comportent un nombre important d’élèves de milieux sociaux défavorisés.

Le scénario prévu est le suivant. Tout d'abord, les élèves résolvent le problème individuellement. Ensuite les deux protocoles suivants sont utilisés :

- Protocole 1 : en circulant dans la classe pendant le temps de recherche, l'enseignant·e collecte quatre réponses, puis en utilisant l'application Plickers, elle ou il fait voter les élèves sur la validité de chacune (on ne peut pas voter sur davantage de réponses avec cette application). L'enseignant·e organise alors un débat argumentatif entre élèves, sans intervenir et sans conclure sur la validité des réponses puis propose un nouveau vote. Pendant le débat, l'enseignant·e distribue la parole, reformule les propos des élèves si besoin, mais ne donne pas son avis. Voici la feuille de travail distribuée aux élèves dans laquelle nous avons tenté de recueillir des arguments explicites sur le maintien ou sur le changement de vote.

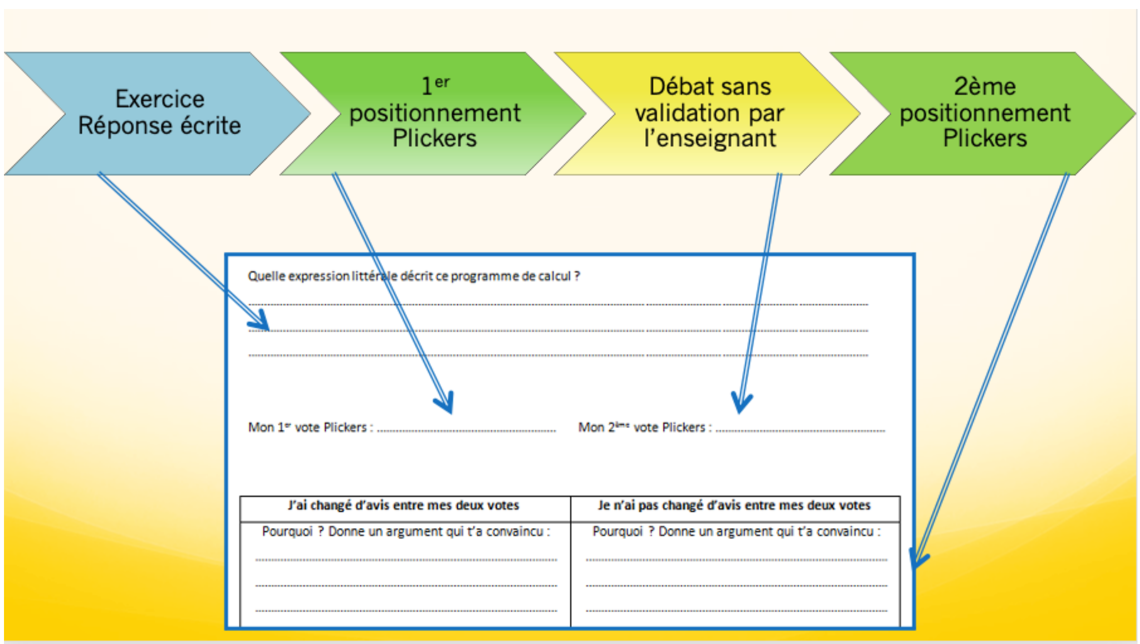


Figure 4. Feuille de travail des élèves avec le protocole 1 (vote Plickers)

- Protocole 2 : les élèves échangent leur copie entre voisin·es et se prononcent par écrit sur la réponse de l'autre élève, puis le débat a lieu et ensuite chaque élève exprime son accord ou non avec le positionnement en vrai ou faux.

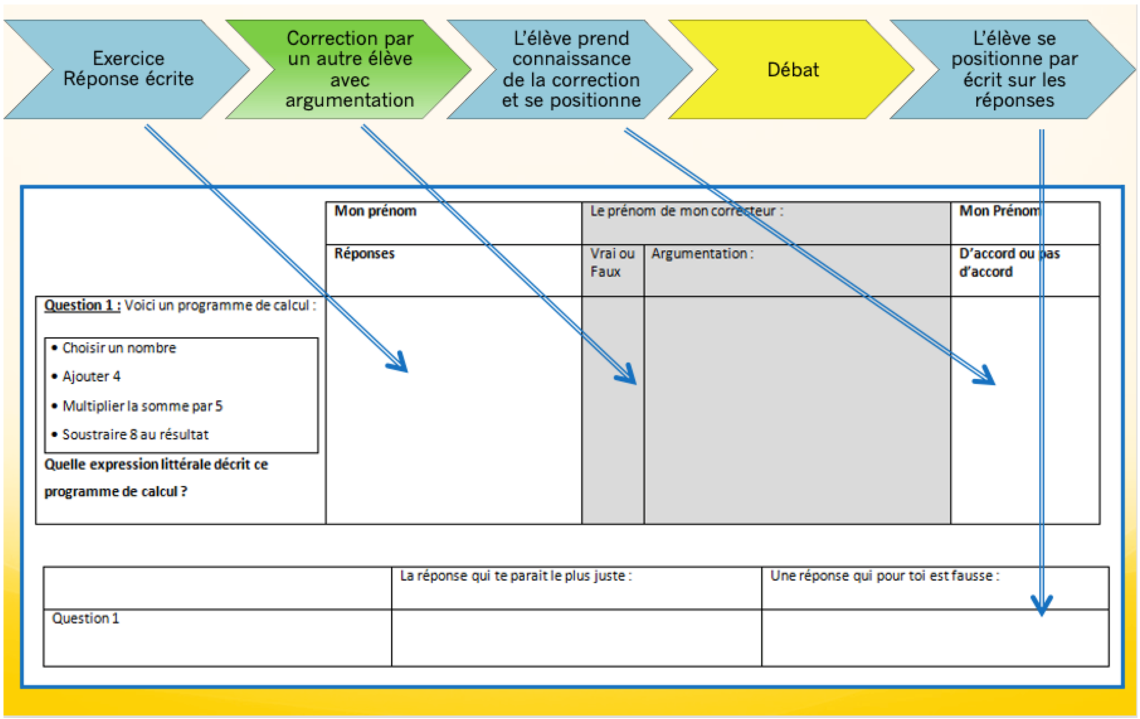


Figure 5. Feuille de travail des élèves avec le protocole 2
(positionnement sur réponse d’un·e autre élève)

En faisant une analyse a priori des réponses et des vérifications en utilisant la distinction vérifications internes/externes, voyons maintenant, comment ces éléments s’articulent pour l’analyse des productions des élèves.

4.3 Analyse a priori des réponses possibles et des vérifications

L’analyse a priori des réponses montre qu’il y a trois réponses correctes possibles selon leur forme plus ou moins réduite :

1. la réponse non réduite $5(x + 4) - 8$ qui traduit pas à pas le programme de calcul en tenant compte des priorités de calcul et donc des parenthèses (nous faisons l’hypothèse qu’elle sera la plus fréquente des réponses justes);
2. la réponse $5x + 20 - 8$ qui correspond au développement de la précédente expression (cette réponse nous semble peu probable car si les élèves développent l’expression, ils réduiront ensuite par effet de contrat didactique);
3. la réponse réduite $5x + 12$.

Nous n’avions aucune exigence sur la forme de cette réponse correcte et nous avions choisi le programme de calcul afin que ces trois réponses apparaissent pour pouvoir aborder le niveau technologique (l’utilisation de la distributivité pour prouver l’équivalence des expressions) en rendant explicites les types d’arguments utilisés par les élèves. Nous pensions que comme les élèves avaient déjà eu un enseignement de l'algèbre (notamment celles et ceux de 3e), elles ou ils pouvaient penser à réduire soit par effet de contrat didactique, soit pour avoir une expression « plus simple ».

De nombreuses réponses fausses ou incorrectes sont envisageables :

4. un ou plusieurs calcul(s) numérique(s) comme exemple(s) pour montrer comment fonctionne le programme de calcul, avec éventuellement une réponse numérique;
5. un schéma du programme de calcul en ligne ou colonne avec des flèches pour montrer la succession des calculs (portant sur des nombres ou une variable) sans avoir une seule expression à la fin;
6. des expressions erronées comme $5x + 4 - 8$ ou $x + 4\,x\,5 - 8$ qui ne tiennent pas compte des priorités opératoires (simple traduction du programme de calcul) ou des expressions réduites des précédentes et qui sont donc erronées comme $5x\ +/- 4$ ou $x + 12$;
7. des expressions comme $5x - 12$ ou bien $20x - 8$ qui proviennent d'une erreur dans la réduction de l'expression correcte $5(x + 4) - 8$;
8. une expression littérale (ou des égalités) avec plusieurs variables pour décrire le programme comme $x + 4 = y\,x\,5 = z - 8$.

Ainsi, du fait du choix de la forme du programme de calcul, il y a un nombre important de réponses correctes ou erronées, ce qui est essentiel pour engendrer des discussions sur la validation.

En plus de l'analyse a priori des réponses, nous avons fait une analyse a priori des positionnements en termes de vrai/faux et des arguments associés pour chacune des réponses en utilisant les vérifications internes et externes.

Dans le tableau de l'annexe 1, nous reprenons la liste des réponses possibles avec des arguments a priori qui peuvent servir au positionnement sur la réponse d'un autre élève en distinguant les vérifications, externes ou internes, qui peuvent être utilisées pour valider ou invalider (certains arguments pouvant servir dans les deux cas).

Envisageons quelques cas pour mettre en avant ce qui peut se passer suivant la réponse initiale de l'élève (que nous désignons par A) lorsqu'elle ou il se positionne sur la réponse de l'autre élève (que nous désignons par B) et voir ainsi les effets en termes de milieu.

Tout d'abord considérons que les élèves A et B donnent la même réponse (juste ou erronée). Dans ce cas, l'argument utilisé par A (et par B) pour valider a une grande probabilité d'être « c'est juste car j'ai la même réponse ». Dans ce cas, on constate que le milieu n’est pas enrichi et que, de fait, cela va même à l’encontre de l’objectif de validation puisque cela risque de renforcer A et B sur la vraisemblance de leur réponse même si elle fausse.

Examinons maintenant les cas 1, 2 ou 3 dans lesquels l’élève A a trouvé une bonne réponse (réduite ou non) et que B a une réponse erronée. On peut alors penser que A pourra utiliser des arguments internes pour invalider la réponse de B et même dans certains cas, qu’il pourra pointer ou qualifier les erreurs, ce qui l’amène à mobiliser des connaissances mathématiques. On peut aussi avoir le cas où A a une réponse non réduite (cas 1 ou 2) et B réduite. Il se peut alors que cela permette à A de faire évoluer sa réponse en mobilisant des connaissances sur la distributivité (lors de la validation) et donc ensuite de revenir sur sa réponse et la faire évoluer. Dans ce cas, l’introduction dans le milieu de la réponse réduite peut avoir un effet positif.

Voyons enfin le cas où A a une réponse incorrecte (cas 4 à 8). Pour A, cette tâche n’est pas problématique puisque A a pu répondre en utilisant des connaissances communes (par exemple en faisant une simple traduction du texte en français par des symboles mathématiques sans prendre en compte les priorités opératoires). Le fait d’être confronté à une réponse de B différente (qui n’est pas une « traduction » aussi directe) et à devoir se prononcer sur sa validité peut l’amener à remettre en cause sa réponse (par exemple parce qu’il ou elle se demande pourquoi il y a des parenthèses ou d’où vient le 12) et donc à mobiliser des connaissances mathématiques. Dans ce cas-là, le milieu joue son rôle pour faire évoluer la réponse de A, voire ses connaissances.

Ces deux derniers exemples illustrent, selon nous, comment, par le biais de cette situation d’évaluation entre pairs, les changements de contrat et milieu peuvent avoir des effets sur les connaissances des élèves et permettre ainsi des évolutions.

Nous analysons maintenant les réponses des élèves dans les différentes classes et suivant les deux protocoles.

5. Analyses des données et discussion

Nous allons analyser les données collectées selon chacun des protocoles (car les types de réponses ne sont pas tout à fait les mêmes). Nous mettrons en avant la diversité de réponses, puis nous analyserons les arguments convoqués par les élèves.

5.1 Protocole 1

Les réponses par classe de l’ensemble des élèves avant et après le débat se trouvent en annexe 2. Un premier résultat montre la variété des réponses, on retrouve ainsi toutes celles prévues dans l'analyse a priori. Il nous parait important de souligner que dans 3 classes sur 5, avant le débat, on voit encore apparaitre des réponses qui n'utilisent pas les expressions littérales, ce qui montre qu'une part (faible) des élèves (7 sur 105) ne sont pas encore entrés dans le domaine algébrique. De plus, on constate que de façon très minoritaire, certaines réponses sont apparues, mais lors du premier vote, les élèves qui les avaient produites n'ont pas voté pour elles. On peut penser que la seule exposition des réponses a pu amener certains élèves à changer d'avis.

Toutefois, selon les classes, la variété est plus ou moins grande. Ainsi, dans la classe P4 3e A, toutes les réponses étaient correctes, données sous forme d'expressions littérales plus ou moins réduites. Lors du second vote, seuls deux élèves votent pour l'expression correcte mais non réduite. Ici l'enrichissement du milieu par les réponses réduites a permis des discussions sur la transformation des expressions et sur la propriété de distributivité comme élément de justification (ce qui était un objectif pour être un appui pour la suite de la séquence). On peut donc dire que le milieu potentiel et le milieu activé étaient assez proches pour la plupart des élèves. De point de vue de l'évaluation formative, cela donne à l'enseignant·e un renseignement important sur les connaissances des élèves à ce moment-là qui va lui permettre de poursuivre sa séquence de classe. Finalement on peut surement penser que dans cette classe, cette tâche était trop facile pour les élèves, mais c'est le seul cas.

Dans les deux autres classes de 3e de P3, on peut noter que l'expression réduite n'est pas apparue, ce qui nous porte à nous interroger. Peut-être est-ce dû à un effet de contrat didactique local pour cette activité, à savoir que les élèves ont produit une réponse et n'ont pas continué. Ou bien elles ou ils ne considèrent pas le calcul littéral comme un outil et donc s'arrêtent à la première expression obtenue si on ne leur dit rien de plus. Pourtant, il est sûr que ces élèves de 3e ont déjà pratiqué le calcul littéral et ont été entrainé·es aux types de tâches de développement et réduction.

Dans la classe de P1 4e E, aucune bonne réponse n'est apparue à la fin du travail individuel. Comme c'est une classe de 4e, on peut penser que cette moins bonne réussite est un effet du niveau de classe. Certainement pour cette même raison, dans l'autre classe de 4e, il n'y a pas eu d'expression réduite.

Dans cette classe de P1 4e E, lors du débat qui a été très riche, les élèves ont, d'une part, collectivement décidé de supprimer la réponse basée sur un exemple de calcul $4 + 5 = 9 \, x \, 5 = 45 - 8 = 37$ en avançant l'argument que la question demandait « une expression littérale et qu'ici il n'y avait pas de lettres » et d'autre part, ils ont corrigé collectivement l'écriture de ce calcul en faisant référence à des connaissances sur les priorités de calcul et sur le signe =. Cette discussion sur l'organisation des calculs a amené la question suivante d'un élève : « est-ce que dans les calculs avec des lettres, les priorités existent aussi? » L'enseignante ayant répondu par l'affirmative (les enseignant.es avaient pour consigne de ne pas se prononcer sur la validité des réponses, mais ils ou elles pouvaient répondre à d'autres questions), il a alors proposé la nouvelle réponse $(n + 4) x 5 - 8$ pour laquelle les élèves ont ensuite voté de façon assez massive. Nous soulignons donc le fait que, lors de ce débat sur la validation, cet élève a pu mettre en discussion un élément de savoir qui était resté complètement implicite pour lui, à savoir que les règles de calcul qu'il connaissait dans le cadre numérique étaient vraies dans le cadre algébrique. Nous rapprochons ce résultat de ce que Pilet (2012) nomme des besoins d'apprentissages implicites. Dans cette même séance, nous avons également noté, à la suite de questions d'élèves : « si n est le nombre choisi, il ne peut pas être égal à $n + 4$, il reste le nombre de départ » ou encore « $5x$ c'est 5 fois x ou 5 plus x? ». Pour conclure sur ce débat dont nous avons déjà rendu compte (Coppé et Roubin, 2019), nous avons dégagé deux types d'objets de savoir qui ont été discutés :

- des éléments portant sur des savoirs enseignés anciens comme la multiplication des relatifs, les priorités opératoires et les parenthèses. Ainsi, cette modalité d'évaluation formative a bien permis à l'enseignant d'avoir des informations sur l'état des connaissances de ses élèves dans cette phase de rappel.
- des objets paramathématiques (Chevallard et Joshua, 1991) comme le signe égal (« il doit y avoir la même chose de chaque côté du signe = ») ou la lettre (« on n'est pas obligé de mettre x, on peut mettre une autre lettre » ou « x ça représente tous les nombres »).

Par conséquent, dans ces classes de 4e, le milieu activé était en quelque sorte plus éloigné du milieu potentiel puisque les réponses attendues sont moins apparues, voire pas apparues comme dans la classe de P1 4e E. Ainsi, dans cette classe, il aurait pu arriver que le milieu ne fasse pas milieu parce que les élèves n'auraient eu que le choix entre des réponses fausses, ce qui, en plus, les aurait conforté·es dans cette voie. Finalement, c'est l'intervention de l'élève sur la priorité des opérations en calcul littéral qui a enrichi le milieu et a permis d'avancer. Dans une autre expérimentation (Coppé et Moulin, 2017) en classe de 6e sur les fractions, dans un cas semblable, nous avions décidé d'introduire la bonne réponse en évoquant un élève fictif et nous avons montré que cela n'avait pas eu d'effet puisqu'aucun élève n'avait pu défendre cette réponse et qu'elle n'avait donc pas été choisie lors du vote. Ceci est un point particulièrement délicat lors de ces séances.

Enfin, le dernier résultat que nous pouvons mettre en avant est qu'il y a une évolution entre les deux votes dans le sens des réponses correctes même s'il reste quelques erreurs. Sur la feuille de réponse, nous demandions aux élèves de dire si elles ou ils avaient changé d'avis et pourquoi. Nous n'avons ces feuilles de réponses que pour trois classes. Voici les arguments utilisés par les élèves pour justifier leur changement ou non de vote, que nous avons classés selon trois types :

- T1 : Des arguments ne mettant pas en jeu des éléments de savoir (par exemple, « je n'ai pas changé d'avis, car c'était ma première réponse »);
- T2 : Des arguments sur la conformité de la réponse qui correspondent aux vérifications externes (il y a des lettres, calcul en ligne, « je n'avais pas remarqué que c'était une écriture littérale »);
- T3 : Des arguments mathématiques mettant en jeu des propriétés qui correspondent aux vérifications internes (par exemple, « il faut mettre une parenthèse pour qu'on fasse le calcul en priorité »).

Tableau 2. Les arguments des élèves classés selon les trois types (le nombre entre parenthèses indique le nombre d'occurrences de l'argument)

		J'ai changé d'avis	Je n'ai pas changé d'avis
Classe de P1 4e A	T1	Il y a une faute (2)	Simple et juste, je ne voulais pas changer d'avis (3)
	T2		Conformité de la réponse (3)
	T3	Utilisation des parenthèses (3)	Priorité des calculs, utilisation des parenthèses (7)
Classe de P1 4e E	T1	Plus facile, pas le même résultat (3)	Pas vrai, j'ai gardé ma réponse (2)
	T2	Conformité expression littérale (4)	
	T3	Priorité des calculs, utilisation des parenthèses (9)	
Classe de P4 3e A	T1		Simple, rapide… (10)
	T2		
	T3	Transformations d'écritures, distributivité (2)	Transformations d'écritures, distributivité (4)

Bien sûr ce tableau est à interpréter en faisant des liens avec les réponses obtenues dans chaque classe. Ainsi, pour les deux classes de P1 où il y avait une variété de réponses erronées, on trouve davantage d'arguments, dont une bonne moitié du troisième type, ce qui est à mettre en lien avec la richesse du débat. Mais certains utilisent tout de même encore ceux des deux premiers types, notamment des arguments portant sur la forme de la réponse dans la classe de P4 3e A (dans laquelle les réponses étaient justes). Dans ce cas, nous ne pouvons pas exclure que ce grand nombre de réponses de type 1 peut être le signe de la trop grande facilité de cette tâche.

Si l'on rassemble les résultats par types d'arguments (tableau 3), on constate que ce sont les arguments de type 1 et 3 qui sont majoritaires. Nous retenons que les arguments de type 3 apparaissent assez fortement, ce qui est un bon signe de la mobilisation de connaissances mathématiques et notamment de la propriété de distributivité. On peut aussi penser que les élèves mobilisent cet argument parce que les enseignant.es qui participent au groupe de recherche ont l'habitude de l'utiliser dans leurs classes.

Tableau 3. Récapitulatif des arguments pour le protocole 1

	J'ai changé d'avis	Je n'ai pas changé d'avis	total
Argument de type 1 T1	5	15	20
Argument de type 2 T2	4	3	7
Argument de type 3 T3	5	11	16

Pour conclure sur ce premier type d'expérimentation, nous voulons souligner l'investissement des élèves dans les débats à la fois par leur attitude active et concentrée mais aussi cognitivement par les arguments avancés.

5.2 Protocole 2

Cette modalité a été testée dans quatre classes de trois enseignant·es (voir l'ensemble des résultats dans l'annexe 3). Pour faire cette analyse, nous allons considérer les réponses de chaque élève, les évaluations en vrai ou faux de l'autre élève et les arguments produits pour valider ou non ces réponses.

Comme pour dans la modalité 1, les réponses que nous avions prévues dans l'analyse a priori sont apparues avec des différences selon les classes, qui s'expliquent encore une fois par ce que nous désignons par le parcours algébrique antérieur des élèves. Ainsi, dans la classe de P1 3e F, on note 18 réponses erronées sur 23 alors que dans l'autre classe de cette même enseignante P1 3e D, il y a 10 réponses correctes sur 21. Enfin, il est à souligner qu'un nombre important d'élèves (20 élèves sur 73) de chaque classe restent au niveau du calcul numérique.

Nous n'avons les réponses finales retenues par les élèves que dans deux classes. À la fin de l'activité, le nombre de réponses déclarées correctes augmente tout de même, ce qui est encourageant, mais il reste quelques réponses erronées.

En ce qui concerne le positionnement sur la réponse d'un autre élève, nous observons que tous les cas se produisent, à savoir des réponses correctes évaluées comme fausses ou le contraire. Même si une grande majorité d'élèves se déclarent d'accord avec la position de l'élève évaluateur·trice, il en reste certain·es qui ne veulent pas changer d'avis, notamment dans le cas des réponses fausses déclarées fausses, ce qui peut signifier que ces élèves ont confiance en leur réponse et donc en leurs connaissances et que les arguments d'un pair ne sont pas suffisants pour les convaincre. Cette résistance peut poser un vrai problème d'enseignement.

Voyons maintenant les arguments qui sont employés. Pour cela nous reprenons les trois types utilisés dans l'analyse précédente. Bien sûr certains arguments sont différents puisque l'objectif de l'argumentation n'est pas le même mais on retrouve des similitudes. Par exemple, les arguments de conformité de la réponse peuvent suffire dans un premier temps quand la réponse n'est pas une expression littérale.

On trouve également dans chaque classe les arguments de type 1 qui consistent à comparer la réponse de l'autre élève avec la sienne. De la même façon, si l'élève a produit la même réponse, cet argument est suffisant. Dans le cas où la réponse est évaluée comme fausse parce que différente de sa propre réponse, les élèves ne mobilisent pas vraiment de connaissances et le milieu n'est donc pas suffisant. Dans la classe de P1 3e F, il est à noter qu'il y a encore quatre élèves qui ont la conception erronée bien connue du signe égal comme un résultat et qui la mobilisent ici pour invalider la réponse de leur camarade (« c'est faux parce qu'il n'y a pas de résultat »).

Enfin, dans le cas de réponses erronées évaluées comme fausses, un nombre important d'élèves évaluateur·trices proposent également la rectification en expliquant soit ce qui est faux soit en donnant la réponse qu'elles ou ils estiment correcte.

Tableau 4. Les arguments des élèves classés selon les trois types

		Réponse évaluée comme JUSTE	Réponse évaluée comme FAUSSE
Classe de P1 3e D	T1	Même chose (4) C'est bien fait (4)	Donne leur réponse (3)
	T2	Conformité : il faut une écriture littérale (1)	Non-conformité : il faut une écriture littérale (5)
	T3		Repérage de l'erreur (2) Énoncé d'un élément de connaissance (utilisation des parenthèses, etc.) (1)
Classe de P1 3e F	T1	Même chose (1) C'est bien fait (5)	Donne leur réponse (2)
	T2		Non-conformité : il faut une écriture littérale (3) Pas de résultat (4)
	T3	Énoncé d'un élément de connaissance (1)	Repérage de l'erreur (4)
Classe de P2 3e	T1	Même chose (1) C'est bien fait (4)	Donne leur réponse (3) Tu n'as pas compris (2)
	T2	Conformité : il faut une écriture littérale (1)	Non-conformité : il faut une écriture littérale (3)
	T3	Énoncé d'un élément de connaissance « tu as bien utilisé la distributivité » (1)	
Classe de P5 4e	T1		Pas même résultat (2) Donne leur réponse (1)
	T2	Conformité : il faut une écriture littérale (1)	Non-conformité : il faut une écriture littérale (2)
	T3	Énoncé d'un élément de connaissance « tu as bien utilisé la distributivité » (1)	Repérage de l'erreur (2)

En faisant la somme de ces arguments sur toutes les classes (tableau 5), on peut remarquer que les plus nombreux sont ceux de type 1. Ainsi, quand il s'agit de réponses considérées comme vraies, les élèves peuvent estimer qu'ils n'ont pas à chercher trop d'arguments, les plus basiques pouvant suffire. Comme nous l'avons expliqué ci-dessus, les arguments de type 2 sur la non-conformité peuvent suffire lorsque la réponse est numérique. Enfin on trouve tout de même des arguments mobilisant des connaissances mathématiques comme des vérifications explicites étape par étape avec soit des indications d'erreurs (par exemple : « $4 + x$ ne font pas $4x$ ») soit une vérification plus globale des points importants (par exemple : « tu as bien mis les parenthèses, tu as bien utilisé la distributivité et les calculs sont justes »). Mais bien sûr, ce sont les élèves qui ont trouvé la réponse qui utilisent ce genre d'arguments.

Tableau 5. Récapitulatif des arguments protocole 2

	Réponse évaluée comme JUSTE	**Réponse évaluée comme FAUSSE**	**Total**
Argument de type 1	19	13	32
Argument de type 2	3	17	20
Argument de type 3	3	9	12

En conclusion de cette seconde modalité, nous voyons que les élèves sont capables de mobiliser différents types d'arguments allant de certains assez peu appuyés sur des connaissances mathématiques à d'autres qui pourraient aider les élèves à rectifier leurs réponses initiales. Mais ce travail doit être complété soit par un débat (c'est la modalité que nous avions choisie, mais dont nous n'avons pas de trace) soit par des discussions entre les deux élèves pour se mettre d'accord sur une solution.

Conclusion

Nous avons décrit et analysé un dispositif de classe orienté sur une évaluation entre pairs sur le thème de l'algèbre au collège en France. Nous retenons plusieurs points des analyses faites. Le premier porte sur les compétences en algèbre des élèves de ces classes. Cette tâche, proposée comme une tâche de rappel servant à introduire le chapitre d'algèbre et que nous avons analysée comme devant être assez peu problématique à ces niveaux de classe, reste encore non maitrisée par une proportion importante d'élèves à la fois en classe de 4^{e} et de 3^{e} (davantage tout de même en 4^{e}) alors que cela fait deux à trois ans que ces derniers travaillent l'algèbre. En annexe 4, le récapitulatif des réponses sur toutes les classes montre qu'environ 50 % des élèves échouent, dont 17 % environ qui ne mobilisent pas du tout le calcul littéral, restant dans le cadre numérique. Les autres échouent parce qu'ils ne considèrent pas les priorités opératoires, ce qui montre que les aspects syntaxiques sont encore peu maitrisés, les élèves restant sur des procédures de calcul en étapes. Toutes ces remarques rejoignent encore une fois nos questionnements sur le travail mathématique proposé aux élèves en ce qui concerne la mobilisation d'une lettre comme variable ou comme nombre généralisé (si ce n'est pas indiqué explicitement) et sur la mobilisation des propriétés, notamment la distributivité de la multiplication sur l'addition comme élément de justification.

Le deuxième point concerne les questions de recherche. Nous nous demandions si les élèves étaient capables de se prononcer sur la validité de réponses produites par les autres en donnant des arguments et nous avons vu que c'était le cas même si des arguments de différents types, dont certains peu mathématiques, cohabitent encore. Dans toutes les classes, même celles réputées comme étant difficiles, nous avons noté une grande implication des élèves pour ce travail tant au niveau de la résolution de la tâche en elle-même que dans les débats. Par ces raisons, nous pensons que ce dispositif d'évaluation par les pairs est tout à fait adapté pour des élèves de collège. De façon globale, sur l'ensemble des classes, la tâche proposée semble être plus adaptée pour les élèves de 4e que de 3e.

Nous avons également noté, avec les deux protocoles, une évolution positive des réponses avant et après le débat. Ainsi, l'hypothèse faite sur les effets de l'enrichissement du milieu par les réponses des autres élèves nous semble en grande partie validée, moyennant cependant certaines conditions, notamment celle de l'existence d'au moins une réponse juste produite par un élève (pour qu'elle puisse être donnée à voir et discutée) et celle portant sur les appariements de réponses (ne pas mettre ensemble deux élèves qui ont la même réponse fausse). On peut penser que c'est par la répétition de ce type d'activités que les élèves pourront développer des aptitudes à l'autoévaluation.

Du point de vue des pratiques enseignantes, introduire ce dispositif d'évaluation formative nous semble, d'une part, pertinent pour les apprentissages (ici en algèbre, mais on pourrait l'adapter à d'autres domaines), car il permet des interactions de qualité entre les élèves amenant à des discussions argumentatives tout à fait intéressantes et, d'autre part, assez faciles à mettre en place dans les classes parce que la tâche proposée peut être mise en œuvre sur un temps assez court (moins d'une séance). Ce sont des critères importants pour que des activités de ce type soient diffusées plus largement dans les pratiques. Cependant, la gestion de la mise en commun et du débat nécessite à la fois un grand investissement de l'enseignant·e pour être à l'écoute des arguments des élèves, mais aussi pour être suffisamment en retrait afin de ne pas donner son avis. Cette mise en œuvre peut donc se révéler délicate, comme c'est souvent le cas pour les mises en commun. L'introduction de ces nouveaux dispositifs devrait être un objet de formation comme, de façon plus générale, la gestion des interactions.

Références

Allal, L. (1999). Impliquer l'apprenant dans le processus d'évaluation : Promesses et pièges de l'autoévaluation. Dans C. Depover et B. Noël (dir.), *L'évaluation des compétences et des processus cognitifs, modèles, pratiques et contextes* (p. 35 56). De Boeck.

Allal, L. et Mottier Lopez, L. (2005). Formative assessment of learning : A review of publications in French. Dans OCDE (dir)., *Formative Assessment – Improving Learning in Secondary Classrooms*. (p. 241-264). OCDE.

Alves, C., Coppé, S., Duval, V., Goislard, A., Kuhman, H., Martin Dametto, S., Piolti Lamorthe, C. et Roubin, S. (2013). Utilisation des programmes de calcul pour introduire l'algèbre au collège. *Repères IREM*, 92, 9-30.

Assude, T., Coppé, S. et Pressiat, A. (2012). Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège. Atomisation et réduction. *Recherches en didactique des mathématiques, Hors-série,* 41–62.

Bednarz, N. (2013). Regarder ensemble autrement : Ancrage et développement des recherches collaboratives en éducation au Québec. Dans N. Bednarz (dir.), *Recherche collaborative et pratique enseignante. Regarder ensemble autrement* (p. 13-30). L'Harmattan.

Bednarz, N. et Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. Dans N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (p. 115-136). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_8

Black, P., Harrison, C., Lee, C., Marshall, B. et Wiliam, D. (2004). Working inside the Black Box : Assessment for Learning in the Classroom. *Phi Delta Kappan 86*(1), 8-21.

Black, P. et Wiliam, D. (1998). Assessment and Classroom Learning. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice, 5*(1), 7-74.

Black, P. et Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational assessment, evaluation and accountability, 21*(5), 5 31. https://doi.org/10.1007/s11092-008-9068-5

Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(1), 77-124.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 7*(2), 33-116.

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique et le concept de milieu : Dévolution. *Recherches en didactique des mathématiques, 9*(3), 309-336.

Chalancon, F., Coppé, S. et Pascal, N. (2002). Les vérifications dans les équations, inéquations et en calcul littéral. *Petit x, 59*, 23-41.

Cherpin, A. S., Coppé, S., Goislard, A., Piolti Lamorthe, C. et Roubin, S. (2022). Production de ressources pour l'enseignement de l'algèbre au collège. Le LéA réseau d'écoles et collèges Ampère. Dans R. Monod-Ansaldi, B. Gruson et C. Loisy (dir.), *Le réseau des lieux d'éducation associés à l'Institut français de l'éducation : Un instrument pour la recherche* (p. 183-201). Presses universitaires de Rennes.

Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : L'approche anthropologique. Dans R. Noirfalise (dir.), *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques. Actes de l'université d'été de La Rochelle* (p.91-119). IREM de Clermont-Ferrand.

Chevallard, Y. (2007). *Séminaire de didactique des mathématiques PLC2, année universitaire 2006/2007*. IUFM d'Aix-Marseille. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Seminaire_2006-2007.pdf

Chevallard, Y. et Joshua, M. A. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Éditions La pensée sauvage.

Coppé, S. (1993). *Processus de vérification en mathématiques chez les élèves de première scientifique en situation de devoir surveillé* [Thèse de doctorat inédite]. Université Claude Bernard Lyon 1.

Coppé, S. (1998). Composantes privées et publiques du travail de l'élève en situation de devoir surveillé en mathématiques. *Educational studies in mathematics, 35*(2), 129-151.

Coppé, S. (2020). Conception collaborative de ressources pour l'enseignement de l'algèbre élémentaire : Une entrée par les programmes de calculs. Dans H. Squalli, I. Oliveira, A. Bronner, et M. Larguier (dir.), *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherche et perspectives curriculaires* (p. 21 -43). Livres en ligne du CRIRES. https://lel.crires.ulaval.ca/sites/lel/files/le_developpement_de_la_pensee_algebrique_a_lecole_primaire_et_au_debut_du_secondaire.pdf

Coppé, S., Grugeon- Allys, B., Horoks, J., Pilet, J., Solnon, A., Raffaëlli, C. et Charpentier, A. (2021). *Premiers résultats de l'enquête sur les pratiques d'enseignement des mathématiques, Praesco en classe de troisième en 2019 [note d'information n° 21.00].* Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports.

Coppé, S. et Moulin, M. (2017). Évaluation entre pairs et débat argumenté dans le cadre d'un problème complexe en mathématiques. *Canadian Journal of Sciences, Mathematics and Technology Education, 17*, 308-327. https://doi.org/10.1080/14926156.2017.1378832

Coppé, S. et Roubin, S. (2019). Intégrer des évaluations entre pairs dans les séances de mathématiques : un exemple en algèbre au collège. Dans M. Abboud (dir.), *Mathématiques en scène des ponts entre les disciplines. Actes du colloque Espace mathématique francophone* (p. 953-962).

Desgagné, S., Bednarz, N., Lebuis, P., Poirier, L. et Couture, C. (2001). L'approche collaborative de recherche en éducation : un rapport nouveau à établir entre recherche et formation. *Revue des sciences de l'éducation, 27*(1), 33 64.

Drouhard, J. P. (1995). Algèbre, calcul symbolique et didactique. Dans R. Noirfalise et M.-J. Perrin-Glorian (dir.), *Actes de la 8e école d'été de didactique des mathématiques* (p. 325 344). IREM de Clermont-Ferrand.

Kieran, C. (2007) Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: building meaning for symbols and their manipulation. Dans F. K. Lester (dir.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 707-762). Information Age.

Perrin Glorian, M.-J. (1999). Problèmes d'articulation de cadres théoriques ; l'exemple du concept de milieu. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(3), 279-321.

Pilet, J. (2012). *Parcours d'enseignement différencié en algèbre élémentaire* [Thèse de doctorat, Université Paris Diderot-Paris 7]. TEL. https://theses.hal.science/tel-00784039v2

Rhéaume, S. et Oliveira, I. (2015). « Je me suis vérifié… j'ai relu la question pis j'ai reregardé ma réponse » : illustrations de mises entre parenthèses du sens lors de la vérification. Dans A. Adihou, L. Bacon, D. Benoit et C. Lajoie (dir.), *Regards sur le travail de l'enseignant de mathématiques. Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec* (p. 167 180). Université de Sherbrooke.

Ruiz Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarollo hacia la modelización funcional* [Thèse de doctorat inédite]. Université autonome de Barcelone.

Schubauer-Leoni, M. L., Leutenegger, F., Ligozat, F. et Fluckiger, A. (2007). Un modèle de l'action conjointe professeur-élèves : Les phénomènes didactiques qu'il peut/doit traiter. Dans G. Sensevy et A. Mercier (dir.), *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves* (p. 51-91). Presses universitaires de Rennes.

Shavelson, R. J., Young, D. B., Ayala, C. C., Brandon, P. R., Furtak, E. M., Ruiz Primo, M. A., Tomita, M. K. et Yin, Y. (2008). On the role and impact of formative assessment on science inquiry teaching and learning. *Applied Measurement in Education, 21*(4), 295-314.

Annexe 1

Les réponses de l'élève A et les évaluations de ces réponses de l'élève B en fonction des types et de la nature des vérifications

	Réponse de l'élève A	**Évaluation de l'élève B** **Accord** **Type et nature de vérifications**	**Évaluation de l'élève B** **Désaccord** **Type et nature de vérifications**
1	Correcte proche du PC $5\ (x + 4) - 8$	**Externe** Même réponse[7] Il y a une lettre **Interne** Retrouver l'expression à partir du programme Il y a bien les parenthèses	**Externe** Pas même réponse[8] **Interne** Pas terminé (car pas réduite)
2	Correcte développée $5x + 20 - 8$	**Externe** Même réponse Il y a une lettre **Interne** Retrouver l'expression à partir du programme et développer Refaire seulement le développement	**Externe** Pas même réponse Ne correspond pas au PC à cause du 20 **Interne** Pas terminé (car pas réduite)
3	Correcte réduite $5x + 12$	**Externe** Même réponse Il y a une lettre **Interne** Retrouver l'expression à partir du programme et la réduire Refaire seulement la réduction	**Externe** Pas la même réponse (car réduite) **Interne** Montrer erreur de calcul dans le développement
4	Un calcul/plusieurs calculs comme exemple(s)	**Externe** Même technique **Interne** Refaire le/les calcul(s)	**Externe** Pas le même exemple **Interne** C'est une formule qui est demandée

7 « Même réponse/technique » signifie que l'élève qui évalue considère que la réponse de l'autre élève est juste car il a trouvé la même.

8 « Pas même réponse » signifie que l'élève qui évalue considère que la réponse de l'autre élève est fausse car il n'a pas trouvé la même.

5	Un schéma de programme en ligne ou colonne	**Externe** Même technique **Interne** Refaire le/les calcul (s) Vérifier pas à pas les calculs	**Externe** Pas même réponse **Interne** Pas forme demandée Refaire le/les calculs
6	$5x + 4 - 8$ ou $x + 4 \times 5 - 8$ ou $5x +/ 4$ ou $x + 12$ Réponse erronée car pas de prise en compte des parenthèses	**Externe** Même réponse Il y a des lettres **Interne** Retrouver l'expression à partir du programme en se trompant	**Externe** Pas même réponse **Interne** Retrouver l'expression à partir du programme Pointer erreur de parenthèses Pointer erreur de calcul
7	$5x - 12$ ou $20x - 8$ Réponse erronée car erreur dans la réduction à partir d'une expression littérale correcte	**Externe** Même réponse Il y a des lettres **Interne** Refaire en se trompant	**Externe** Pas même réponse **Interne** Refaire et comparer repérer erreurs de calcul
8	Des formules avec plusieurs variables ou la variable ne désigne pas toujours le même nombre	**Externe** Même réponse Il y a des lettres **Interne** Refaire en se trompant	**Externe** Pas même réponse Il ne peut y avoir qu'une lettre **Interne** Indiquer que la variable n'est pas correctement utilisée

Annexe 2

Les réponses et les votes dans les classes utilisant le protocole 1 (total 105 élèves)

P1 4e A : 18 élèves		
Réponses	Votes avant le débat	Votes après le débat
x + 4 x 5 - 8	7	2
Des calculs sur un exemple numérique	0	0
(x + 4) x 5 - 8	11	16

P1 4e E : 19 élèves		
Réponses	Votes avant le débat	Votes après le débat
22 + 4 = 26 26 x 5 = 130 130 - 8 = 122	5	0
n + 4 = n n x 5 - 8 = n	2	0
n + 4 x 5 - 8	10	2
4 + 5 = 9 x 5 = 45 - 8 = 37 remplacée ensuite par (n + 4) x 5 - 8	2	16

P3 3e A : 26 élèves		
Réponses	Votes avant le débat	Votes après le débat
x + 4 x 5 - 8	0	1
x + 4 = x x 5 - 8	4	0
7 + 4 = 11 11 x 5 = 55 55 - 8 = 47	Enlevée car pas de lettres	
(x + 4) x 5 - 8	19	25
(x + 4) x 5 - 8x	3	0

P3 3e B : 25 élèves		
Réponses	Votes avant le débat	Votes après le débat
x ➔·4x ➔·20x ➔·12x	Enlevée car pas conforme	
(15 + 4) x 5 - 8	1	1
(x + 4) x 5 - 8	18	20
X + 4 x 5 - 8	2	1
X + 4 = x x 5 = x - 8	4	3

P4 3e A : 17 élèves		
Réponses	Votes avant le débat	Votes après le débat
(x + 4) x 5 - 8	6	2
12 +5x	10	14
20 + 5x - 8	0	0
((x + 4) 5 -8)	1	0

Annexe 3

Les réponses et évaluations en vrai/faux dans les classes utilisant le protocole 2 (total 73 élèves)

A : accord avec élève qui évalue
D : désaccord avec élève qui évalue
R : la réponse (évaluée comme fausse) est rectifiée par l'évaluateur.trice

Classe de P5 4e (9 élèves)				
Types de réponses	**Avant évaluation entre pairs**	**Evaluée comme JUSTE**	**Evaluée comme FAUSSE**	**Après évaluation entre pairs**
Correcte proche PC $(5x + 4) – 8$	2	1	1	AA
Correcte développée $5x + 20 – 8$				
Correcte réduite $5x +12$	1	1		A
Un calcul/plusieurs calculs comme exemple(s)	3		3R	DAA
Un schéma de programme en ligne ou colonne				
Réponse erronée $5x + 4 - 8$ ou $5x +/-4$ ou $x +20 - 8$ ou $x + 12$	2	1	1R	AA
Réponse erronée $5x - 12$	1		1R	A
Des formules avec plusieurs variables				

Réponses déclarées justes après le débat

5 (x + 4) – 8 : 8 élèves

(x + 4 x 5) – 8 : 1 élève

Classe de P1 3e D (21 élèves)				
Types de réponses	**Avant évaluation entre pairs**	**Evaluée comme JUSTE**	**Evaluée comme FAUSSE**	**Après évaluation entre pairs**
Correcte proche PC $5 (x + 4) – 8$	6	5	1	AAAAAA
Correcte développée $5x + 20 – 8$				
Correcte réduite $5x + 12$	4	4		AAAA
Un calcul/plusieurs calculs comme exemple(s)	6		6R	AAADAA
Un schéma de programme en ligne ou colonne	1		1R	A

Réponse erronée $5x + 4 - 8$ ou $5x$ +/-4 ou $x + 20\text{-}8$ ou x +12	3	1	2R	ADA
Réponse erronée $5x - 12$ ou $20x - 8$	1	1		A
Des formules avec plusieurs variables				

Réponses déclarées justes après le débat

5 (x + 4) – 8 : 11 élèves

5x +12 : 4 élèves

x + 4 x 5 – 8 : 1 élève

5x - 8 + 12 : 1 élève

Un calcul numérique : 1 élève

Classe de P1 3e F (23 élèves)				
Types de réponses	**Avant évaluation entre pairs**	**Evaluée comme JUSTE**	**Evaluée comme FAUSSE**	**Après évaluation entre pairs**
Correcte proche PC $5(x + 4) - 8$	1	1		A
Correcte développée $5x + 20 - 8$				
Correcte réduite $5x + 12$	4	4		AAAA
Un calcul/plusieurs calculs	4		1 3R	AADA
Un schéma de programme en ligne ou colonne				
Réponse erronée $5x + 4 - 8$ ou $5x$ +/-4 ou x+20-8 ou x +12	14	4	10R	DAAADDD DDAAAAA
Réponse erronée $5x$ -12				
Des formules avec plusieurs variables				

Classe de P2 3e (20 élèves)				
Types de réponses	**Avant évaluation entre pairs**	**Évaluée comme JUSTE**	**Évaluée comme FAUSSE**	**Après évaluation entre pairs**
Correcte proche PC $5\ (x + 4) - 8$	4	3	1R	AAAD
Correcte développée $5x + 20 - 8$				
Correcte réduite $5x + 12$	2	1	1	AD
Un calcul/plusieurs calculs comme exemple(s)	7 1 non évaluée	3	3R	AAADDD
Un schéma de programme en ligne ou colonne	1		1	A
Réponse erronée $5x + 4 - 8$ ou $5x +/-4$ ou $x + 20 - 8$ ou $x + 12$	6	4	1 1R	DAA-AA
Réponse erronée $5x - 12$				
Des formules avec plusieurs variables				

Annexe 4

La répartition des réponses pour l'ensemble des élèves (105 élèves pour le protocole 1 et 73 pour le protocole 2)

Types de réponses	Total 105 + 73 = 178	Pourcentage
Correcte proche PC $5\ (x + 4) - 8$	55 + 13 = 68	38,2 %
Correcte réduite $5x + 12$	10 + 11 = 21	11,8 %
Un calcul/plusieurs calculs comme exemple(s)	8 + 20 = 28	15,7 %
Un schéma de programme en ligne ou colonne	0 + 2 = 2	1,1 %
Réponse erronée $5x + 4 - 8$ ou $5x +/-4$ ou $x + 20-8$ ou $x + 12$	26 + 25 =51	28,7 %
Réponse erronée $5x - 12$ ou $20x - 8$	0 + 2 = 2	1,1 %
Des formules avec plusieurs variables	6	3,3 %

Décomposer et composer les nombres sous vingt : une opportunité pour introduire l'équivalence quantitative

Anne-Marie RINALDI
LIRDEF, Univ Montpellier, Univ Paul Valéry Montpellier 3, Montpellier, France
anne-marie.rinaldi@univ-montp3.fr

Résumé : Dans cet article, nous étudions l'impact que peut avoir l'utilisation de la technique de calcul en appui sur dix sur la construction de la notion d'équivalence quantitative. Nos analyses, à la suite de la mise en œuvre de trois séances d'un même dispositif d'enseignement dans deux classes en France (élèves de 7 à 8 ans), renseignent sur les difficultés que les élèves ont à utiliser et à se détacher du matériel ainsi que sur les médiations opérées par les enseignants pour les conduire à produire des expressions numériques équivalentes.
Mots-clés : apprentissage, calcul, école élémentaire, relation d'équivalence

Decomposing and composing numbers to add within twenty: introducing the notion of quantitative equivalence

Abstract: In this article, we study how using "make a ten" strategies help students grasp the concept of quantitative equivalence. Students from two classes in France (aged 7 to 8) were taught the same strategy during three class sessions. We analysed their difficulties in adopting the strategies and transitioning from manipulatives, as well as the methods teachers used to guide students to produce equivalent numerical expressions.
Keywords: learning process, adding, elementary school, equivalence relation

Introduction

L'objet de cet article est de montrer en quoi le fait de décomposer et composer additivement les nombres en s'appuyant sur le nombre dix peut s'avérer pertinent pour travailler l'équivalence quantitative avec des élèves de 7 à 8 ans. Mais avant de préciser nos hypothèses de recherche, nous donnons les raisons qui nous ont

Revue québécoise de didactique des mathématiques, 2022, *Numéro thématique 2* (Tome 2), p. 35-65. https://doi.org/10.71403/w83srb08

incitée à nous interroger sur l'enseignement et l'apprentissage du calcul sous vingt dans le système d'enseignement français.

Nous partons du principe que tout calcul élémentaire, mental ou posé, nécessite de s'appuyer sur un ensemble de faits numériques, donc de résultats mémorisés et disponibles immédiatement ou de résultats retrouvés rapidement. C'est pourquoi nous nous intéressons spécifiquement à l'apprentissage du répertoire additif sous vingt. Ce répertoire englobe les tables d'addition des dix premiers nombres entiers et toutes les décompositions et recompositions des nombres inférieurs à vingt.

Or, plusieurs études en psychologie cognitive, notamment celle de Gersten et al. (2005), convergent vers un même constat : les élèves ayant des difficultés en mathématiques en deuxième année d'école élémentaire se souviennent de beaucoup moins de faits numériques que les autres élèves et n'arrivent pas à les utiliser pour les combiner. En outre, les études de Siegler (1987) et de Baroody (2006) montrent que, pour trouver la somme de deux nombres inférieurs à dix, l'enfant de 5 à 8 ans va progressivement et à des rythmes différents, abandonner l'usage du comptage au profit d'autres stratégies de calcul basées sur la décomposition et la recomposition des nombres. La dernière étape du processus conduit alors à récupérer directement la réponse dans la mémoire à long terme.

Par ailleurs, une autre recherche conduite par Geary et ses collaborateurs (Geary et al., 1992) a permis de comparer le choix de stratégies pour effectuer un calcul additif sous vingt, entre deux groupes d'élèves, du même âge, 6-7 ans, scolarisés en Chine et aux États-Unis. Deux différences significatives sur la nature des stratégies ont pu être pointées. Le comptage est la principale stratégie utilisée par les enfants américains. Les enfants chinois utilisent la combinaison [1] pour 68 % des essais, alors que les enfants américains utilisent cette stratégie sur 13 % des essais. Pour Fuson et al. (1991), combiner serait plus facile pour les élèves asiatiques, car la langue chinoise, contrairement à la langue anglaise, permettrait d'entendre explicitement les groupements par dix quand ceux-ci sont présents. Une autre étude longitudinale conduite par Geary et al. (1996) sur chacune des trois premières années de l'école élémentaire (élèves de 6 à 9 ans) confirme la prédominance du comptage aux États-Unis, qu'il soit associé à l'usage des doigts ou verbal, et ce, jusqu'en troisième année d'école élémentaire. A contrario, en Chine, dès la deuxième année d'école élémentaire, ces stratégies sont abandonnées

---

[1] Pour calculer une somme $a + b$ par combinaison (a et b entiers), on décompose l'un des termes du calcul par exemple b en $c + d$ (c et d entiers) et on effectue $(a + c) + d$ ou $(a + d) + c$. Cette stratégie repose sur la décomposition et la recomposition des nombres entiers.

au profit de la récupération en mémoire à long terme de résultats connus. Ces chercheurs, pour expliquer ce contraste, reprennent l'argument qui consiste à comparer la numération orale asiatique et la numération orale anglaise, mais avancent également un autre argument d'ordre interculturel : les attentes des enseignants, des parents et des élèves dans les pays asiatiques, en matière de maîtrise des faits numériques, c'est-à-dire des résultats récupérés directement dans la mémoire à long terme se traduisent par un plus grand investissement en temps, tant à l'intérieur qu'à l'extérieur de l'école.

L'ensemble des facteurs évoqués pour expliquer les différences significatives produites par les deux systèmes d'enseignement du calcul sous vingt nous porte à penser que le système d'enseignement français est, tout comme celui des États-Unis, assez éloigné culturellement des systèmes asiatiques. Nous supposons alors que si tel est le cas, l'école élémentaire française a produit et produit peut-être encore comme stratégie principale de calcul une stratégie basée sur le comptage et qu'elle ne garantit peut-être pas une maîtrise suffisante et pourtant nécessaire des faits numériques avant l'entrée en troisième année d'école élémentaire.

Sur cette hypothèse, nous avons cherché à concevoir en collaboration[2] avec trois professeurs des écoles maîtres formateurs[3] un dispositif d'enseignement pour la seconde année d'école élémentaire française (élèves de 7 à 8 ans) qui favoriserait l'utilisation de stratégies basées sur la combinaison. Outre le fait que ces stratégies de combinaison permettent d'introduire une autre technique que le comptage, leurs mises en œuvre impliquent de remplacer le calcul initial de la somme $a + b$ par une autre somme obtenue en décomposant par exemple b en $c + d$. En ce sens, ces stratégies de combinaison contribuent à une meilleure maîtrise des faits numériques sous dix et à donner du sens à l'équivalence quantitative entre deux expressions numériques de la forme $a + b$ et $a + c + d$.

Dans cet article, nous étudions précisément l'impact que peut avoir l'utilisation de l'une de ces techniques de combinaison, en l'occurrence « la technique de calcul en appui sur dix » sur la construction de la notion d'équivalence quantitative.

Dans une première partie, nous présentons notre cadre théorique d'analyse. Cela nous amène à penser et à justifier l'utilisation de certains objets matériels et

---

[2] Notre recherche a été conduite dans un groupe de l'Institut de recherche de l'enseignement des sciences (IRES) de Montpellier.

[3] Un professeur d'école maître formateur (PEMF) est un enseignant du premier degré qui contribue à la formation initiale et continue des enseignants du premier degré. Il est déchargé d'une partie de son enseignement pour mener à bien sa mission de formation.

symboliques pour, d'une part, introduire la technique en appui sur dix et, d'autre part, travailler conjointement sur la notion d'équivalence quantitative.

Dans une seconde partie, nous présentons l'ensemble du dispositif d'enseignement, le contexte de l'étude et la méthodologie d'analyse que nous retenons.

Dans une troisième partie, nous nous appuyons sur l'expérimentation de trois séances du dispositif dans deux classes pour relever et analyser un ensemble de difficultés rencontrées par les élèves pour produire des collections et/ou des expressions numériques équivalentes. Nous analysons également la manière dont l'enseignant, par son discours, par l'introduction de symboles cherche à faciliter le passage du monde des objets matériels au registre des écritures arithmétiques et inversement. Nous présentons nos résultats avant de revenir dans la conclusion, sur les potentialités de l'étude, pour engager un processus de conceptualisation de la notion d'équivalence quantitative chez les élèves au début de l'école élémentaire.

1. Cadre théorique d'analyse

Tout d'abord, nous nous référons aux travaux de Radford (2008, 2011) pour penser les objets mathématiques que sont les nombres sous vingt dans le but d'enseigner une technique de calcul basée sur la décomposition et recomposition des nombres. Par la suite, nous présentons et justifions le matériel choisi pour représenter les nombres sous vingt. Dans le prolongement, nous caractérisons une technique de composition et de recomposition des nombres, en l'occurrence la technique de calcul en appui sur dix, en nous appuyant sur la théorie anthropologique de la didactique [TAD] développée par Chevallard (2002). Pour finir, nous explicitons en quoi l'enseignement de cette technique constitue un moyen pour travailler la notion d'équivalence quantitative avec des élèves de 7 à 8 ans.

1.1 Penser les nombres sous vingt et leur enseignement

Nous partageons l'idée développée par Radford (2008) que nous apprenons au contact du monde matériel, du monde des objets, des artefacts culturels qui nous entourent, mais que pour apprendre à partir de ces objets il est nécessaire de les utiliser dans des activités et d'interagir avec d'autres personnes qui savent déchiffrer les contenus intellectuels propres à ces objets. C'est cette dimension sociale qui constitue ce que Radford appelle un « processus d'objectivation », c'est-à-dire un processus social de prise de conscience progressive d'un objet culturel qui permettra de percevoir graduellement les couches de généralité d'un objet. L'apprentissage consiste à apprendre à reconnaître ou à percevoir ces couches de généralité.

> Comme l'apprentissage est ré-flexion, apprendre suppose un processus dialectique entre sujet et objet médiatisé par la culture, un processus dans lequel, à travers son action (sensorielle ou intellectuelle), le sujet vient prendre conscience de l'objet. (Radford, 2011, p. 12)

Le rôle de l'enseignant dans la théorie de l'objectivation est alors de proposer aux élèves des activités riches mettant en scène, de manière adaptée, la rencontre avec d'autres voix et les diverses strates de généralité de l'objet culturel.

Dans le cas de notre étude, nous supposons que l'objet mathématique « nombre sous vingt » est culturellement identifié comme le résultat d'un comptage (cf. introduction de l'article) et que ce nombre peut être perçu à un autre niveau de généralité comme autre chose qu'une itération de l'unité.

En ce sens, notre étude s'inscrit dans la continuité des travaux de recherche de Vilette et al. (2017), car nous allons être amenés à proposer des tâches de calcul dans le registre des écritures arithmétiques qui donnent justement à voir les décompositions et recompositions des nombres.

Mais avant d'arriver à ces écritures symboliques, en nous référant aux travaux de Vlassis et Demonty (2019), nous pensons qu'il est possible de proposer un ensemble de tâches liées à la manipulation effective où les élèves seraient amenés à communiquer à propos de leurs procédures en utilisant un ensemble de signes, et plus précisément un langage oral ou écrit, formel ou informel.

> C'est l'ensemble de ce processus de conceptualisation médiatisé par les interactions sociales et par les signes qui se trouve au cœur des apprentissages mathématiques. (Vlassis et Demonty, 2019, p. 101)

Dans le paragraphe suivant, nous présentons les représentations des nombres sous vingt que nous retenons pour donner accès au « second » niveau de conceptualisation de ces nombres dans le but de travailler la composition et la recomposition.

1.2 Représenter les nombres sous vingt

Le calcul sous vingt s'applique à des nombres entiers inférieurs ou égaux à dix. La plus grande somme que l'on puisse obtenir est dix plus dix soit vingt. L'une des caractéristiques des nombres entiers inférieurs à vingt est qu'il est relativement facile de les représenter grâce à des configurations de doigts, des dessins, des schémas; sur ces dessins, ces schémas, on peut éventuellement « montrer » que onze égale dix plus un et que chaque nombre compris entre dix et dix-neuf correspond à dix plus « … » avec « … » compris entre zéro et neuf.

En outre, une idée notamment défendue et largement diffusée par Brissiaud (2007, 2015) consiste à penser qu'il n'y a pas une mais deux façons d'amener les très jeunes enfants à connaître les nombres un, deux puis trois : la première étant basée sur le comptage, et la seconde sur la décomposition des nombres. Avec la seconde approche, pour dénombrer par exemple une collection de trois éléments, l'enfant peut dire un, et encore un, et encore un; deux et encore un; un et encore deux ou directement trois. Les mots nombres prononcés désignent à chaque fois des quantités et ne sont pas prononcés après avoir effectué un comptage. En effet, selon Gelman (1983) et Fayol (2015), certaines expériences conduites auprès de jeunes enfants montrent que le subitizing, donc la capacité à percevoir globalement, « d'emblée » est présente pour les petites collections.

Pour Mandler et Shebo (1982) le processus de reconnaissance serait lié aux arrangements spatiaux qui varient peu pour les petites quantités et seraient donc facilement reconnaissables. La quantité un ne pourrait ainsi être représentée que par un point, deux points formeraient nécessairement une ligne, et le modèle de trois sous la forme d'un motif triangulaire serait aisément perceptible. Pour quatre et au-delà de quatre la variabilité des configurations augmentant, toute reconnaissance immédiate deviendrait plus difficile. Pour Brissiaud (2015) :

> Le processus de compréhension des nombres au-delà de 5 ne se déroule pas à l'identique de celui des premiers nombres du fait que le nombre 5, celui des doigts d'une main, joue un rôle crucial dans la compréhension des nombres de 6 à 10. (Brissiaud, 2015, p. 1)

Le rôle crucial du nombre 5 est également exposé dans un article de Flexer (1986). Dans cet article, la chercheuse propose d'utiliser un « modèle concret de nombres » inspiré d'un modèle utilisé au Japon par l'Association of Mathematical Instruction (AMI), mis au jour par Hatano (1980, cité dans Flexer, 1986) et Ginbayashi (1984, cité dans Flexer, 1986), qui utilise des combinaisons de matrices carrées « simples » et de matrices rectangulaires 1 x 5 pour créer des représentations de nombres.

Les réglettes dites Cuisenaire du nom de leur concepteur Georges Cuisenaire (1891-1951) tout comme les matrices rectangulaires de Flexer (1986), Hatano (1980) et Ginbayashi (1984) produisent également des « modèles » de nombres. En effet la « 1-réglette » mesure 1 centimètre sur 1 centimètre sur 1 centimètre. Elle est définie comme la réglette unité et correspond au nombre 1. La « n-réglette » mesure n centimètres sur 1 centimètre sur 1 centimètre et correspond au nombre n. Les couleurs spécifiques de chaque réglette ne sont là que pour aider à la mémorisation des nombres qui leur sont associés. Avec ces deux modèles de nombres, le fait de pouvoir mettre bout à bout, de mettre juste dessous deux ou plusieurs réglettes, respectivement plusieurs matrices conduira ainsi à comparer directement des longueurs, à les additionner et à les soustraire. L'un des avantages de ces manipulations effectives par le geste et la vue est leur simplicité et le fait que tout résultat puisse être validé par une comparaison de longueur sans avoir besoin de passer par le comptage ou le surcomptage.

Dans le prolongement, nous pensons que le processus de compréhension des nombres au-delà de dix ne se déroule pas de la même manière que pour les nombres sous dix, car le nombre dix joue un rôle majeur dans nos deux systèmes de numération, parlée et écrite. En effet ces deux systèmes sont tous deux basés sur le groupement par dix.

Par ailleurs, nous estimons qu'utiliser plus d'un type de matériel pour représenter les nombres sous vingt peut contribuer à accéder plus facilement à ce que Radford considère comme étant des couches de généralité (cf. 1.1). En effet, cela amène à construire la quantité comme une grandeur qui ne prend pas en compte les dimensions, les couleurs ou d'autres critères que la quantité. De plus, quand les deux types de matériel mettent chacun à leur manière en évidence des groupements et notamment le groupement par dix, cela permet d'accéder à une seconde couche de généralité déjà évoquée précédemment : chaque nombre compris entre dix et dix-neuf correspond à dix plus « … » avec « … » compris entre zéro et neuf. Pour finir, un dernier enjeu serait d'enclencher un processus de décontextualisation qui favorise probablement la conceptualisation.

Notre choix s'est alors porté sur l'introduction d'un matériel « les bandes » qui permet de représenter tous les nombres sous vingt grâce à deux bandes de longueur dix, et neuf bandes de longueur allant respectivement de un à neuf. Ce matériel se rapproche des matrices carrées de Hatano (1980), de Ginbayashi (1984) et Flexer (1986) tout en étant différent, car chaque bande est un objet en papier à double face. Sur l'une des faces, on trouve x cases de même aire et sur l'autre face, le nombre x est écrit en chiffre. L'autre matériel correspond aux configurations de doigts. Ce matériel, familier aux élèves de France, favorise également tous types de groupement et en particulier le groupement par dix. Il amène également à visualiser directement les résultats grâce à des configurations « stables » que l'enfant a souvent rencontrées et mémorisées. Par exemple six doigts correspondent à trois doigts sur une main et trois doigts sur l'autre main ou à une main entière et un doigt sur l'autre main ou encore une main sans le pouce et deux autres doigts, dix correspond à deux mains levées. Le matériel « les doigts », en revanche, ne donne pas la possibilité de valider des résultats.

Dans le paragraphe suivant, nous exposons d'autres arguments, directement reliés au calcul, qui incitent à s'appuyer sur les décompositions de dix et les décompositions des nombres inférieurs à dix pour construire les décompositions et les recompositions sous vingt.

1.3 Calculer sous vingt

Si nous considérons la tâche qui consiste à chercher mentalement[4] le résultat de a plus b avec a et b nombres entiers inférieurs à dix, plusieurs techniques sont envisageables. Or, chacune de ces techniques, en se référant à la TAD, est justifiée par une technologie qui permet en même temps de la penser, voire de la produire. Nous présentons ci-après un classement qui s'appuie sur les spécificités de ces techniques puis les éléments de technologie qui se réfèrent à la technique en appui sur dix.

1.3.1 Classement des techniques de calcul sous vingt

Le comptage. Pour effectuer cinq plus trois, il s'agit de compter : « un, deux, trois, quatre, …, huit ». Cette technique, pour être appliquée correctement, suppose que certains principes explicités dans Bideaud et al. (1991) soient acquis. Elle devient difficile à mettre en œuvre dès que la somme des deux termes est supérieure à dix.

Le surcomptage. Pour effectuer cinq plus trois, il s'agit de compter à partir de cinq, le nombre de fois indiqué par le nombre trois : « six, sept, huit ». Cette technique, si elle est maîtrisée, peut s'avérer économique, c'est-à-dire peu coûteuse en temps et sans trop de risque d'erreurs à partir du moment où le surcomptage s'opère à partir du plus grand nombre et que le nombre indiqué par le plus petit nombre est inférieur ou égal à trois ou quatre.

La récupération en mémoire des faits numériques connus. Cette technique a l'avantage de donner le résultat immédiatement et s'avère, une fois qu'elle est maîtrisée, peu coûteuse cognitivement.

Les techniques utilisant la décomposition et recomposition des nombres, les presque doubles et l'appui sur dix. Avec la technique utilisant la décomposition et la recomposition des nombres, pour calculer par exemple onze plus cinq, il s'agit de décomposer onze en dix plus un, puis de calculer un plus cinq et de recomposer dix plus six en seize soit : $11 + 5 = (10 + 1) + 5 = 10 + 6 = 16$.

La technique des presque doubles suppose que pour calculer par exemple huit plus sept, on ajoute un au double de sept, soit un à quatorze. En effet : $7 + 8 = 7 + (7 + 1) = (7 + 7) + 1 = 14 + 1 = 15$.
Ces deux techniques ont en commun de s'appuyer sur une bonne connaissance des nombres, de faire appel à des faits numériques connus et d'utiliser l'associativité de l'addition.

---

[4] Calculer mentalement ici signifie que le calculateur ne dispose pas de collection d'objets ou de matériel de dénombrement, de support écrit sur lequel il peut faire un dessin ou un schéma.

La technique en appui sur dix consiste à décomposer l'un des deux nombres du calcul en fonction de l'autre pour calculer en s'appuyant sur dix. Étant donné que l'objet de cet article est d'étudier l'impact que cette technique peut avoir sur la construction de la notion d'équivalence quantitative, les éléments de technologie qui s'y réfèrent sont précisés dans le paragraphe suivant.

1.3.2 Technique en appui sur dix : éléments de technologie

Avec la technique en appui sur dix, pour calculer $7 + 5$ on calcule $7 + 3 + 2$ ou $5 + 5 + 2$.

Dans ce paragraphe, nous précisons le domaine d'application, le principe, et les connaissances mathématiques nécessaires pour mettre en œuvre et valider la technique en appui sur dix ainsi qu'un mode d'emploi de cette technique. Nous terminons en définissant les portées de la technique au sens de Kaspari et al. (2020), ce qui nous amène à comparer l'efficacité de cette technique dans certains cas particuliers par rapport, notamment, à l'utilisation des doubles ou presque doubles.

Domaine d'application de la technique. La technique en appui sur dix s'applique pour calculer $a + b$ avec a et b entiers naturels compris entre 0 et 9 et quand la somme $a + b$ est supérieure à 10 et inférieure à 20. Cette technique est donc spécifique au calcul sous vingt. Quand le domaine numérique est étendu au-delà de 20, la technique ne s'appuie plus sur dix mais sur un multiple de dix. C'est ainsi que pour calculer $27 + 8$, on calcule $27 + 3 + 5$[5]. Le multiple de dix sur lequel on s'appuie est alors trente.

Principe de la technique. La technique en appui sur dix consiste à décomposer l'un des termes du calcul en fonction de l'autre terme du calcul, afin de ramener à un calcul de la forme dix plus «…», avec «…» entier naturel compris entre zéro et neuf.

Connaissances mathématiques relatives à la technique.

- Décomposer additivement un nombre compris entre zéro et neuf;
- Mobiliser directement les faits numériques connus ou retrouver les résultats du répertoire additif sous dix;
- Recomposer un nombre de la forme dix plus « a » avec a entier naturel compris entre zéro et neuf;
- Utiliser l'associativité de l'addition et éventuellement la commutativité de l'addition sur l'ensemble des entiers naturels.

---

[5] La mise en œuvre de cette technique suppose le fait d'avoir compris qu'il faut décomposer « astucieusement » le nombre 8, car obtenir par exemple $27 + 1 + 7$ aurait peu d'intérêt. La manière dont on décompose le nombre 8 n'est pas choisie au hasard.

Mode d'emploi de la technique. Si nous reprenons l'exemple du calcul 7 + 5 et que nous cherchons à expliquer comment nous nous y prenons pour effectuer le calcul demandé en partant du nombre 7, nous pouvons avoir éventuellement le discours suivant[6] : Pour effectuer 7 + 5, j'ajoute à 7 le complément de 7 à 10 afin d'obtenir 10 puis le complément à 3 de 5. Ce discours met en avant la nécessité de convoquer deux faits numériques, 7 + 3 = 10 et 3 + 2 = 5 pour remplacer le calcul initial par un calcul équivalent : 7 + 5 = 7 + 3 + 2.

Le schéma de la figure 1 construit à partir de bandes de longueurs respectives 7, 5, 7, 3, 2, 10, 2 et 12, permet d'expliquer les différentes étapes de la mise en œuvre de la technique en appui sur dix. En effet, la seconde ligne du schéma illustre le fait que la bande 5 soit échangée contre deux bandes 3 et 2 mises dans le prolongement l'une de l'autre et bout à bout. Les trois bandes ainsi obtenues 7, 3 et 2, ont pour longueur la longueur des deux bandes initiales 7 et 5 mises bout à bout et dans le prolongement l'une de l'autre. Les expressions numériques 7 + 5 et 7 + 3 + 2 sont équivalentes. De la même manière, la seconde ligne et la troisième de la figure 1 illustrent le fait que les expressions 7 + 3 + 2 et 10 + 2 sont équivalentes. De ligne en ligne, on obtient donc une suite d'égalités : 7 + 5 = 7 + 3 + 2 = 10 + 2 = 12.

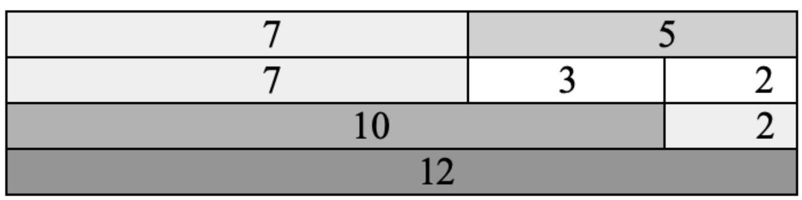


Figure 1. Exemple de schéma associé à la mise en œuvre de la technique en appui sur dix

Pour conclure, le discours qui vient d'être explicité, associé de surcroît à la manipulation effective « de bandes » (figure 1) permet, à notre sens, d'illustrer sur cet exemple pourquoi une expression numérique peut être remplacée par une autre expression numérique équivalente. En revanche, l'utilisation des configurations de doigts pour illustrer la technique en appui sur dix pour calculer 7 + 5 suppose qu'il y ait deux élèves qui s'associent : l'un prenant en charge la représentation du nombre 7, et l'autre la représentation du nombre 5. Dans ce cas, le passage par dix sera réellement facilité uniquement si le premier élève lève une main et deux doigts et l'autre élève lève une main ou éventuellement si le second élève lève à son tour trois doigts sur une main et deux

[6] Une autre manière d'expliquer la technique serait de dire : « Pour effectuer 7 + 5, je conserve 7 et je décompose le nombre 5 de façon à faire apparaître le complément de 7 à 10. » Avec des élèves plus âgés, un autre moyen serait d'utiliser la propriété de compensation de l'addition « Pour effectuer 7 + 5, j'ajoute à 7, le complément de 7 à 10 et je compense, en soustrayant à 5, le complément à 5 de 7 ».

sur l'autre. Mais si le premier élève lève quatre doigts sur une main et trois doigts sur l'autre main et que le second élève lève une main, le groupement par dix ne se voit pas.

C'est pourquoi dans la suite de notre développement, le type de matériel « bandes » est privilégié pour illustrer le calcul de $a + b$ avec la technique en appui sur dix, car dans le mode d'emploi de cette technique seul un des deux nombres est décomposé pour permettre l'appui sur dix.

Portées de la technique. Considérons par exemple l'ensemble des tâches comme effectuer $7 + n$ avec n entier naturel compris entre 4 et 9 pour discuter de la portée pragmatique puis de la portée institutionnelle de la technique en appui sur dix au sens de Kaspari et al. (2020).

Pour chaque tâche, la technique en appui sur dix est fiable avec peu de risque d'erreurs et à un coût raisonnable à partir du moment où le calculateur sait que $7 + 3 = 10$ et qu'il trouve facilement le résultat de $n - 3$. Remarquons, que le coût reste a priori inchangé si le calculateur part de n et calcule avec facilité le complément de n à dix, puis calcule $7 - (10 - n)$. La portée pragmatique de la technique est avérée.

En revanche, nous pouvons affirmer que la technique en appui sur dix a une portée institutionnelle moins forte que la technique de récupération des faits numériques dans le cas du calcul de $7 + 7$. Dans le cas des calculs $7 + 6$, $7 + 8$, nous supposons que la technique des presque doubles peut être présente en début d'école élémentaire. Nous en déduisons donc que la technique en appui sur dix est réellement compétitive[7] pour trois calculs sur six qui sont les calculs de $7 + 4$, $7 + 5$, $7 + 9$. Précisons que pour ces trois calculs, c'est la seule technique qui soit une alternative au comptage. En ce sens, l'enseigner semble légitime.

En conclusion, l'ensemble des éléments de technologie relatifs à la technique en appui sur dix et en particulier le mode d'emploi de cette technique en utilisant comme matériel « les bandes » peut, selon nous, contribuer à donner du sens à l'équivalence quantitative à l'école élémentaire. Nous développons cette idée dans le paragraphe suivant.

---

[7] Une étude similaire sur les calculs de type $a + n$ avec a compris entre 2 et 9 et n compris entre $11 - a$ et 9 permettrait de déterminer l'ensemble des tâches où la technique en appui sur dix est une alternative à toutes les autres techniques présentées au paragraphe 3.1.

1.4 Introduire l'équivalence quantitative

Dans l'introduction d'un ouvrage paru en 2020 regroupant des contributions de chercheurs membres de l'Observatoire international de la pensée algébrique (OIPA), Squalli et al (2020), citant Carraher et Schliemann (2007), font remonter bon nombre de difficultés :

> - Les élèves voient le signe d'égalité comme un signe d'annonce de résultats (Booth, 1984; Kieran, 1981; Vergnaud, 1985; Vergnaud, Cortes et Favre-Artigue, 1988);
> - Ils ont tendance à rechercher une valeur numérique simple (Booth, 1984). Le refus de laisser les opérations en suspens conduit à des erreurs de concaténation (Bednarz et Janvier, 1996);
> - Ils ne reconnaissent pas les propriétés de commutativité et de distributivité (Boulton-Lewis et al., 2001; Demana et Leitzel, 1988; MacGregor, 1996).
>
> (Squalli et al., 2020, p. 6)

Pour nous (Rinaldi, 2021), les causes de ces difficultés seraient dues, entre autres, au fait de développer, dans les premières années de l'école élémentaire essentiellement la valence pragmatique du calcul, qui consiste à trouver le résultat d'un calcul, sans développer en même temps la valence épistémique du calcul qui consiste, elle, à apprendre des propriétés mathématiques en calculant. Or, en cherchant par exemple à expliquer pourquoi et comment on peut remplacer le calcul 53 − 27 afin de rendre celui-ci plus facile, les élèves peuvent être amenés à trouver, puis écrire : 53 – 27 = 56 − 30. Dans cette égalité, le symbole égal « = » indique que les deux expressions numériques 53 − 27 et 56 − 30 sont équivalentes « quantitativement ». L'intention est surtout de prouver, en l'occurrence grâce à la propriété de conservation des écarts, la similitude des expressions situées des deux côtés du signe égal, sans avoir besoin au préalable d'effectuer le calcul correspondant à chaque expression. Dans ce cas, le symbole d'égalité est employé comme un symbole relationnel entre 53 − 27 et 56 − 30 et non pas comme un symbole opérationnel qui manifeste, quant à lui, le fait qu'on indique à droite du signe égal, le résultat d'un calcul.

Mais au préalable, avant de travailler à partir d'expressions numériques et d'établir un symbolisme conventionnel (=) reliant deux expressions numériques, nous avions émis l'hypothèse qu'il était nécessaire avec des enfants de 7 à 8 ans de proposer une situation au sens de Brousseau (2004) qui donne du sens à l'équivalence quantitative. C'est ainsi que l'un des moyens envisagés avait été d'introduire différentes règles dites « cassées » afin de mesurer un même segment. Ces règles dites « cassées », car ayant toutes la particularité de ne pas commencer à la graduation 0, ne permettaient pas de trouver, grâce à une lecture directe, la longueur du segment. Certaines règles commençaient par exemple à la graduation 2 ou à la graduation 3, les autres commençaient à la graduation 8 ou à la graduation 10 (Rinaldi, 2013). Leur utilisation successive puis conjointe amènerait ainsi à appréhender la notion d'écart entre deux nombres et la propriété de conservation des écarts dans le domaine de la mesure.

C'est pourquoi, présentement, dans le but de travailler l'équivalence quantitative avec de jeunes enfants (7-8 ans), dans la continuité des travaux de recherche de Rinaldi (2013, 2021, 2022), de Squalli (2002) et d'Anwandter Cuellar et al. (2018), nous faisons l'hypothèse que le fait d'introduire, dans le milieu de l'élève, un matériel, en l'occurrence « les bandes », incite à opérer directement sur des collections, chacune de cardinal inférieur à vingt (confère le mode d'emploi de la technique, exposé au paragraphe 1.3.2) et à préciser en quoi certaines d'entre elles peuvent être équivalentes « quantitativement ». L'enjeu étant par exemple d'établir une équivalence entre une collection de cardinal $7 + 5$ et une autre collection de cardinal $10 + 2$ sans avoir expressément recours au calcul des termes situés de part et d'autre du signe égal.

Cependant, il n'en reste pas moins, comme l'ont montré entre autres les travaux de Theis (2005), que des élèves de première ou deuxième année d'école élémentaire sont souvent en mesure de constater l'équivalence quantitative de deux collections tout en refusant l'écriture symbolique avec le signe égal entre deux expressions numériques. D'où l'idée d'associer à des tâches de manipulation, des tâches de calcul et des tâches de production d'écritures arithmétiques pour créer relativement tôt (deuxième année d'école élémentaire) un environnement où l'élève est amené à utiliser d'autres écritures que celles de type $a + b = c$. Nous pensons à des écritures additives équivalentes qui font varier le nombre de termes à gauche et à droite du signe égal et qui portent sur la somme de nombres entiers inférieurs à dix, des écritures de type : $a + b = c + d$; $a + b + c = d + e$; $a + b + c = d + e + f$… avec a, b, c, d, e, f… nombres entiers sous dix.

2. Dispositif d'enseignement, contexte de l'étude et méthodologie

Dans cette seconde partie de l'article, nous présentons le dispositif d'enseignement conçu pour la seconde année d'école élémentaire, le contexte de l'étude et notre méthodologie de recueil et d'analyse des données.

2.1 Présentation du dispositif d'enseignement

Le dispositif d'enseignement s'appuie sur trois types de tâches imbriquées : des types de tâches qui consistent à manipuler des collections discrètes (configuration de doigts) ou continues (bandes de longueurs données), à produire une expression numérique de la forme $a + b$ ou $a - b$, à trouver le résultat d'un calcul en mobilisant la technique en appui sur dix.

Dans le tableau 1, nous exposons la programmation des séquences d'enseignement qui s'étalent dans la durée de la première semaine de rentrée à la fin de la première période scolaire, juste avant les vacances de novembre. Chaque séquence est découpée en trois, quatre ou cinq séances d'une durée moyenne de 45 minutes et vise un objectif notionnel spécifique[8].

Tableau 1 : programmation des séquences d'enseignement

Séquences du dispositif	Objectif notionnel	Matériel utilisé
Séquence 1 : 5 séances Semaines 2 et 3 de septembre	Maîtrise des faits numériques sous dix et passage aux écritures arithmétiques de la forme : • $a + b = x$ dans le cas de la composition de a et b ou de la décomposition de x avec a, b et x entiers inférieurs à dix • $a + x = b$ dans le cas de la recherche du complément de a à b avec a et b entiers inférieurs à dix	Manipulation de bandes Manipulation de configurations de doigts
Séquence 2 : 2 séances Semaine 4 de septembre	Maîtrise des décompositions et recompositions de 10 et passage aux écritures arithmétiques : $10 = a + b$ avec a et b inférieurs à dix Maîtrise de la recherche du complément x de a à 10 avec a entier inférieur à dix et passage à l'écriture $a + x = 10$	Manipulation de bandes Manipulation de configurations de doigts Utilisation de cartes à jouer
Séquence 3 : 3 séances Semaine 1 d'octobre	Mise en œuvre de la technique de calcul en appui sur dix) et passage à l'écriture arithmétique: $a + b = 10 + \cdots$ avec a et b entiers naturels inférieur à dix	Manipulation de bandes Manipulation de configurations de doigts
Séquence 4 : 3 séances Semaine 2 d'octobre	Calcul en ligne avec appui sur dix de plusieurs termes inférieurs à dix	
Tout au long de la seconde année d'école élémentaire (CE1)	Adaptabilité aux calculs : utilisation de la technique de l'appui sur dix lorsqu'elle paraît la plus adaptée au calcul proposé. Calculs en ligne et en colonne : utilisation possible de la technique en appui sur dix pour réaliser des calculs en ligne ou posés	

[8] L'ensemble des séquences du dispositif est disponible dans la brochure « calcul sous vingt » (IREM Montpellier, 2021).

2.2 Recueil et méthodologie d'analyse des données

L'expérimentation du dispositif d'enseignement s'est déroulée de septembre 2020 à décembre 2020 dans les deux classes de CE1[9] de deux membres du groupe IRES qui ont contribué à sa conception. La classe A est une classe de CP/CE1 située au centre-ville qui a pour effectif 25 élèves dont 13 sont des élèves de CE1 et la classe B est une classe de CE1 dédoublée[10] située en réseau d'éducation prioritaire qui a pour effectif 12 élèves. Le double-niveau d'une part et d'autre part, l'origine socioprofessionnelle du public accueilli, font que les conditions d'exercice du métier sont différentes dans les deux classes. Cela nous semble alors d'autant plus intéressant d'observer et d'évaluer les effets du dispositif dans la classe A et dans la classe B, et de comparer les résultats obtenus dans les deux classes pour repérer éventuellement des différences significatives du contexte de l'étude sur les apprentissages des élèves.

Pour chaque classe, nous possédons comme données, pour les séquences 1, 2, 3 et 4, les réponses des élèves aux évaluations et les feuilles de calculs renseignées individuellement. En outre, nous avons deux sortes d'enregistrement vidéo. Le premier regroupe les enregistrements vidéo, avec caméra orientée sur le tableau, des moments de lancement, de synthèse et d'institutionnalisation. Le second type d'enregistrement regroupe les enregistrements de moments consacrés aux phases de recherche. Dans ce dernier cas, les caméras sont orientées sur un, deux, quatre, voire l'ensemble des élèves.

En lien avec notre question de recherche qui s'attache à évaluer l'impact que peut avoir l'utilisation de la technique en appui sur dix sur la construction de la notion d'équivalence quantitative, nous nous basons sur le recueil de données propres à trois séances.

Nous choisissons d'analyser les données de la séance 2 de la séquence 1, car dans cette séance les « bandes » construites pendant la séance 1 sont utilisées pour la première fois par les élèves afin de valider les réponses à différents calculs additifs. Nous analysons ensuite les données de la séance 2 de la séquence 3, car dans cette séance les élèves découvrent le mode d'emploi de la technique en appui sur dix (cf. figure 1) en manipulant les bandes. Ils sont amenés, étant donné deux bandes

---

9 En 2019-2020, nous avions conçu, observé et analysé une « préanalyse » du dispositif d'enseignement dans trois classes de CE1 : la classe A, la classe B et une autre classe de CE1 située en réseau d'éducation prioritaire (REP+).

10 Une mesure a été prise en France à la rentrée scolaire 2018 pour fixer l'effectif d'une classe de CE1 située dans des réseaux d'éducation prioritaire (REP+) à environ 12 élèves. On parle alors de classe dédoublée. Cette mesure était déjà rentrée en vigueur à partir de 2017 pour les classes de CP de REP+.

de longueur a et b avec $a + b > 10$, à choisir certaines bandes en prenant en compte leurs longueurs, afin d'établir eux-mêmes, pas à pas, une suite d'équivalences quantitatives entre plusieurs collections. L'objectif est *in fine* de produire des écritures de la forme $a + b = 10 + c$ avec c inférieur à dix.

La dernière séance analysée, la séance 2 de la séquence 4, doit mettre en avant les stratégies individuelles des élèves pour calculer la somme de trois nombres inférieurs à dix et renseigner sur la manière dont chaque élève mobilise les faits numériques sous dix pour décomposer la somme de trois termes, quand cette somme est supérieure à vingt sous la forme $10 + 10 + a$ avec a inférieur à dix.

Pour conduire notre analyse, nous relevons pour chacune des trois séances :

- Les difficultés rencontrées par les élèves pour produire des collections équivalentes et/ou des expressions numériques équivalentes en émettant des hypothèses sur les savoirs mathématiques qui leur font défaut (sur les nombres, les propriétés de l'addition, la relation d'équivalence) ou sur la non-pertinence de la situation proposée (tâche mathématique, consigne, matériel, organisation humaine …);
- La manière dont l'enseignant par son discours, par l'introduction de symboles cherche à faciliter le passage du monde des objets matériels au registre des écritures arithmétiques et inversement.

3. Analyses en lien avec le processus de conceptualisation de l'équivalence quantitative

Comme annoncé dans le paragraphe précédent (cf. 2.2) notre analyse se focalise sur trois moments du processus de conceptualisation de l'équivalence quantitative, le premier initié par la recherche de la somme de deux longueurs, le second par la découverte du mode d'emploi de la technique en appui sur dix avec des bandes, le troisième par la recherche de la somme de trois nombres inférieurs à dix. Pour chaque moment du processus, nous suivons les deux axes de notre méthodologie d'analyse en relevant et en analysant les difficultés rencontrées par les élèves et les médiations opérées par l'enseignant.

3.1 Analyse du moment « somme de deux longueurs »

La première séance de la première séquence a permis à chaque élève de réaliser son propre jeu de bandes constitué de deux bandes de longueur dix et de neuf bandes de longueur allant de un à neuf afin de représenter tous les nombres de un à vingt. Dans la séance « somme de deux longueurs » c'est grâce à ce matériel que les élèves en binôme vont valider le résultat de la somme de deux nombres inférieurs à dix en l'occurrence $3 + 7$, $5 + 2$, $4 + 4$ et $9 + 2$ et écrire sur une feuille le calcul correspondant. Nous n'avons pas repéré de difficultés ni dans l'effectuation des calculs ni dans la manipulation en ce qui concerne les trois premiers calculs. Les mises en commun ont permis à l'enseignant de faire expliciter aux élèves leurs techniques (comptage, surcomptage et récupération de faits numériques) et de préciser que pour chercher la longueur de deux bandes, il est nécessaire de les mettre dans le prolongement l'une de l'autre et bord à bord. Certains binômes, pour vérifier, posaient la bande somme sur les deux autres alors que d'autres la posaient juste au-dessous ou juste dessus.

Pour le dernier calcul, celui de 9 + 2, sur les deux classes, tous les binômes sauf un (celui de Kevin et Maria, classe B), ont trouvé le résultat sans hésitation. Ils ont pris les bandes dix et un pour réaliser une bande de longueur 11 et ont écrit sur leurs feuilles, 9 + 2 = 11. L'enseignant de la classe B s'est servi quant à lui des échanges entre les deux élèves Kevin et Maria pour introduire une écriture additive qui traduit l'équivalence entre 9 + 2 et 10 + 1.

Nous retranscrivons ci-dessous les échanges entre Kevin et Maria au sujet du calcul 9 + 2 et la correction proposée par l'enseignant.

Extrait d'un échange entre deux élèves au sujet du calcul 9 + 2

Kevin : Ça fait quatorze.

Maria : Il n'y a pas le quatorze.

Kevin : C'est ça, quatorze. [Il donne alors la bande 10 et la bande 4 à Maria. Maria place les deux bandes sous les bandes initiales pour vérifier.]

Kevin : « Ça dépasse ».

Extrait de la correction proposée au sujet du calcul 9 + 2

[Le professeur est au tableau. Il pose la bande 2 et dans le prolongement, bout à bout, la bande verte 9 et interroge Kevin]

Professeur : J'aimerais que Kevin nous dise ce qu'il avait trouvé au départ.

Kevin : J'avais dit quatorze.

Professeur : Est-ce qu'on a une bande 14 ?

Élève(s) : Non.

Professeur : Quelles bandes Maria a-t-elle mises pour vérifier ?

Maria : La bande 10 et la bande 4.

[Le professeur pose les bandes sur le tableau et s'adresse au groupe classe.]

Professeur : Qu'est-ce qu'ils se sont dit ? Les deux bandes sont trop longues. Neuf plus deux ne fait pas quatorze.

Élève : Ça fait onze.

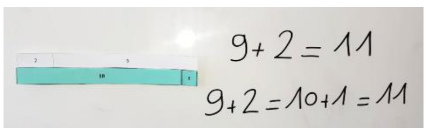
Professeur : Qu'est-ce que je peux mettre ?

Élève(s) : La bande 10 et la bande 1.

Professeur : Qu'est-ce que je peux écrire comme phrase mathématique ?

Professeur : Mais encore ?

[Au bout d'un certain temps un élève propose dix plus un. Le professeur inscrit alors le calcul correspondant au tableau.]



Cette séance montre que les élèves ont tous su décomposer la bande de longueur 11 en deux bandes de longueur 10 et 1 et qu'ainsi ils ont pu vérifier que la bande de longueur 9 + 2 avait bien la longueur de la bande 11. En fait, nous pensons que pour eux, comme 9 + 2 est égal à 11 et que comme 11 est égal à 10 + 1, il est alors « normal » de constater que les bandes 9 + 2 et les bandes 10 + 1 ont la même longueur.

Nous en déduisons donc, dans ce contexte, que même si l'enseignant a introduit l'écriture arithmétique 9 + 2 = 10 + 1 , le symbole d'égalité n'est probablement pas interprété par les élèves comme un symbole relationnel entre 9 + 2 et 10 + 1 (cf. 1.4). Nous pensons qu'à ce moment du processus de conceptualisation, sans même avoir manipulé les bandes, les élèves sont en mesure d'écrire les deux égalités 9 + 2 = 11 et 11 = 10 + 1, car dans ces deux égalités le signe égal peut-être interprété par les élèves comme un symbole opérationnel, qui manifeste le fait qu'on indique à droite du signe égal le résultat d'un calcul. Le premier calcul correspond à la recherche d'une somme, ce qui se traduit par une égalité de la forme $a + b = c$, et le second calcul au résultat d'une décomposition additive qui, elle, se traduit par une égalité de la forme $a = b + c$. Cela nous amène alors à nous interroger sur le fait que l'enseignant utilise implicitement la transitivité de la relation d'équivalence, au début de l'école élémentaire, pour déduire des deux égalités 9 + 2 = 11 et 11 = 10 + 1, l'égalité 9 + 2 = 10 + 1.

Selon nous, la proposition faite par l'enseignant a le mérite d'utiliser une symbolisation dans le registre des écritures arithmétiques qui correspond à une « lecture » ou à une « traduction » de ce que montre le matériel.

Nous pensons cependant qu'à ce même niveau de scolarité, un autre moyen pour « attraper » l'égalité 9 + 2 = 10 + 1 serait par exemple de :

- Décomposer 2 en 1 + 1 afin d'obtenir dans un premier temps l'égalité 9 + 2 = 9 + 1 +1 puis l'égalité 9 + 2 = 10 + 1 en recomposant le nombre 10 à partir de 9 + 1;
- ou bien de décomposer 10 en 9 + 1 afin d'obtenir dans un premier temps l'égalité 10 + 1 = 9 + 1 + 1 puis l'égalité 10 + 1 = 9 + 2 en recomposant le nombre 2 à partir de 1 + 1.

Dans ce cas, les manipulations risquent d'être plus difficilement accessibles aux élèves, mais grâce aux possibles interactions sociales et aux médiations opérées par l'enseignant, elles sont susceptibles de produire des écritures où le signe égal peut être interprété comme un symbole relationnel entre deux expressions numériques.

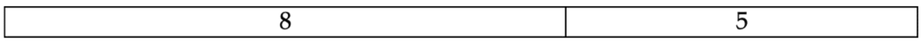
3.2 Analyse du moment «découverte de la technique en appui sur dix avec manipulation de bandes »

Pour implanter la technique en appui sur dix avec manipulation de bandes, nous avons proposé en séance 2 de la séquence 4 un jeu dénommé « le jeu du dix plus… ». La règle du jeu est présentée en annexe 1. Notre analyse s'appuie sur l'observation de la phase de jeu dans les classes A et B. Dans chacune des deux classes, l'enseignant a fait le choix de présenter le jeu à quatre joueurs et de suivre l'intégralité de la partie pendant que le reste des élèves travaillait sur d'autres tâches en autonomie.

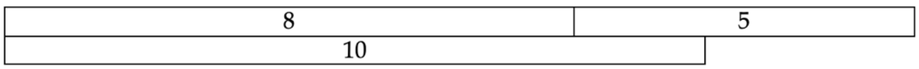
Quels que soient les groupes de quatre élèves observés, cinq au total, nous constatons que pendant les deux ou trois premières parties, les règles du jeu sont difficiles à suivre. Nous énumérons, en suivant la chronologie du jeu, les principales difficultés rencontrées par les élèves et les médiations opérées par les enseignants (tableau 2). Cela nous amène à revenir sur la nature des discours et des symboles introduits par les enseignants tout au long du jeu pour amener les élèves à s'approprier grâce à la manipulation des bandes, le mode d'emploi de la technique en appui sur dix.

Tableau 2 : difficultés des élèves rencontrées dans la mise en place du jeu : « dix plus … »

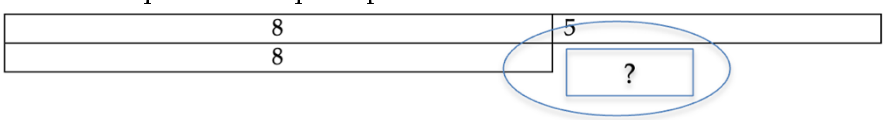
1° Les élèves posent pour leurs camarades les deux bandes correspondant au calcul à effectuer en leur donnant à lire les nombres « en miroir ». C'est souvent le professeur qui intervient pour retourner les bandes.



2° Les élèves placent directement la bande dix, ce qui incite le professeur à préciser qu'il s'agit d'obtenir 10 mais à partir d'une des bandes.



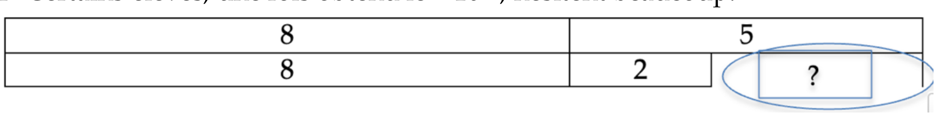
3° Une fois la bande 10 retirée et la première bande posée (ici le 8), la difficulté réside dans le fait de savoir quelle bande poser pour obtenir dix .



Certains élèves remettent la seconde bande (ici 5) auquel cas le calcul n'avance pas. D'autres élèves mettent une bande au hasard et poursuivent le calcul en se référant aux longueurs sans « passer » par 10. Nous supposons que les élèves ne comprennent pas : l'intérêt d'obtenir 10 ou qu'ils ne pensent pas à mobiliser les décompositions de dix pour déposer la bande 2.

Il se peut aussi, comme dans les séances précédentes où les élèves devaient trouver la somme des longueurs des bandes du haut et placer deux bandes afin d'obtenir la même longueur en haut et en bas, qu'ils soient ici déstabilisés par le fait qu'on retrouve une addition représentée par les bandes du haut, alors qu'en bas, les deux bandes doivent permettre d'obtenir une mesure de longueur égale dix. Il semblerait alors qu'une rupture de contrat importante pourrait contribuer à expliquer les difficultés des élèves.

4° Certains élèves, une fois obtenu le « 10 », hésitent beaucoup.



Ils mettent deux bandes au lieu d'une, ce qui donne par exemple $8 + 5 = 8 + 2 + 2 + 1$. C'est juste, mais cela ne correspond pas à dix plus un nombre. Il semblerait que les élèves ne mobilisent pas suffisamment les faits numériques pour rechercher en l'occurrence le complément de 2 à 5.

5° Comme les essais prennent du temps, les élèves qui ne calculent pas, ne suivent plus le jeu. Ils ne se sentent concernés qu'au moment d'écrire le résultat du calcul. Là encore, la présence de l'enseignant s'avère nécessaire pour préciser qu'on n'écrit pas directement le résultat 13, ni encore 10 + 3, mais qu'on indique à droite du signe égal par quelles bandes on a remplacé les bandes 8 et 5 pour obtenir justement 10+3. L'écriture arithmétique attendue est donc : $8 + 5 = 8 + 2 + 3$. Pour bien montrer que la dernière écriture est en lien avec la bande 10, il est alors convenu d'encadrer juste après le résultat de $8 + 2$, ce qui donne : $8 + 5 = \boxed{8 + 2} + 3 = 10 + 3 = 13$.

En synthèse, nous retenons que les difficultés majeures des élèves au début de la partie peuvent s'expliquer par une rupture de contrat en lien avec la manipulation des bandes (étape 3, tableau 2) et une rupture de contrat en lien avec l'utilisation du signe égal (étape 5, tableau 2). Nous pensons également que le fait de pouvoir faire des essais en manipulant les bandes n'incite pas forcément les élèves à anticiper en mobilisant les faits numériques sous dix (étape 4, tableau 2).

Pour poursuivre notre analyse, nous nous intéressons dans un premier temps à la manière dont les professeurs des classes A et B s'y sont pris pour aider certains élèves à prendre les « bonnes » bandes au bon moment. Il s'avère que pour chacun des professeurs, le discours émis pour le calcul de 8 + 5 est stable dans le sens où les expressions utilisées sont reprises par la suite quels que soient les binômes en difficulté et quel que soit le calcul à effectuer.

C'est ainsi que pour le calcul de 8 + 5, dans la classe A, afin de remédier à la difficulté qui consiste à placer la bande 2, l'enseignant demande avant même que l'élève ait pris une bande :

> Qu'est-ce qu'il manque ? Qu'est-ce qu'il faut pour aller de 8 à 10 ? [Puis une fois que l'élève a posé la bande 2, l'enseignant demande à nouveau :] Qu'est-ce qu'il manque ? Qu'est-ce qu'il faut pour aller de 2 à 5 ?

Dans la classe B, en revanche, à la même étape du calcul, l'enseignant ne demande rien. Il attend que l'élève ait posé la bande 2. Une fois, par contre, que l'élève a posé le 2, il commente :

> Tu as gardé le 8 et dans le 5 tu as pris 2 pour faire 10. [Il attend à nouveau que l'élève poursuive et pose le 3 pour commenter à nouveau :] Dans le 5 il restait encore 3 après avoir pris 2.

Les deux discours mis en parallèle contribuent à faire ressortir la nature différente des éléments prélevés par chaque enseignant pour aider les élèves. C'est ainsi que nous percevons que, dans la classe A, le professeur ne cherche pas forcément à savoir si l'élève a compris qu'il faut placer une bande dans le prolongement de la bande 8 afin d'obtenir une bande somme de longueur à 10 (étape 3, tableau 2). Il s'éloigne du contexte de la manipulation pour amener l'élève à savoir ce qu'il manque, ce qu'il faut pour aller de 8 à 10. Or, la bande 10 n'est nulle part sur le tapis de jeu. Donc, la référence au nombre 10 ne se justifie pas en soi. Le professeur fait comme si l'élève savait ce qu'il cherche à chaque étape et l'invite dans ces conditions à mobiliser certains faits numériques pour trouver la solution.

Le professeur de la classe B laisse l'élève essayer jusqu'à ce qu'il place la bande 2 à côté de la bande 8.[11] Le discours du professeur permet de traduire oralement ce que la manipulation montre. En effet, sous la bande 8 et la bande 5, il y a la bande 8, la bande 2 et la bande 3. Ce qui signifie bien que l'élève a gardé le 8, qu'il a pris le 2 dans le 5 pour faire 10 et qu'il a mis les 3 qui restaient du 5. En revanche, l'enseignant ne cherche pas à savoir comment l'élève a fait pour prendre la bande 2 et la bande 3. Il ne sait pas si l'élève a choisi ces bandes en s'aidant de la perception visuelle ou en mobilisant certains faits numériques.

Pour compléter l'analyse de ce moment de jeu, il nous semble que le fait de demander aux élèves, pour chaque exemple numérique, une fois la phase de manipulation finie, d'écrire 8 + 5 = 8 + 2 + 3 puis d'encadrer juste après le résultat de 8 + 2 en référence à la bande 10 est un moyen heuristique pour les aider à s'approprier le mode d'emploi de la technique en appui sur dix surtout si les élèves sont confrontés en fin de partie ou à la séance suivante à l'ensemble des écritures produites : $8 + 4 = \boxed{8 + 2} + 2$; $7 + 6 = \boxed{7 + 3} + 3$; $4 + 9 = \boxed{4 + 6} + 3$. Passer d'une écriture à l'autre contribue à expliciter que dans chaque rectangle la somme des deux nombres égale dix, que ces nombres ne sont pas pris au hasard, qu'un de ces nombres est connu et qu'il correspond à l'un des termes de la somme qu'on cherche à calculer.

Par ailleurs le symbole rectangle sera remplacé un peu plus tard dans la scolarité par le symbole des parenthèses, ce qui donnera, à la place de $7 + 6 = \boxed{7 + 3} + 3$, une égalité du type $7 + 6 = (7 + 3) + 3$.

En conclusion, le fait de manipuler n'induit pas directement la conceptualisation. Les professeurs ont dû faire accepter les contraintes du jeu, mieux expliquer l'instrumentalisation des bandes, amener les élèves à mobiliser les faits numériques connus, inciter à produire des écritures arithmétiques, comparer ces écritures pour permettre à chacun de s'approprier le mode d'emploi de la technique en appui sur dix.

3.3 Analyse du moment « recherche de la somme de trois nombres inférieurs à dix »

Nous faisons le choix de centrer notre analyse sur la première séance de la quatrième séquence qui consiste à calculer une somme de trois termes. Le fait qu'il y ait trois termes amène le calculateur à commencer par en choisir deux parmi les

[11] Nous supposons, mais cela reste une supposition, que si l'élève avait pris la bande 3, le professeur aurait signalé à l'élève que comme 8 + 3 = 11, la bande 3 ne convient pas.

trois afin de s'engager dans le calcul. Ce choix dépend de la connaissance des faits numériques et de l'adaptabilité dont fait preuve chaque calculateur[12].

Nous présentons dans un diagramme en bâtons (figure 2) le nombre de réponses correctes pour chaque calcul (couleur noire), de calculs faux (couleur grise), de calculs non faits (case hachurée) sur les 13 réponses recueillies dans la classe B. Nous avons regroupé les calculs en fonction de leurs caractéristiques sans respecter l'ordre dans lequel ils étaient posés afin de faciliter la lecture et l'analyse des données.

Il est à noter que 2 élèves sur les 13 présents n'ont cherché sur l'ensemble des calculs proposés que deux d'entre eux qui sont $8 + 4 + 1$ et $5 + 3 + 5$.[13] Tous les autres élèves ont cherché les réponses à tous les calculs en utilisant la technique en appui sur dix.

Comme attendu, les calculs les mieux réussis sont les trois premiers ($5 + 3 + 5$, $2 + 4 + 8$, $9 + 3 + 1$). Les dix élèves sur treize qui les ont faits justes ont directement regroupé les deux termes dont la somme égale 10 (5 et 5, 2 et 8, 9 et 1).

Le dernier calcul $4 + 7 + 0$ est aussi très bien réussi (9 réponses justes sur 11). Sur les 9 réponses proposées, une seule correspond à $\boxed{4 + 6} + 1$[14].Les 8 autres sont de la forme $\boxed{7 + 3} + 1$.

[12] Exemple : Pour calculer $8 + 3 + 2$ avec la technique en appui sur 10, on peut
- Choisir 8 et 2 ou 2 et 8, ce qui permet d'obtenir directement la somme sous la forme demandée : $\boxed{8 + 2} + 3$.
- Choisir 8 et 3 ou 3 et 8, ce qui oblige à calculer cette somme sous la forme $\boxed{8 + 2} + 1$ et à effectuer $1 + 2$ pour trouver le résultat final sous la forme demandée : $8 + 3 + 2 = \boxed{8 + 2} + 3$.
- Choisir 3 et 2 ou 2 et 3 amène à calculer $5 + 8$ ou $8 + 5$ sous la forme $\boxed{5 + 5} + 3$ ou $\boxed{8 + 2} + 3$.

[13] Ces deux calculs étaient inscrits en premier sur leur feuille.

[14] Nous encadrons la décomposition de dix utilisée. Ce code a été choisi avec les élèves pour désigner les deux bandes qui, mises bout à bout et dans le prolongement l'une de l'autre, avaient une longueur de dix (cf. figure 1). Nous n'avons pas jugé utile d'utiliser des parenthèses à ce niveau de scolarité (CE1).

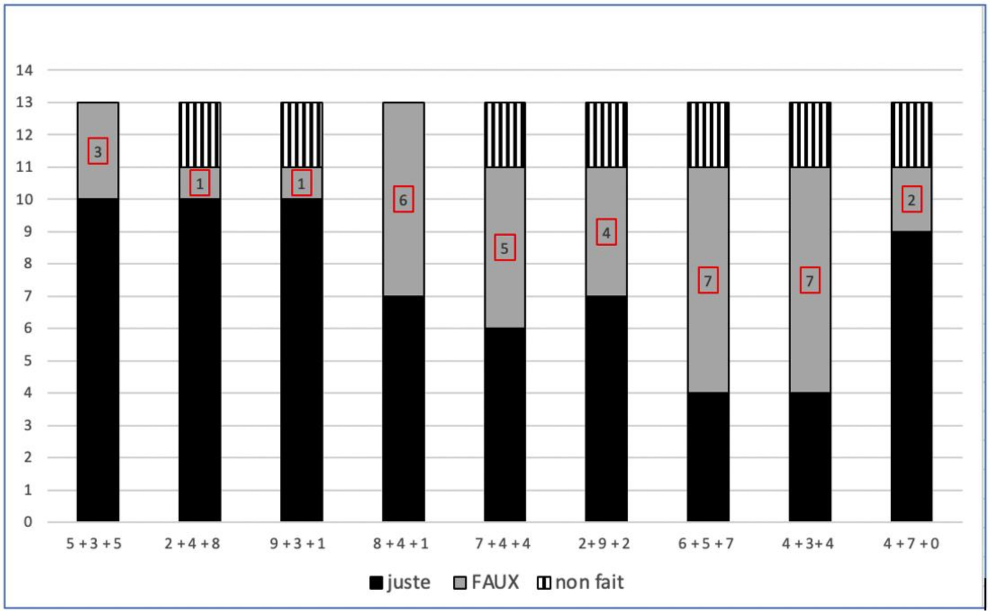


Figure 2. Nombre de résultats justes et faux par calcul correspondant à la somme de trois termes

Les calculs 8 + 4 + 1 et 7 + 4 + 4 se ressemblent, car le premier terme du calcul est le nombre le plus grand des trois et, pour obtenir 10, il faut ensuite décomposer le second terme. Les 9 élèves ont d'ailleurs commencé par obtenir 8 + 2 et 7 + 3. Quand leurs réponses sont fausses, c'est qu'ils n'ont pas effectué le calcul de 2 + 1 et de 4 + 1. Ils n'ont pas reporté sur le troisième terme le complément à 4 de 2 ou le complément à 4 de 3.

Le calcul 2 + 9 + 2 a la particularité d'avoir le plus grand nombre 9 au milieu. 10 élèves sur les 11 se ramènent d'ailleurs à $\boxed{9 + 1}$+… Une seule élève se ramène à $\boxed{2 + 8}$+ 3. Les réponses fausses s'expliquent par le non-report du nombre 1 qu'il reste à ajouter à 2.

Parmi les quatre réponses justes à 6 + 5 + 7, calcul où le dernier chiffre est celui qui est le plus grand, on trouve 6 + 5 + 7 =$\boxed{6 + 4}$+ 8, ou 6 + 5 + 7 =$\boxed{5 + 5}$+ 8 ou 6 + 5 + 7 =$\boxed{7 + 3}$+ 8.

Parmi les quatre réponses justes à 4 + 3 + 4, on trouve autant de $\boxed{7 + 3}$+ 1 que de $\boxed{4 + 6}$+ 1.

Pour conclure, les résultats obtenus sont encourageants, car la plupart des élèves arrivent à utiliser leur connaissance des faits numériques sous dix et leur connaissance des décompositions de dix pour remplacer une expression numérique par une expression numérique de la forme dix plus « … ». De plus, il est à noter, en étudiant une à une les productions, que l'ensemble des élèves qui appliquent correctement la technique en appui sur dix accordent de l'importance au choix du premier nombre. Ils choisissent ce nombre décisif après avoir lu dans son intégralité l'expression numérique située à gauche du signe égal. Les deux termes regroupés pour obtenir 10 attestent de cette compétence comme le montre la production d'un élève reproduite en figure 3.

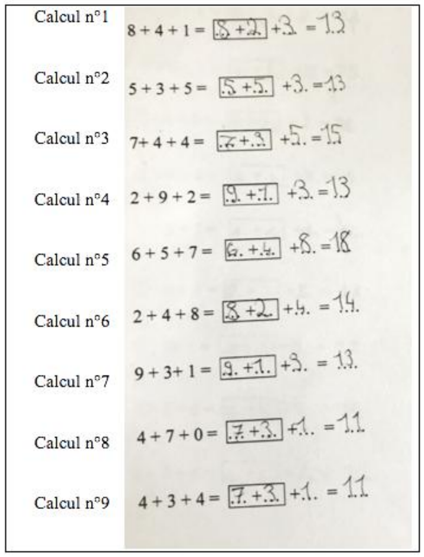


Figure 3. Exemple de production d'élève attestant d'une habileté calculatoire

3.4 Résultats de l'étude

En lien avec la manipulation des bandes. Le jeu de bandes constitué de deux bandes de longueur dix et de neuf bandes de longueur allant de un à neuf permet aux élèves de « voir » si la bande somme de longueur $a + b$ a la même longueur qu'une bande c avec c inférieur à dix ou la même longueur qu'une bande de longueur $10 + d$ avec d inférieur ou égal à dix.

En lien avec le registre des écritures arithmétiques. Deux stratégies semblent envisageables en seconde année d'école élémentaire pour établir l'équivalence entre $a + b$ et $10 + d$. La première consiste à calculer $a + b$ et à calculer $10 + d$, puis à utiliser implicitement la transitivité de la relation d'équivalence quantitative. Un autre moyen envisageable consiste à partir de l'expression numérique $a + b$, à décomposer l'un des termes puis à recomposer de façon « astucieuse » pour « retomber » sur $10 + d$. C'est en ce sens que la technique en appui sur dix permet de travailler la notion d'équivalence quantitative sans chercher à calculer les termes $a + b$ et $10 + d$.

En lien avec l'utilisation du signe égal. Les seules égalités écrites spontanément par les élèves sont du type $a + b = c$. Dans ces égalités, le symbole = annonce un résultat. La première fois où les élèves ont rencontré une écriture du type $a + b = 10 + d$, cette écriture correspondait à la contraction de $a + b = e$ et $10 + d = e$. Or, cette contraction est restée implicite et l'enseignant n'a pas justifié cette écriture.

En lien avec le processus de conceptualisation. Le fait de manipuler n'induit pas directement la conceptualisation. Utiliser du matériel, en l'occurrence ici un jeu de bandes de longueurs inférieures ou égales à dix s'est avéré utile pour que les élèves proposent et valident plusieurs décompositions et recompositions des nombres inférieurs à vingt. Cependant, les enseignants ont dû guider les élèves pour arriver à une instrumentalisation des bandes en lien avec l'objectif d'enseignement visé : remplacer la somme de deux termes $a + b$ par une somme équivalente obtenue en décomposant l'un des termes a ou b pour obtenir une somme équivalente à $10 + c$. Par ailleurs, ce sont les enseignants qui ont amené les élèves à formuler les relations entre les nombres et introduit un outil heuristique $\boxed{\ldots+\ldots}$ pour désigner la somme de deux nombres égale à dix(cf. 3.2).

En lien avec les habiletés calculatoires. Le fait de calculer des sommes de trois nombres inférieurs à dix a permis de développer une habileté calculatoire en incitant l'élève à choisir des groupements de nombres astucieux et à utiliser les propriétés de la commutativité et de l'associativité de l'addition.

Conclusion

Dans cet article, nous montrons que l'un des enjeux de l'apprentissage de la technique en appui sur dix est d'arriver, en deuxième année d'école élémentaire française (enfants de 7 à 8 ans), à remplacer le calcul initial d'une somme comprise entre dix et vingt par le calcul d'une « autre » somme qui, elle, « contient » dix. Or, pour arriver à trouver cette « autre » somme, il est nécessaire de savoir décomposer et composer les nombres sous dix. C'est pourquoi nos travaux s'inscrivent dans la continuité de ceux de Sensevy et al. (2015), dans le sens où nous utilisons l'addition comme moyen pour explorer les nombres et les relations entre les nombres avec une attention particulière pour la relation d'équivalence quantitative.

Par ailleurs, nous pensons que ce processus de conceptualisation de la relation d'équivalence quantitative peut être facilité si les élèves sont amenés à manipuler des représentations de nombres. Comme les nombres que nous cherchons à décomposer et composer sont inférieurs à vingt, nous avons fait le choix d'introduire, entre autres, dans le milieu de l'élève, un jeu de bandes constitué de deux bandes de longueur dix et de neuf bandes de longueur allant de un à neuf (cf. 1.2).

Dans l'article, pour étudier l'impact que peut avoir « la technique de calcul en appui sur dix » sur la construction de la notion d'équivalence quantitative en manipulant ce jeu de bandes, nous avons analysé trois séances d'un même dispositif d'enseignement dans deux classes de seconde année d'école élémentaire.

Le contexte de l'étude, notamment le fait que l'effectif des deux classes réunies s'élève à 25 élèves, que les enseignants des deux classes aient participé à la préanalyse et à la conception du dispositif d'enseignement et que les trois séances s'inscrivent dans une unité recouvrant au total treize séances (cf. figure 1), nous amène à objectiver les résultats présentés dans le paragraphe précédent.

Autant le fait de manipuler le jeu de bandes avec l'intention de déterminer la longueur d'une bande somme semble accessible aux élèves, autant la manipulation s'avère délicate quand il s'agit de remplacer une bande somme par une bande somme « contenant » dix. Cette autre façon d'instrumentaliser les bandes est amenée dans les deux classes observées par l'enseignant. Deux types de discours sont alors produits. Le premier vise à aider l'élève en lui suggérant les questions qu'il devrait se poser sur les calculs à utiliser pour trouver les bonnes bandes au bon moment. Le second discours vise quant à lui, une fois que les bandes correctes sont placées au bon endroit à amener l'élève à interpréter par un calcul ce que le matériel lui permet de voir. Ce constat nous encourage, dans nos travaux ultérieurs, à nous interroger davantage sur les formes de médiation que l'enseignant peut proposer pour favoriser le processus d'objectivation (Radford, 2011).

En revanche, à l'instar des recherches de Squalli (2002), d'Anwandter Cuellar et al. (2018) et Theis (2005), nous validons le fait que la manipulation des bandes amène les élèves à comparer « directement » la somme d'une longueur a et d'une longueur b à la somme d'une longueur 10 et d'une longueur c pour infirmer l'équivalence quantitative entre deux collections mais que cette manipulation ne facilite pas pour autant le passage à l'égalité $a + b = 10 + d$.

Par ailleurs, les résultats exposés dans cet article, en lien avec le calcul de la somme de trois nombres inférieurs à dix, tout comme ceux de nos travaux de recherche antérieurs (Rinaldi, 2021), semblent confirmer l'intérêt, dans le contexte français, de privilégier les décompositions et recompositions des nombres pour développer des habiletés calculatoires.

Références

Anwandter Cuellar, N., Lessard, G., Boily, M. et Mailhot, D. (2018). L'émergence de la pensée algébrique au préscolaire : les stratégies des élèves concernant la notion d'équivalence mathématique. *McGill Journal of Education / Revue des sciences de l'éducation de McGill, 53*(1), 146–168. https://doi.org/10.7202/1056287ar

Baroody, A. (2006). Why Children have difficulties mastering the basic number combinations and how to help them. *Teaching Children Mathematics, 13*(1), 22-31.

Bideaud J., Meljac C. et Fischer J.-P. (1991). *Les Chemins du nombre.* Presses universitaires du Septentrion.

Brissiaud, R. (2007). *Premiers pas vers les maths. Les chemins de la réussite à l'école maternelle.* Retz.

Brissiaud, R. (2015). Le nombre dans le nouveau programme maternelle : Quatre concepts clés pour la pratique et la formation. *Le café pédagogique*. http://www.cafepedagogique.net/lexpresso/Pages/2015/10/07102015Article635798003968263974.aspx

Brousseau, G. (2004). Les représentations : étude en théorie des situations didactiques, *Revue des sciences de l'éducation, 30*(2), 241-277.

Carraher, D. W. et Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. Dans F. Lester (dir.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (p. 669-705). Information Age Publishing.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 1. Structures et fonctions. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot et R. Floris (dir.), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques* (p. 3-33). Éditions la Pensée sauvage.

Fayol, M. (2015). *Nombres et opérations, premiers apprentissages à l'école primaire »* [Conférence de consensus]. CNESCO, https://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2015/11/Bilan-de-la-recherche.pdf

Flexer, R.- J. (1986). The Power of Five: The Step before the Power of Ten, *The Arithmetic Teacher, 34*(3), 5-9.

Fuson, K. et Kwon, Y. (1991). Systèmes de mots-nombres et autres outils culturels : effets sur les premiers calculs de l'enfant. Dans J. Bideaud, C. Meljac et J.-P. Fischer (dir.), *Les chemins du nombre* (p. 351-374). Presses universitaires du Septentrion.

Geary, D., Fan, L. et Bown-Thomas, C. (1992). Numerical cognition: Loci of ability differences comparing children from China and the United States. *American Psychological Society, 3*(3), 180-185. https://doi.org/10.1111/j.1467-9280.1992.tb00023.x

Geary, D. C., Bow-Thomas, C. C., Liu, F. et Siegler, R. S. (1996). Development of arithmetical competencies in Chinese and American children: Influence of age, language, and schooling. *Child Development, 67*(5), 2022–2044. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.1996.tb01841.x

Gelman, R. (1983) Les bébés et le calcul. *La Recherche, 14*(149), 1382-1389.

Gersten, R., Jordan, N.-C. et Flojo, J.-R. (2005). Early identification and interventions for students with mathematics difficulties. *Journal of learning disabilities, 38* (4), 293-304. http://dx.doi.org/10.1177/00222194050380040301

IREM Montpellier. (2021). Calcul sous vingt : un dispositif innovant d'enseignement et d'apprentissage au CE1 [brochure]. https://ires-fds.edu.umontpellier.fr/ressources-et-publications/ressources-et-publications-mathematiques/ressources-cycle-2/

Kaspari,D., Chaachoua, H. et Bessot, A.(2020). Qu'apporte la notion de portée d'une technique à l'étude de la dynamique praxéologique? *Annales de didactique et de sciences cognitives, 25,* 243-269. https://doi.org/10.4000/adsc.573

Mandler,G. et Shebo, B.-J. (1982). Subitizing : An Analysis of Its Component Processes. *Journal of Experimental Psychology: General, 111*(1), 1-22. https://doi.org/10.1037/0096-3445.111.1.1

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. Dans L. Radford, G. Schubring et F. Seeger (dir.), *Semiotics in mathematics education : epistemology, history, classroom, and culture* (p. 215-234). Sense Publishers.

Radford, L. (2011). Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage : la théorie de l'objectivation. *Éléments, 1*, 1-27.

Rinaldi, A.-M. (2013). Mesurer avec une règle cassée pour comprendre la technique usuelle de la soustraction posée. *Grand N*, 91, 93-119.

Rinaldi, A.-M. (2021). Habiletés calculatoires : les enjeux de la réécriture de calculs soustractifs. *Recherches en didactique des mathématiques, 41*(2), 217–259.

Rinaldi, A.-M. (2022). Le calcul sous vingt : une possibilité de travailler la notion d'équivalence à l'école élémentaire. *Repères IREM*, 126, 23-42.

Sensevy, G., Quilio, G. et Mercier, A. (2015) Arithmetic and comprehension at primary. Dans X. Sun, B. Kaur et J. Novotna (dir.), *Proceedings of ICMI study 23: Primary Mathematics Study on Whole Numbers* (p. 472-479). University of Macau.

Siegler, R. (1987). The perils of averaging data over strategies: an example from children's addition. *Journal of experimental Psychology, 116* (3), 250-264. https://doi.org/10.1037/0096-3445.116.3.250

Squalli, H. (2002). Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire : un exemple de raisonnements à l'aide de concepts mathématiques. *Instantanés mathématiques, automne 2002*, 1-10.

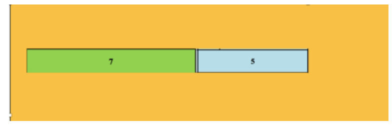
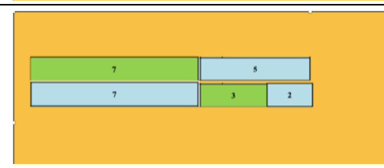
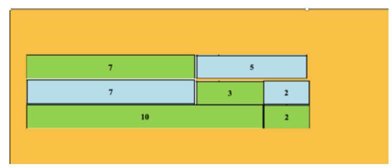
Squalli, H., Oliveira, I., Bronner, A. et Larguier, M. (2020). *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires*. Livres en ligne du CRIRES. https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches

Theis, L. (2005). L'apprentissage du signe = : un obstacle cognitif important. *For the Learning of Mathematics*, *25*(3), 7–12.

Vilette, B., Fischer, J.-P., Sander, E., Sensevy, G., Quilio, S. et Richard, J.-F. (2017). Peut-on améliorer l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique au CP? Le dispositif ACE. *Revue française de pédagogie*, 201, 105-120. https://doi.org/10.4000/rfp.7296

Vlassis, J. et Demonty, I. (2019). Conceptualisation, symbolisation et interactions enseignante/enseignant-élèves dans les apprentissages mathématiques : l'exemple de la généralisation. *Éducation et francophonie*, *47*(3), 98–120. https://doi.org/10.7202/1066515ar

Annexe 1 : Règle du jeu du dix plus « … »

<u>Première étape</u> Les joueurs de l'équipe A lisent le calcul à effectuer (ici 5 + 7) et posent les bandes correspondantes.	
<u>Deuxième étape</u> Les joueurs de l'équipe B posent dessous et bord à bord une des deux bandes (ici la 7 par exemple).	
<u>Troisième étape</u> Les joueurs de l'équipe B **remplacent la seconde bande** (ici la bande 5) par deux bandes qui vont permettre d'exprimer le calcul sous la forme ***dix plus…***	
<u>Quatrième étape</u> Les joueurs de l'équipe B placent sur une dernière ligne la bande dix et la bande « … » et dictent aux joueurs de l'équipe A, le calcul correspondant : $7 + 5 = \boxed{7 + 3} + 2 = 10 + 2$	
<u>Cinquième étape</u> Les rôles sont inversés. Les joueurs de l'équipe B prennent la fiche de calcul et lisent le second calcul à effectuer. Ils placent les bandes. Les joueurs de l'équipe A poursuivent…	

Un modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique élémentaire

Hassane SQUALLI
Université de Sherbrooke
Hassane.squalli@usherbrooke.ca
Doris JEANNOTTE
Université du Québec à Montréal
Jeannotte.doris@uqam.ca

Résumé : Ce travail s'inscrit dans les travaux de recherche en didactique des mathématiques portant sur le développement précoce de la pensée algébrique, c'est-à-dire depuis les premières classes du primaire. Utilisant les outils de la théorie anthropologique du didactique de Chevallard (1999), nous présentons un modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique (PA), vue comme une praxéologie globale. Ce modèle est basé sur un cadre conceptuel original de l'algèbre et de la pensée algébrique. Dans ce modèle, la PA se décline en trois praxéologies algébriques régionales, chacune d'elles se structure hiérarchiquement autour de praxéologies locales et de genres de tâches. Ces différents niveaux de praxéologies sont présentés, et les genres de tâches sont expliqués par des exemples de tâches lorsque nécessaire.

Mots-clés : pensée algébrique, algèbre, théorie anthropologique du didactique, modèle praxéologique, primaire

A praxeological reference model for early algebraic thinking

Abstract: This article focuses on part of our ongoing research into the development of algebraic thinking in early elementary students. Using the tools from Chevallard's Anthropological Theory of the Didactic (1999), we propose a praxeological reference model for algebraic thinking (AT), seen as a global praxeology. This model is based on an original conceptual framework of algebra and algebraic thinking. In this model, AT is broken down into three regional algebraic praxeologies, each of which is structured hierarchically around local praxeologies and task types. The different praxeological levels and task types, along with examples of tasks where necessary, are discussed.

Keywords: algebra, algebraic thinking, anthropological theory of the didactic, praxeological model, elementary school

Revue québécoise de didactique des mathématiques, 2022, *Numéro thématique 2* (Tome 2), p. 66-101. https://doi.org/10.71403/wwwy4e62

Introduction

Cet article se situe dans le cadre des travaux de recherches menées à l'Observatoire international de la pensée algébrique (OIPA). L'un des objectifs de ces travaux est de construire une méthodologie d'analyse et de comparaison des curricula officiels de différents pays relativement au développement de la pensée algébrique. Pour mener à bien ces études comparatives internationales, notre méthodologie d'analyse s'appuie sur le cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD) introduite par Chevallard (1999). Rappelons que dans le cadre de la TAD, une praxéologie est un quadruplet de quatre éléments articulés : type de tâches (T), technique (τ), technologie (θ), théorie (Θ). Selon ce modèle, toute tâche t est accomplie au moyen d'une technique τ (une manière de réaliser t). Chaque technique est justifiée par une technologie θ (un discours rationnel qui permet d'expliquer et de justifier la technique). Finalement, toute technologie repose elle-même sur les fondements d'une théorie Θ (Chevallard, 1999). Selon Bosch et Gascon (2005), la praxéologie est une unité d'analyse du savoir à enseigner. L'analyse du savoir à enseigner ou du savoir enseigné suppose de s'appuyer sur un modèle de référence issue des recherches réalisées (Larguier, 2015). Il s'agit de décrire, d'après les résultats de la recherche, un modèle épistémologique (MER) ou praxéologique (MPR) de référence de la pensée algébrique élémentaire, c'est-à-dire de la pensée algébrique pouvant être développée chez des élèves des écoles primaire et secondaire. Ils ajoutent :

> Ainsi, l'analyse du savoir à enseigner relative à certains objets d'enseignement ne peut avoir d'intérêt pour la recherche que si elle peut être mise en parallèle avec un MER [ou MPR] qui donne à voir les éléments essentiels de l'enseignement d'un domaine donné au regard des résultats des recherches. C'est donc la première tâche de l'étude du curriculum officiel, à savoir la description de cette référence. (Larguier, 2015, p. 3)

Par ailleurs, un modèle épistémologique ou praxéologique de référence relativement à un objet d'enseignement doit être basé sur un cadre conceptuel de cet objet. La TAD nous fournit un outil d'analyse du savoir à enseigner relatif à un savoir mathématique particulier (le développement de la pensée algébrique élémentaire dans notre cas), mais la TAD n'a pas de point de vue sur l'algèbre et la pensée algébrique élémentaires. Aussi, le modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique que nous proposons dans cet article s'appuie sur un cadre conceptuel de l'algèbre et de la pensée algébrique développé dans nos propres travaux (Squalli, 2000, 2015, 2020) et qui prend en compte des travaux de recherche de tradition anglo-saxonne dans le domaine *Early Algebra* (EA), ceux de Radford tout particulièrement. EA réfère à la fois à un domaine de recherche, une perspective curriculaire et un domaine de formation des enseignants (Carraher et

Schliemann, 2007). EA est basé sur l'idée de favoriser le développement précoce de la pensée algébrique, c'est-à-dire depuis les premières années du primaire. Nous renvoyons le lecteur au texte de Squalli (2020) pour une présentation synthétique de la genèse de ce mouvement et des questions qui font débat chez les chercheurs. Pour notre part, nous considérons l'idée du développement précoce de la pensée algébrique comme une stratégie d'algébrisation des mathématiques du primaire (Kaput, 1995). Cette stratégie favorise l'enrichissement des mathématiques du primaire sur les plans de la conceptualisation, des raisonnements ainsi que des modes de représentation et d'opération sur ces représentations. L'accent est mis sur le développement, sur une longue période, de la pensée algébrique en concomitance, non en opposition, avec d'autres formes de la pensée mathématique. En outre, selon Kaput (1995), cette stratégie apporte une cohérence et une profondeur au curriculum. Nous nous distinguons dans ce sens des approches dites transitionnelles (Carraher et Schliemann, 2007) qui voient dans le développement de la pensée algébrique une stratégie pour assurer la transition entre l'arithmétique et l'algèbre, soit une stratégie d'entrée dans l'algèbre du début du secondaire. L'originalité de notre modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique [MPRPA] repose en partie sur l'originalité de ce cadre conceptuel.

Ce texte est structuré de la manière suivante. La section 1 présente quelques éléments de contexte et de problématique des travaux ayant la pensée algébrique comme objet de recherche. Nous y présentons certains enjeux actuels de la recherche portant sur la pensée algébrique. La section 2 aborde les éléments essentiels de notre cadre conceptuel de la pensée algébrique. La section 3 détaille la méthodologie suivie pour construire notre MPRPA. Ce dernier sera présenté dans la section 4. Dans la discussion, le MPRPA sera contrasté avec d'autres propositions émanant de la TAD.

1. Éléments de contexte et de problématique

Au cours des deux dernières décennies, des développements importants en recherche ont permis l'émergence de nouvelles perspectives curriculaires, perspectives implantées par de nombreux pays et régions du monde (Cai et Howson, 2012). Ce courant, reconnu sous l'appellation « *Early Algebra* » ou « algèbre avant la lettre » vise à orienter les activités mathématiques vers le développement précoce de la pensée algébrique, c'est-à-dire dès le début du primaire. Cependant, cette perspective pose des questions et des défis sur différents plans. Sur le plan épistémologique, comme le rappelle Radford (2018), la notion de pensée (mathématique) n'est pas encore bien conceptualisée en didactique des mathématiques. Comment définir la pensée mathématique d'un point de vue opératoire? Sur le plan curriculaire, cette perspective ouvre la voie à des programmes d'étude d'une nouvelle génération, organisés selon des trajectoires coordonnées de différentes formes de la pensée mathématique de manière continue du primaire à la fin du secondaire, ce qui constitue un défi important.

Dès la formulation de l'idée du développement de la pensée algébrique avant l'introduction du langage littéral de l'algèbre, sur une longue période débutant dès les premières années du primaire, plusieurs questions importantes se posent naturellement : Qu'entend-on par algèbre? Qu'entend-on par pensée algébrique? Quelle est la relation entre l'arithmétique et l'algèbre? Quel est le rôle des signes alphanumériques dans le développement de la pensée algébrique? (Squalli, 2020).

2. Cadre conceptuel de la pensée algébrique

Pour répondre à ces questions, nous présentons un cadre conceptuel de l'algèbre et de la pensée algébrique ainsi qu'une caractérisation opératoire de la pensée algébrique. Mais avant, nous devons clarifier la notion de pensée.

2.1 La notion de pensée selon Radford

Radford (2011, 2015) explique que la psychologie traditionnelle conçoit la pensée du sujet comme une « activité mentale », c'est-à-dire comme quelque chose « en nous », une activité qui « émane purement du sujet » et qui a lieu à l'intérieur de la boîte crânienne. Or, ajoute-t-il, comme suggérait l'épistémologue dialecticien Evald Ilyenkov (1977), on pourrait décortiquer n'importe quelle boîte crânienne en morceaux chaque fois plus petits sans pour autant y trouver une seule pensée. (Radford, 2011). S'appuyant sur Wartofsky (1979), Radford (2011) nous invite plutôt à approcher la pensée comme une « pratique réflexive » (praxis cogitans) et à distinguer la pensée au sens anthropologique de la pensée subjective, celle du sujet singulier. Selon lui, le concept de pensée dans son sens anthropologique apparaît comme une synthèse culturellement codifiée du travail humain (Radford, 2015). Cette synthèse résulte de la pratique sociale, les singularités des actions se voient « reflétées » dans ce qui devient reconnu comme une même manière d'agir et de réfléchir, se constituant ainsi en un prototype d'actions et de réflexions (Radford, 2015). La pensée est dès lors une capacité toujours latente d'agir ou de réfléchir d'une certaine manière. La pensée subjective, celle du sujet, est l'«actualisation» ou «concrétisation» ou «matérialisation» de la pensée au sens anthropologique, d'une potentialité culturelle (Radford, 2015).

2.2 Qu'est-ce que l'algèbre, qu'est-ce que la pensée algébrique?

Avant de définir ce que sont pour nous l'algèbre et la pensée algébrique, il nous faut d'abord préciser notre approche des mathématiques. En effet, les mathématiques peuvent être considérées comme une science toute faite, c'est-à-dire un ensemble de connaissances déjà bien organisées, ou encore comme une science en train de se faire, c'est-à-dire comme une activité humaine. Selon cette seconde perspective, qui est celle que nous adoptons, l'algèbre, l'arithmétique et la géométrie, par exemple, sont des types particuliers d'activités mathématiques. Ces types d'activités sont marqués par des manières de penser. Dès lors, la pensée algébrique est une manière d'agir et de réfléchir dans des activités algébriques, que nous allons définir ultérieurement. Ainsi définie, la pensée algébrique se déploie en activités algébriques. Pour la caractériser de manière opératoire, il nous faut identifier ces manières d'agir et de réfléchir dans des activités algébriques. Il faut donc commencer par définir ce qu'on entend par algèbre, vue comme un type particulier d'activités mathématiques, soit un ensemble d'activités algébriques.

Une analyse de l'évolution historique de l'algèbre (Squalli, 2000) a mis en évidence le caractère essentiel que joue l'opération[1], dans le développement et l'appréhension de l'algèbre. Dans leur analyse de l'évolution historique de l'algèbre, Piaget et Garcia (1983) arrivent à la même conclusion. Reprenant à leur compte une analyse de Boutros (1920), ils caractérisent cette évolution en trois grandes étapes, nommées respectivement étape intraopérationnelle, étape interopérationnelle et étape transopérationnelle, dont les frontières sont marquées par les prises de conscience des opérations d'abord et des structures ensuite. Pour sa part, van Reeuwijk (1998) définit l'algèbre comme l'étude des structures engendrées par les opérations :

> D'un point de vue mathématique, l'algèbre traite de systèmes dans lesquels les opérations jouent un rôle : l'addition (de nombres ou d'autres ''choses''), la multiplication (de nombres, d'autres ''choses''), et les relations avec les inverses. En d'autres termes, l'algèbre traite de la structure. L'algèbre est l'étude des structures d'opérations. (p. 83, traduction libre[2])

Si l'arithmétique peut être définie comme la science des nombres, des quantités et des grandeurs (Carraher et Schliemann, 2007), l'algèbre peut être définie comme la science des opérations, c'est-à-dire des lois de composition, internes ou externes, binaires ou n-aires, pouvant être de nature quelconque (addition, multiplication,

---

1 La notion d'opération est précisée quelques lignes plus loin.

2 « From a mathematical point of view, algebra deals with systems in which operations play a role: addition (of numbers or other ''thing''), multiplication (numbers, other ''thing''), and the relations with the inverses. In other words, algebra deals with structure. Algebra is the study of operation structures » (van Reeuwijk, 1998, p. 83).

rotation, composition, etc.), mais répétées un nombre fini de fois (Squalli, 2000, 2020).

Cette vision de l'algèbre élémentaire est large. Toutefois, elle a le mérite de circonscrire les significations de l'algèbre et de la pensée algébrique et de permettre de les distinguer de celles de l'arithmétique et de la pensée arithmétique.

Ainsi, le nombre en arithmétique modélise une quantité, une grandeur ou un rang. C'est un nombre nombrant, ce qui fait que la pensée arithmétique est de nature empirique : les significations des concepts (nombre, égalité, inconnue, etc.) ainsi que les modes de raisonnement s'appuient sur les observables et s'en tiennent à eux pour vérifier la validité des relations observées, pour établir leur degré de généralité et en tirer des prévisions ultérieures. Ainsi, l'expression numérique $(100 \times 98 + 1) \div 99$ sera interprétée comme un calcul à exécuter. Les symboles des opérations $+$; $\times$ et $\div$ sont vus comme des signes d'exécution de calculs en vue de trouver la valeur nombrante de l'expression numérique sous forme d'un nombre simple : $(100 \times 98 + 1) \div 99 = (9800 + 1) \div 99 = 9801 \div 99 = 99$.

Par ailleurs, mobilisant une pensée arithmétique, un élève du primaire arrive à se convaincre que, dans la somme de deux entiers naturels, l'ordre des termes n'est pas important (autrement dit en langage algébrique, que l'addition est commutative : $n + m = m + n$ pour n et m entiers naturels). Cette conviction est basée sur son expérience de calcul et sur un argument empirique : par calcul, l'élève a observé que chaque calcul de la somme de deux nombres déterminés n et m, les valeurs nombrantes de $n + m$ et de $m + n$ sont identiques. Cette observation (la constance du résultat des comparaisons) peut alors être étendue à toutes les valeurs des variables m et n. Nous parlons dans ce cas d'une « généralisation arithmétique ».

En revanche, en algèbre, un nombre est un élément d'un système algébrique, c'est-à-dire d'un ensemble d'objets sur lequel est définie, au moins, une opération[3]. Ainsi, le nombre de l'algèbre élémentaire tient sa qualité de nombre non pas de ses caractéristiques propres, mais de son appartenance à un système algébrique dont la structure est déterminée par la nature de l'opération (ou des opérations). Cela fait en sorte que la pensée algébrique est de nature théorique : les significations des concepts (nombre, égalité, inconnue, etc.) ainsi que les modes de raisonnement s'appuient sur des caractéristiques structurales induites par les opérations et la situation en jeu ainsi que sur des arguments intellectuels construits par le sujet.

[3] Par opération on entend une loi de composition interne ou externe, une-aire ou n-aire, qui peut être de nature quelconque (addition, rotation, par exemple). Voir aussi plus loin.

Ainsi, l'expression numérique $(100 \times 98 + 1) \div 99$ sera interprétée comme un objet en soi avec une structure propre. En se basant sur les propriétés des opérations, le sujet peut faire un « calcul réfléchi » en laissant les opérations momentanément en suspens et en produisant des expressions numériques équivalentes :

$$(100 \times 98 + 1) \div 99 = \big((99 + 1)(99 - 1) + 1\big) \div 99 = (99^2 - 1 + 1) \div 99 = 99$$

Le signe = prend la signification d'une relation d'équivalence et l'opération + n'est plus systématiquement exécutée, mais laissée en suspens. Le nombre n'est pas abordé uniquement par sa qualité nombrante, mais à travers le tissu de relations, générées par les opérations qu'il entretient avec les autres nombres : $100 = 99 + 1$ et $98 = 99 - 1$. Ces deux relations sont mises en avant, car elles permettent de mettre en évidence une structure syntaxique de l'expression qui autorise l'application de la règle de calcul : $n^2 - 1 = (n + 1)(n - 1)$. Le nombre 99 est alors perçu non comme un nombre nombrant, mais comme l'instanciation de la variable n impliquée dans cette dernière égalité universelle (Squalli, 2000).

De surcroit, mobilisant une pensée algébrique, un sujet établit la commutativité de l'addition comme résultat d'une généralisation théorique (Dörfler, 1991). Par exemple, étant données deux collections d'objets A et B de cardinal n et m, respectivement, calculer $n + m$ revient à ajouter les m objets de la collection B aux n objets de la collection A et à dénombrer le tout. Calculer $m + n$ revient à ajouter les n objets de la collection A aux m objets de la collection B et à dénombrer le tout. On s'aperçoit que les deux opérations de réunion des deux collections forment le même tout. Une réflexion sur ces opérations – sans effectuation des dénombrements – conduirait à comprendre que ces opérations ne dépendent pas des cardinaux des deux collections. Le cas de ces deux collections devient alors « prototypique » de toutes les paires de collections possibles. La généralisation s'appuie alors sur les opérations du sujet et non uniquement sur les observables. Nous parlerons dans ce cas d'une « généralisation algébrique ».

La différence entre la pensée algébrique et la pensée arithmétique se répercute aussi sur le plan des modes de raisonnement. À titre d'exemple, examinons comment la pensée algébrique se distingue de la pensée arithmétique dans le cas d'activité de résolution de problèmes se ramenant à la résolution d'une équation à une inconnue du premier degré. La principale distinction entre ces deux modes de pensée réside dans la nature analytique ou non des raisonnements (Squalli et al., 2020). En effet, dans un mode de raisonnement arithmétique de résolution de problème, la valeur de l'inconnue est déterminée en opérant sur des données et des relations connues. Ce mode de raisonnement est ainsi de caractère non analytique (Squalli et al., 2020). En revanche, un mode de raisonnement algébrique est de caractère analytique : pour trouver la valeur de l'inconnue, on la considère comme objet de la pensée et on opère sur elle comme on opère sur les données connues (Squalli et al., 2020).

> Comme le font remarquer Mason et Binns (1993), dans une démarche arithmétique de résolution, on fait simplement une suite de calculs sur des quantités connues, on n'opère jamais sur des inconnues. La distinction entre un mode de raisonnement arithmétique et un mode de raisonnement algébrique réside précisément dans le caractère analytique de ce dernier, non dans l'absence ou la présence de lettres pour représenter les inconnues**.** (Squalli et al., 2020)

Plusieurs chercheurs soulignent le caractère analytique de la pensée algébrique (Bednarz et al., 1996; Lins, 1992; Radford, 2010; Squalli, 2000; Squalli et al., 2020).

En outre, la présence ou l'absence des lettres n'est pas un signe de la mobilisation ou non d'une pensée algébrique. On pourra trouver des exemples dans Squalli et al. (2020) de raisonnements analytiques d'élèves dans un registre purement numérique ainsi que de raisonnements non analytiques, bien que des lettres soient utilisées comme dénotation des inconnues – mais sans opérations sur ces dénotations. Dans le cas d'activités de généralisation de *patterns* figuratifs, plusieurs recherches montrent que les élèves du primaire et du début du secondaire peuvent produire des généralités algébriques sans recourir aux lettres (Mary et al., 2014; Radford, 2014; Squalli, 2015; Vlassis et al., 2017). Pour leur part, Bednarz et al. (1992) soulignent que les quelques recherches conduites auprès d'élèves montrent que plusieurs d'entre eux, de l'école secondaire jusqu'à l'université, résolvent davantage les problèmes algébriques dans un style « abrégé » (langage naturel « syncopé ») que symbolique.

2.3 Une caractérisation opératoire de la pensée algébrique

Une caractérisation opératoire de la pensée algébrique nécessite de prendre en compte les éléments soulevés dans la section précédente et d'aller plus loin. Ainsi, en nous appuyant sur une analyse du développement historique de l'algèbre élémentaire, nous avons d'abord identifié les principales activités algébriques (modélisation, étude de structures, manipulation de symboles (Squalli, 2000). Ensuite nous avons caractérisé de manière opératoire les manières d'agir et de réfléchir dans ces types d'activité en identifiant les raisonnements, les concepts et leurs significations ainsi que les symbolisations qui y sont mobilisés. Dans ce sens, nous prenons en compte à la fois les ostensifs et les non-ostensifs en jeu dans les activités algébriques.

Sur le plan opératoire, la pensée algébrique se déploie au moyen de trois composantes interreliées formant une totalité dynamique :

- un ensemble de raisonnements particuliers (comme généraliser, raisonner de manière analytique, symboliser et opérer sur des symboles; exprimer, interpréter, raisonner sur des relations entre variables, en particulier des relations fonctionnelles, raisonner en termes de structures, etc.);
- des manières d'approcher des concepts en jeu dans les activités algébriques (comme voir l'égalité comme une relation d'équivalence, laisser les opérations en suspens; voir une expression numérique comme un objet en soi et non uniquement comme une chaîne de calcul, etc.);
- des modes de représentation et des manières d'opérer sur ces représentations (Squalli, 2015, Squalli et al., 2020).

En lien avec cette dernière composante, nous retenons trois types de registres de représentation sémiotiques au sens de Duval (1995) et de Hitt et Passaro (2007) : le registre purement numérique, le registre algébrique conventionnel et le registre intermédiaire. Comme Hitt (2004) et Hitt et Passaro (2007), nous considérons non seulement les représentations sémiotiques institutionnalisées, mais aussi les registres personnels que l'élève peut utiliser; par exemple représenter une inconnue par un mot, par le dessin d'une ligne, ou par un carré vide, ou recourir au langage oral naturel. L'un des enjeux du développement précoce de la pensée algébrique est d'amener l'élève à perfectionner les modes de représentation personnels pour dénoter et opérer sur des nombres non déterminés et des équations impliquant des inconnues ou des variables. Nous ne nions pas le rôle du symbolisme alphanumérique, qui a une force supérieure à d'autres ostensifs, et qui sera privilégié ensuite dans l'enseignement secondaire. Mais dans la perspective du développement précoce de la pensée algébrique, son introduction se fera par nécessité pour soutenir les développements du raisonnement analytique et du processus de généralisation de l'élève et non pour les faire émerger.

3. Un modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique (MPRPA)

Dans cette section, nous présentons le modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique.

3.1 Présentation générale

Dans le cadre de la TAD et à l'instar des travaux de recherches exploitant des analyses praxéologiques, un modèle praxéologique de référence se présente comme la déclinaison d'une praxéologie globale à l'étude (la pensée algébrique en ce qui nous concerne) en un petit nombre de praxéologies régionales relatives à une même théorie, chacune d'elles se décline à son tour en un petit nombre de praxéologies locales relatives à une même technologie et, à son tour, chacune d'elles se décline en un petit nombre de praxéologies ponctuelles.

La figure 1 offre une vue synthétique de notre modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique (MPRPA).

Ce modèle est structuré autour de trois praxéologies mathématiques régionales (PMR) : 1) Généralisation; 2) Modélisation et 3) Calcul.

Dans tout le texte, pour une économie du langage, nous parlerons de généralisation (modélisation, calcul, respectivement) bien qu'il s'agisse de généralisation algébrique (modélisation algébrique, calcul algébrique, respectivement).

La PMR « Généralisation » se décline en deux praxéologies mathématiques locales (G1); PML : Généralisation de régularités et Généralisation de règles, de formules, de lois et d'algorithmes (G2).

G1 regroupe les genres de tâches de généralisation de suites numériques ou non numériques. Une suite est dite régulière si elle admet une régularité. Cette régularité peut être exprimée par une règle exprimant n'importe quel terme de la suite en fonction de son rang.

G2 regroupe les tâches de généralisation de règles, de formules, de lois, d'algorithmes.

La PMR « Modélisation » se décline en trois PML : Modélisation de situations intra ou extra-mathématiques par des expressions numériques (M1); Modélisation de situations intra ou extra-mathématiques par des équations impliquant des inconnues (M2) et Modélisation de situations intra ou extra-mathématiques par des relations fonctionnelles (M3).

La PMR « Calcul » se décline quant à elle en deux PML : Calcul sur des expressions numériques et Calcul sur des expressions algébriques.

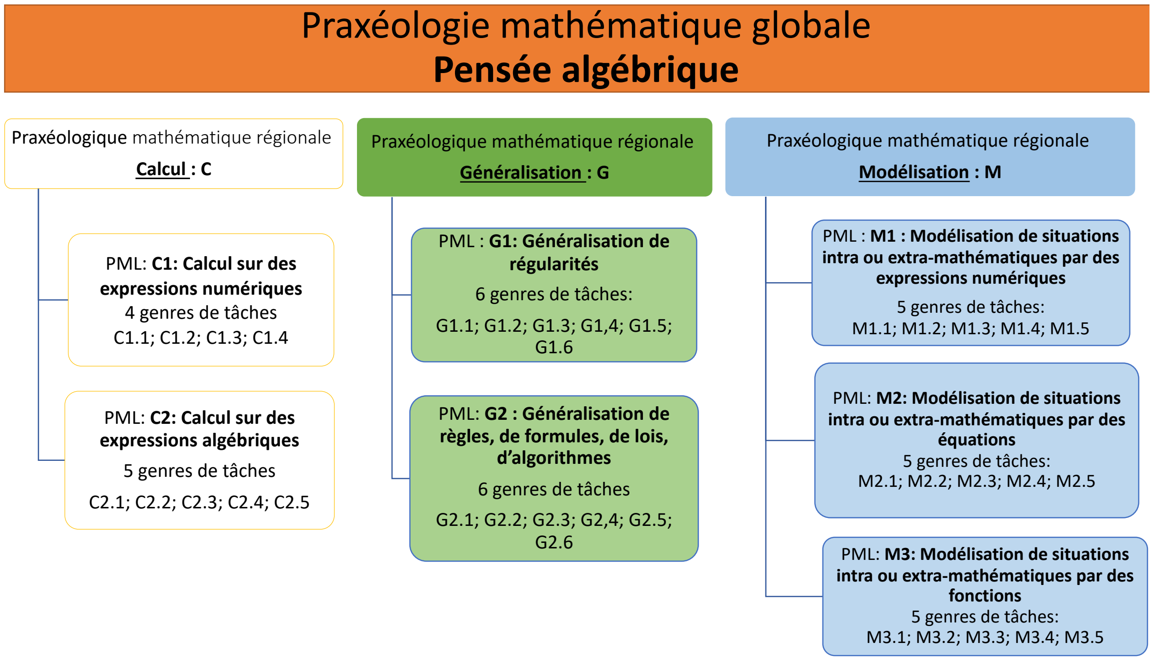


Figure 1 : Modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique

Chacune de ces PML se décline en genre de tâches.

Dans ce qui suit, nous présentons chacune de ces trois praxéologies mathématiques régionales : calcul, généralisation et modélisation.

3.2 PMR : Calcul

Dans cette section, nous présentons les éléments technologico-théoriques de la praxéologie régionale Calcul.

Dès sa naissance avec al-Khawarizmi, l'algèbre se présente comme un calcul : un calcul sur les expressions et les équations algébriques. Pour présenter le sens de ce calcul, nous commençons par définir les notions d'espace de calcul algébrique, d'expression et d'équation algébriques.

Soit E un système algébrique dans lequel sont définies une ou plusieurs opérations. L'existence d'opérations dans l'ensemble E donne la possibilité de combiner des éléments de E, de combiner les produits obtenus et ainsi de suite. Il peut arriver que deux combinaisons différentes produisent le même élément de E. Effectuer et comparer de telles opérations sont des tâches qui peuvent s'avérer fastidieuses à réaliser mentalement. Il est nécessaire de les rendre « observables ». Pour cela, nous allons définir un « espace de calcul algébrique » associé au système algébrique E nous permettant 1) de désigner par des signes les éléments de E, les opérations et les relations définies sur E ainsi que la forme des opérations que l'on peut effectuer sur ces signes, 2) d'opérer sur ces signes à l'aide des opérations et des relations définies sur E, et 3) de déterminer des relations (spécialement les relations d'équivalences) entre ces signes suivant les règles des opérations et des relations définies sur E[4]. Il n'est pas absolument nécessaire que les signes utilisés soient des caractères alphanumériques; ils peuvent être des mots du langage naturel ou n'importe quelle représentation verbale ou iconique.

Expliquons de manière plus détaillée ce qu'est un espace de calcul algébrique. Pour cela, donnons-nous un système algébrique familier tel l'ensemble des nombres entiers relatifs, noté Z, dans lequel nous ne considérons pour l'instant que les opérations usuelles d'addition et de multiplication. L'espace de calcul algébrique qui lui est associé, que nous notons Z′, contiendra, en vertu de la première condition, les signes pour représenter les nombres entiers relatifs, par exemple l'écriture décimale des nombres à l'aide des chiffres arabes, les symboles + et × pour désigner les opérations d'addition et de multiplication, respectivement. Également, Z′ contiendra toutes les combinaisons permises de signes représentant les nombres et des opérations ainsi que leurs produits, comme $2 + 3$; $2 \times (3 + 4)$; $2 \times 3 + 3 \times 4$; $4^3 - 3^4$. Une « expression algébrique » désigne ainsi la représentation d'une opération ou d'une chaîne finie d'opérations que l'on peut effectuer sur des éléments de Z à l'aide de l'addition et de la multiplication. Par exemple, l'expression algébrique $2 \times (3 + 4)$ peut être interprétée comme l'application de la chaîne d'opérations : "multiplier un premier nombre par la valeur de la somme d'un deuxième et d'un troisième, aux nombres 2, 3 et 4 pris dans cet ordre[5]. Pour représenter la forme de cette chaîne d'opérations, nous devons utiliser des signes désignant les éléments de Z, que nous appellerons des constantes, ainsi que d'autres signes qui n'ont aucune signification en eux-mêmes, par exemple des lettres, qu'on utilise en mathématiques pour construire des formules ou énoncer des théorèmes. Nous obtenons dans notre exemple la forme $a \times (b + c)$, où a, b et c sont des variables de domaine Z; c'est-à-dire que si nous remplaçons ces lettres par des constantes dénotant des éléments définis de Z, nous obtiendrons la description d'un certain nombre de Z. Nous appellerons $a \times (b + c)$ aussi une expression algébrique de domaine Z et nous élargissons cette définition aux variables x de domaine Z.

Pour satisfaire la deuxième condition, notre espace de calcul algébrique Z′ doit nous permettre d'opérer un nombre fini de fois sur des expressions algébriques à l'aide des opérations définies sur Z obtenant ainsi d'autres expressions

---

[4] Dans cette caractérisation, nous nous sommes inspirés de la définition que donne Kaput (1992) à la notion de système de représentation.

[5] Autrement dit, c'est une application de $\mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$, $(a, b, c) \mapsto a(b + c)$. La forme de l'opération est la règle de cette application.

algébriques. Par exemple, à partir des expressions $x+2$ et $2x+1$, on peut former des expressions algébriques comme $(x+2)^3$, $(x+2)(2x+1)$, $(x+2)^2 - (2x+1)^3$, etc.

Jusqu'à présent, dans l'espace de calcul algébrique Z', nous pouvons décrire et former au moyen des expressions algébriques des représentations d'opérations que l'on peut effectuer sur les éléments déterminés ou non de Z au moyen des opérations d'addition et de multiplication. La troisième condition que doit vérifier un système de représentation (déterminer des relations, spécialement celles d'équivalences, entre les signes suivant les règles des opérations et des relations définies sur E) est tout à fait essentielle, car il nous faut pouvoir comparer des expressions algébriques, par exemple savoir quand deux d'entre elles, bien que de formes différentes, désignent les mêmes éléments de Z quand on remplace les variables par des constantes.

Étant donné un système algébrique E, nous entendons par « équation algébrique de domaine E » toute forme propositionnelle constituée par deux expressions algébriques de domaine E reliées par le symbole « = ». Une équation peut alors avoir quatre significations différentes : 1) exprimer que deux expressions algébriques désignent le même élément de E, comme $2 + 3 = 5$, ou $\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$, ou une proposition $2x+1 = 2x+1$, 2) désigner une identité formelle comme $2x+1 = 2x+1$, ou une proposition universelle[6] comme $(x+1)^2 = x^2+2x+1$ justifiée par une propriété de l'opération; 3) désigner une égalité conditionnelle où intervient une inconnue que l'on doit rendre connue, comme $2x+1=3$, ou finalement 4) désigner une égalité conditionnelle faisant intervenir des variables de domaine E, comme $y = 2x+1$.

Les règles des opérations, les propriétés de la relation d'égalité ainsi que les règles d'inférence logique nous permettent de transformer des équations en d'autres et d'identifier les relations entre elles. Par exemple, les deux équations $(x-1)(x+1)-3=0$ et $x^2-4=0$ sont équivalentes, car en vertu des propriétés de l'addition et de la multiplication dans Z, on a $(x-1)(x+1)-3 = x^2-4$. Cette dernière équation est équivalente à $(x-1)(x+1)-3 = (x-2)(x+2)$, puisque $x^2-4 = (x-2)(x+2)$ et que la relation = est transitive.

Par ailleurs, dans le système algébrique Z, on peut considérer d'autres types de relations, par exemple, la relation d'ordre et la relation de divisibilité $|$. Avec ces relations, il est possible de former « d'autres formes propositionnelles algébriques » différentes des équations, comme $2ab \leq a^2+b^2$ ou

---

6 Dans le sens où si l'on remplace les variables par des constantes, on trouve toujours une proposition vraie.

$ab|(a+b)^2-(a-b)^2$, a et b étant des variables de domaine Z. Dans ce cas aussi, les règles des opérations d'addition et de multiplication et des relations $\leq$ et $|$ ainsi que les règles d'inférence logique permettent de transformer des formes propositionnelles algébriques en d'autres et d'identifier les relations entre elles. Par exemple, $2ab \leq a^2+b^2$est équivalente à $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, ou encore $(x|a\ et\ x|b)$ implique $x|(pa\ +\ qb)$, p et q étant des nombres entiers non nuls.

Finalement, dans Z', on peut « calculer algébriquement », c'est-à-dire transformer des expressions algébriques, des équations ou des formes propositionnelles algébriques en d'autres en utilisant les propriétés des opérations et des relations définies sur Z ainsi que les règles de la relation d'égalité et d'inférence logique. Calculer algébriquement revient à établir des liens logiques (d'équivalence, de nécessité ou de causalité) entre deux expressions algébriques ou équations ou formes propositionnelles algébriques.

Dans cette conceptualisation, la distinction entre le calcul arithmétique et le calcul algébrique est claire. Le premier avance par exécution des opérations et calcul des valeurs nombrantes pour arriver à un résultat sous forme d'un nombre simple. Le second avance par des transformations en laissant les opérations en suspens et en utilisant les propriétés des opérations et des relations. Il est orienté vers l'obtention d'une nouvelle forme du calcul initial qui permet de rendre visible la connaissance visée ou trouver facilement la valeur nombrante du calcul.

Dans les sections suivantes, nous illustrons par des exemples des tâches relevant des genres de tâches de la PMR (figure 2).

Genres de tâches de la PMR : Calcul

PML C1 : Calcul sur des expressions numériques

C1.1	Transformer une expression numérique pour arriver à un nombre unique en utilisant un calcul réfléchi.
C1.2	Sans calculer sa valeur, transformer une expression numérique pour obtenir une expression numérique équivalente, dans une optique donnée
C1.3	Établir l'équivalence d'expressions numériques données, sans calculer leurs valeurs.
C1.4	Transformer une égalité en une autre équivalente, sans calculer les valeurs des expressions en jeu, dans une optique donnée

PML C2 : Calcul sur des expressions algébriques

C2.1	Résoudre une équation algébrique représentée dans un registre donné.
C2.2	Transformer une expression algébrique en une autre équivalente dans un même registre ou dans un registre différent, dans une optique donnée.
C2.3	Établir l'équivalence d'expressions algébriques dans un même registre ou dans un registre différent.
C2.4	Transformer une équation en une autre équivalente dans un même registre ou dans un registre différent, dans une optique donnée.
C2.5	Additionner-soustraire-multiplier-diviser des expressions polynômiales
C2.6	Calculer la valeur numérique que prend une expression algébrique en un ou des nombres déterminés.

Figure 2 : Genres de tâches de la PMR – Calcul

3.2.1 Exemples de tâches relevant des genres de tâches de la PML C1 : Calcul sur des expressions numériques (voir figure 2)

C1.1 Transformer une expression numérique pour arriver à un nombre unique en utilisant un calcul réfléchi. Une tâche relevant de ce genre de tâches consiste à trouver la valeur d'une expression numérique en utilisant une technique de calcul réfléchi.

Exemple : Nous renvoyons le lecteur à l'exemple présenté dans la section 2.2 :

$$(100 \times 98 + 1) \div 99 = \big((99+1)(99-1)+1\big) \div 99 = (99^2 - 1 + 1) \div 99 = 99$$

C1.2 Sans calculer sa valeur, transformer une expression numérique pour obtenir une expression numérique équivalente, dans une optique donnée.

Exemple :

> Sans calculer sa valeur, montrer que 1 + 3 + 5 + 7 + 9 est un carré.
>
> Réponse : 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = (5 - 4) + (5 - 2) + 5 + (5 + 2) + (5 + 4) = 5 x 5.

La technique repose sur la mise en évidence d'un facteur commun (5) motivée par l'observation de la régularité suivante : l'écart entre deux nombres impairs consécutifs est constant (vaut 2) et de l'observation du fait suivant : les 5 nombres sont symétriquement placés par rapport à 5. Les éléments technologiques justifiant cette technique sont basés sur des propriétés des progressions arithmétiques ainsi que sur des éléments technologiques du calcul en ligne : une expression numérique comme une entité en soi avec une structure propre, les opérations sont laissées momentanément en suspens et l'égalité prend le sens d'une relation d'équivalence, propriétés des opérations émanant de la structure algébrique du système des nombres entiers naturels.

C1.3 Établir l'équivalence d'expressions numériques données, sans calculer leurs valeurs. Une tâche relevant de ce genre peut consister :

- à reconnaître parmi des expressions numériques données, celles qui sont équivalentes, ou
- à reconnaître parmi des expressions numériques données, celles qui sont équivalentes à une expression numérique donnée, ou
- à justifier l'équivalence d'expressions numériques données

Exemple :

> Sans calcul, trouver parmi ces expressions celles qui sont équivalentes :
>
> $99 \text{ x } 101$; $99 \text{ x } 100 + 100$; $100 \text{ x } 101 - 99$; $99 \text{ x } 100 - 99$; $100 \text{ x } 100 - 99 - 101$; $100 \text{ x } 100 + 99 - 101$; $100 \text{ x } 100 + 99 - 101 - 1$.

C1.4 Transformer une égalité en une autre équivalente, sans calculer les valeurs des expressions en jeu, dans une optique donnée. Une tâche de ce genre peut consister à opérer sur une égalité numérique, sans calculer sa valeur, et obtenir une autre égalité numérique pour en tirer une conclusion dans une optique donnée.

Exemple :

> Sachant que $1 + 2 + 2^2 + 2^3 = 2^4 - 1$, montrer sans calculer sa valeur que $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 2^5 - 1$
>
> Réponse : $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 2^4 - 1 + 2^4 = 2 \times 2^4 - 1 = 2^5 - 1$.

Cette technique repose simplement sur une mise en facteur et sur l'utilisation de la notation : $a \times a^n = a^{n+1}$.

3.2.3 Exemples de tâches relevant des genres de tâches de la PML C2 : Calcul sur des expressions algébriques

C2.1 Résoudre une équation algébrique, impliquant des inconnues, représentée dans un registre donné. Une tâche relevant de ce genre de tâches consiste en la résolution d'une équation algébrique à une ou plusieurs inconnues dans un registre donné.

Exemple :

> Dans chaque enveloppe il y a un même nombre de jetons (figure 3). Il y a autant de jetons à droite qu'à gauche. Combien de jetons se trouvent dans une enveloppe?

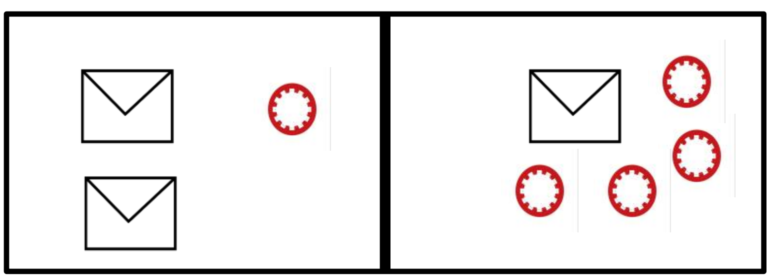


Figure 3 : Dessin accompagnant l'exemple C2.1

Une technique possible consiste à retirer un jeton des deux côtés ainsi qu'une enveloppe des deux côtés, pour obtenir du côté gauche une enveloppe et du côté droit 3 jetons. Chaque enveloppe contient ainsi 3 jetons. Cette technique est justifiée par la transformation algébrique d'al-muqabala (Squalli, 2000).

C2.2 Transformer une expression algébrique en une autre équivalente dans un même registre ou dans un registre différent, dans une optique donnée

Exemple :

Montrer que tout multiple de 4 est une différence de deux carrés.

$$4n = 2n + 2n$$
$$4n = (n+1)^2 - n^2 - 1 - (n-1)^2 + n^2 + 1$$
$$4n = (n+1)^2 - (n-1)^2$$

La technique repose sur la connaissance des identités remarquables et des techniques du calcul en ligne.

C2.3 Établir l'équivalence d'expressions algébriques dans un même registre ou dans un registre différent. On peut proposer des tâches analogues à celles illustrant le genre de tâche C1.3 en remplaçant des expressions numériques par des expressions algébriques.

C2.4 Transformer une équation en une autre équivalente dans un même registre ou dans un registre différent, dans une optique donnée. Une tâche relevant de ce genre de tâches peut consister à transformer une équation initiale en vue d'établir une ou des équations équivalentes dans un même registre ou dans un registre quelconque, dans le but de dégager une conclusion, dans une optique donnée (la valeur d'une inconnue, une mise en facteurs, etc.).

Exemple :

$x > 2$. Comparer $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ et $x^5 - 1$

Soit S = $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$, alors $xS - S = x^5 - 1$. D'où $S = \frac{x^5-1}{x-1}$. Etc.

C2.5 Additionner-soustraire-multiplier-diviser des expressions polynomiales. Tâches classiques de calcul algébrique, incluant des tâches de factorisation.

3.3 PMR : Généralisation

Commençons par présenter quelques éléments technologico-théoriques de la praxéologie régionale Généralisation.

La généralisation est, comme l'abstraction, un processus essentiel dans l'activité mathématique (Mason, 1996) et en particulier en algèbre (Kaput, 1998; Squalli, 2000; 2015, 2017). Mason (1996) y voit même le cœur des mathématiques : « la généralisation est le moteur de la vie, le cœur des mathématiques » (p. 74, traduction libre[7]). Selon cet auteur « généraliser c'est tirer des conclusions valables

---

[7] « generalization is the life blood, the heart of mathematics » (Mason, 1996, p. 74).

pour tous les cas à partir de quelques exemples » (Mason, 1994, p. 7). La généralisation est à la fois un processus et un produit. Pour une question de clarté, nous parlerons de généralisation pour désigner le processus, et de généralité pour désigner le produit (Squalli, 2015). Dans la section 2.2, nous avons expliqué ce qu'est une généralisation algébrique[8]. Ajoutons que la formulation de la généralité nécessite le recours à un nombre généralisé, c'est-à-dire un symbole représentant toutes les valeurs d'un certain domaine de nombres, soit un ensemble de nombres, généralement en nombre infini, ayant certaines qualités, comme l'ensemble des nombres pairs, impairs, entiers naturels, nombres positifs, etc.

Comme l'explique Mason (1996), généraliser implique de repérer la régularité de la situation, la formuler et la justifier. L'identification de la régularité doit reposer sur l'analyse du ou des cas particuliers présentés ainsi que sur le contexte de la situation. La donnée de quelques termes dans le registre purement numérique ne peut permettre d'induire une régularité. En effet, il existe une infinité de suites numériques ayant les mêmes premiers termes.

À titre d'exemple, nous présentons une tâche scolaire prototypique :

> Voici les 5 premiers termes d'une suite numérique. Trouver le terme suivant, ensuite le terme de rang n?
>
> 5, 9, 13, 17, 21, …

On s'attend à ce que l'élève trouve comme réponse la suite dont le terme de rang n est : $4n + 1$. Or les deux suites suivantes sont aussi de bonnes réponses :

$$u_n = 4n + 1 \; pour \; n = 1, 2, 3 ,4 \; et \; 5 \; et \; u_n = 0 \; pour \; n = 6, 7, 8, \ldots$$

$$v_n = 4n + 1 + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5), n = 1, 2, 3 \ldots$$

Plusieurs techniques de généralisation sont décrites dans Squalli (2017). Pour les illustrer, considérons la tâche suivante :

> Quels sont les nombres possédant un nombre impair de diviseurs?

Généralisation par répétition. La répétition peut souvent conduire à pressentir une régularité. En répétant un grand nombre d'exemples spécifiques, on peut voir surgir un *pattern*. L'examen d'une liste de nombres, disons de 1 à 25, permet d'arriver à l'observation suivante : les nombres de cette liste ayant un nombre impair de diviseurs sont 1, 4, 9, 16 et 25. Ce sont tous des nombres carrés. Un raisonnement inductif nous conduit à conjecturer que les nombres ayant un nombre impair de diviseurs sont les carrés parfaits. Le nombre d'exemples générés

---

[8] Une analyse détaillée du processus de généralisation est présentée dans Squalli (2015). Une analyse phénoménologique de ce processus est présentée dans Squalli (2017).

avant de voir une régularité dépend de l'expérience des élèves dans ce type d'activités. Certains auront besoin d'un grand nombre d'exemples avant de pressentir une régularité. Puisque la généralité est inférée à partir d'un nombre restreint d'exemples, cette généralisation est arithmétique, elle ne permet pas encore de comprendre pourquoi les nombres carrés, et uniquement cette catégorie de nombres, possèdent un nombre impair de diviseurs.

Une version sophistiquée de cette technique est la technique de généralisation par répétition guidée. Elle se distingue de la précédente par le fait que la personne qui réalise l'activité tente, à partir de l'examen des exemples générés, de trouver un cheminement qui le conduirait à voir la régularité. Elle apprend de ses exemples par l'étude de leur structure et s'approche de plus en plus de la découverte de la généralité. Par exemple, cette personne peut s'apercevoir que les nombres premiers ne figurent pas parmi les nombres recherchés, car ils possèdent un nombre pair (2) de diviseurs. En revanche, les nombres de la forme p^2 avec p premier font partie des nombres recherchés, car ils possèdent 3 diviseurs (1, p et p^2).

Généralisation à l'aide d'un exemple générique. Cette technique de généralisation algébrique ressemble à la précédente, mais au lieu de procéder à l'examen de plusieurs exemples, elle procède à partir d'un seul exemple. Cet exemple ne doit pas être trop particulier comme le nombre 1; il peut être spécifique comme 9 ou 36 dans le cas où on connaisse un tel nombre; il peut aussi être un nombre anonyme.

Supposons que tel est le cas, et considérons un nombre n possédant un nombre impair de diviseurs, par exemple 5 diviseurs. Le nombre n possède donc les deux diviseurs triviaux *1* et n et trois autres diviseurs différents que nous noterons *a, b* et *c* selon un ordre croissant. On a donc $1 < a < b < c < n$ et $1 \times n = n$; $a \times c = n$ et donc forcément $b \times b = n$. Il s'ensuit que b = $\sqrt{n}$ et donc que $\sqrt{n}$ est un entier. Le nombre n est donc un carré parfait.

Ce raisonnement ne dépend pas du nombre 5; il est valable pour n'importe quel nombre impair de diviseurs.

Au lieu de raisonner à partir du nombre n ayant 5 diviseurs, nous aurions pu bâtir notre raisonnement à partir d'un nombre spécifique ayant un nombre impair de diviseurs comme 16. Le raisonnement aurait été similaire. Notre raisonnement nous a permis de transformer l'exemple particulier d'un nombre ayant 5 diviseurs en un exemple générique, c'est-à-dire pouvant engendrer tous les cas possibles. À cet effet, soulignons un fait important pour l'enseignement, le caractère générique d'un exemple est une propriété émergente chez le sujet, elle n'est pas donnée dans l'exemple particulier.

3.3.1 Genres de tâche G1 : Généralisation de régularités

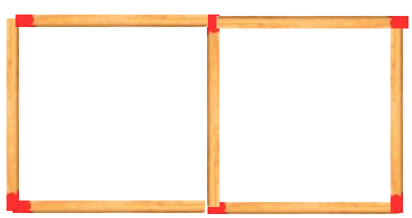
G1.1 Repérer une régularité dans une suite. La tâche consiste à décrire la régularité de la suite à partir des informations de l'énoncé, et ce, dans un registre dont le choix est laissé à l'élève.

> Observe ces calculs :
>
> $1 = 1^2$
>
> $1 + 3 = 4 = 2^2$
>
> $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$
>
> $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$
>
> Sans calcul, trouve le résultat de ce calcul : $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$

G1.2 Prolonger une suite régulière. La tâche consiste à trouver un terme d'un rang donné d'une suite à partir de quelques-uns de ses termes précisés dans l'énoncé.

Le degré d'éloignement du rang du terme recherché de ceux donnés dans l'énoncé est une variable didactique importante. Si le rang est proche, une technique non algébrique est viable (par exemple, dans les cas de *patterns* figuratifs, dénombrement après reproduction de tous les termes). Ce n'est pas le cas si le rang est suffisamment loin. L'extension des premiers termes observables au terme lointain, nécessite la formulation d'une régularité et son extension au cas lointain en se basant sur des arguments intellectuels (Squalli, 2015).

Exemple : chaîne de carrés



> Voici une chaîne formée de 2 carrés d'allumettes. On compte 7 allumettes.
>
> Combien d'allumettes a-t-on dans une chaîne formée de 10 carrés?
>
> Combien d'allumettes a-t-on dans une chaîne formée de 1001 carrés?

G1. 3. Représenter une suite régulière dans un registre donné. Ce genre de tâche se distingue de G1. 1, du fait que le registre de représentation est indiqué dans la tâche.

Exemple : Chaîne de carrés

> Explique dans tes mots comment tu peux trouver le nombre d'allumettes pour n'importe quelle chaîne de carrés.

G1.4 Créer une suite régulière. La tâche consiste à créer une suite régulière, répondant à des caractéristiques précisées dans la tâche. La suite peut être définie par extension en précisant ses premiers termes consécutifs; ou par compréhension, en expliquant comment est formé un terme quelconque de la suite (de manière récursive : comment former un terme à partir du terme précédent, ou non, par exemple, la suite des nombres pairs).

Exemple :

> Crée une suite régulière dont les deux premiers termes sont 1 et 3, et le 25e terme est 49.

G1.5 Justifier/prouver une régularité. Noter que la justification et/ou la preuve ne renvoient pas nécessairement à donner une démonstration mathématique. Elle pourrait consister à donner des arguments (dans un registre donné) qui expliquent la validité de la régularité.

Exemple : Chaînes de carrés

> Jean dit : Le nombre d'allumettes dans une chaîne de carrés d'allumettes est trois fois le nombre de carrés plus une allumette.
>
> Sans faire de calcul, explique pourquoi Jean a raison.

G1.6 Comparer des suites régulières dans un sens donné. Le sens dans lequel doit se faire la comparaison est précisé dans la tâche. Il peut s'agir, par exemple, de comparer les régularités de deux suites; de comparer les termes des deux suites à un rang donné; etc.

Exemple :

> Si le nombre d'allumettes dans une chaîne de carrés d'allumettes est trois fois le nombre de carrés plus une allumette quel serait le nombre d'allumettes dans une chaîne de triangles d'allumettes?

3.3.2 Genres de tâches G2 : Généralisation de règles, de formules, de lois, d'algorithmes

L'exemple d'une règle est le suivant : la somme de deux nombres impairs est un nombre pair.

L'exemple d'une formule et la formule d'aire de rectangles.

L'exemple d'une loi est une propriété sur les opérations ou des catégories de nombres (commutativité de l'addition; critère de divisibilité par 3, etc.).

L'exemple d'un algorithme est l'algorithme conventionnel d'une opération arithmétique, ou la méthode de résolution d'une équation du second degré.

G2.1 Repérer une règle, une loi, un algorithme. Il s'agit d'identifier une règle, une loi, un algorithme, et de le décrire dans un registre quelconque. Le repérage de la règle, de la loi ou de l'algorithme est au centre de la tâche.

Exemple :

> Un triangle rectangle est un demi-rectangle. Comment peut-on calculer la mesure de son aire?

G2.2 Étendre le domaine de validité d'une règle, d'une loi, d'un algorithme. Exemple :

> Un triangle rectangle est un demi-rectangle. La mesure de son aire est donc la moitié du produit de sa hauteur par sa base. Qu'en est-il d'un triangle non rectangle?

Les exemples de tâches relevant des genres de tâches G2.3, G2.4, G2.5 et G2.6 sont les mêmes que celles des tâches analogues pour les suites régulières.

4.4 PMR : Modélisation

Comme dans le cas de la présentation des praxéologies régionales Calculer et Généraliser nous commençons par présenter quelques éléments technologico-théoriques de la praxéologie régionale Modéliser.

À l'instar de Squalli (2000) nous dirons qu'une situation mathématique ou extra-mathématique est algébrisable si elle peut être modélisée algébriquement, c'est-à-dire si le modèle est algébrique (expression faisant intervenir des opérations, des nombres déterminés et non déterminés). Nous dirons que deux situations algébrisables sont isomorphes si elles peuvent être représentées par un même modèle algébrique.

Nous présentons ci-après une description du processus de modélisation algébrique inspiré du modèle de la modélisation mathématique proposé par Pollak (1997) :

1. Le processus commence par quelque chose en dehors des mathématiques que vous aimeriez connaître ou comprendre.
   - Le résultat est une question du monde réel, suffisamment définie pour que vous ayez progressé.
2. Vous sélectionnez ensuite des objets importants dans cette situation algébrisable en dehors des mathématiques et des relations entre eux.
   - Le résultat est l'identification de certains concepts clés dans les situations que vous souhaitez étudier.

3. Vous décidez quoi garder et quoi ignorer dans votre connaissance des objets et de leurs interrelations.
   - Le résultat est une version idéalisée de la question
4. Vous traduisez la version idéalisée de la question en termes algébriques.
   - Le résultat est une version algébrique de la question idéalisée.
5. Vous faites de l'algèbre.
   - Le résultat est solutions, théorèmes, cas spéciaux, algorithmes, estimations, problèmes ouverts.
6. Vous traduisez maintenant dans le cadre du problème initial.
   - Vous avez maintenant une théorie de la version idéalisée de la question que vous trouvez dans (3) ci-dessus.
7. Vous confrontez la réalité sous la forme de la situation d'origine représentée par (1). Croyez-vous ce qui se dit en (7)? En d'autres termes, vos résultats, une fois rendus à la situation d'origine, correspondent-ils au monde réel?
   - Si oui, vous avez réussi.
   - Si non, retournez au début. Avez-vous choisi les bons objets et les bonnes relations entre eux? Est-ce que vos choix de ce qu'il faut garder et de ce qu'il faut ignorer doivent être revisités? La façon dont votre théorie du problème idéalisé échoue à vous satisfaire devrait fournir quelques indices sur les points difficiles.

Cette description montre les trois moments du travail de modélisation algébrique. Le premier est couvert par les phases (1), (2), (3) et (4) au terme desquels on arrive à une situation mathématique obtenue à partir de la traduction en termes mathématiques de la situation idéalisée. Les étapes (5) et (6) constituent le deuxième moment où le travail est purement mathématique. Le résultat de ce travail est investi dans la construction de nouvelles connaissances de la situation idéalisée (étape 7) et, par la suite, de la situation du monde réel initiale (étape 8). Ces deux dernières étapes forment le troisième moment du processus de la modélisation.

La figure 4 illustre, de manière simplifiée, le processus de modélisation mathématique

Lorsque le modèle mathématique M est un élément d'un espace de calcul algébrique E′ associé à un certain système algébrique E, nous dirons que M est un

« modèle algébrique[9] ». M peut ainsi être une expression algébrique de domaine E, par exemple une équation ou un système d'équations ou une forme propositionnelle ou un système de formes propositionnelles. En outre, nous parlerons de « modélisation algébrique » quand le modèle mathématique est un modèle algébrique.

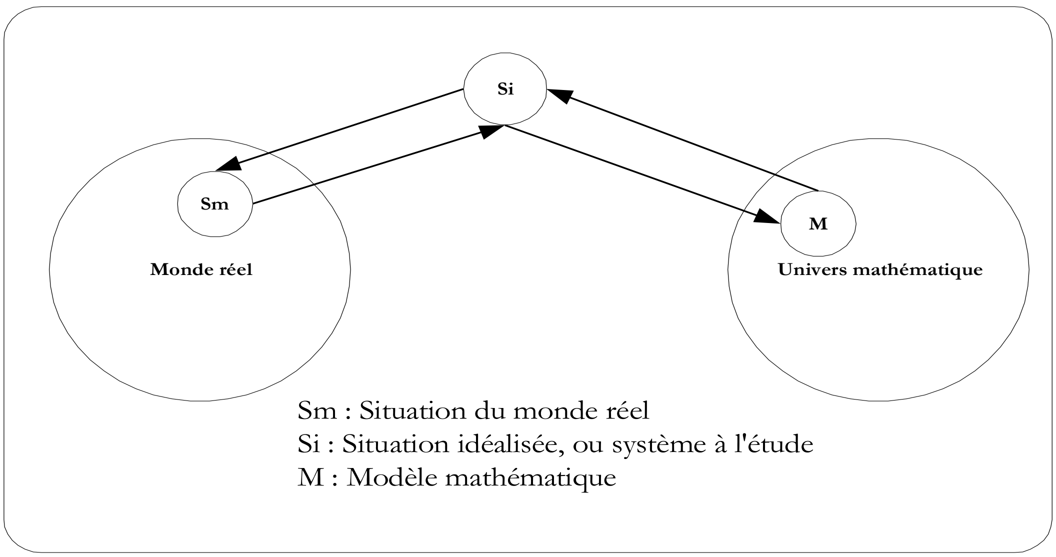


Figure 4 : Modélisation mathématique

À l'aide de ce schéma général, expliquons les grandes lignes de la modélisation algébrique. Notons d'abord que la construction du modèle algébrique, à partir de la situation idéalisée, nécessite la mise en évidence d'opérations (au moins une), de relations, des variables pertinentes ainsi que de relations existant entre elles. C'est la manière dont les variables pertinentes sont reliées entre elles, soit la structure de la situation idéalisée, qui constitue l'objet de l'étude. En choisissant les variables et les opérations pertinentes, et peut-être des relations, on est amené implicitement à choisir un système algébrique E qui est le domaine des variables et qui est muni de ces opérations et relations. Ainsi, on dispose d'un espace de calcul algébrique[10] associé à E (Squalli, 2000), dans lequel le modèle algébrique de la situation idéalisée est exprimé, et le travail algébrique de transformation de la forme du modèle est conduit, jusqu'à arriver à une forme à partir de laquelle on peut tirer les connaissances espérées de la situation idéalisée et, par la suite, de la situation initiale du monde réel. Notons que le premier et le second moment du processus de modélisation mathématique nécessitent des connaissances propres au système étudié.

---

9 Nous ne considérons pas le cas où le modèle M est lui-même un système algébrique.

10 La notion d'espace de calcul algébrique est définie dans la section 3.2

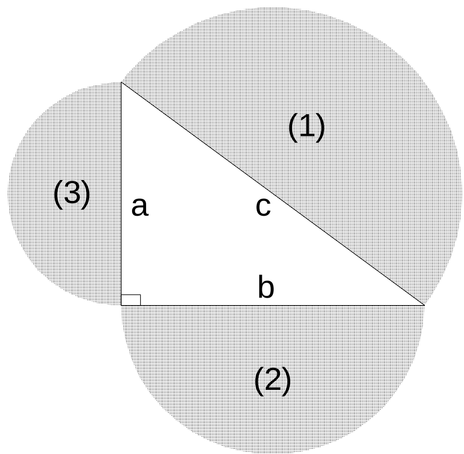
Prenons comme exemple le cas d'une situation en sciences physiques, comme le mouvement rectiligne uniforme d'un mobile. En se référant à la description du processus de modélisation de Pollak, le parcours des trois premières étapes nécessite des connaissances de la physique : à la suite de diverses observations d'un mobile en mouvement rectiligne uniforme, on arrive à se convaincre que si les frottements sont négligeables, les seules grandeurs caractéristiques de la situation sont la vitesse, le temps et la distance parcourue. Le domaine des variables doit pouvoir représenter des grandeurs continues sur lesquelles on puisse opérer à l'aide des opérations classiques d'addition et de multiplication. Dans un cas pareil, on opte généralement pour le système des nombres réels. Le modèle algébrique du système que l'on entend étudier appartient à l'espace de calcul algébrique associé au système des nombres réels. En se basant sur des expérimentations, on arrive à la conclusion que ces grandeurs caractéristiques sont liées par une relation linéaire de la forme : $x = v\ t$ où la variable v désigne la vitesse du mobile, x désigne la distance parcourue et t le temps écoulé. Cette équation, qui se présente comme une relation fonctionnelle, est le modèle algébrique de la situation et elle se trouve construite dans la quatrième étape du processus de la modélisation. Il apparaît ici que dans la construction du modèle, on a besoin de connaître la signification des variables, des opérations ainsi que des relations entre elles. Un travail algébrique simple montre que la relation fonctionnelle précédente est équivalente aux deux relations fonctionnelles : $2x = 2v\,t$ et $x = 2v\,t/2$, lesquelles sont deux formes différentes du modèle. De la première, on peut interpréter par exemple, que pour que le mobile puisse parcourir le double de la distance durant une même période de temps, il faut doubler la vitesse; la seconde montre par exemple qu'en doublant la vitesse on peut parcourir la même distance durant la moitié de la période de temps.

Le terme « modélisation mathématique » est habituellement réservé au cas où la situation à modéliser appartient à un univers non mathématique. Si, comme le fait Chevallard (1989), on accepte que ce terme englobe aussi les cas où le système à modéliser est mathématique, les explications précédentes de ce processus restent encore valables. Chevallard (1989) désigne par « mathématisé » le registre du système à modéliser et par « mathématique » celui où est conduite la modélisation. Toutes les étapes décrites par Pollak peuvent être reformulées en conséquence.

Considérons, par exemple, la résolution algébrique du problème suivant (figure 5)[11].

---

[11] Cet exemple est emprunté à Chevallard (1989, p. 56).



Calculer l'aire du demi-cercle (1) en fonction des aires des demi-cercles (2) et (3).

Figure 5 : Résolution algébrique d'un problème géométrique

Dans cette situation, le triangle fait partie de la classe des triangles rectangles connus par la théorie géométrique. Si on désigne par a et b les mesures des côtés et c la mesure de l'hypoténuse, le théorème de Pythagore nous permet de construire le modèle algébrique[12] : $c^2 = a^2 + b^2$. Dans un tel cas, le modèle se distingue bien du système modélisé. Un travail algébrique simple sur le modèle permet de répondre au problème. En effet, en multipliant l'égalité de Pythagore par $\frac{\pi}{8}$ on obtient : $\frac{\pi}{8}c^2 = \frac{\pi}{8}a^2 + \frac{\pi}{8}b^2$; dans le contexte du problème, cela peut s'interpréter : l'aire du demi-cercle (1) est la somme des aires des demi-cercles (2) et (3).

Dans ce travail, nous utilisons la notion de modélisation de manière large, incluant les tâches de mathématisation, par exemple la résolution de problèmes mathématiques à contextes. En outre, nous distinguons les praxéologies mathématiques locales selon la nature du modèle algébrique, soit, comme le montre la figure 6, M1 : Modélisation de situations par des expressions numériques; M2 : Modélisation de situations par des équations et M3 : Modélisation de situations par des relations fonctionnelles.

M1 implique des nombres nombrants uniquement; le modèle est une expression numérique. M2 implique la notion d'inconnue et d'équation, le modèle se présente comme une équation impliquant une ou plusieurs inconnues dont il faut déterminer les valeurs. M3 implique la notion de variable et de relation fonctionnelle, le modèle est une expression algébrique décrivant la règle d'une relation fonctionnelle entre des variables

12 Dans un espace de calcul associé au système des nombres réels.

Genres de tâches de la PMR: Modélisation

M1 : Modélisation de situations par des expressions numériques

M1.1 Résoudre une situation se modélisant par une expression numérique
M1.2 Reconnaître une expression numérique modélisant une situation donnée
M1.3. Déterminer et représenter une expression numérique modélisant une situation donnée
M1.4 Opérer sur une expression numérique modélisant une situation en vue de dégager des résultats ou des conclusions en lien avec la situation
M1.5 Créer une situation se modélisant par une expression numérique donnée

M1 : Modélisation de situations par des équations

M2.1 Résoudre une situation se modélisant par une équation faisant intervenir une ou des inconnues
M2.2 Reconnaître une équation modélisant une situation donnée
M2.3 Déterminer et représenter dans un registre donné une équation modélisant une situation donnée
M2.4 Opérer sur une équation modélisant une situation en vue de dégager des résultats ou des conclusions en lien avec la situation
M2.5 Créer une situation se modélisant par une équation donnée

M3 : Modélisation de situations par des relations fonctionnelles

M3.1 Résoudre un problème associé à une situation se modélisant par une relation fonctionnelle
M3.2 Reconnaître une relation fonctionnelle modélisant une situation donnée
M3.3 Déterminer et représenter dans un registre quelconque une relation fonctionnelle modélisant une situation donnée
M3.4 Opérer sur le modèle fonctionnel d'une situation en vue de dégager des résultats ou des conclusions en lien avec la situation
M3.5 Créer une situation se modélisant par une relation fonctionnelle donnée

Figure 6 : Genres de tâches de la PMR – Modélisation

3.4.1 Exemples de tâches relevant des genres de tâches de la PML M2 : modélisation de situations par une expression numérique

M1.1 Résoudre une situation se modélisant par une expression numérique. Ici, la résolution pourrait demander à mettre en œuvre des sous-tâches qui relèvent des genres de tâches M.1.2, M.1.3 et/ou M.1.4.

L'exemple de la résolution d'un problème à contexte en est un bon exemple :

> Michel a 11 ans. Dans cinq ans il aura le double de l'âge de son frère Jean. De combien d'années Michel est-il plus âgé que son frère?

M1.2 Reconnaître une expression numérique modélisant une situation donnée. Une tâche de ce genre pourrait consister à reconnaître, parmi plusieurs, une expression numérique modélisant une situation donnée ou à compléter les informations manquantes dans une situation pour que la situation soit modélisée par une expression numérique donnée.

Voir les exemples analogues dans le cas de la modélisation par une équation impliquant une inconnue.

M1.3 : Déterminer et représenter une expression numérique modélisant une situation donnée. La tâche doit consister à trouver une expression numérique modélisant une situation associée à la tâche.

Par exemple, formuler l'expression $2 \times 12 - 5$ pour répondre à la question du problème suivant :

> Jean a cinq ans de moins que le double de l'âge de sa sœur Sabrina.
>
> Quel âge a-t-il si Sabrina a 12 ans?

M1.4 Opérer sur une expression numérique modélisant une situation en vue de dégager des résultats ou des conclusions en lien avec la situation. La tâche, ici, consiste à transformer une expression numérique (déterminée par l'élève ou donnée dans l'énoncé de la tâche) pour en dégager des résultats et des conclusions en lien avec la situation.

Exemple :

> Jean et Sabrina ont chacun 46 timbres. Est-ce possible de faire des paquets de quatre timbres sans qu'il n'en reste? Réponds sans exécuter l'opération 2 x 46.

M1.5 Créer une situation se modélisant par une expression numérique. Ici, l'expression numérique (ou l'équation M.2.5, la relation fonctionnelle M.3.5) est supposée donnée et la tâche doit consister à s'appuyer sur cette donnée pour créer la situation.

3.4.2 Exemples de tâches relevant des genres de tâches de la PML M2 : Modélisation de situations par des équations

M.2.1 : Résoudre une situation se modélisant par une équation faisant intervenir une ou des inconnues. Idem que pour M1.1 et M.3.1

M.2.2 Reconnaître l'équation modélisant une situation donnée. Une tâche de ce genre peut consister à reconnaître, parmi plusieurs, l'équation modélisant une situation donnée ou à compléter les informations manquantes dans une situation pour que la situation soit modélisée par une équation donnée.

Exemple :

> Il y a 576 passagers à transporter entre deux villes. On dispose de deux trains pour le faire. L'un des trains a uniquement des wagons à 12 places et l'autre uniquement des wagons à 16 places. En sachant que le train formé de wagon à 16 places possède 8 wagons de plus que l'autre, quelle ou quelles équation(s) permet(tent) de trouver le nombre de wagons disponibles?

- $12x + 16(x+ 8) = 576$
- $w1 + w2 = 576$
- $12x + 16x = 576$
- $12(x +8) + 16x = 576$

M.2.3 Déterminer et représenter une expression algébrique modélisant une situation donnée.

Exemple :

> Jean a cinq ans de moins que le double de l'âge de sa sœur Sabrina. Exprime l'âge de Jean à l'aide de l'âge de Sabrina.

M2.4 Opérer sur une équation modélisant une situation en vue de dégager des résultats ou des conclusions en lien avec la situation.

Exemple :

> Jean et Sabrina ont le même nombre pair de timbres. Est-ce possible de faire des paquets de quatre timbres sans qu'il n'en reste?

M2.5 Créer une situation se modélisant par une équation donnée. Idem que pour M.1.5

3.4.3 Exemples de tâches relevant des genres et types de tâches de la PML M3 : Modélisation de situations par des relations fonctionnelles

Dans ce genre de tâches, la situation est fonctionnelle, elle contient de manière explicite ou implicite l'idée de covariation (ou de correspondance entre des variables). Le modèle de la situation est alors une relation fonctionnelle, autrement dit une relation entre des variables. Notons qu'une donnée dans un problème, même non déterminée, ne peut être considérée comme variable que si elle varie dans un certain domaine.

M3.1 Résoudre un problème associé à une situation se modélisant par une relation fonctionnelle. Un exemple de tâche est la résolution du problème suivant :

> Pierre travaille au dépanneur du coin. Il gagne 15,25 $ de l'heure. Combien d'heures doit-il travailler pour acheter une console de jeux vidéo qui coûte 488 $?

M3.2 Reconnaître une relation fonctionnelle modélisant une situation. La tâche consiste à reconnaître une relation fonctionnelle (parmi plusieurs données, représentées dans un même registre ou dans des registres différents) modélisant une situation associée à la tâche.

Exemple :

> Pierre travaille au dépanneur du coin. Il gagne 15,25 $ de l'heure. Laquelle de ces relations exprime le montant gagné par Pierre (représenté par y) selon le nombre d'heures travaillées (représenté par x).
>
> - y = 15,25 * x
> - x = 15,25 *y
> - y = 15,25 + x

M3.3. Déterminer et représenter dans un registre donné une relation fonctionnelle modélisant une situation. La tâche consiste à trouver et à décrire, dans un registre donné (graphique, verbal, algébrique, tableau, schéma, …), une relation fonctionnelle modélisant la situation associée à la tâche.

Dans ce genre de tâches, la nature du registre de représentation de la relation fonctionnelle doit être formulée dans l'énoncé de la tâche. Ce genre de tâches inclut les tâches nécessitant un changement de registres.

M3.4 Opérer sur le modèle fonctionnel d'une situation en vue de dégager des résultats ou des conclusions en lien avec la situation. Idem que pour M.1.4. Dans ce cas, on peut également penser aux opérations d'interpolation et d'extrapolation

> Pierre travaille au dépanneur du coin. Il gagne 15,25 $ de l'heure. La relation exprime le montant gagné par Pierre (représenté par y) selon le nombre d'heures travaillées (représenté par x) est y = 15,25 * x.
>
> Quel taux horaire Pierre doit-il avoir pour un nouveau travail s'il veut gagner le même salaire tout en travaillant la moitié du temps?

M3.5 Créer une situation se modélisant par une relation fonctionnelle donnée. Idem que pour M1.5.

5. Quelques remarques conclusives

Le MPRPA que nous venons de présenter nous semble original par rapport à d'autres propositions. Comme le précisent Bronner et Larguier (2018), peu de recherches s'inscrivant dans le cadre de la TAD proposent des modèles épistémologiques de référence de la pensée algébrique.

> La plupart présentent des modèles globaux d'algèbre quasi finalisée. On peut notamment citer la recherche de Pilet (2012) qui propose un MER vu comme une OM globale du domaine algébrique, organisée en trois secteurs (niveau d'OM régionales) relatives aux thèmes suivants : les expressions algébriques, les équations et les formules. Ces OM se structurent autour d'OM plus locales où on peut retrouver les types de tâches formelles classiques : simplifier des expressions algébriques, développer des expressions algébriques, factoriser des expressions algébriques, résoudre des équations, étudier une fonction. (p. 238)

Une autre proposition est celle de Ruiz-Munzon et al. (2020) qui présente un MER de l'algèbre élémentaire comme un processus d'algébrisation en quatre étapes autour de la notion de programme de calcul. À l'étape 0, le programme de calcul est vu comme un processus, à l'étape 1 il est considéré comme une expression algébrique impliquant des variables, à l'étape 2 le programme de calcul est vu comme une expression algébrique impliquant des inconnues et enfin, à l'étape 3, avant l'avènement de l'algèbre supérieur, il est vu comme une formule.

Notre proposition se distingue de ces deux propositions pour au moins deux raisons. La première est que, à l'opposé de ces deux propositions, le cadre conceptuel de l'algèbre sur lequel est basée notre proposition s'inscrit dans les travaux de recherche anglo-saxons d'Early Algebra. La seconde est que notre modèle praxéologique de référence est développé pour étudier le développement précoce de la pensée algébrique, c'est-à-dire depuis les premières classes du primaire jusqu'à la fin du secondaire, alors que les autres propositions s'intéressent à la fin du primaire et au début du collège, moment de la préparation de l'entrée dans l'algèbre du collège. La proposition la plus proche de la nôtre est celle de Bronner et Larguier (2018). Elle propose un MER de l'entrée dans l'algèbre organisé autour d'une classification des activités de résolution de problèmes structurée en trois grandes catégories : 1) Étude des structures numériques; 2) Modélisation de situations intra ou extra-mathématiques par des équations; et 3) Modélisation de situations intra ou extra-mathématiques par des fonctions.

Les tâches de généralisation sont incluses dans cette dernière catégorie, contrairement à notre proposition où nous avons présenté la généralisation comme une organisation praxéologique régionale à part entière pour souligner le rôle important que joue la généralisation dans le développement de la pensée algébrique.

Dans le modèle praxéologique de référence que nous avons présenté, les composantes de la pensée algébrique relativement aux dimensions de conceptualisation, de raisonnement et de symbolisation ne sont pas explicites dans la formulation des genres de tâches. Elles y sont implicitement reliées par les techniques et les technologies qui y sont associées. La mise en évidence à partir des tâches des composantes du bloc technologico-théorique est donc nécessaire pour rendre compte du potentiel de la tâche à la mobilisation de la pensée algébrique.

Dans notre cadre conceptuel de l'algèbre et de la pensée algébrique, le caractère algébrique de la tâche ou de la pensée qui pourrait être mobilisée pour la résoudre, ne dépend pas de la nature des ostensifs (Chevallard, 1994) impliqués, mais dépend de la nature des non-ostensifs (signification des concepts impliqués et nature des raisonnements, en particulier). Aussi, l'analyse du potentiel d'un programme d'étude ou d'une pratique d'enseignement à développer la pensée algébrique requiert de prendre en compte l'ensemble des tâches faisant intervenir un nombre fini d'opérations, de quelque nature que ce soit.

Par ailleurs, notre modèle peut servir à analyser des programmes d'études qui visent explicitement le développement de la pensée algébrique. C'est le cas par exemple de l'étude de Jeannotte et Squalli (2022) concernant l'analyse du programme de l'Ontario qui vise de manière explicite à développer la pensée algébrique depuis la première année du primaire. Notre modèle peut aussi servir à analyser un manuel scolaire ou un programme d'étude ne visant pas explicitement le développement de la pensée algébrique. En effet, dans ce type de programme ou manuel, le développement de la pensée algébrique n'est pas absent, puisque plusieurs genres de tâches de notre modèle peuvent s'y retrouver. Ainsi, contrairement au programme de l'Ontario, le programme du Québec est construit selon une approche transitionnelle de l'arithmétique enseignée au primaire à l'algèbre introduite au premier cycle du secondaire. Cependant, les concepteurs du programme du premier cycle du secondaire tiennent à préciser :

> Au primaire, par ses diverses activités mathématiques, l'élève a été initié, à son insu, à des préalables à l'algèbre. Mentionnons notamment la recherche de termes manquants par l'utilisation des propriétés des opérations et des relations entre elles, l'appropriation du sens des relations d'égalité et d'équivalence, l'utilisation des priorités des opérations et la recherche de régularités dans différents contextes. (Gouvernement du Québec, 2006, p. 253)

Dans ce sens, notre modèle a été utilisé dans une recherche comparative de la transition arithmétique - algèbre dans les programmes du Bénin, du Maroc et de la Tunisie (Ben Nejma et al., 2022). L'analyse des praxéologies mathématiques développées dans les manuels scolaires de ces pays (6e année primaire) a permis d'identifier le potentiel des tâches proposées aux élèves à développer la pensée algébrique avant même l'introduction du symbolisme algébrique. De ce fait, cette analyse a permis de rendre compte des manières dont ces manuels préparent les élèves à l'algèbre du secondaire.

Références

Bednarz, N., Janvier, B., Mary, C. et Lepage, A. (1992). L'algèbre comme outil de résolution de problèmes : une réflexion sur les changements nécessaires dans le passage d'un mode de traitement arithmétique à un mode de traitement algébrique. *Actes du colloque portant sur l'émergence de l'algèbre,* 17-31.

Bednarz, N., Kieran, C. et Lee, L. (1996). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*. Kluwer Academic Publishers.

Ben Nejma, S., Abouhanifa, S., Oké, E., Najjar, R., Squalli, H. et Adihou, A. (2022). Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie : analyse du savoir à enseigner relatif au développement de la pensée algébrique dans les manuels de 6e année primaire. *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, *Numéro thématique 2* (Tome 1), 59-95.

Bosch, M. et Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. Dans A. Mercier et C. Margolinas (dir.), *Balises pour la didactique des mathématiques. Actes de la 12e école d'été de didactique de mathématiques* (p. 107-122). Éditions la Pensée sauvage.

Boutros, P. (1920). *L'idéal scientifique des mathématiciens dans l'antiquité et dans les temps modernes*. Alcan.

Bronner, A. et Larguier, M., (2018). Éléments d'analyse du curriculum officiel à propos de la pensée algébrique. Dans M. Abboud (dir.), *Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines. Actes du colloque EMF2018* (p. 236-245). Université de Paris.

Cai, J. et Howson, G. (2012). Toward an international mathematics curriculum. Dans M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick et F. K. S. Leung (dir.), *Third international handbook of mathematics education* (p. 949-974). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_29

Carraher, D. W. et Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. Dans F. Lester (dir.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 669-705). Information Age Publishing.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, *19*, 43-75.

Chevallard, Y. (1994). Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique. *Actes du séminaire de l'Associazione Mathesis*, 190-200.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(2), 221-266.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. Dans A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen et J. Van Dormolen (dir.), *Mathematical knowledge: its growth through teaching* (p. 63-85). Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Gouvernement du Québec. (2006). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, premier cycle*. Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport.

Hitt, F. (2004). Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques et leur rôle dans une démarche heuristique. *Revue des sciences de l'éducation*, *30*(2), 329-354. https://doi.org/10.7202/012672ar

Hitt, F. et Passaro, V. (2007). De la résolution de problèmes à la résolution de situations problèmes : le rôle des représentations spontanées. *Actes de la Commission internationale pour l'Étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques*, 117-123.

Ilyenkov, E. (1977). *Dialectical logic*. Progress Publishers.

Jeannotte, D. et Squalli, H. (2022). Le développement de la pensée algébrique dans les programmes de l'Ontario : quel potentiel et quelle trajectoire visée? *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, *Numéro thématique 2* (Tome 1), 34-58.

Kaput, J. J. (1992). Technology and mathematics education. Dans A. D. Grouws (dir.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 515-556). National Council of Teachers of Mathematics.

Kaput, J. J. (1995). A research base supporting long term algebra reform. Dans D. T. Owens, M. K. Reed, et G. M. Millsaps (dir.), *Proceedings of the 17th Annual Meeting of North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-NA). Volume 1* (p. 71-94). ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education.

Kaput, J. J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. Dans National Research Council (dir.), *The Nature and Role of Algebra in the K-14 Curriculum: Proceedings of a National Symposium.* The National Academies Press. https://doi.org/10.17226/6286.

Larguier M. (2015) Première rencontre avec l'algèbre. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes du colloque EMF2015* (p. 313-333). Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene.

Lins, R. C. (1992). *A framework for understanding what algebraic thinking is* [thèse de doctorat, University of Nottingham]. Notthingham ePrints. https://eprints.nottingham.ac.uk/13227/1/316414.pdf

Mary, C., Squalli, H. et Schmidt, S. (2014). Activité de généralisation et de justification chez des élèves en difficulté. Dans C. Mary, H. Squalli, L. DeBlois et L. Theis (dir.), *Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques : regard didactique* (p. 163-186). Presses de l'Université du Québec.

Mason, J. (1994). *L'esprit mathématique*. Module.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. Dans N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), *Approaches to algebra* (p. 65-86). Kluwer.

Piaget, J. et Garcia, R. (1983). *Psychogenèse et histoire des sciences*. Flammarion.

Pollak, H. O. (1997). Mathematical modeling and discrete mathematics. Dans J. G. Rosenstein, D. S. Franzblau et F. S. Roberts (dir.), *Discrete Mathematics in the Schools. DIMACS Series in discrete mathematics and theoretical computer science, Volume 36* (p. 99-104). National Council of Teachers of Mathematics.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, *12*(1), 1-19. https://doi.org/10.1080/14794800903569741

Radford, L. (2011). Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage : la théorie de l'objectivation. *Éléments*, *1*, 1-27.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 257-277. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Radford, L. (2015). Pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation, Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes du colloque EMF2015* (p. 334-345). Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. Dans C. Kieran (dir.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds. The global evolution of an emerging field of research and practice* (p. 3-26). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_1

Ruiz Munzón, N., Bosch, M. et Gascón, J. (2020). Un modèle épistémologique de référence pour la recherche sur l'algèbre élémentaire. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 22(1),* 123-144. https://doi.org/10.7202/1070027ar

Squalli, H. (2000). *Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base* [thèse de doctorat, Université Laval]. https://www.collectionscanada.gc.ca/obj/s4/f2/dsk1/tape3/PQDD_0017/NQ55825.pdf

Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes du colloque EMF2015* (p. 346-356). Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene.

Squalli, H. (2017). La généralisation algébrique : une analyse phénoménologique. *Revue marocaine de didactique des mathématiques, 2*, 20-27.

Squalli, H. (2020). Early algebra : genèse d'un domaine de recherche, évolution et perspectives. Dans H. Squalli, I. Oliveira, A. Bronner et M. Larguier (dir.), *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires.* Livres en ligne du CRIRES. https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches

Squalli, H., Larguier, M., Bronner, A. et Adihou, A. (2020). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 22*(1), 36-62. https://doi.org/10.7202/1070024ar

van Reeuwijk, M. (1998). Structure in school algebra. Dans G. Burrill et J. Ferrini-Mundy (dir.), *The Nature and Role of Algebra in the K-14 Curriculum. Proceedings of a National Symposium* (p. 83-85). National Academy Press.

Vlassis, J., Demonty, I. et Squalli, H. (2017). Développer la pensée algébrique à travers une activité de généralisation basée sur des motifs (patterns) figuratifs. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 20*(3), 131–155. https://doi.org/10.7202/1055731ar

Wartofsky, M. (1979). *Models, representation and the scientific understanding*. D. Reidel Publishing.