Revue québécoise de didactique des mathématiques

volume 6, numéro 1 (2025)
DOI : 10.71403/0ngn7n36

Table des matières

Université Laval, Québec

ISSN : 2563-6995

Mot éditorial

Izabella OLIVEIRA
Université Laval
izabella.oliveira@fse.ulaval.ca
Laurie BERGERON
Université du Québec à Montréal
bergeron.laurie.2@uqam.ca
Vincent MARTIN
Université de Sherbrooke
vincent.martin@USherbrooke.ca
Patricia MARCHAND
Université de Sherbrooke
patricia.marchand@usherbrooke.ca

Le comité éditorial a le plaisir de vous proposer trois articles pour ce sixième numéro. Les articles présents dans ce numéro régulier de la RQDM abordent des questions centrales pour la didactique des mathématiques.

Le premier article, proposé par Houle, Rinfret et Deveault, explore le rôle des ressources sémiotiques dans l'enseignement-apprentissage des nombres rationnels, mettant en lumière les défis liés aux conversions entre les registres et les stratégies pour soutenir les élèves en difficulté. Les résultats obtenus montrent le défi que représentent les opérations de conversion pour l'élève. Les auteures soulignent que les interventions misant sur la coordination de différentes ressources sémiotiques semblent favoriser la construction de sens par les élèves.

Dans le second article, l'évolution des pratiques déclarées d'enseignantes est abordée dans le cadre d'une recherche collaborative autour des situations-problèmes mathématiques au primaire. L'article rédigé par Anwandter Cuellar, Lessard, Bergeron et Robert met en évidence les tensions entre des prescriptions institutionnelles souvent normatives (évaluation, rendement, injonctions curriculaires) et la possibilité, pour les personnes praticiennes, de redéfinir leurs pratiques à partir de leurs savoirs d'expérience. Elles montrent également

https://doi.org/10.71403/r4hajy75

comment le processus de coformation et de corecherche contribue à renouveler les pratiques et à renforcer la réflexion collective.

Enfin, Robert, dans le troisième article, propose une caractérisation opératoire de la pensée fonctionnelle, en analysant ses dimensions – raisonner, conceptualiser, représenter – et leurs rapports dialectiques. Cette approche, fondée sur la théorie de l'objectivation, offre une compréhension fine de la pensée en activité comme une totalité dynamique.

Nous remercions chaleureusement les auteures pour la qualité de leurs travaux, ainsi que les personnes évaluatrices pour leur expertise et leur engagement. Nous espérons que ces contributions nourriront vos réflexions et inspireront de nouvelles pistes de recherche.

Ces contributions témoignent de l'importance des dialogues entre personnes chercheures et praticiennes, ainsi que de la nécessité d'articuler théorie et pratique pour répondre aux défis contemporains de l'enseignement des mathématiques.

Nous vous souhaitons une bonne lecture !

Ressources sémiotiques et enseignement-apprentissage des nombres rationnels

Virginie HOULE
Université du Québec à Montréal
houle.virginie@uqam.ca
Myriam RINFRET
Université du Québec à Montréal
rinfret.myriam@uqam.ca
Audrey DEVEAULT
Université du Québec à Montréal
deveault.audrey.2@uqam.ca

Résumé : Cet article explore le potentiel d'un appui sur les registres de représentation sémiotique et, plus largement, sur les ressources sémiotiques, pour analyser les interactions didactiques dans des situations d'enseignement-apprentissage sur les nombres rationnels. Diverses ressources sémiotiques inhérentes aux nombres rationnels sont ainsi dégagées et, à la lumière de celles-ci, quatre situations expérimentées auprès d'un élève de 6e année faible en mathématiques sont analysées. Les résultats montrent le défi que représentent les opérations de conversion pour l'élève – en particulier celles du gestuel vers la langue formelle – ainsi que le jeu sur les différentes ressources sémiotiques réalisé par l'expérimentatrice pour favoriser son apprentissage.

Mots-clés : ressources sémiotiques, nombres rationnels, difficultés en mathématiques

Semiotic resources and teaching-learning rational numbers

Abstract: This article explores the potential of using the theory of registers of semiotic representation, and more broadly semiotic resources, to analyze didactic interactions in teaching-learning situations involving rational numbers. Based on this framework, we identified a number of semiotic resources inherent to rational numbers and, in light of those, we analyzed four experimental teaching situations with a sixth-grade student experiencing difficulties in mathematics. The results highlighted the challenge that conversion operations represents for the student, particularly when converting gestures into formal language, and shed light on the experimenter's use of different semiotic resources to support the student's learning.

Keywords: semiotic resources, rational numbers, mathematical difficulties

Introduction

L'apprentissage et l'enseignement des nombres rationnels représentent un défi important au primaire. Les difficultés inhérentes à leur apprentissage peuvent conduire à l'enseignement de techniques qui favorisent des réussites (à tout le moins à court terme) sans toutefois assurer une réflexion approfondie sur les propriétés de ces nombres (Chesné et Fischer, 2015). Si certains élèves comprennent ce qui fonde les techniques qui leur sont enseignées, ceux qui n'y arrivent pas sont contraints de les mémoriser et peinent à reconnaître les situations où ils doivent les appliquer. Bien souvent, les connaissances des élèves faibles en mathématiques restent attachées au contexte dans lequel elles ont été acquises (Houle, 2016; Perrin-Glorian, 1993). Ils ont ainsi du mal à reconnaître l'utilité de leurs connaissances lorsqu'ils sont confrontés à de nouvelles situations, surtout lorsque celles-ci divergent de la situation qui a servi à leur introduction.

Dans le cadre de notre recherche[1], nous avons choisi d'explorer le potentiel d'un appui sur les ressources sémiotiques (Arzarello et al., 2009) pour analyser les interactions didactiques dans des situations d'enseignement-apprentissage sur les nombres rationnels, et ainsi mieux comprendre les difficultés qui y sont rencontrées et ce qui permet, ou non, de les surmonter. Pour atteindre cet objectif, nous avons construit un maillage de situations[2] convoquant une variété de ressources sémiotiques et l'avons expérimenté auprès de différents élèves.

Ce texte expose d'abord nos références théoriques sur l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques ainsi que les principales difficultés rencontrées dans l'enseignement et l'apprentissage des nombres rationnels au primaire. Par la suite, après avoir présenté la méthodologie de notre recherche, nous procédons à l'analyse d'une expérimentation réalisée auprès d'un élève de fin de 6e année faible en mathématiques, et ce, en prenant en compte les interactions entre différentes ressources sémiotiques telles que les gestes, le langage et les figures.

---

[1] Nous remercions le Conseil de recherches en sciences humaines du Canada (CRSH) qui a soutenu financièrement cette recherche dans le cadre de la subvention de développement de partenariat.

[2] Nous utilisons l'expression « maillage de situations », car celles-ci ne suivent pas une progression linéaire; elles s'entrecroisent dans des allers-retours.

1. Références théoriques sur l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques

Notre projet s'appuie sur un triple cadre théorique : 1) la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990, 2007), qui met en évidence que les connaissances se construisent dans l'action par la confrontation à une variété de situations; 2) la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), qui souligne la nécessité d'organiser des situations qui permettent aux élèves de participer à la construction de leurs connaissances en ne reniant toutefois pas l'importance de la transmission des savoirs; 3) les registres de représentation sémiotique (Duval, 1993, 1995, 2001, 2011) et, plus largement, les ressources sémiotiques (Arzarello et al., 2009), qui sont utiles pour porter un regard fin sur les connaissances des élèves et les interventions de la personne enseignante, selon les caractéristiques des situations.

L'apprentissage d'un savoir mathématique nécessite une expérience avec une variété de situations. La théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1990, 2007) s'intéresse à la relation entre les savoirs mathématiques et les situations qui permettent aux sujets de leur donner sens, et ce, par le biais de la notion de schèmes. Le schème, selon Vergnaud (2007), est « une forme invariante d'organisation de l'activité et de la conduite pour une classe de situations déterminée » (p. 17). Au cours du développement d'un schème, celui-ci a d'abord une portée locale, c'est-à-dire qu'il est associé à la situation dans laquelle il a émergé, et sa portée s'élargit progressivement à un nombre de plus en plus important de situations. Le schème n'a d'ailleurs pas, d'emblée, un caractère explicite, ce qui ne l'empêche toutefois pas d'être opératoire. La notion de schème rompt ainsi avec les modèles suggérant que l'information précède l'action. Comme le soulève Vergnaud (2007), « les schèmes gèrent en effet de manière entremêlée la suite des actions, des prises d'information et des contrôles nécessaires. L'efficacité se construit au fur et à mesure » (p. 18). Pour mettre en évidence le caractère dynamique du schème, qui se développe dans et par l'action, Vergnaud introduit la notion de « concept-en-acte », qui consiste en un concept tenu pour pertinent dans l'action, et celle de « théorème-en-acte », qui consiste en une proposition tenue pour vraie dans l'activité. Un concept-en-acte peut ainsi être reconnu pertinent et un théorème-en-acte être jugé valide pour une situation donnée, sans toutefois qu'ils soient mobilisés pour toute une classe de situations. Un appui sur les notions de concept-en-acte et de théorème-en-acte paraît utile pour prendre en compte les connaissances engagées par les élèves dans l'action et pour étudier les ruptures et les filiations de connaissances selon les caractéristiques des situations.

Pour mettre en place des situations permettant à la fois aux élèves de prendre des décisions qui leur appartiennent et d'acquérir les savoirs mathématiques visés, nous nous appuyons sur la théorie des situations didactiques (TSD) (Brousseau, 1998), et en particulier sur les concepts de dévolution et d'institutionnalisation. La dévolution consiste à faire accepter aux élèves la responsabilité de trouver des solutions aux problèmes par et pour eux-mêmes. Pour ce faire, le choix des situations est déterminant. Elles doivent permettre aux élèves de mettre en place des stratégies par leurs propres moyens, mais aussi les amener à rencontrer les limites de celles-ci pour qu'ils aient besoin des savoirs mathématiques visés par l'enseignement. La TSD reconnaît donc l'importance de la dévolution pour que les élèves construisent du sens. Or, elle reconnaît également le rôle fondamental de l'institutionnalisation pour que les élèves identifient dans les connaissances produites en situation ce qui renvoie à des savoirs mathématiques socialement reconnus. Le processus d'institutionnalisation vise à favoriser le « passage » d'une connaissance personnalisée et contextualisée à un savoir culturel et décontextualisé (Brousseau, 1998). Il s'agit là d'un défi important dans l'enseignement, car certains élèves retiennent tel quel ce qui a été institutionnalisé, sans l'attacher à ce qu'ils ont fait lors de la phase de dévolution (Perrin-Glorian, 1993). Par conséquent, ils ne peuvent réutiliser ce qu'ils ont appris lorsqu'ils font face à de nouvelles situations. Pour favoriser tant le « passage » d'une connaissance à un savoir que celui d'un savoir à une connaissance, un va-et-vient entre des phases de dévolution et d'institutionnalisation paraît essentiel. Les élèves doivent éventuellement pouvoir mobiliser, en situation, des connaissances qui ont déjà fait l'objet d'une institutionnalisation, tout en reconnaissant que celles-ci renvoient à des savoirs partagés par une communauté.

Les élèves, en particulier ceux faibles en mathématiques, ne réinvestissent pas d'emblée ce qu'ils ont fait dans une situation lors de la présentation d'une nouvelle situation mettant pourtant en jeu les mêmes savoirs mathématiques (Houle, 2016; Perrin-Glorian, 1993). Cette difficulté peut être étudiée sous l'angle des registres de représentation sémiotique (Duval, 1993, 1995, 2001, 2011). Les défis que pose la coordination de différents registres (que ce soit d'une situation à une autre ou au sein d'une même situation) sont un élément central des travaux de Duval. Ce cadre paraît intéressant pour analyser les connaissances engagées ou non par les élèves selon les représentations sémiotiques en jeu dans les situations. Selon Duval (2011), les représentations sémiotiques jouent un rôle fondamental dans l'apprentissage des mathématiques, car les élèves ne peuvent accéder directement aux objets mathématiques. En effet, contrairement aux objets appartenant à d'autres domaines de connaissances, les objets mathématiques ne sont pas accessibles perceptivement. C'est d'ailleurs dans cette perspective que Fischer (2009) considère, en s'appuyant sur les travaux piagétiens, que l'apprentissage des mathématiques repose sur l'abstraction réfléchissante, qui est une construction de l'esprit. Les représentations sont toutefois nécessaires pour que les élèves donnent du sens aux objets mathématiques et les utilisent. Il paraît de plus essentiel, selon Duval (1993), que les élèves soient confrontés à une variété de représentations sémiotiques d'un même objet, car elles ne mettent pas en évidence les mêmes propriétés de celui-ci. Ainsi, un objet mathématique ne peut être pleinement circonscrit par une seule de ses représentations. Lorsqu'un ou une élève associe un objet mathématique uniquement à l'une de ses représentations, ses connaissances ne peuvent être réinvesties dans d'autres contextes, d'autant plus qu'un même objet peut être associé à des représentations radicalement différentes. La présentation de situations faisant appel à une diversité de représentations est ainsi nécessaire pour éviter que les objets mathématiques soient confondus avec leurs représentations et pour qu'ils soient reconnus dans des situations variées.

Duval (2011) appelle registres « tous les types de représentations ou, plus exactement, tous les systèmes de représentations sémiotiques, qui permettent des opérations de transformation interne de représentation, c'est-à-dire sans avoir à recourir à d'autres types de représentation ou à des sources externes d'information » (p. 153). Ainsi, chaque registre ouvre sur des possibilités de traitement qui lui sont propres. La notion de registre permet de distinguer deux types de transformation de représentation sémiotique : le traitement et la conversion. Le traitement d'une représentation consiste en la transformation d'une représentation dans le même registre que celui où elle a été formée (Duval, 1993). Le traitement se déploie ainsi tout au long de la résolution d'un problème ou de plusieurs problèmes mettant en jeu des représentations d'un même registre. La conversion consiste quant à elle à passer d'un registre de représentation à un autre. Le passage de 0,3 à 0,300 ou encore celui de $\frac{1}{2}$ à $\frac{3}{6}$ nécessite une transformation interne à un registre et donc, un traitement, tandis que l'établissement de l'égalité entre 0,4 et $\frac{2}{5}$ requiert un changement de registres et donc, une conversion. Selon Duval (2001), les opérations de conversion d'un registre à l'autre représentent un défi particulier pour les élèves et sont souvent un point de « blocage ». Cela s'explique en grande partie par la différence considérable entre certaines représentations, qui entraîne que les élèves ne voient pas comment celles-ci peuvent être associées à un même objet mathématique. La difficulté de conversion d'une représentation vers une autre varie d'ailleurs selon leur proximité ou, pour reprendre les expressions de Duval (1995), selon les congruences et les non-congruences entre les représentations. Ainsi, plus des registres de représentation sont différents, plus la conversion est difficile pour les élèves.

Arzarello et al. (2009) élargissent le concept de représentations sémiotiques pour prendre en compte, en particulier, les gestes, qui ne répondent pas à toutes les caractéristiques des registres de représentation mais sont néanmoins importants dans l'apprentissage et également, dans l'enseignement des mathématiques. L'expression *semiotic bundle*, que nous traduisons par faisceau sémiotique, englobe les registres sémiotiques mais ne s'y limite pas. Un faisceau sémiotique est un système de signes, produits par des élèves ou par la personne enseignante, qui évolue dans le temps. Le mot « signe » ici est pris au sens de Peirce (1978), c'est-à-dire que tout ce qui représente quelque chose pour quelqu'un peut être considéré comme un signe. Des signes peuvent se produire simultanément (par exemple, un ou une élève peut faire des gestes et parler en même temps) et ils peuvent se transformer en d'autres signes (ce serait le cas du passage d'un geste à un mot ou encore, à un signe écrit), ce qui renvoie au concept de conversion défini par Duval. Il existe différents moyens de produire des signes, appelés *semiotic resources,* que nous traduisons par ressources sémiotiques. Une ressource sémiotique n'est donc pas un signe en soi, mais plutôt le canal par lequel sont produits des signes. Ainsi parlera-t-on notamment de ressources gestuelles ou encore, de ressources langagières.

Dans le cadre de notre projet, pour construire un maillage de situations sur les nombres rationnels et analyser les interactions didactiques, en plus de nous appuyer sur ces trois cadres, nous prenons en compte la spécificité du savoir mathématique en jeu. Nous nous intéressons ainsi, dans ce qui suit, à divers travaux de recherche qui mettent en évidence les difficultés inhérentes à l'apprentissage et à l'enseignement des nombres rationnels.

2. Enseignement et apprentissage des nombres rationnels au primaire

L'apprentissage des nombres rationnels représente un défi important au primaire, ce qui s'explique notamment par le fait qu'il oblige les élèves à rompre avec certaines connaissances acquises en travaillant avec les nombres naturels. Une difficulté relevée, dans les premiers apprentissages des nombres rationnels, consiste à concevoir que l'unité est divisible, et ce, indéfiniment (Kieren, 1993). Cette difficulté conduit à considérer la fraction comme étant formée de deux nombres naturels (le numérateur et le dénominateur), ce qui n'est pas indépendant de la façon dont celle-ci est enseignée. La fraction est généralement introduite comme étant la partie d'un tout. Ainsi, $\frac{a}{b}$ représente un tout partagé en b parties égales dont a parties sont prélevées. Or, une fois le tout partitionné, aux yeux de plusieurs jeunes élèves, celui-ci disparaît et les sous-unités (en l'occurrence les b parties) deviennent les nouvelles unités. Cela explique la difficulté des élèves à situer les fractions parmi les nombres entiers (bien des élèves placent par exemple $\frac{2}{3}$ sur une droite numérique vis-à-vis le nombre 2 ou encore, entre les nombres 2 et 3). Les tâches de partition sont néanmoins nécessaires pour amener les élèves à considérer à la fois le critère de l'égalisation des parties et celui de l'épuisement du tout (Desjardins et Hétu, 1974). C'est ainsi que, progressivement, les élèves reconnaissent que la fraction $\frac{1}{b}$ se réplique exactement b fois dans le tout auquel elle se rapporte. Cette relation, que l'on peut modéliser par l'écriture $b \times \frac{1}{b} = \frac{b}{b} = 1$, paraît fondamentale dans l'apprentissage des fractions, car les élèves établissent dès lors la relation multiplicative entre une fraction unitaire ($\frac{1}{b}$) et son tout, qui constitue l'unité de référence (Houle et Giroux, 2018).

Bien que l'interprétation de la fraction en tant que partie d'un tout soit la première à être construite par les élèves (Behr et al., 1993), d'autres interprétations s'y greffent progressivement et viennent ainsi enrichir le concept de nombre rationnel. C'est notamment le cas de la fraction en tant que mesure. Cette interprétation, dans le modèle de Kieren (1989), sous-tend l'existence d'une unité de mesure de type $\frac{1}{b}$. La fraction $\frac{a}{b}$ est alors interprétée comme l'itération de la fraction $\frac{1}{b}$, a fois, ce qui peut être modélisé par l'écriture suivante : $a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$. Il est possible de travailler cette relation à partir de l'interprétation partie/tout; on peut par exemple interpréter $\frac{3}{4}$ comme $3 \times \frac{1}{4}$ en s'appuyant sur le partage d'un tout continu. Or, la conception d'une fraction $\frac{a}{b}$ comme l'itération de $\frac{1}{b}$, a fois, permet également de dépasser l'interprétation partie/tout et de traiter des fractions impropres, c'est-à-dire supérieures à 1. Il est ainsi possible de situer une fraction telle que $\frac{7}{4}$ sur une droite numérique en réitérant 7 fois $\frac{1}{4}$.

Une autre difficulté importante dans l'apprentissage des nombres rationnels est que, contrairement aux nombres naturels, ceux-ci ont différentes écritures. Un même nombre peut non seulement être représenté par une infinité de fractions équivalentes, mais aussi par différentes formes d'écriture telles que des fractions (p. ex., $\frac{5}{4}$), des nombres fractionnaires (p. ex., $1\ \frac{1}{4}$) et des écritures décimales (p. ex., 1,25). Lorsqu'un nombre non entier est représenté par une écriture décimale, il est composé d'une partie entière (représentée par les chiffres à gauche de la virgule) et d'une partie non entière (représentée par les chiffres à droite de la virgule). Les groupements sont réguliers, c'est-à-dire qu'il faut toujours dix unités d'un ordre pour former une unité de l'ordre supérieur adjacent (ex. 10 centièmes = 1 dixième; 10 dixièmes = 1 unité; 10 unités = 1 dizaine, etc.). Certaines règles construites avec les nombres naturels rencontrent néanmoins leur limite dans l'ensemble des nombres rationnels. C'est le cas notamment dans les tâches de comparaison de nombres rationnels où il n'est plus possible de considérer que plus un nombre a de chiffres, plus il est grand (ex. 1,289 < 1,4). Pour favoriser la réussite des élèves dans les tâches de comparaison de nombres rationnels écrits sous la forme décimale, différentes techniques sont enseignées telles qu'ajouter des zéros pour que les parties non entières des nombres à comparer aient le même nombre de chiffres. Lorsque la partie entière de deux nombres est la même, les élèves comparent alors la partie non entière de chaque nombre comme s'il s'agissait de nombres naturels. Les réussites ainsi produites peuvent masquer une conceptualisation déficiente des nombres rationnels (Chesné et Fischer, 2015). Ce type de techniques conduit de plus à considérer la partie entière et la partie non entière séparément et peut ainsi générer de fausses conceptions (Chambris, 2017; Roditi, 2008).

Enfin, comme les élèves reproduisent généralement les techniques enseignées sans avoir à se questionner sur ce qui les fonde, ils ont souvent une conceptualisation déficiente des nombres rationnels et ont ainsi du mal, notamment, à établir des relations entre les écritures décimales et fractionnaires. La virgule et le trait de fraction sont d'ailleurs parfois interprétés comme un « séparateur » entre deux entiers, ce qui conduit à des erreurs telles que $\frac{1}{3}$ = 1,3 (Guille-Biel Winder, 2017). L'établissement de relations entre les écritures fractionnaire et décimale est de plus difficile pour les élèves du primaire, car ces deux formes d'écritures, tant dans la vie courante que dans les tâches scolaires, sont utilisées dans des contextes très différents. D'ailleurs, dans les cahiers d'exercices, les fractions et l'écriture décimale sont généralement abordées dans des chapitres différents, car les techniques enseignées pour comparer les nombres rationnels et opérer sur ceux-ci varient selon la forme d'écriture utilisée. Les opérations de conversion entre les écritures fractionnaire et décimale des nombres rationnels semblent ainsi présenter un défi de taille non seulement en raison des non-congruences entre ces représentations, mais également en raison de l'enseignement reçu.

3. Méthodologie

Dans le cadre de notre recherche, nous avons construit un maillage de situations sur les nombres rationnels mettant en jeu différentes ressources sémiotiques et l'avons expérimenté auprès d'élèves faibles en mathématiques. Nous appuyant sur la TSD, des phases de dévolution et d'institutionnalisation sont prévues afin de faire participer les élèves à la construction de leurs connaissances tout en les accompagnant pour qu'ils reconnaissent dans ce qu'ils ont fait ce qui relève du savoir mathématique. Les phases de dévolution paraissent intéressantes non seulement pour favoriser des apprentissages signifiants, mais aussi, sur le plan méthodologique, pour avoir accès aux traitements et conversions réalisés (ou non) par les élèves selon les caractéristiques des situations. Le maillage de situations que nous avons organisé vise plus particulièrement les contenus mathématiques suivants :

- La relation $b \times \frac{1}{b} = \frac{b}{b} = 1$;
- La relation $a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$;
- La représentation d'un nombre rationnel selon différentes écritures (fractions équivalentes, nombre fractionnaire, écriture décimale);
- La valeur d'un chiffre ou d'un groupe de chiffres dans un nombre rationnel écrit sous la forme décimale.

Le maillage de situations a été expérimenté à trois reprises. Le déroulement de chacune des expérimentations est toutefois très différent, car les expérimentatrices (c'est-à-dire chacune des auteures de ce texte) ont adapté leurs interventions en fonction des interactions au cours des séances. Ce texte s'intéresse à l'une de ces expérimentations, qui a été réalisée auprès d'un élève de fin de 6e année – que nous appellerons Étienne pour conserver son anonymat – qui peine à obtenir la note de passage (60 %). Quatre séances d'environ une heure chacune ont été réalisées auprès d'Étienne, à raison d'une séance par semaine. Les séances ont été filmées et transcrites afin de permettre leur analyse.

Pour éclairer l'analyse des données, nous distinguons huit ressources sémiotiques (voir figure 1) :

1) l'écriture fractionnaire;
2) l'écriture décimale;
3) les codes oraux;
4) les figures;
5) la droite numérique;
6) la langue naturelle;
7) la langue formelle;
8) le gestuel.

La figure ci-dessous présente chacune de ces ressources en l'illustrant par un exemple associé au nombre $\frac{7}{4}$. Bien que ces ressources sémiotiques ne soient pas exhaustives, elles permettent toutefois de couvrir celles qui sont convoquées dans le maillage de situations que nous avons aménagé.

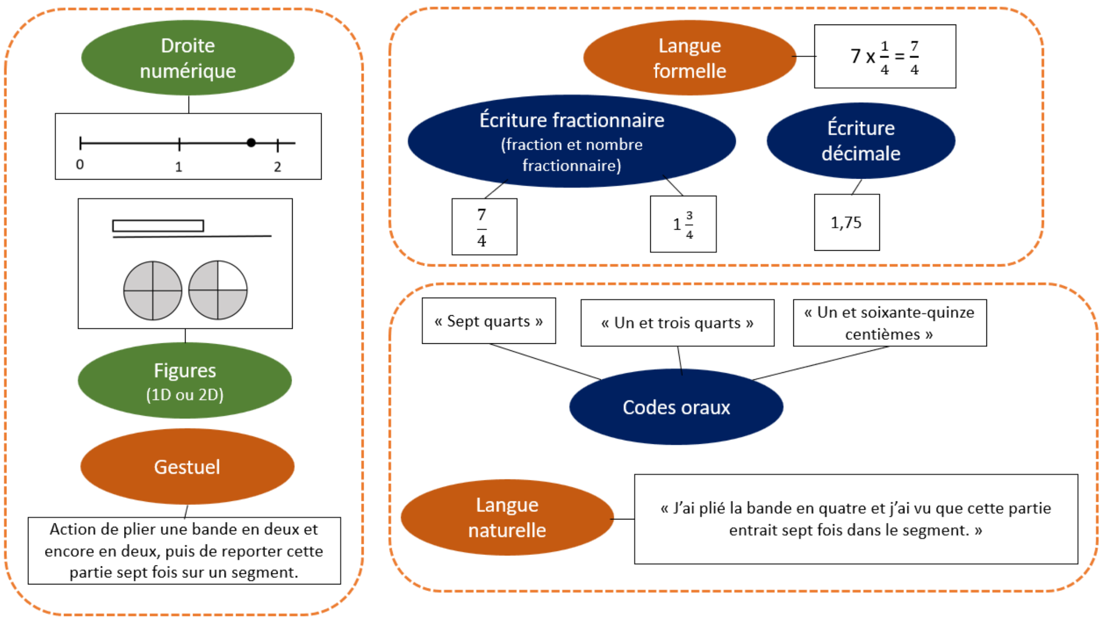


Figure 1. Ressources sémiotiques convoquées
dans le maillage de situations sur les nombres rationnels

Les ressources sémiotiques représentées en bleu dans la figure 1 concernent les codes écrits et oraux des nombres rationnels. À l'écrit, le nombre rationnel est, le plus souvent, représenté par une écriture fractionnaire ou décimale (Adjiage, 2007; Duval, 1995). L'écriture fractionnaire concerne les fractions (ex. $\frac{7}{4}$) et, aussi, les nombres fractionnaires (ex. $1\,\frac{3}{4}$), qui ne sont cependant pas acceptés dans tous les pays. Ils sont toutefois utiles pour favoriser l'établissement de relations entre la fraction et l'écriture décimale, en particulier lorsque la fraction est décimale (c'est-à-dire que le dénominateur correspond à une puissance de 10). De plus, selon Chambris (2017), les codes oraux peuvent participer à la liaison des écritures décimales et fractionnaires. En effet, lorsqu'il s'agit d'une fraction décimale, les mêmes codes oraux peuvent être utilisés pour désigner un nombre représenté au moyen d'une écriture décimale et d'une écriture fractionnaire; par exemple, $1\,\frac{75}{100}$ et 1,75 se lisent, tous deux, « un et soixante-quinze centièmes ». Bien entendu, ces codes oraux ne sont pas d'emblée utilisés par les élèves, qui lisent souvent $1\,\frac{75}{100}$, « un et soixante-quinze sur cent » et 1,75, « un virgule soixante-quinze ». Le recours aux codes oraux conformes peut néanmoins favoriser les conversions entre ces deux formes d'écriture.

Les figures et la droite numérique (en vert sur la figure 1) permettent de représenter visuellement l'ordre de grandeur des nombres rationnels. Pour ce faire, il est possible de faire appel à des représentations bidimensionnelles (2D), comme les figures, ou unidimensionnelles (1D), comme les segments et la droite numérique. La représentation de fractions à partir de figures est courante dans l'enseignement à l'école primaire où l'interprétation de la fraction en tant que partie d'un tout domine. Bien que cette représentation permette la représentation visuelle d'une fraction, le traitement des figures présente certains défis dans la mesure où il met en jeu, pour le partage égal des figures 2D, des connaissances sur l'aire (Rouche, 1998). La droite numérique est quant à elle reconnue comme étant un contexte difficile à interpréter par les élèves (Charalambous et Pitta-Pantazi, 2007; Ni, 2001). Elle paraît toutefois pertinente pour l'enseignement des nombres rationnels, notamment en raison de son intérêt pour le traitement tant des écritures fractionnaires que décimales (Adjiage, 2007). Un travail sur la mesure de segments au moyen de bandes de papier peut par ailleurs être intéressant pour introduire la droite numérique (Douady et Perrin-Glorian, 1986).

La langue naturelle, la langue formelle et le gestuel (en orange sur la figure 1) permettent pour leur part de mettre en évidence le caractère dynamique, opératoire des nombres rationnels. Duval (1995) distingue la langue naturelle, qui correspond à une suite de mots (à l'oral ou à l'écrit) et la langue formelle, qui correspond, en mathématiques, à une suite de symboles impliquant des nombres (notamment des nombres rationnels exprimés à partir d'une écriture fractionnaire ou décimale), des opérations, etc. La langue naturelle est utile pour aider les élèves à donner du sens aux écritures mathématiques, en prenant appui sur une situation de référence. Elle permet de plus d'accéder aux théorèmes-en-acte, c'est-à-dire aux propositions tenues pour vraies par l'élève au cours de la situation. Cela étant dit, les connaissances mobilisées en situation ne sont pas toujours formulées et formulables par les élèves (Brousseau, 1998). Il arrive aussi qu'elles s'expriment par leurs actions, ce qui conduit à l'importance de prendre en compte les ressources gestuelles. L'analyse des gestes posés par l'élève permet notamment d'étudier les concepts-en-acte, c'est-à-dire les connaissances reconnues comme pertinentes par l'élève en situation.

Il est à noter que la langue formelle peut mettre en jeu des écritures décimales et/ou fractionnaires, alors que la langue naturelle peut faire appel aux codes oraux des nombres rationnels. Le gestuel entretient pour sa part un lien étroit avec les figures et la droite numérique dans la mesure où les gestes peuvent être posés sur les figures ou sur la droite, par exemple pour les séparer en parts égales. Les traits pointillés sur la figure 1 représentent ces relations.

L'identification de ces huit ressources a été d'une grande utilité pour l'analyse des données. En effet, tout au long des analyses, nous avons dégagé, dans les interactions didactiques, les ressources sémiotiques en jeu tant dans les stratégies de l'élève que dans les interventions de l'expérimentatrice, et ce, en les articulant avec les notions de concept-en-acte et de théorème-en-acte (Vergnaud, 2007) ainsi qu'avec celles de dévolution et d'institutionnalisation (Brousseau, 1998).

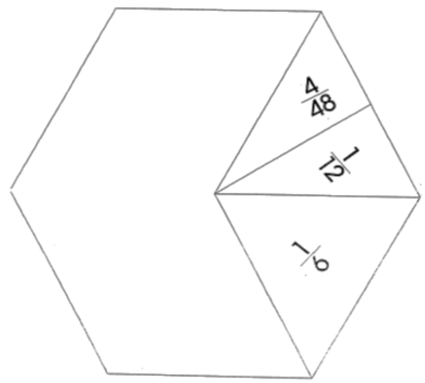
4. Présentation et analyse des résultats

Nous présentons, dans ce qui suit, quatre situations expérimentées auprès d'Étienne : la première implique des figures 2D et des fractions inférieures à 1; la deuxième met en jeu des figures 1D (des segments), des fractions inférieures et supérieures à 1 ainsi que des nombres fractionnaires; la troisième convoque une demi-droite numérique et implique à la fois des écritures fractionnaires et décimales; et la quatrième s'inscrit dans un contexte purement numérique et fait uniquement appel à l'écriture décimale. Ces situations ne possèdent pas toutes les caractéristiques des situations modélisées dans la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998); par exemple seulement deux d'entre elles offrent un milieu qui renvoie directement une rétroaction aux élèves. Elles sont néanmoins chacune organisées de façon à favoriser un va-et-vient entre des phases de dévolution, qui visent à amener l'élève à s'engager dans la recherche de solution, et des phases d'institutionnalisation, qui visent à amener l'élève à reconnaître, dans ce qu'il a fait et dit en situation, ce qui relève du savoir mathématique. Dans les sections qui suivent, chacune des situations est décrite et les interactions didactiques sont analysées en portant une attention particulière aux ressources sémiotiques convoquées. Les situations sont présentées dans l'ordre où elles ont été proposées à Étienne.

4.1 Situation mettant en jeu des figures 2D

La situation faisant appel à des figures 2D, qui s'appuie sur les travaux de Desjardins et Hétu (1974), permet un travail sur l'écriture fractionnaire, et plus particulièrement sur les fractions inférieures à 1. La tâche pour l'élève consiste à quantifier une partie d'un tout par une fraction. Les pièces d'un casse-tête sont remises à l'élève. Sur une seule de ces pièces, la fraction n'est pas inscrite. L'élève doit identifier à quelle fraction du casse-tête correspond cette pièce. Une stratégie possible consiste à mettre en relation deux pièces du casse-tête. Par exemple, si une pièce de $\frac{1}{6}$ entre exactement 4 fois dans la pièce sans écriture, alors la fraction manquante est $\frac{4}{6}$, ce qui convoque la relation $a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$. Nous présentons, dans ce qui suit, les interactions didactiques autour du premier[3] casse-tête présenté à Étienne (voir figure 2).

[3] Trois casse-têtes comportant une pièce sans écriture ont été présentés à Étienne. Faute d'espace, nous ne présentons ici que l'analyse du premier.



Figures 2. Casse-tête avec une pièce sans écriture

Après la présentation de la consigne, Étienne engage par lui-même une stratégie pour déterminer la fraction qui quantifie la grande pièce du casse-tête, ce qui montre une dévolution réussie. Pour ce faire, il cherche la somme de $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$ et $\frac{4}{48}$. Il a cependant du mal à contrôler la relation d'inclusion partie/partie/tout, et donc, à identifier une partie du tout en considérant simultanément le tout et les autres parties du tout (Kamii, 1990). En effet, il indique : « Il faudrait que j'additionne ça, ça, ça (en pointant les trois pièces avec une fraction) pour que ça me donne ça (en pointant la pièce sans écriture) ». Cette difficulté peut être occasionnée par le fait que le nombre 1, soit le tout, n'est pas explicite dans cette situation. Étienne cherche à mettre les fractions $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$ et $\frac{4}{48}$ sous le même dénominateur en appliquant la règle $\times \frac{y}{y}$ pour produire des fractions équivalentes. Ce théorème-en-acte, « il faut multiplier le numérateur et le dénominateur par le même nombre », est prégnant tout au long des séances. L'expérimentatrice tente alors de s'appuyer sur les figures pour aider l'élève à donner du sens à la règle qu'il utilise. La possibilité pour l'élève de faire cette conversion semble agir comme indice, du point de vue de l'expérimentatrice, que l'élève donne du sens aux actions qu'il pose. Après avoir mis les fractions sous un dénominateur commun et avoir trouvé la somme de celles-ci, Étienne ne peut poursuivre son raisonnement. Au lieu de partir de sa stratégie et de l'aider à reconnaître qu'il faudrait soustraire la somme obtenue de 1 pour trouver la fraction manquante, l'expérimentatrice choisit de l'orienter vers une stratégie mettant en jeu la relation $a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$, et ce, dans le but de favoriser un travail autour des contenus mathématiques visés par la situation. Elle demande à Étienne : « Est-ce que tu pourrais t'aider de cette pièce-là (en pointant la pièce sur laquelle est écrit $\frac{1}{6}$) pour me dire ça ici (en pointant la pièce sans écriture), ça correspond à quelle fraction du tout? ». L'élève constate alors : « Si je faisais ça (en pointant $\frac{1}{6}$) fois 6, ça égalerait à un… Mais ça ne marche pas parce que ce n'est pas tout ça (en pointant la partie manquante) ». Étienne établit la relation multiplicative entre une partie correspondant à une fraction unitaire et son tout, mobilisant ainsi dans l'action la relation $b \times \frac{1}{b} = 1$, mais il ne peut adapter cette connaissance pour établir la relation multiplicative entre deux parties d'un même tout. L'expérimentatrice l'oriente alors vers la stratégie attendue de façon plus explicite en s'appuyant sur les ressources figurales et gestuelles : « Par curiosité, cette pièce-là (en pointant la pièce de $\frac{1}{6}$), elle entre combien de fois dans cette pièce-là (en pointant la pièce sans écriture)? ». L'élève reporte la pièce de $\frac{1}{6}$ sur celle sans écriture, reconnaît qu'elle entre quatre fois et conclut : « Alors ce serait quatre sixièmes! ». Bien que les gestes d'Étienne aient été largement guidés par les interventions de l'expérimentatrice, il passe néanmoins des gestes posés sur la figure au numérique (codes oraux) par lui-même, faisant ainsi appel, dans l'action, à des connaissances sur la relation $a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ (concept-en-acte). L'élève ici ne mobilise pas une stratégie par ses propres moyens et dans cette mesure, on ne peut pas considérer que la dévolution est totalement réussie. Cependant, il est engagé dans la recherche d'une solution et le soutien de l'expérimentatrice ne semble pas l'empêcher de construire du sens.

L'expérimentatrice demande ensuite à Étienne s'il peut exprimer ce qu'il a fait à l'aide d'une écriture mathématique, visant ainsi à rendre explicite le modèle implicite qu'il a utilisé dans l'action. Après quelques secondes de réflexion, Étienne écrit $\frac{1}{6} = \frac{4}{6}$. L'expérimentatrice lui indique : « Tu es parti de $\frac{1}{6}$, puis là tu as fait quelque chose avec ton $\frac{1}{6}$, et tu es arrivé à $\frac{4}{6}$. Qu'est-ce que tu as fait avec ton $\frac{1}{6}$ pour arriver à $\frac{4}{6}$? ». Elle écrit, au même moment : $\frac{1}{6}$ ______ $= \frac{4}{6}$. Étienne indique alors qu'il a fait « fois quatre », mais ajoute ensuite $\times 4$ au numérateur et au dénominateur, mobilisant ainsi la règle $\times \frac{y}{y}$. Cette règle prend le dessus sur la relation multiplicative véritablement en jeu ici, soit $\frac{1}{6} \times 4 = \frac{4}{6}$. L'écriture de $\times 4$ à côté d'une fraction semble générer chez Étienne la réminiscence d'une règle souvent surinvestie en classe ($\times \frac{y}{y}$). Il en résulte une multiplication correspondante appliquée également au dénominateur, par une sorte d'automatisme, sous l'effet - selon notre hypothèse – de l'enseignement reçu. Afin de relancer l'élève, l'expérimentatrice s'appuie sur la langue naturelle pour lier les figures, le gestuel et la langue formelle : « Ce que tu as fait, c'est que tu l'as répété quatre fois ton sixième. On pourrait dire (elle prend la pièce de $\frac{1}{6}$ et la reporte sur la pièce sans écriture) un sixième plus un sixième plus un sixième plus un sixième est égal à quatre sixièmes ». La langue naturelle utilisée par l'expérimentatrice, qui lie les raisonnements multiplicatif et additif, est très près ici de la langue formelle, mais elle s'appuie sur les figures et le gestuel pour aider l'élève à interpréter ce qu'elle dit. Étienne indique alors : « Ok, alors je ferais ça (il écrit $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$) ». L'expérimentatrice approuve et, souhaitant favoriser une opération de traitement de l'écriture additive à l'écriture multiplicative, lui demande s'il y a une façon plus rapide de l'écrire. Comme Étienne ne suggère pas de recourir à la multiplication (ce qui peut s'expliquer par le fait que de son point de vue, cette opération n'a pas été jugée appropriée auparavant), l'expérimentatrice l'oriente plus explicitement vers l'écriture $\frac{1}{6} \times 4 = \frac{4}{6}$, qu'il accepte comme étant équivalente à l'addition répétée de $\frac{1}{6}$, 4 fois. La tâche se conclut ainsi par une phase d'institutionnalisation dans laquelle l'expérimentatrice met en évidence la langue formelle en s'appuyant sur les gestes, sur les figures et sur la langue naturelle qui ont émergé dans les interactions entre l'élève et elle au cours de la phase de dévolution.

4.2 Situation mettant en jeu des figures 1D

Après la situation convoquant des figures 2D, une situation faisant appel à des figures 1D a été proposée. Cette situation, construite par Douady et Perrin-Glorian (1986) et adaptée par Houle (2016) pour le contexte orthopédagogique, rend l'écriture fractionnaire utile pour exprimer la longueur de segments. Elle permet d'investir la relation $a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ ainsi que l'équivalence entre les nombres fractionnaires et les fractions impropres. L'élève reçoit un segment dessiné sur une feuille, un bon de commande et une bande de papier. L'expérimentatrice dispose d'une bande de papier de la même longueur que celle de l'élève et d'un transparent. La tâche pour l'élève consiste à élaborer un message numérique qui représente la longueur du segment. L'expérimentatrice trace ensuite, sur le transparent, un segment à partir du message produit par l'élève et la superposition du transparent sur le segment de l'élève permet de juger de l'adéquation du message.

Nous présentons, dans ce qui suit, les interactions autour des deux premiers segments remis à Étienne. La mesure du premier segment correspond à $2\frac{1}{2}$ bandes. Étienne s'engage rapidement dans la recherche d'une solution. Il utilise la bande et la reporte sur le segment sans faire de traits pour assurer une certaine précision, ce qui lui permet néanmoins de constater que la mesure du segment est plus grande que 2 bandes, mais plus petite que 3 bandes. Il conclut alors : « ça marche pas ». Il continue néanmoins à chercher et reporte à nouveau la bande sur le segment. L'expérimentatrice lui indique qu'il peut utiliser son crayon s'il le souhaite pour être plus précis. Cette intervention conduit Étienne à tracer un trait sur le segment après la première bande, puis après la deuxième bande. Cependant, son manque de précision fait en sorte que le bout de segment restant correspond à moins de $\frac{1}{2}$ bande. Il sépare alors la bande en trois en faisant un geste avec son doigt. L'expérimentatrice lui indique qu'il peut plier la bande s'il le souhaite. Il plie alors la bande, mais ses difficultés à faire trois parties égales l'amènent à effectuer un pliage en accordéon. Il obtient ainsi quatre parties inégales, en considérant toutefois qu'il y en a trois, sans doute en se centrant sur les trois plis sur la bande. Il prend le bon de commande et dit : « Hum... Je pense que ça pourrait être... Attends. Deux... (Il écrit 2). Oh non! Deux tiers... Non, non, je sais pas comment je pourrais le dire. » L'élève n'arrivant pas à produire un message, l'expérimentatrice choisit de l'aider à contrôler ses gestes. Elle le soutient ainsi, dans sa stratégie, pour qu'il mesure plus précisément le segment avec la bande, en l'invitant à tracer un trait sur le segment après chaque bande. Lorsque la bande est placée vis-à-vis le bout de segment restant, Étienne s'exclame : « Ah! Une demie! Alors, ça va être... Ah là, je sais ce que je vais faire. » Et il écrit $2\frac{1}{2}$ sur le bon de commande. La conversion des ressources figurale et gestuelle à l'écriture fractionnaire paraît donc complexe pour Étienne lorsque le bout de segment restant ne correspond pas à $\frac{1}{2}$, mais cette conversion ne lui pose pas de problème pour une mesure de $2\frac{1}{2}$ bandes. C'est ainsi davantage le gestuel qui présente un défi pour l'élève dans cette tâche que la conversion vers l'écriture fractionnaire de $2\frac{1}{2}$. La dévolution, dans ce cas-ci, paraît réussie, dans la mesure où l'élève met en place une stratégie de son propre chef, et ce, même si un certain soutien est apporté par l'expérimentatrice pour l'aider à contrôler ses gestes. La rétroaction du milieu permet finalement à Étienne de confirmer la justesse de son message : il est d'ailleurs très content lorsqu'il constate, au moment de la superposition du segment tracé sur un transparent par l'expérimentatrice sur son segment, qu'il a réussi.

L'expérimentatrice mentionne ensuite qu'elle a déjà fait cette situation avec d'autres élèves et que l'un d'eux avait indiqué que le segment mesurait « cinq demi-bandes » (code oral), puis elle écrit $\frac{5}{2}$ bandes. Elle demande à Étienne si ce message est correct et ce dernier répond par la négative. Il n'est donc pas en mesure d'établir l'équivalence entre les écritures $2\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{2}$. Pour comprendre son raisonnement, l'expérimentatrice le questionne : « Est-ce que tu penses que le segment serait plus long ou plus petit? ». Étienne considère que le segment de $\frac{5}{2}$ bande serait plus long que celui de $2\frac{1}{2}$ bandes et explique ainsi son choix : « Il y en aurait cinq plus une demie ». Il confond donc $\frac{5}{2}$ et $5\frac{1}{2}$. Les codes oraux des nombres peuvent participer à cette confusion. En effet, « cinq demis » est très similaire à « cinq et une demie ». Cette difficulté se manifestera d'ailleurs à plusieurs reprises au cours des séances. Pour favoriser l'apprentissage de l'élève, l'expérimentatrice s'appuie alors sur les figures, le gestuel et la langue naturelle : elle plie la bande en deux parties égales en expliquant qu'elle a maintenant une demi-bande et elle trace un segment en reportant à cinq reprises cette demi-bande. Elle s'appuie ensuite sur ce qu'elle a fait et dit, puis procède à une conversion vers la langue formelle. Elle écrit $\frac{1}{2}$ au-dessus de chaque partie de segment mesurant $\frac{1}{2}$ bande et dégage les écritures $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

Elle établit ensuite la relation avec le nombre fractionnaire, $2\,\frac{1}{2}$, en s'appuyant sur les figures (1D) afin de montrer que la mesure de deux demi-bandes est équivalente à celle d'une bande. Pour que l'élève donne du sens aux écritures mathématiques produites, l'expérimentatrice prend ainsi appui sur la situation de référence, et plus précisément sur les figures et sur la langue naturelle. Les conduites de l'élève, ici, ne permettent pas à l'expérimentatrice de procéder à une institutionnalisation en mettant en évidence, dans ce qu'il a fait et dit, ce qui relève du savoir mathématique. L'expérimentatrice procède plutôt à un enseignement en s'appuyant sur différentes ressources sémiotiques en jeu dans la situation afin de favoriser la construction de sens.

L'expérimentatrice présente ensuite à Étienne un deuxième segment, qui mesure cette fois $2\,\frac{1}{4}$ bandes. La proximité de cette tâche avec la précédente facilite son appropriation. L'élève réinvestit certains gestes appris précédemment pour mesurer un segment à partir d'une bande utilisée comme unité, c'est-à-dire que, par lui-même, il fait des traits avec le crayon sur le segment et plie la bande. Malgré un certain manque de précision encore présent, il réussit, avec très peu de soutien, à trouver un message adéquat, soit $2\,\frac{1}{4}$ bandes, et il établit sans difficulté la relation avec la fraction impropre $\frac{9}{4}$. Le va-et-vient entre des phases de dévolution et des phases d'institutionnalisation (ou d'enseignement), semble favorable à l'apprentissage d'Étienne, qui réalise de façon autonome lors de cette tâche des conversions entre différentes ressources sémiotiques : les figures (segment), le gestuel, la langue naturelle et l'écriture fractionnaire (nombre fractionnaire et fraction).

4.3 Situation mettant en jeu une demi-droite numérique

À la suite de la situation convoquant des figures 1D, nous avons expérimenté auprès d'Étienne une situation visant la construction d'une demi-droite numérique tirée des travaux de l'équipe de recherche en didactique des mathématiques de l'Institut national de recherche pédagogique (2005). L'élève reçoit une demi-droite numérique et une bande correspondant à $\frac{1}{b}$ unité. La tâche consiste à situer des nombres donnés sur la demi-droite ou, au contraire, à identifier à quel nombre correspond un point donné sur la demi-droite. Cette situation permet un travail sur les relations $b \times \frac{1}{b} = \frac{b}{b} = 1$ et $a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$, ainsi que sur l'équivalence de différentes représentations d'un même nombre rationnel (fractions, nombres fractionnaires et écriture décimale).

L'expérimentatrice remet d'abord à Étienne une bande correspondant à $\frac{1}{2}$ unité ainsi qu'une demi-droite et lui demande de situer le nombre 1. L'élève place la bande sur la demi-droite à partir de 0, trace un trait et écrit 1. Il interprète ainsi que la bande représente 1. Cela pourrait être un effet de la situation précédente, où la bande représentait l'unité, mais pourrait aussi s'expliquer par la difficulté à considérer un étalon différent de 1. La situation n'offrant pas de rétroaction à l'élève, l'expérimentatrice est contrainte d'intervenir. Souhaitant susciter les réflexions d'Étienne, elle lui demande d'écrire $\frac{1}{2}$ sur la bande et insiste sur le fait que cette bande ne représente pas 1 mais bien $\frac{1}{2}$. Elle lui demande ensuite à nouveau de situer le nombre 1 sur la demi-droite, mais Étienne ne comprend pas ce qu'il doit faire. La demi-droite numérique, où les nombres sont représentés par des points sur la demi-droite, se distingue des segments, où les nombres représentent la mesure d'un segment. En effet, la tâche ne consiste pas à tracer un segment mesurant une bande (ce qui renvoie au contexte cardinal), mais bien à situer le nombre 1 sur la demi-droite (ce qui s'inscrit à la fois dans un contexte cardinal et dans un contexte ordinal). Les gestes du report de la bande représentant $\frac{1}{b}$ de l'unité sur la demi-droite renvoie à un contexte cardinal (on peut d'ailleurs considérer le segment de 0 à 1 sur la demi-droite), mais à la fin de cette démarche, il convient de situer un nombre (en l'occurrence, le nombre 1) sur la demi-droite, faisant ainsi appel à l'ordre des nombres et donc au contexte ordinal. Bien que ces ressources sémiotiques aient certaines congruences, la conversion des segments (figure 1D) à la demi-droite numérique ne va pas de soi pour Étienne, d'autant plus que l'étalon ne correspond plus à 1 mais plutôt à $\frac{1}{b}$ unité. Une intervention de l'expérimentatrice est ainsi nécessaire pour qu'il situe correctement 1 sur la demi-droite, et ce, même si ses conduites lors des situations impliquant des figures (2D et 1D) suggèrent qu'il contrôle bien, dans l'action, la relation $b \times \frac{1}{b} = \frac{b}{b} = 1$ (concept-en-acte).

Par la suite, Étienne situe relativement aisément le nombre 2 sur la demi-droite, mais il rencontre des difficultés à situer $\frac{3}{2}$, qu'il interprète comme $3\frac{1}{2}$, en raison sans doute de la similitude des codes oraux de ces deux nombres. Pour le relancer, l'expérimentatrice le questionne en favorisant la coordination de différentes ressources sémiotiques : l'écriture fractionnaire ($\frac{3}{2}$), les codes oraux (trois demis), le gestuel (répétition de la bande de $\frac{1}{2}$ trois fois sur la demi-droite), la langue naturelle et la langue formelle ($\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$). La tâche suivante, situer $1\,\frac{1}{4}$ à partir d'une bande représentant $\frac{1}{2}$, nécessite de considérer que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ et que $\frac{1}{4}$ entre deux fois dans $\frac{2}{4}$, faisant ainsi appel à l'équivalence des fractions et à la relation $a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$. Pour placer $1\,\frac{1}{4}$, Étienne plie la bande représentant $\frac{1}{2}$ en 4. La difficulté à mettre en relation $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ semble le ramener à l'interprétation de la bande comme unité de référence, et ce, même si le nombre $\frac{1}{2}$ est écrit sur celle-ci. L'expérimentatrice tente alors d'amener Étienne à diviser la bande de $\frac{1}{2}$ en deux pour obtenir $\frac{1}{4}$, mais le jeu de questions/réponses entre l'élève et elle ne produit pas les effets escomptés. L'expérimentatrice se rabat alors sur une ressource classique dans l'enseignement des fractions, soit celle des figures (2D), pour montrer à Étienne que dans une demie, il y a deux quarts. L'élève a cependant du mal à faire la conversion vers la demi-droite numérique pour situer $1\,\frac{1}{4}$.

L'expérimentatrice remet ensuite à Étienne une demi-droite numérique vierge ainsi qu'une nouvelle bande, correspondant cette fois à $\frac{1}{10}$ unité. Elle lui demande d'abord de situer « un dixième » et il situe correctement ce nombre en l'écrivant sous la forme fractionnaire ($\frac{1}{10}$). Visant à favoriser la conversion d'une écriture fractionnaire à une écriture décimale, l'expérimentatrice lui demande s'il connaît une autre façon d'écrire ce nombre, et Étienne remplace le trait de fraction par une virgule, suggérant ainsi à tort 1,10. Plutôt que de corriger son erreur, l'expérimentatrice lui demande de situer 1 sur la demi-droite. Il reporte alors 10 fois la bande de $\frac{1}{10}$, convoquant ainsi, par ses gestes, la relation $10 \times \frac{1}{10} = \frac{10}{10} = 1$ (concept-en-acte). L'expérimentatrice lui fait alors remarquer que $\frac{1}{10}$ est plus petit que 1 et donc, que 1,10 ne peut pas être égal à $\frac{1}{10}$. L'élève reconnaît que l'écriture décimale doit commencer par 0, et l'expérimentatrice poursuit en lui montrant que $\frac{1}{10} = 0{,}1$. Elle met en évidence que ces deux nombres se lisent de la même façon : « un dixième ». L'institutionnalisation s'appuie ainsi sur la coordination de différentes ressources sémiotiques : l'écriture fractionnaire, l'écriture décimale et les codes oraux. L'élève place ensuite sans difficulté les nombres 2 et $\frac{13}{10}$ sur la demi-droite. L'expérimentatrice demande s'il y a une autre façon d'écrire $\frac{13}{10}$ et Étienne répond d'abord 1 $\frac{1}{3}$, mais il se corrige par lui-même et reconnaît que $\frac{13}{10} = 1\ \frac{3}{10} = 1{,}3$.

Par la suite, la tâche est inversée : il ne s'agit plus de repérer sur la demi-droite le point qui correspond à un nombre donné, mais plutôt d'identifier un nombre qui correspond à un point donné sur la demi-droite. Ainsi, l'expérimentatrice demande à Étienne d'identifier à quel nombre correspondent différents points sur la demi-droite, notamment des nombres dans les centièmes (p. ex. $\frac{45}{100}$). Cela conduira Étienne, avec le soutien de l'expérimentatrice, à séparer les dixièmes en dix parties.

4.4 Situation s'inscrivant dans un contexte uniquement numérique

Contrairement aux situations précédentes, cette situation met en jeu un contexte purement numérique et n'implique donc aucune représentation visuelle des nombres rationnels. Elle mise sur des allers-retours entre l'anticipation du résultat à des calculs et la rétroaction de la calculette[4], et permet un travail sur l'écriture décimale des nombres rationnels. Elle s'inscrit dans le prolongement d'une situation élaborée par Houle et Giroux (2017) visant l'apprentissage de la valeur d'un chiffre et d'un groupe de chiffres dans l'ensemble des nombres naturels. Dans cette situation, l'action d'appuyer sur le signe = à répétition sur une calculette agit comme compteur d'une puissance de 10. Des calculs tels que 1815 + 100 = = = = sont présentés aux élèves. Après avoir anticipé ce qu'affichera la calculette, il y a validation à l'aide de celle-ci. En l'occurrence, l'écran affichera, à la suite de chaque signe =, les nombres suivants : 1915, 2015, 2115, 2215. La rétroaction de la calculette, mais aussi le jeu sur les valeurs des variables didactiques (par exemple, le choix du nombre initial, de la puissance de 10 et du nombre de signes =), amène progressivement les élèves à s'appuyer sur la valeur d'un groupe de chiffres pour opérer sur les nombres et ainsi anticiper efficacement ce qu'affichera la calculette. Par exemple, dans le calcul précédent (1815 + 100 = = = =), en ajoutant 100 à 4 reprises, on passe de 18 centaines à 22 centaines, tout en conservant les 15 unités.

La situation se découpe en deux grandes parties : dans un premier temps, des calculs sont proposés et la tâche consiste à anticiper le résultat; dans un deuxième temps, le calcul et le résultat sont donnés et la tâche consiste à anticiper le nombre de signe = nécessaire pour obtenir le résultat.

---

[4] Nous utilisons le terme « calculette » pour désigner une calculatrice basique, servant à effectuer des opérations simples.

4.4.1 Anticipation du résultat de différents calculs

Après une phase d'exploration permettant à Étienne de découvrir l'effet d'appuyer à répétition sur le signe = de la calculette, l'expérimentatrice lui présente des calculs dans lesquels la puissance de 10 (soit le deuxième terme) correspond à 10 ou à 100. Pour trouver le résultat, Étienne compte par intervalles de 10 ou de 100 à partir du terme initial (en ordre croissant lorsque c'est une addition et en ordre décroissant lorsque c'est une soustraction). Il anticipe ainsi correctement le résultat des calculs suivants : 57 + 10 = = = =, 220 – 10 = = = = = = = et 589 + 10 = = =. Il rencontre cependant les limites de cette stratégie lorsqu'il fait face au calcul 2172 – 100 = = = =, car le terme initial (deux mille cent soixante-douze) comporte plusieurs mots à l'oral, ce qui rend difficile, en raison des limites de la mémoire de travail, le comptage par intervalles de 100 à partir de ce nombre, d'autant plus qu'il s'agit d'une soustraction et que le comptage doit donc être fait en ordre décroissant. Comme l'élève n'adapte pas sa stratégie par lui-même, l'expérimentatrice l'oriente vers la stratégie attendue en l'amenant notamment à dégager le nombre de centaines dans 2172, soit 21, puis à retrancher 4 centaines des 21 centaines, obtenant ainsi 17 centaines, et finalement à ajouter les 72 unités qui n'ont pas été affectées par la transformation, obtenant ainsi 1772. L'enseignement réalisé ici vise à favoriser l'avancement du savoir. Elle propose ensuite un autre calcul à Étienne pour voir s'il réinvestira ce qu'elle a enseigné : 4891 + 100 = = = = =. Or, malgré la proximité avec le calcul précédent, Étienne ne s'appuie pas sur le nombre de centaines dans le terme initial, soit 48, et tente à nouveau de compter par intervalles de 100 à partir du terme initial, soit 4891. Ni le jeu sur les valeurs des variables didactiques ni l'enseignement dispensé par l'expérimentatrice n'ont permis de faire évoluer ses stratégies. Un plus grand nombre d'allers-retours entre ses anticipations et la rétroaction du milieu aurait sans doute été nécessaire pour lui permettre d'adapter par lui-même sa stratégie et de construire du sens. Il nous semble, de plus, que le fait que cette situation s'inscrive dans un contexte purement numérique et n'implique donc pas de représentation visuelle pourrait agir comme obstacle à la compréhension de l'élève.

Malgré les difficultés d'Étienne à s'appuyer sur la valeur d'un groupe de chiffres pour opérer sur les nombres naturels, l'expérimentatrice choisit de présenter des calculs ayant comme deuxième terme 0,1, puis 0,01. Étonnamment, pour chacun des calculs suivants, Étienne anticipe correctement le résultat, et ce, sans soutien de l'expérimentatrice.

- 0 + 0,1 = = = = = = (Il hésite, anticipe 0,1, puis change d'avis pour 0,6 en se disant certain de son choix).
- 0 + 0,1 = = = = = = = = = = (Il répond rapidement 1).

- 12,5 + 0,1 = = = = = (Il répond rapidement 13).
- 4,3 – 0,1 = = = = (Il dit « Ça égalerait trois et neuf » et écrit 3,9).
- 6,3 + 0,01 = = = (Il écrit rapidement 6,33).
- 3,36 – 0,01 = = = = = = (Il répond rapidement « trois virgule trois » et écrit 3,3).
- 2,2 – 0,01 = = = = (Il écrit 1,8, puis s'autocorrige, il efface et écrit 2,16, en expliquant qu'il a ajouté un zéro à 2,2 (donc 2,20) pour trouver la réponse).

Dans les calculs impliquant seulement des nombres naturels, Étienne recourt au comptage par intervalles à partir du terme initial pour anticiper les résultats, ce qui l'oblige à coordonner deux ressources sémiotiques, les codes oraux et écrits des nombres. Lorsque le deuxième terme est 0,1 ou 0,01, les difficultés d'Étienne dans la lecture des nombres rationnels semblent le conduire à modifier sa stratégie. Il s'appuie alors essentiellement sur les codes écrits, ce qui l'amène à considérer les chiffres qui sont affectés dans la transformation et facilite l'anticipation du résultat. Ses conduites suggèrent qu'il reconnaît, dans ce contexte, qu'il y a 10 dixièmes dans 1 (concept-en-acte) et que le fait d'ajouter ou d'enlever 0 après le développement décimal ne modifie pas le nombre. La dévolution ici est donc réussie, et l'expérimentatrice peut ainsi partir des stratégies de l'élève pour mettre en évidence les éléments mathématiques à retenir.

4.4.2 Anticipation du nombre de signes = pour atteindre un résultat donné

L'expérimentatrice présente ensuite des calculs dans lesquels on cherche le nombre de fois où il faut appuyer sur le signe = pour obtenir un nombre donné. Elle propose d'abord des calculs impliquant uniquement des nombres naturels afin d'amener Étienne à établir la relation entre ses connaissances sur les nombres naturels et celles sur les nombres rationnels. La première tâche est la suivante : Si tu fais 0 + 10 sur la calculette et que tu appuies à répétition sur la touche =, est-ce que la calculette affichera les nombres suivants : 40, 100, 160, 188, 200, 222. Étienne reconnaît que la calculette n'affichera pas les nombres 188 et 222 « parce que ça ne finit pas par zéro » (théorème-en-acte). Elle demande ensuite à l'élève d'anticiper le nombre de fois qu'il faut appuyer sur la touche = pour obtenir les autres nombres (40, 100, 160 et 200) et Étienne trouve sans difficulté les réponses (4, 10, 16 et 20). L'expérimentatrice lui propose une deuxième tâche : Si tu fais 0 + 100 et que tu appuies à répétition sur la touche =, est-ce que tu peux obtenir les nombres suivants (600, 1100, 1110, 1900, 2111, 3000, 3130), et si oui, en appuyant combien de fois sur la touche =. Étienne reconnaît immédiatement qu'il peut seulement obtenir les nombres qui terminent par « deux zéros », adaptant ainsi le théorème-en-acte dégagé précédemment, et identifie sans difficulté le nombre de fois qu'il doit appuyer sur la touche = pour obtenir les nombres 600, 1100, 1900 et 3000.

L’expérimentatrice propose ensuite des calculs impliquant des nombres non naturels. Elle demande à Étienne si, en faisant zéro plus un dixième sur la calculette (elle écrit 0 + 0,1) et en appuyant à répétition sur la touche =, la calculette affichera les nombres suivants : 0,4; 1; 1,8; 3; 3,31; 4,2. Elle rappelle qu’un dixième peut s’écrire 0,1 ou $\frac{1}{10}$, visant ainsi à favoriser la coordination des codes oraux, de l’écriture décimale et de l’écriture fractionnaire. Étienne ne peut dégager un théorème-en-acte lui permettant rapidement de trouver les nombres qu’affichera la calculette. Il les analyse un à la fois, mais identifie néanmoins correctement non seulement les nombres qui seront affichés sur la calculette, mais également le nombre de signe = nécessaire pour les obtenir. Il vérifie ensuite ses anticipations à l’aide de la calculette. Puis, l’expérimentatrice établit la relation entre ce que fait l’élève sur la calculette et les écritures mathématiques conformes. Elle explique par exemple que, pour obtenir quatre dixièmes, il faut appuyer quatre fois sur la touche = après avoir fait 0 + 0,1, car en répétant quatre fois un dixième, on obtient quatre dixièmes, puis elle écrit : 4 × 0,1 = 0,4. L’institutionnalisation s’appuie ainsi sur la coordination du gestuel (gestes sur la calculette), de la langue naturelle (incluant les codes oraux des nombres rationnels) et de la langue formelle (incluant l’écriture décimale).

Cette phase d’institutionnalisation se poursuit par une phase de dévolution. L’expérimentatrice propose à Étienne une tâche semblable, mais cette fois, avec des centièmes : en faisant 0 + 0,01 sur la calculette et en appuyant à répétition sur la touche =, est-ce que les nombres suivants apparaîtront : 0,001; 0,1; 0,311; 0,33; 0,4; 1. Étienne commet une seule erreur, c’est-à-dire qu’il anticipe qu’il ne peut pas obtenir 0,1. Au moment de la rétroaction avec la calculette, il constate qu’il obtient 0,1 en appuyant 10 fois sur la touche =. L’expérimentatrice dégage alors l’écriture suivante, 10 × 0,01 = 0,1, en expliquant à l’oral qu’en répétant dix fois un centième, on obtient un dixième.

Un calcul dans lequel le premier terme ne correspond pas à 0 est ensuite proposé à Étienne. L’expérimentatrice lui demande si, en faisant 2,3 + 0,1 sur la calculette et en appuyant à répétition sur la touche =, la calculette affichera les nombres suivants : 2,9; 3,2; 3,33; 4. Étienne reconnaît que la calculette affichera les nombres 2,9 et 4 et qu’elle n’affichera pas le nombre 3,33, mais anticipe, à tort, qu’elle n’affichera pas 3,2. Il n’arrive pas à anticiper correctement le nombre de fois qu’il doit appuyer sur la touche = pour obtenir 2,9 (il indique 3 fois) et 4 (il indique 6 fois). Il ne peut donc pas adapter les théorèmes-en-acte dégagés précédemment pour anticiper correctement le nombre de signes = lorsque le premier terme du calcul correspond à un autre nombre que 0. Cela conduit à se questionner sur le sens que l’élève donne aux régularités numériques qu’il a dégagées précédemment.

5. Discussion

Dans le cadre de notre recherche, nous nous sommes intéressées à l'enseignement et à l'apprentissage des nombres rationnels, en prenant en compte la spécificité du savoir visé, les caractéristiques des situations proposées et les ressources sémiotiques convoquées. Nos résultats montrent notamment que si les codes oraux peuvent faciliter l'établissement de liens entre les écritures fractionnaires et décimales (par exemple, $\frac{1}{10}$ et 0,1 se lisent tous les deux « un dixième »), il arrive en revanche que les codes oraux soient à la source de certaines confusions, notamment entre les fractions impropres et les nombres fractionnaires. C'est le cas, par exemple, lorsqu'Étienne considère à tort que les écritures $\frac{5}{2}$ et $5\,\frac{1}{2}$ désignent le même nombre en raison, sans doute, de la ressemblance des codes oraux : « cinq demis » et « cinq et une demie ».

Par ailleurs, à l'instar d'Arzarello et al. (2009), nous considérons que la prise en compte du gestuel, qui est en quelque sorte mis de côté dans les travaux de Duval, est indispensable. Pour un même objet mathématique, des gestes différents peuvent être posés dans des situations faisant pourtant appel à la même représentation visuelle. Par exemple, dans les tâches scolaires classiques convoquant des figures 2D, la fraction $\frac{4}{6}$ renvoie à la séparation d'une figure en six parties d'aire égale pour ensuite prélever quatre de ces parties. Or, dans la première situation de notre maillage, qui met aussi en jeu des figures 2D, la stratégie optimale pour trouver à quelle fraction d'un casse-tête correspond une de ses pièces consiste, dans l'exemple que nous avons présenté, à utiliser une autre pièce du casse-tête, qui correspond à $\frac{1}{6}$ de celui-ci, et à la reporter quatre fois dans la pièce sans écriture pour ainsi en déduire que cette pièce correspond à $\frac{4}{6}$ du casse-tête. La fraction $\frac{4}{6}$ est alors interprétée comme l'itération de $\frac{1}{6}$, 4 fois, ce qui fait appel à la relation $a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$. Les tâches scolaires classiques qui exigent de prélever $\frac{a}{b}$ d'une figure 2D et la situation du casse-tête avec une pièce sans écriture favorisent chacune une interprétation différente de la fraction : dans le premier cas, la fraction $\frac{a}{b}$ est interprétée comme la partie d'un tout où b représente le nombre total de parties et a, le nombre de parties prélevées, alors que dans le deuxième cas, elle renvoie à l'interprétation de la fraction en tant que mesure où $\frac{a}{b}$ est interprétée comme l'itération de $\frac{1}{b}$, a fois. Il convient, dans cette perspective, non seulement de prendre en compte la représentation visuelle (dans ce cas-ci, des figures 2D), mais aussi de réfléchir aux gestes posés par les élèves pour choisir des situations qui permettent d'introduire, en passant par les ressources du gestuel et de la langue naturelle qui leur sont associées, la langue formelle visée.

La prise en compte du gestuel apparaît de plus comme fondamentale, car elle permet d'identifier des concepts-en-acte que l'élève mobilise en situation sans nécessairement pouvoir convertir ses gestes en langue naturelle ou en langue formelle. Nos résultats montrent d'ailleurs que le passage du gestuel et de la langue naturelle vers la langue formelle peut représenter un défi important. Par exemple, dans la première situation, bien que l'élève reconnaisse que la pièce sans écriture correspond à $\frac{4}{6}$ du casse-tête en reportant une pièce de $\frac{1}{6}$ de ce casse-tête 4 fois dans celle-ci, il ne peut pas, par lui-même, dégager l'écriture $4 \times \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$.

Dans cet exemple, le gestuel ne pose aucun problème, ce qui peut s'expliquer par le fait que le report de la pièce de $\frac{1}{6}$ du casse-tête dans la pièce sans écriture est facilité par la forme de cette pièce et du casse-tête (un hexagone). Il en est autrement dans la deuxième situation, soit celle qui convoque des figures 1D, où des difficultés sont rencontrées au moment de poser les gestes. Dans cette situation, l'élève est appelé à plier une bande pour obtenir des parties correspondant à $\frac{1}{b}$ de l'unité bande et, ensuite, à reporter la bande (ou $\frac{1}{b}$ bande) sur le segment pour le mesurer. Pour assurer une certaine précision lors du report de la bande, l'élève doit alors faire des traits sur le segment, ce qui peut représenter un défi au niveau de la manipulation. Nous avons montré que la difficulté à réaliser ces gestes n'indique pas nécessairement une méconnaissance des savoirs mathématiques visés par la situation.

Les gestes posés dans cette situation sont étroitement liés à ceux effectués lors de la situation faisant appel à la construction d'une demi-droite numérique. En effet, cette situation nécessite aussi de faire des traits en utilisant une bande pour séparer la demi-droite en parties égales. Cependant, la partie à reporter est à construire dans le cas de la situation des segments à mesurer, où la bande représente l'unité, tandis qu'elle est (généralement) donnée dans la situation mettant en jeu la demi-droite, où la bande représente $\frac{1}{b}$ de l'unité. De plus, la construction de la demi-droite se distingue de la mesure des segments, car l'élève doit également situer des nombres sur la demi-droite. Le nombre rationnel représente ainsi non seulement une mesure (le nombre 1 par exemple peut être interprété comme la mesure du segment de 0 à 1 sur la demi-droite), mais aussi un point sur la demi-droite. Cette situation convoque ainsi à la fois le caractère cardinal et le caractère ordinal des nombres. Le fait de présenter des situations sollicitant diverses représentations visuelles permet ainsi de travailler différentes propriétés des nombres rationnels.

Contrairement aux autres situations, celle misant sur des allers-retours entre des anticipations et des rétroactions de la calculette s'inscrit dans un contexte uniquement numérique. Un intérêt de cette situation est qu'elle investit le nombre rationnel en articulation avec les opérations. De plus, le geste d'appuyer à répétition sur la touche = permet d'observer, sur la calculette, comment l'écriture du nombre se transforme chaque fois qu'on ajoute ou retranche une puissance de 10. Cela permet de mettre en évidence l'emboîtement des unités de numération et d'investir la valeur d'un groupe de chiffres dans un nombre. Cette situation, centrée sur l'aspect numérique, ne permet toutefois pas un travail sur l'ordre de grandeur des nombres rationnels et semble favoriser l'identification de régularités sans nécessairement que l'élève comprenne ce qui les fonde. Elle peut alors provoquer des réussites locales, qui ne sont pas reproduites lorsque la situation est modifiée, notamment lorsque le terme initial dans les calculs n'est plus 0. Il paraît ainsi souhaitable de prévoir un va-et-vient relativement rapide entre des situations impliquant un contexte uniquement numérique et des situations permettent de représenter visuellement l'ordre de grandeur des nombres rationnels (à partir d'une droite numérique ou de figures 1D ou 2D), pour ainsi permettre aux élèves d'établir des relations entre elles et de produire du sens.

Soulignons, en terminant, que bien que les situations aient été choisies en s'inspirant de situations modélisées dans la TSD (Brousseau, 1998), le travail auprès d'un seul élève faible en mathématiques complexifie la dévolution. Des interventions de l'expérimentatrice paraissent effectivement nécessaires pour soutenir l'élève dans sa recherche de solution et permettre l'avancement du savoir. Tout au long des séances, l'expérimentatrice tente de favoriser la coordination de différentes ressources sémiotiques, en s'appuyant sur celles qui semblent les mieux contrôlées par l'élève, et ce, tant pour le relancer et ainsi favoriser la dévolution, que pour permettre le « passage » d'une connaissance à un savoir. L'institutionnalisation consiste effectivement bien souvent à partir du gestuel et de la langue naturelle convoqués par l'élève en situation pour introduire la langue formelle. Des phases de dévolution sont ensuite à nouveau aménagées pour permettre à l'élève de réinvestir, en situation, ce qui a été institutionnalisé (ou enseigné dans certains cas). Cette perspective paraît intéressante pour articuler la dévolution et l'institutionnalisation : l'institutionnalisation d'un savoir est suivie de la dévolution d'un nouveau problème, qui est à son tour suivi d'une phase d'institutionnalisation et ainsi de suite.

Conclusion

Pour éviter que les élèves reproduisent mécaniquement les techniques enseignées sans comprendre ce qui les fonde (comme c'est souvent le cas notamment avec la règle $\times \frac{y}{y}$ pour produire des fractions équivalentes), nous avons privilégié des situations qui favorisent la dévolution et permettent ainsi de partir des connaissances des élèves pour enseigner les nombres rationnels. Étant donné que ces nombres sont liés au fractionnement des grandeurs et s'inscrivent dans le prolongement des naturels (Chambris, 2017), nous avons plus particulièrement aménagé un maillage de situations en partant des connaissances des élèves sur les fractions en tant que partie d'un tout d'une part, et de leurs connaissances sur la numération de position décimale dans les naturels d'autre part. Pour construire ce maillage, nous nous sommes appuyées sur diverses ressources sémiotiques impliquées dans l'enseignement-apprentissage des nombres rationnels afin de proposer des situations variées, ce qui nous a conduites à dégager, en nous appuyant sur les travaux de Duval (1993, 1995, 2001, 2011) et ceux d'Arzarello et al. (2009), huit ressources sémiotiques. Notre recherche montre l'utilité de ces ressources pour choisir des situations qui mettent en évidence différentes propriétés des nombres rationnels, pour analyser les connaissances engagées par l'élève selon les caractéristiques des situations et pour analyser les interventions mises en œuvre par l'expérimentatrice.

Les interventions misant sur la coordination de différentes ressources sémiotiques semblent favoriser la construction de sens. Notre étude montre plus particulièrement l'intérêt de prendre en compte les ressources gestuelles et leur coordination avec les ressources de la langue naturelle et de la langue formelle tant dans le choix des situations que dans l'analyse des interactions didactiques. Dans la même lignée que les travaux de Duval, nos analyses suggèrent que les opérations de conversion représentent un défi de taille, et ce, en particulier lors de la conversion vers la langue formelle. Il serait intéressant, dans de futures recherches, d'explorer comment se coordonnent (ou non) différentes ressources sémiotiques dans l'enseignement-apprentissage d'autres savoirs mathématiques.

Références

Adjiage, R. (2007). Rationnels et proportionnalité : complexité et enseignement au début du collège. *Petit x*, *74*, 5-33.

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O. et Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematic*, *70*(2), 97-109. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9163-z

Behr, M. J., Harel, G., Lesh, R. et Post, T. R. (1993). Rational numbers: Towards a semantic analysis-emphasis on the operator construct. Dans T. P. Carpenter, E. Fennema et T. A. Romberg (dir.), *Rational numbers: An integration of research* (p. 13-47). Lawrence Erlbaum Associates.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Éditions la Pensée sauvage.

Chambris, C. (2017). Questions sur l'enseignement des nombres, notamment décimaux, au cycle 3. Dans B. Lebot et F. Vandebrouck (dir.), *Mathématiques au cycle 3. Actes du colloque du plan national de formation* (p. 12-25). IREM de Poitiers.

Charalambous, C. Y. et Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *64*(3), 293-316. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9036-2

Chesné J.-F. et Fischer J.-P. (2015). *Les acquis des élèves dans le domaine des nombres et du calcul à l'école primaire.* Rapport pour la conférence de consensus Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire. Centre national d'étude des systèmes scolaires.

Desjardins, M. et Hétu, J.-C. (1974). *L'activité mathématique dans l'enseignement des fractions.* Presses de l'Université de Montréal.

Douady, R. et Perrin-Glorian, M.-J. (1986). *Liaison École-Collège, Nombres décimaux.* Université-Paris VII, Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 37-65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine.* Peter Lang.

Duval, R. (2001). Comment décrire et analyser l'activité mathématique? Cadres et registres. *Actes de la journée en hommage à R. Douady.* Université Paris VII, Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques.

Duval, R. (2011). Idées directrices pour analyser les problèmes de compréhension dans l'apprentissage des mathématiques. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 8*(11), 149-161.

Fischer, J.-P. (2009). Six questions ou propositions pour cerner la notion de dyscalculie développementale. *Approche neuropsychologique des apprentissages numériques chez l'enfant (ANAE)*, *21*(102), 117-134.

Guille-Biel Winder, C. (2017). Un jeu de fractions pour le cycle 3. *Petit x*, 103, 57-82.

Houle, V. (2016). *Fondements didactiques pour une intervention orthopédagogique sur la notion de fraction.* [Thèse de doctorat, Université du Québec à Montréal]. Archipel. https://archipel.uqam.ca/10649/1/D3115.pdf

Houle, V. et Giroux, J. (2017). Enseigner la numération de position autrement : le cas d'une situation expérimentée en classe spécialisée. *Bulletin de l'AMQ, LVII*(3), 55-69.

Houle, V. et Giroux, J. (2018). Interprétations de la fraction et enseignement/ apprentissage des fractions équivalentes au primaire. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et de la technologie*, *18*(1), 1-13. https://doi.org/10.1007/s42330-018-0033-0

Institut national de recherche pédagogique (2005). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes. CM1 (cycle 3)*. Éditions Hatier.

Kamii, C. (1990). *Les jeunes enfants réinventent l'arithmétique.* Éditions Peter Lang.

Kieren, T. E. (1989). Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. Dans J. Hiebert et M. Behr (dir.), *Number concepts and operations in the middle grades* (p. 162-181). Lawrence Erlbaum.

Kieren, T. E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. Dans T. P. Carpenter, E. Fennema et T.A. Romberg (dir.), *Rational numbers: An integration of research* (p. 49-84). Lawrence Erlbaum.

Ni, Y. (2001). Semantic domains of rational numbers and the acquisition of fraction equivalence. *Contemporary Educational Psychology, 26*, 400-417. https://psycnet.apa.org/doi/10.1006/ceps.2000.1072

Peirce, C.S. (1978), *Écrits sur le signe. Textes rassemblés, traduits et commentés par G. Deladalle*. Éditions du Seuil.

Perrin-Glorian, M.-J. (1993). Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes « faibles ». *Recherches en didactique des mathématiques, 13*(1.2), 95-118.

Roditi, E. (2008). La comparaison des nombres décimaux. Comprendre les difficultés, aider à les surmonter. *Le Bulletin Vert (APMEP)*, *477*, 479-483.

Rouche, N. (1998). *Pourquoi ont-ils inventé les fractions?* Éditions Ellipses.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, *10*(2.3), 133-170.

Vergnaud, G. (2007). Représentation et activité : deux concepts étroitement associés. *Recherches en éducation*, 4, 9-22.

Une recherche collaborative sur les situations-problèmes en mathématiques au primaire : évolution des pratiques déclarées d'enseignantes

Nathalie ANWANDTER CUELLAR
Université du Québec en Outaouais
nathalie.anwandter@uqo.ca
Geneviève LESSARD
Université du Québec en Outaouais
genevieve.lessard@uqo.ca
Julie BERGERON
Université du Québec en Outaouais
Julie.bergeron@uqo.ca
Virginie ROBERT
Université de Sherbrooke
Virginie.robert2@usherbrooke.ca

Résumé : Cet article présente une partie des résultats d'une recherche collaborative sur les situations-problèmes en mathématiques au primaire. Plus particulièrement, nous avons analysé de manière qualitative la rencontre bilan de cette recherche. Pour ce faire, les composantes des pratiques du cadre théorique de la double approche didactique et ergonomique nous ont permis de décrire l'évolution des pratiques déclarées des six enseignantes participantes. Cette étude montre comment le processus d'action commune, de coformation et de corecherche, a contribué au renouvellement des pratiques concernant la situation-problème.

Mots-clés : recherche collaborative, pratiques déclarées, double approche didactique et ergonomique, situation-problème mathématique.

Revue québécoise de didactique des mathématiques, 2025, *vol 6*(1), p. 32-60.
https://doi.org/10.71403/10b17252

A collaborative study on problem-solving situations in primary school mathematics: Evolution of teachers' reported teaching practices

Abstract: This article presents the partial results of a collaborative study on mathematical problem-solving situations in primary school, and more specifically, the qualitative analysis of our final joint meeting. Drawing on the components of practice established in our dual theoretical framework, which encompasses both didactic and ergonomic perspectives of teaching, we describe how the practices of the six participating teachers evolved. This study demonstrates how the process of joint action, co-training, and co-research contributed to their renewed practices in problem-solving situations.

Keywords: collaborative research, reported practices, components of dual didactic and ergonomic approach, mathematical problem-solving situation.

1. Problématique et contexte de la recherche

Cet article est rédigé dans la continuité de deux articles précédents (Lessard et al., 2017; 2020) qui traitent d'un projet de recherche qui visait à répondre à des préoccupations communes des milieux de pratique et de la recherche au sujet de la situation-problème. En effet, à la suite d'une demande de la direction d'une école primaire, nous avons mené une recherche collaborative (Lessard et al., 2017) visant à travailler conjointement avec des enseignantes qui avaient identifié un besoin de compréhension et de réflexion sur leurs pratiques en lien avec les situations-problèmes en mathématiques en tant que compétence à développer du programme de formation de l'école québécoise (Gouvernement du Québec, 2001).

Il faut savoir d'emblée que la résolution de problèmes, dans son sens large, a depuis fort longtemps intéressé le milieu de la pratique et celui de la recherche (Lajoie et Bednarz, 2014, 2016; Sarrazy, 2003). Comme en font état Boublil-Eskimova (2010), ainsi que Lajoie et Bednarz (2014, 2016), le manque d'éclairage quant à l'opérationnalisation de la résolution de problèmes (ou de situations-problèmes)[1] représente un défi pour de nombreux enseignant·es et chercheur·es. Intégrée aux programmes de formation québécois, la résolution de problèmes était déjà présente dans les Guides du ministère de l'Éducation en 1988 (Fascicule K) et même au début des années 1900 (Lajoie et Bednarz, 2014). Elle se traduit dans le programme actuel (Gouvernement du Québec, 2001) par la compétence à résoudre une situation-problème. Malheureusement, comme le mentionnent Lessard et al. (2020), l'évolution de la terminologie (passant de problème à situation-problème), du format et du contenu de la résolution de problème dans les recherches et dans les programmes de formation québécois au cours du dernier siècle, n'ont pas facilité la compréhension de ce qu'est une

[1] La distinction entre « problème » et « situation-problème » sera décrite dans la section 2.2.

situation-problème chez les enseignant·es. Concrètement, dans le milieu de la pratique, ceci a entrainé un manque de repères opérationnalisables et cohérents pour le corps enseignant (Lajoie et Bednarz, 2014, 2016) qui doit néanmoins favoriser le développement de la compétence à résoudre des situations-problèmes en mathématiques chez leurs élèves.

Par ailleurs, des recherches montrent que les cahiers d'activités ou d'exercices[2] peinent à intégrer la situation-problème comme compétence à développer alors qu'ils agissent à titre d'outils marquants pour les pratiques des enseignantes (Boublil-Eskimova, 2010; Lessard et al., 2020). En effet, les tâches qui y sont proposées semblent généralement privilégier une approche étapiste du processus de résolution, reléguant au second plan l'acquisition et le développement des connaissances mathématiques (Lajoie et Bednarz, 2016). D'un autre côté, les tâches en lien avec les situations-problèmes sont présentées avec des énoncés écrits de plus en plus volumineux (Lajoie et Bednarz, 2016). Ceci se traduit tant dans les cahiers d'activités que dans les évaluations imposées par le ministère de l'Éducation (Lessard et al., 2020). Nous sommes donc en présence de situations-problèmes dont le défi relève davantage de la compétence en lecture que de la compétence mathématique (voir par exemple, Beaulieu et al., 2016). Ces deux aspects (enseignement étapiste et longueur du texte) correspondent difficilement aux visées du programme de formation et de la recherche qui prônent l'enseignement à l'aide de situations-problèmes. Ils s'harmonisent encore moins aux propositions de chercheur·es en didactique des mathématiques pour qui la résolution de problèmes doit être un levier de construction de savoirs mathématiques (Astolfi, 1993; Lessard, 2011; Pallascio, 2005; Theis et Gagnon, 2013).

C'est dans ce contexte complexe, marqué par la diversité et l'accumulation de sources divergentes que nous avons été contactées par la direction d'une école primaire dont les enseignantes exprimaient le besoin de développer une compréhension commune et leurs pratiques en la matière. Pour répondre à cette demande du milieu, il nous est apparu essentiel d'adopter une approche de recherche collaborative, dans laquelle les enseignant·es sont d'abord et avant tout reconnu·es pour leur expertise et, par conséquent, activement impliqué·es dans le processus de réflexion sur leurs pratiques. En effet, nous pensons que les enseignant·es disposent de ressources pour mener à bien leur développement professionnel tout en étant capables d'analyser et de justifier leurs

---

[2] Au Québec, les cahiers d'activités ou d'exercices sont des outils de soutien à l'apprentissage utilisés au primaire et élaborés par des maisons d'édition, comme les manuels scolaires. Il ne s'agit pas de documents officiels proposés par le ministère de l'Éducation.

pratiques (Desgagné, 1994). Ainsi, il nous semblait indispensable de prendre en compte leur réalité professionnelle conjuguée à un modèle de recherche sans impositions qui prône

> l'idée de rapprochement entre chercheurs et praticiens (Desgagné, 1994), de faire de la recherche avec et non sur les praticiens (Desgagné et al., 2001), de l'adoption d'un rapport plus symétrique (Morrissette, 2013), de la reconnaissance de l'expertise de chacun des partenaires et de l'interdépendance de leur contribution (Couture, Bednarz et Barry, 2007). (Lessard et al., 2017, p. 179)

Cette recherche collaborative étant maintenant terminée, l'objectif de cet article est de présenter les résultats de la rencontre-bilan de notre projet sur les situations-problèmes réalisée avec les enseignantes de cette école primaire. Lors de cette rencontre, les enseignantes participantes ont orienté leurs échanges vers les changements réalisés dans leurs pratiques quant à cette compétence. En nous laissant guider et en nous adaptant aux cadres d'action des praticiennes (Desgagné et al., 2001), nous avons choisi les composantes de la pratique enseignante selon le cadre de la double approche (Robert et Rogalski, 2002) pour rendre compte de cette évolution.

2. Cadre de référence

Afin de caractériser les pratiques, puis de déterminer leur évolution relativement à la situation-problème, nous avons utilisé les composantes du cadre théorique de la double approche didactique et ergonomique développé par Robert et Rogalski (2002), ainsi que la typologie de la situation-problème construite par Deschênes (2016).

2.1 Les pratiques déclarées et les composantes de la double approche didactique et ergonomique

Les recherches qui s'inscrivent dans la double approche ergonomique et didactique (Robert et Rogalski, 2002) s'intéressent aux activités que les sujets (élèves ou enseignant·es) développent en situation. Dans ce cadre, il s'agit d'appréhender les activités de l'enseignant·e en considérant qu'elle ou il exerce un métier et qu'on ne peut étudier ses activités sans en tenir compte.

Dans cette perspective, nous utilisons le terme « pratiques » pour désigner l'ensemble de ce que l'enseignant·e pense, fait ou ne fait pas, dit ou ne dit pas, avant, pendant et après la classe. Nous nous concentrons ici sur les pratiques déclarées, c'est-à-dire ce que les enseignant·e·s verbalisent à propos de leur activité, également désignées par « le dire sur le faire » (Clanet et Talbot, 2012). Même si elles ne reflètent pas toujours fidèlement l'activité réelle, leur analyse reste essentielle dans une visée compréhensive, car elles donnent accès à la pensée enseignante (Clanet et Talbot, 2012).

Dans le cadre de la double approche, Robert et Rogalski (2002) ont proposé des composantes (entre autres) pour analyser les pratiques enseignantes de manière globale. Leur approche vise à comprendre non seulement les actions des enseignant·es, mais aussi les raisons, les conditions et les contraintes qui influencent ces actions. Cette perspective se révèle particulièrement pertinente pour l'analyse des pratiques déclarées, car elle permet de dépasser la simple description pour explorer les logiques sous-jacentes et les raisons que les enseignant·es associent à leurs pratiques. Plus précisément, ces composantes sont caractérisées de la manière suivante (Robert et Rogalski, 2002) :

- Composante cognitive : elle traduit ce qui correspond aux choix de l'enseignant·e concernant les contenus, les tâches, leur organisation, leur quantité, leur ordre, leur insertion dans une progression qui dépasse la séance, et les prévisions de gestion pour la séance. Elle renseigne donc sur l'itinéraire cognitif choisi par l'enseignant·e;
- Composante médiative : elle se déduit, sur les mêmes séances, des choix de déroulements (formes du travail des élèves – temps de silence, échanges, questions; repérage et exploitation, commentaires méta, types d'aides; cours; improvisations – deuils);
- Composante personnelle : elle est associée aux connaissances et cursus, expériences, représentations des mathématiques, de leur enseignement, de de l'apprentissage;
- Composante institutionnelle : elle se caractérise par la prise en compte des programmes, horaires, instructions, etc.;
- Composante sociale : elle se caractérise par la prise en compte de la composition des classes, des collègues, etc.

Les composantes cognitive et médiative permettent de caractériser les pratiques au niveau local, de la leçon. Les composantes personnelle, sociale et institutionnelle conduisent à étudier les déterminants des pratiques à un niveau global et peuvent expliquer certains phénomènes d'évolution ou de résistance des pratiques. Cette analyse permet de trouver des régularités, ce qui est stable dans les pratiques, et des variabilités, ce qui se transforme dans les pratiques d'un·e enseignant·e en particulier et dans les pratiques d'enseignant·es exerçant dans un même contexte (Masselot et Robert, 2007).

L'étude de ces pratiques déclarées à l'aide des composantes de la double approche nous aide à mettre en lumière les intentions, les justifications et les évolutions perçues par les enseignantes, offrant ainsi un éclairage pertinent sur les dynamiques de développement professionnel. Ce choix théorique ciblé permet une lecture des logiques internes et des processus de transformation liés aux pratiques déclarées. Il convient toutefois de préciser qu'il ne s'agit pas d'une mobilisation exhaustive de la double approche.

2.2 La résolution de problèmes ou de situations-problèmes

Autant au sein de la communauté de recherche que dans le milieu scolaire, il existe une divergence de sens accordés à la résolution de problème ou aux situations-problèmes en elles-mêmes (Lessard, 2011; Theis et Gagnon, 2013). Dans ce texte, la distinction entre « problème » et « situation-problème » s'inscrit dans un contexte curriculaire spécifique au Québec, notamment depuis le Programme de formation de l'école québécoise du début des années 2000. Une analyse détaillée de cette distinction, bien qu'importante, serait trop ambitieuse et hors du cadre du présent article. Nous renvoyons aux travaux de Lajoie et Bednarz (2014, 2016) pour un traitement approfondi. De façon succincte, nous entendons par « problème » une tâche mathématique associé à l'activité de résolution de problème et donc différente de l'exercice, par résolution de « situation-problème » une forme plus complexe et contextualisée au programme québécois en tant que compétence, et par « résolution de problèmes » l'activité dans son sens large tel qu'étudiée par les chercheur·es ou présente dans d'autres contextes.

En ce sens, pour former un outil d'analyse ancré dans les pratiques, nous pensons que les caractéristiques de la situation-problème doivent d'abord s'inscrire dans les cadres de références des enseignant·es, puis être appuyées par différentes références scientifiques afin d'en éclairer les balises nébuleuses (Lajoie et Bednarz, 2016). Nous présentons ci-après les caractéristiques données à la résolution de problèmes et de situations-problèmes ainsi que les diverses typologies susceptibles de pouvoir conditionner les pratiques des enseignant·es. Certaines font l'unanimité alors que d'autres sont l'apanage d'un·e seul·e chercheur·e. Le tableau 1 dresse un portrait réalisé par Deschênes (2016) dans son mémoire de maitrise à propos des caractéristiques recensées sur la situation-problème[3] ainsi que les auteur·es qui en font mention.

[3] Nous avons choisi de conserver le terme « situation-problème » comme employé par l'auteure. Toutefois, les auteur·es mentionné·es dans le tableau utilisent des notions variées telles que la résolution de problèmes, les situations-problèmes, les problèmes ouverts, etc.

Tableau 1 : Caractéristiques de la situation-problème selon différentes recherches (Deschênes, 2016)

Caractéristiques	Auteur·es
1. L'élève doit vouloir et pouvoir s'engager dans la situation-problème. Elle doit ainsi constituer un défi raisonnable.	Astolfi (1993), Brousseau (2005), Douady (1989), Martin et Theis (2008), Gouvernement du Québec (1988, 2001), Schoenfeld (1985).
2. L'enseignant·e doit s'assurer que l'élève possède des connaissances antérieures insuffisantes ou les stratégies de résolutions inadaptées pour résoudre la situation-problème efficacement, ce qui forcera l'acquisition de nouvelles connaissances ou stratégies.	Astolfi (1993), Brousseau (2005) Douady (1989), Martin et Theis (2008), Schoenfeld (1985).
3. « La connaissance visée doit être le seul moyen de bien résoudre le problème » (p. 218).	Brousseau (2005)
4. La consigne doit être neutre. Elle ne doit pas contenir d'indices sur les opérations à effectuer.	Astolfi (1993), Brousseau (2005), Douady (1989), Martin et Theis (2008), Gouvernement du Québec (1988, 2001), Schoenfeld (1985).
5. L'élève doit pouvoir se rendre compte lui-même de la réussite ou de l'échec de sa solution.	Astolfi (1993), Brousseau (2005), Douady (1989), Martin et Theis (2008)
6. La situation-problème doit être contextualisée et concrète.	Astolfi (1993), Douady (1989), Gouvernement du Québec (2001)
7. Elle peut être le tremplin permettant d'accéder à d'autres questions et ainsi relancer le processus de résolution.	Brousseau (2005), Martin et Theis (2008)

En plus de la recension de ces catégories, diverses typologies de problèmes mathématiques existent (Fagnant et Vlassis, 2010). Pour décrire les pratiques des enseignantes, nous en avons retenu deux autres.

La première typologie retenue est celle présentée dans Vlassis et al. (2014). Dans cette étude, les auteur·es ont mis en évidence différents éléments associés aux changements terminologiques dans le programme scolaire et ils ont analysé les conceptions d'enseignant·es du primaire au Luxembourg en lien avec le rôle de la résolution de problèmes dans l'enseignement des mathématiques. La typologie mobilisée est ainsi axée sur l'intention didactique en raison de sa proximité avec le travail de l'enseignant·e et l'évolution du concept de résolution de problèmes ou de situations-problèmes dans les programmes. Trois objectifs généralement attribués à la résolution de problèmes y sont exposés : 1) l'apprentissage de nouveaux contenus mathématiques; 2) l'apprentissage des stratégies d'une résolution experte de problème; et 3) l'application dans les problèmes des nouveaux savoirs enseignés. Le premier objectif d'apprentissage de nouveaux contenus mathématiques se rattache aux caractéristiques précédemment énoncées et fait référence à l'utilisation de la résolution de problèmes comme modalité pédagogique, ancrée dans une perspective de construction de nouvelles connaissances (Vlassis et al., 2014). Le deuxième objectif relève davantage de l'apprentissage d'heuristiques générales de résolution de problème alors que le troisième se caractérise par une vision évaluative de la maitrise des connaissances (Lessard et al., 2020).

La seconde typologie que nous avons retenue est celle qui se trouve dans le Fascicule K (Gouvernement du Québec, 1988), ancien document ministériel québécois qui présente trois autres types de classification des problèmes. La première réfère à l'intérêt du contexte qui est une caractéristique importante dans le choix des problèmes à proposer (Lajoie et Bednarz, 2016). Celui-ci peut être qualifié de réel (l'élève vit le problème), de réaliste (contexte qui pourrait survenir dans la réalité), de fantaisiste (provenant de l'imaginaire) ou de mathématique. Ensuite, une deuxième classification est axée sur le nombre de solutions possibles soit une solution, une quantité finie de solutions, une quantité infinie de solutions ou encore aucune solution. Finalement, une troisième classification peut être faite par rapport à l'adéquation des données fournies alors que celles-ci peuvent être complètes (l'énoncé comprend uniquement les données pertinentes), superflues (certaines données s'avèrent inutiles) ou encore manquantes (le problème ne peut être résolu).

Les typologies exposées font état de nombreuses caractéristiques données aux situations-problèmes qui sont susceptibles d'avoir un impact sur les pratiques des enseignant·es. Elles nous fournissent ainsi des éléments clés pour un cadre d'analyse afin de décrire l'évolution des pratiques déclarées.

3. Méthodologie

Sur le plan méthodologique, nous décrirons d'une part, le déroulement de la recherche collaborative et, d'autre part, la méthode d'analyse des données.

3.1 Le modèle de recherche collaborative

Notre recherche collaborative, qui s'est déroulé sur deux ans, associe six enseignantes d'une école primaire de trois cycles: Constance, Josée, Judith, Manon, Nora et Rachel, et trois chercheuses pour travailler ensemble sur les situations-problèmes en mathématiques. La première année de la recherche a servi à faire état de conceptions des enseignantes afin de pouvoir mieux les accompagner (Deschênes, 2016; Lessard et al., 2020). Pendant la deuxième année, nous avons réalisé six rencontres d'une journée, de format et contenu variables.

Le modèle collaboratif choisi s'articulait autour d'une démarche de co-construction des connaissances reposant sur un partenariat entre chercheuses et praticiennes. Il reposait sur une démarche réflexive où enseignantes et chercheuses croisent deux logiques complémentaires : le « questionnement pratique » des enseignantes, centré sur l'amélioration de leurs pratiques, et la « recherche formelle » des chercheuses, visant la production de connaissances nouvelles (Desgagné et al., 2001). Structurée autour de rencontres régulières, cette activité a créé une « zone interprétative » où les savoirs d'action et savants (Desgagné et al., 2001) s'enrichissent mutuellement. Ce modèle ne repose pas sur un partage strict des tâches mais sur l'intersection des deux logiques, chaque acteur contribuant à sa manière tout en respectant cette double finalité (Desgagné, 1998).

Le modèle de recherche collaborative proposé par Desgagné (2001) repose sur trois étapes : cosituation, coopération et coproduction (Desgagné, 2001; Desgagné et al., 2001). Dans ce cadre, notre projet élaboré en concertation avec les participantes comporté six rencontres dont une synthèse est présentée dans le tableau 2 :

Tableau 2 : Synthèse des rencontres et des phases de la recherche avec les enseignantes.

Rencontre	**Déroulement**	**Phases de la recherche collaborative**
Rencontre 1	Échanges et décisions sur les objectifs des rencontres et les besoins en développement professionnel.	Cosituation
Rencontre 2	Discussion sur les situations-problèmes utilisées par les enseignantes, pilotage et observation de ces situations-problèmes en classe.	Coopération-Coproduction
Rencontre 3	Pilotage et observation des situations-problèmes utilisées par les enseignantes en classe, retour en groupe sur le pilotage et l'observation des situations-problèmes modifiées.	Coopération-Coproduction
Rencontre 4	Pilotage et observation des situations-problèmes utilisées par les enseignantes en classe, retour en groupe sur le pilotage et l'observation des situations-problèmes modifiées.	Coopération-Coproduction
Rencontre 5	Formation à la demande des enseignantes sur le matériel de manipulation.	Coopération-Coproduction
Rencontre 6	Bilan de recherche : entrevue de groupe semi-dirigée.	Coopération-Coproduction

3.1.1 Phase 1 : Cosituation

Dans une démarche de cosituation, les personnes chercheuses et praticiennes collaborent pour identifier un volet spécifique de la pratique à étudier. Ils trouvent le thème général qui sert de point de convergence, pour finalement définir, à l'issue de ces échanges, l'objet qui intègre à la fois les dimensions de recherche et de formation (Desgagné et al., 2001). À cette étape de notre recherche, nous nous sommes donné des objectifs de formation et des objectifs de recherche.

Pour la formation, les objectifs formulés par les enseignantes étaient de :

1) coconstruire une définition et une interprétation communes de la situation-problème;
2) coconstruire et expérimenter des situations-problèmes en mathématiques, en accordant une attention particulière à l'analyse de productions d'élèves en difficulté.

La définition de la situation-problème élaborée par l'ensemble des enseignant·es de l'école au début de la recherche était :

- Elle doit être motivante, intéressante, accessible et présenter un défi réaliste autant au niveau du contexte, des concepts que du texte.
- Elle peut comporter plusieurs étapes séquentielles ou simultanées, elle peut faire appel à plusieurs concepts et elle peut nécessiter des calculs selon la complexité et les besoins identifiés.
- Elle dépend autant de l'énoncé que de l'élève et de l'enseignante qui la propose.
- Elle peut avoir comme fonction la construction des connaissances, l'intégration ou l'évaluation de la compétence à mobiliser et la compréhension des concepts pour résoudre la situation-problème.

Cependant, la recherche s'est déroulée dans un contexte de revendications syndicales, rendant l'opérationnalisation complexe. Les enseignantes étaient limitées à un horaire de 32 heures, choisissaient librement leurs formations et cessaient les activités parascolaires. C'est ainsi que seulement six enseignantes ont participé à la suite de la recherche.

Pour la recherche, les objectifs étaient de :

1) connaître et documenter les conceptions des enseignantes de l'école quant à la notion de situation-problème en mathématiques;
2) décrire l'évolution des pratiques des enseignantes au regard de leurs conceptions quant à la notion de situation-problème en mathématiques.

Dans le cadre de cet article, nous nous concentrerons sur le deuxième objectif de recherche[4].

3.1.2 Phase 2 : Coopération

Dans cette phase, les enseignantes ont été amenées à examiner des éléments de leur pratique. Selon Desgagné et al., (2001), cette démarche de réflexion peut s'appréhender autant comme une approche de développement professionnel pour les praticien·nes que comme un outil de collecte de données pour les chercheur·es.

Au cours des rencontres 2 à 5, les enseignantes et nous (les chercheuses) avons collaboré à la planification de leçons et analysé de manière itérative le travail des élèves ainsi que les pratiques des enseignantes. Concrètement, les enseignantes ont proposé des tâches qu'elles utilisaient habituellement comme des situations-problèmes. Nous avons examiné ces tâches pour identifier en quoi elles pouvaient être considérées comme des situations-problèmes et, en fonction de ces analyses, nous avons apporté des modifications à la tâche proposée ou nous en avons co-construit de nouvelles. Nous avons ensuite planifié la mise en œuvre de ces tâches en classe, où une ou deux enseignantes les pilotaient avec les élèves, tandis que les autres enseignantes et les chercheuses observaient les interactions en classe. Enfin, lors de moments d'échanges, les enseignantes partageaient leurs expériences du pilotage ou leurs observations en fonction de leur rôle, et des modifications étaient proposées. Ce processus s'est répété au cours de plusieurs cycles successifs, permettant une évolution continue de la pratique au fil du temps (Benedict et al., 2023). Pour la cinquième rencontre, les enseignantes ont sollicité une formation sur le matériel de manipulation.

Lors de la dernière rencontre (sixième rencontre), nous avons réalisé un bilan avec les enseignantes quant à leurs objectifs de formation centrés sur la définition et l'expérimentation des situations-problème. Pour alimenter les échanges, quatre questions avaient été prévues : 1) Est-ce que nous conservons la définition établie à la fin de l'année passée ou faut-il la modifier? 2) Si on vous demandait d'apporter aujourd'hui des situations-problèmes idéales, est-ce que ce serait les mêmes que vous aviez apportés et en quoi seraient-elles différentes ou semblables? 3) Vous sentez-vous mieux outillées pour faire face aux difficultés des élèves en situation-problème? 4) Qu'avez-vous pensé du processus de recherche tel que nous l'avons vécu, c'est-à-dire sous forme de discussions, d'observations, de réflexions et de partage de responsabilités et de la gestion de votre budget? Or, comme l'indique Aurousseau et al. (2020), les dispositifs de recherche collaborative reposent sur des échanges en groupe ou en individuel qui favorisent la réflexion et l'apprentissage.

---

4 Les résultats de notre recherche concernant l'objectif 1 ont été publiés dans Lessard et al., (2020).

Ces interactions impliquent une adaptation constante des participantes et il est difficile de suivre strictement un canevas de questions préconstruit, car les interactions humaines sont imprévisibles. Par ailleurs, les attentes des enseignant·es peuvent parfois faire dévier la recherche de son objectif initial ou demander l'adaptation des cadres théoriques et méthodologiques dans une perspective d'influence réciproque (Desgagné et al. 2001). Dans notre rencontre bilan, la discussion s'est rapidement tournée sur les changements de pratiques adoptées par les enseignantes par la comparaison de leurs anciennes façons de faire avec les nouvelles. Ainsi, en nous laissant porter par les praticiennes, nous avons décidé d'analyser cette rencontre-bilan du point de vue de l'évolution de leurs pratiques.

3.1.3 Phase 3 : Coproduction

À cette étape, il s'agit d'analyser les données collectées durant la phase de coopération. Nous considérons que la dernière rencontre illustre de manière significative les changements observés dans les pratiques des enseignantes. Ainsi, dans la section suivante, nous présenterons la méthode d'analyse de données en lien avec cette rencontre-bilan.

3.2 La méthode d'analyse des données

Cet article se focalise sur les résultats issus de la rencontre bilan (sixième rencontre), réalisée sous forme de groupe de discussion animé par les chercheuses et enregistrée en audio.

Nous avons adopté un devis d'analyse qualitatif et descriptif. Pour dégager des tendances et les grands thèmes discutés (Fortin et Gagnon, 2010), nous avons choisi de faire une analyse de contenu (L'Écuyer, 1990) et une analyse thématique (Paillé et Mucchielli, 2012) à l'aide de NVivo à partir du verbatim de la rencontre-bilan.

D'abord, l'analyse de contenu a été réalisée à partir de catégories créées grâce aux caractéristiques de la situation-problème et aux composantes des pratiques des enseignantes issues des travaux de Robert et Rogalski (2002). Plus particulièrement, en ce qui concerne la situation problème, un croisement entre la définition donnée par les enseignantes et notre cadre théorique nous a permis de faire ressortir les principales caractéristiques (codes) pour nos analyses : la situation-problème est accessible ou motivante; représente un défi au niveau conceptuel, de la longueur du texte, du vocabulaire, de la quantité d'informations; plusieurs concepts sont présents, elle peut se résoudre à l'aide de plusieurs démarches ou plusieurs étapes; elle est déterminée par la triade élève-enseignant-tâche; son objectif est de construire, évaluer, intégrer les apprentissages ou d'enseigner une méthode de résolution. Du point de vue de la double approche, les cinq composantes des pratiques des enseignantes ont été codées selon leur appellation propre au cadre de Robert et Rogalski (2002) soit : composante cognitive, composante médiative, composante personnelle, composante institutionnelle et composante sociale. Finalement, pour faire ressortir l'évolution des pratiques des enseignantes, le contenu a été codé de manière à distinguer les pratiques passées (avant la recherche collaborative) des pratiques nouvelles (après ou en projet à la suite de la recherche collaborative).

Ensuite, le processus de codage et de catégorisation des données nous a permis de réaliser une analyse thématique (Paillé et Mucchielli, 2012) afin d'identifier et de regrouper les éléments clés en thèmes. Nous avons ainsi identifié, organisé et interprété des thèmes récurrents dans le corpus de données tout en repérant les idées principales en lien avec les pratiques enseignantes. Dans les prochains paragraphes, nous présentons en détail les résultats de cette analyse.

4. Résultats

Les différentes composantes de la pratique enseignante (Robert et Rogalski, 2002) sont étroitement interreliées et s'influencent mutuellement. Toutefois, pour des raisons de clarté, nous les avons présentées séparément. Nous y avons intégré les définitions et les points de vue des enseignantes, qui reflètent et nourrissent chacune de ces composantes, tout en soulignant comment elles se traduisent et s'articulent dans leurs pratiques.

Nous exposerons dans un premier temps les caractéristiques de la situation-problème (SP) telles que perçues dans leurs pratiques passées, puis dans leurs pratiques nouvelles. Par la suite, les différentes dimensions de cette évolution seront analysées selon la double approche cognitive et médiative, ainsi que dans leurs composantes personnelles, institutionnelles et sociales.

4.1 Évolution des caractéristiques de la SP chez les enseignantes

Pour la première question que nous avons posée : « Est-ce que nous conservons la définition établie à la fin de l'année passée ou faut-il la modifier? », il y a peu de références explicites à la définition de la situation-problème que les enseignantes se sont donnée au début de la recherche. Au lieu d'aborder directement la définition, les enseignantes ont décrit de quelle manière la discussion autour de la situation-problème avait modifié leur conception de cette dernière ainsi que leurs pratiques, avant et après la recherche. Nous avons ainsi différencié les pratiques déclarées passées et nouvelles dans le discours des enseignantes et identifié les caractéristiques de la situation-problème (cf. tableau 3) :

Tableau 3 : Caractéristiques données à la SP par les enseignantes selon leurs pratiques passées et nouvelles.

Enseignante	Codes pratiques passées	Codes pratiques nouvelles
Constance	Vocabulaire, méthode, objectif-évaluation	Accessible, objectif-construction, objectif-évaluation, objectif-intégration, plusieurs démarches, triade.
Josée		
Judith	Longueur du texte, méthode, plusieurs concepts	Plusieurs démarches
Manon	Vocabulaire	Accessible
Nora	Plusieurs concepts, objectif-évaluation.	Triade, motivante
Rachel		Objectif -construction, plusieurs démarches

En regardant le tableau 3, on observe que, dans les pratiques passées, la définition de SP était plutôt perçue comme un défi en termes de vocabulaire et de longueur du texte, associée à une méthode unique qui nécessitait un enseignement spécifique et qui englobe de nombreux concepts. Sa finalité principale était l'évaluation des apprentissages. Ces pratiques semblaient ainsi influencées par les exigences institutionnelles, notamment celles véhiculées à travers les évaluations ministérielles.

Cependant, dans leurs pratiques déclarées nouvelles, les enseignantes préféraient aborder la SP sous un angle différent, témoignant de l'évolution de leurs pratiques. En effet, elles mettent davantage l'accent sur l'accessibilité et associent les SP aux différents moments de l'enseignement-apprentissage tels que la construction, l'intégration et l'évaluation. Par ailleurs, elles semblent désormais reconnaitre et accepter que, pour résoudre une SP, l'élève peut adopter diverses démarches, et que la SP dépend à la fois de l'élève, de l'enseignant et de la nature de la tâche. Ces représentations sont davantage alignées sur les caractéristiques mises en avant par les recherches dans ce domaine (cf. section 2.2).

Bien que cela nous donne un premier aperçu des changements opérés par les enseignantes sur la manière d'approcher la SP, ces aspects restent à contextualiser selon leurs pratiques. Ainsi, dans les prochaines sections, nous les aborderons du point de vue des composantes de la double approche en nous appuyant sur des extraits de la rencontre-bilan afin d'illustrer nos propos.

4.2 Les pratiques déclarées des enseignantes du point de vue de composantes de la double approche

Dans les prochaines sous-sections, nous présentons les pratiques déclarées des enseignantes du point de vue des composantes cognitive, médiative, personnelle et institutionnelle de la double approche de Robert et Rogalski (2002).

4.2.1 La composante cognitive

L'intention didactique de la SP. Lors de la rencontre-bilan, une évolution des pratiques passées relatives à l'utilisation de la SP seulement aux fins d'évaluation a pu être observée, alors que les enseignantes ont donné de nouvelles intentions didactiques à la SP. Effectivement, Nora et Constance mentionnaient, en faisant référence à leurs pratiques passées, les utiliser principalement à la fin des apprentissages et pour l'évaluation. Dans leurs pratiques nouvelles, elles rapportent que les objectifs étaient plus larges dans une perspective de construction de nouvelles connaissances (Vlassis et al., 2014). Certaines enseignantes mentionnent qu'elles proposent désormais des situations-problèmes pour intégrer des concepts ou encore pour les construire. Pour Constance, c'est la possibilité d'utiliser la situation-problème « au début, milieu, fin » des apprentissages plutôt que seulement comme un élément d'évaluation qui constitue le plus bel ajout apporté par la construction de la définition : « Je dois dire que de le faire en début c'est très intéressant, au lieu juste comme finalité » (Constance). Rachel, pour sa part, rejoint les propos de Constance : « Moi, ce que je retiens là, c'est de l'intention, la fonction, la construction, […] » (Rachel).

Nora mentionne d'ailleurs que la déconstruction de cette conception de la situation-problème aux fins d'évaluation l'a amenée à proposer des SP plus souvent et que cette nouvelle vision avait eu un impact sur les élèves :

> C'est vrai que je les ai trouvés [élèves] moins anxieux, parce qu'une situation-problème, c'est une évaluation dans leur tête, alors que maintenant on en fait à tous les jours. (Nora)

En outre, comme le signalent Vlassis et al., (2014), l'un des objectifs de la résolution de problèmes est l'apprentissage des stratégies de résolution. Deux enseignantes, Judith et Constance, disent qu'elles visaient davantage cet objectif dans leurs pratiques passées, d'enseigner une méthode de résolution en étapes, ce qui les amenait à être plus « rigides » dans leurs pilotages :

> Et toutes les façons aussi, comme tu disais, tu es moins rigide qu'avant, mais on l'a probablement tous fait parce qu'on veut s'assurer de donner une méthode [en étapes] (Judith).
>
> Parce que, cette méthode-là, ne s'applique pas à toutes les situations problèmes et on voulait l'appliquer tout le temps à tout et ça devenait plus compliqué! (Constance).

Ces propos laissent entrevoir une tension entre la volonté de structurer l'apprentissage et les limites d'une approche étapiste de la résolution de situations-problèmes. Cette tendance pourrait s'expliquer par l'influence des ressources pédagogiques et des évaluations ministérielles qui ont pu encourager, de manière implicite, une modélisation en étapes. En effet, comme le soulignent Lajoie et Bednarz (2016), les situations-problèmes utilisées dans un cadre scolaire à des fins d'évaluation sont souvent complexes sur le plan organisationnel — avec de nombreuses données à traiter — mais les étapes proposées y sont généralement indépendantes les unes des autres, ce qui peut induire une vision morcelée de la tâche.

La SP comme un défi accessible. Dans la poursuite des résultats concernant la composante cognitive, il importe maintenant de s'attarder aux décisions prises par les enseignantes quant à la sélection et aux changements apportés aux tâches. Selon plusieurs auteurs (Astolfi, 1993; Brousseau, 2005; Martin et Theis, 2008), l'une des caractéristiques fondamentales de la résolution de problèmes ou des situations-problèmes est que l'élève puisse s'y engager, ce qui suppose qu'elle constitue un défi raisonnable.

Il ressort du discours de Constance, qu'elle se donne désormais davantage le droit d'adapter les SP en fonction des élèves pour les rendre plus accessibles (cf. tableau 3). Comme nous l'avons déjà souligné, le défi des SP dans les cahiers utilisés par les enseignantes au Québec se trouve généralement au niveau du vocabulaire, du nombre d'étapes et de la longueur du texte (Lajoie et Bednarz, 2016; Lessard et al., 2020). À la suite de notre recherche, Constance montre une posture critique face à ses outils de travail et la façon dont elle peut les modifier afin de rendre les SP plus accessibles : « il y a toujours de petits ajustements, des phrases trop longues, aussi au niveau du vocabulaire, c'est pour ça qu'il faut les modifier » (Constance).

Sa conception de la situation-problème a d'ailleurs évolué, puisqu'elle affirme désormais se réserver le droit de modifier les énoncés de tâches : « avec ces critères-là (définition de SP) et avec ce qu'on a développé ensemble ».

Quant à Manon, elle indique que la SP doit être accessible du point de vue des connaissances antérieures des élèves :

> Moi, je pense aussi que le concept, ce que j'ai compris avec [la formation sur la matériel de manipulation] c'est que à la base si le concept ce n'est pas assis comme il faut (comme on dit), la situation, résolution de problème, n'amène nulle part. (Manon)

Finalement, Nora se donne le droit de choisir des tâches non prévues à cette fin pour les utiliser comme SP puisqu'à ses yeux elles représentent un défi :

> Dans nos cahiers, ils mettent ça, raisonner mais moi raisonner, je le vois comme une situation-problème, mais en même temps je trouve que ça donne un défi à l'élève et c'est motivante. (Nora).

Ces témoignages révèlent une transformation dans les choix didactiques des enseignantes : elles se disent désormais prêtes à adapter ou à modifier les situations-problèmes afin de les rendre plus accessibles, tout en conservant leur potentiel de défi.

4.2.2 La composante médiative

La gestion du temps pour la SP. Deux enseignantes, Constance et Josée, rapportent qu'elles s'accordent dorénavant plus de temps pour la mise en œuvre des SP en classe, ce qui leur permet d'être plus flexibles et moins stressées. Josée souligne qu'elle ne se met plus de pression quant à la durée allouée et qu'elle ajuste son enseignement en conséquence :

> Moi oui, parce que je me mettais tout ce stress-là, maintenant, regarde, je le fais à la première période et si ce n'est pas fini, ce n'est pas grave, on continuera à la deuxième période, ou en revenant de la récréation, ça fait que je ne me mets plus cette barrière de temps et je suis beaucoup moins stressée, je suis plus confiante. (Josée)

De son côté, Constance exprime un changement dans sa pratique, en prenant le temps d'analyser les démarches des élèves et d'en discuter avec eux :

> Moi, je le fais plus maintenant, je prends le temps, je corrige, et si je ne suis pas capable de le corriger je le mets de côté et le lendemain je l'amène, et je pose des questions : comment as-tu fait, je ne comprends pas comment tu as fait, et je prends des notes. Je le fais avec n'importe quel élève, fort ou pas. Avant, je ne faisais pas ça, je trouvais que c'était une perte de temps et que je n'avais pas le temps pour le faire, mais maintenant j'ai créé le moment pour le faire. (Constance)

Cette plus grande souplesse dans la gestion du temps ne se limite pas à réduire le stress des enseignantes : elle favorise également une organisation de la classe qui rend les situations-problèmes plus accessibles et permet un retour plus approfondi sur les démarches des élèves. En effet, les enseignantes rapportent que l'objectif premier d'une démarche d'aide à la représentation est de permettre une authentique résolution du problème, c'est-à-dire la réussite dans la tâche proposée par invention d'une procédure de résolution. Constance explique qu'elle rend disponible le matériel de manipulation pour représenter, libérant ainsi du temps pour le retour sur les démarches des élèves :

> On va avoir le temps de le faire maintenant, étant donné qu'on rend accessibles nos situations-problèmes, nos concepts par la manipulation, ça fait qu'il va nous rester peut-être une heure, parce que la situation-problème qui aurait pris 90 minutes normalement, maintenant va durer moins, alors théoriquement on va avoir le temps de faire le retour. (Constance)

Ainsi, le fait de s'accorder plus de temps pour travailler les SP, tout en optimisant leur accessibilité, semble avoir un double effet bénéfique : d'une part, une réduction du stress pour les enseignants et, d'autre part, une meilleure gestion du temps en classe.

La possibilité de recourir à plusieurs démarches. Au fil de la discussion, ce que nous pourrions qualifier de nouvelle caractéristique de la SP émerge dans le discours des enseignant·es : la possibilité que les élèves puissent recourir à différentes démarches (cf. tableau 3). Cette caractéristique fait partie des critères de classification du Fascicule K (Gouvernement du Québec, 1988). Celle-ci n'a pas été formellement intégrée dans la définition établie par les enseignantes au début de la recherche, mais son apparition dans leurs discours nous permet de noter son influence dans les choix de déroulements en classe. En effet, Constance, Judith et Rachel mentionnent qu'elles sont maintenant ouvertes à la possibilité d'avoir plusieurs démarches pour une SP en classe. Effectivement, Constance dit avoir lâché sa rigidité sur la démarche et qu'elle a permis aux élèves de résoudre les SP de différentes manières : « Je me suis permis de dire ok, aujourd'hui on va pas faire comme moi, on va faire comme vous » (Constance). Pour Judith, il importe de faire un retour sur les différentes démarches afin de reconnaître si elles sont adéquates ou non, même celles qui ne sont pas « économiques » (Lessard, 2011) :

> Tu peux utiliser une autre façon […]. C'est sûr qu'on essaie d'éviter les grands détours, mais si tu l'as trouvé et ça marche comme ça, tant mieux, alors je trouve que c'est important de faire un retour même si ça prend plus de temps. (Judith)

Cette démarche contraste avec les pratiques observées par d'autres chercheur·es (p. ex. Demonty et Fagnant, 2014) qui expliquent que les enseignant·es font globalement des « guidages » de façon très directive afin d'orienter les élèves vers des stratégies plus efficaces ou en anticipant les difficultés des élèves. Ici, il est plutôt question de reconnaitre les différentes bonnes démarches déployées par les élèves, et donc de construire à partir de ce que les élèves font tout en observant que certaines sont plus efficaces.

4.2.3 La composante personnelle

La SP en tant que tâche à plusieurs concepts. Initialement, certaines enseignantes considéraient qu'une situation-problème devait nécessairement mobiliser plusieurs concepts mathématiques. Toutefois, à la lumière de leur réflexion et des discussions lors des rencontres, elles ont remis en question cette conception. Nora illustre bien cette prise de conscience :

> Dans ma tête, dans ma conception, ce que j'ai écrit aussi c'était qu'il fallait qu'il y ait plus de concepts, ça peut être de la géométrie, de l'arithmétique, et dans le fond je me suis rendu compte que non, ce n'est pas obligé que ce soit ça (Nora)

De son côté, Judith souligne que l'analyse de la définition et les échanges entre collègues lui ont permis de revoir sa compréhension de la situation-problème. Elle réalise qu'elle avait toujours été influencée par l'idée qu'une SP devait nécessairement intégrer plusieurs concepts, alors que cette contrainte n'est pas essentielle :

> Je me suis toujours fait dire que la résolution de problème devait avoir plusieurs concepts, et avec la nouvelle définition qu'on a modifiée un peu, ça m'a aidée à voir les choses d'une autre façon. (Judith)

Il semblerait que la recherche collaborative a permis à quelques enseignantes d'adopter une vision plus souple de la situation-problème, en reconnaissant qu'elle peut être pertinente et significative même si elle mobilise un seul concept mathématique.

Cette perception de la situation-problème comme nécessitant plusieurs concepts peut s'expliquer par la manière dont le ministère définit la SP. En effet, comme l'indiquent Lajoie et Bednarz (2016), des attentes de fin de cycle du programme du primaire concernant la SP peuvent guider le choix des tâches proposées en privilégiant la présence de plusieurs concepts, de multiples données et contraintes, l'usage de divers modes de représentation ainsi qu'un énoncé long. Or, cette définition de la SP ne correspond pas nécessairement aux travaux de recherches en didactique des mathématiques (cf. tableau 1).

L'importance de la triade Énoncé-Enseignante-Élève. Il est depuis longtemps largement admis dans les recherches que la résolution d'un problème n'existe qu'au sein d'une relation entre un sujet (élève) et une tâche (énoncé). Autrement dit, ce qui constitue un problème pour un élève donné peut ne pas en être un pour un autre, selon le contexte (Brun, 1997). Ce contexte, façonné par les interactions entre les élèves, l'enseignant et la tâche, joue un rôle clé dans une « bonne » activité de résolution de problèmes en classe. Ainsi, la résolution de problèmes dépend moins de l'énoncé ou de la tâche elle-même que de l'environnement créé par l'enseignant lorsqu'il la met en œuvre avec les élèves (Barabé, 2022).

Lors de la rencontre-bilan, Nora et Judith ont fait ressortir qu'elles réalisent maintenant que la SP dépend de l'élève, de l'énoncé et de l'enseignante :

> Parce que la même situation problème d'une classe à l'autre, d'un prof à l'autre, ça ne veut pas dire que ça va être présenté de la même façon. (Nora)

Judith partage également un constat concernant une période que les élèves devaient faire avec une personne remplaçante, où elle observe que le même énoncé ne représente pas la même SP selon l'enseignante qui la pilote :

> Elle m'avait dit qu'il n'y en avait pas beaucoup qui avaient réussi, alors on a commencé à se questionner et on s'est rendu compte que d'elle à moi, que d'une personne à l'autre, c'était très différent, la méthode, la procédure, tout, et on avait le même, même matériel en plus. (Judith)

Ces témoignages illustrent une évolution marquante de la composante personnelle des pratiques de Nora et Judith en lien avec la SP. Alors qu'elles la percevaient auparavant comme une tâche fixe et universelle, elles reconnaissent dorénavant qu'elle dépend étroitement de l'enseignant·e et de la manière dont elle est mise en œuvre, et donc que la SP ne peut être dissociée du contexte d'enseignement dans lequel elle prend vie.

4.2.4 La composante institutionnelle

L'influence de l'évaluation ministérielle. Quant aux conditions et contraintes institutionnelles auxquelles les enseignantes peuvent être confrontées, Constance exprime une crainte initiale liée aux exigences de l'examen de fin d'année, mais souligne qu'elle a choisi de maintenir ses nouvelles approches pédagogiques :

> J'avais peur de revenir [à ma façon de faire avant] à cause de l'examen de fin d'année ou de me mettre à capoter. Là, je vais continuer d'enseigner comme j'ai fait toute l'année et ils vont être prêts à la fin de l'année, ce sont les contraintes qu'eux nous obligent à suivre finalement, ce qui devient plate. (Constance)

Constance reconnaît cependant qu'en s'éloignant de cette focalisation sur l'évaluation ministérielle, ses élèves demeurent tout de même bien préparés :

> Ça, c'est une autre affaire, on travaille souvent en fonction de cette évaluation-là, c'est incroyable j'ai essayé de délaisser ça un peu cette année et je me suis rendu compte que ce n'était quand même pas si pire ce que j'ai fait, et ils vont être prêts, même si je n'ai pas juste visé la façon de faire de la CS [commission scolaire]. (Constance)

Cela témoigne d'une prise de recul par rapport à l'influence de l'évaluation ministérielle, permettant ainsi une plus grande liberté pédagogique.

L'utilisation des cahiers d'activités. Une autre contrainte institutionnelle est en lien avec l'utilisation en classe d'un cahier d'activités. Judith exprime clairement la pression ressentie autour de cet outil, liée à des attentes institutionnelles et sociales : elle doit compléter une grande partie du cahier, en raison du coût payé par les parents.

> Et la libération du cahier d'activités, là, ça enlève un gros fardeau parce que quand tu achètes, tu achètes et tu achètes deux cahiers pour l'année, c'est trop lourd. Oui, tu vas faire du papier-crayon, tu ne peux pas faire juste de la manipulation, parce qu'à un moment donné il faut que ce soit vérifié, mais il reste que c'est trop, et on a le stress d'être obligés de compléter sur 75 % de chaque cahier parce que les

> parents paient pour le matériel. Oui, il va y avoir des photocopies, mais juste de ce qu'on va juger que c'est important, mais dans le cahier aussi il faut que tu fasses des choix, parce que tu ne peux pas voir tout le cahier, alors c'est ça!. (Judith)

De son côté, Josée témoigne aussi d'une évolution progressive dans sa relation à cet outil, révélant une prise de distance qui traduit une transformation dans sa posture professionnelle face à cette contrainte institutionnelle :

> Oh oui, moi je regarde la définition là et ouf, c'est certain que mes trois résolutions ne sont pas du tout la même chose. Aujourd'hui, j'ai moins peur de lâcher le cahier en math qu'en français, alors qu'au début c'était le contraire. (Josée)

Ces témoignages montrent une réflexion sur l'utilisation du cahier d'activités et une prise de distance progressive. L'abandon progressif de cet outil représente une libération pour certaines enseignantes, qui ressentent un allègement du fardeau associé à son utilisation systématique.

4.2.5 La composante sociale

Certaines enseignantes rapportent avoir mis à disposition des élèves le matériel de manipulation plus fréquemment, au besoin, lors de la résolution de problèmes. Elles l'ont rendu disponible pour tous les élèves plutôt qu'uniquement à ceux en difficulté. Ce changement aurait permis d'éliminer le jugement que certains élèves ressentaient en allant chercher du matériel, réduisant ainsi leur gêne et favorisant leur engagement.

> Les élèves en difficulté, souvent parce qu'on dirait que d'aller chercher le matériel c'est pour les élèves qui avaient le plus de difficulté, maintenant tout le monde va chercher le matériel, les élèves ne sont pas gênés d'aller le chercher, ils ne se sentent pas jugés, tu sais, il est disponible et il y a plusieurs choix de matériel, c'est devenu comme une habitude. (Nora)

D'après les enseignant·es, la disponibilité du matériel semble également leur avoir permis de mieux soutenir les élèves en difficulté, en rendant les tâches accessibles dès le départ plutôt qu'en adaptant après coup :

> De là le mot accessibilité là. C'est pour ça que quelque part on a plus de temps avec les élèves en difficulté, parce que même avant de leur en donner, on la rend [la SP] accessible pour tous […]. Ça ne veut pas dire changer le nombre ou le réduire, c'est plutôt de modifier la façon dont on la donne pour qu'elle soit accessible à tous nos élèves. Tandis que si on la prend telle quelle, elle est peut-être accessible juste à nos élèves forts. Donc, pour nos élèves en difficulté, on n'a rien fait pour l'adapter. Mais là, en la rendant accessible avant de leur donner, on est allé chercher tous, même nos élèves en difficulté. (Constance)

Cette mise à disposition plus large du matériel illustre la composante sociale de la pratique enseignante (Robert et Rogalski, 2002). En évitant que seuls les élèves en difficulté y aient accès, ce changement réduit la gêne liée au jugement et favorise un climat inclusif et engageant, prenant ainsi en compte les interactions sociales et le contexte de la classe pour mieux soutenir tous les élèves dès le départ.

5. Discussion

Nous entamons cette discussion en rappelant que cette recherche émerge d'une demande de la part de la direction d'une école primaire pour accompagner des enseignantes volontaires dans leur compréhension et mise en œuvre des SP. Cette demande s'inscrit dans un constat plus large déjà relevé par Boublil-Eskimova (2010) et Lajoie et Bednarz (2014, 2016), à savoir une absence de repères clairs quant à la manière dont les enseignant·es peuvent concrètement mettre en œuvre la résolution de situations-problèmes en classe. Cette demande a ainsi conduit à la mise en place d'une recherche collaborative avec six enseignantes. Dans cet article, nous avons voulu présenter les résultats de notre étude en lien avec l'évolution des pratiques déclarées des enseignantes en matière de SP, en nous appuyant sur les composantes de la pratique de la double approche (Robert et Rogalski, 2002) et les caractéristiques de la SP.

Concrètement, un premier résultat sur lequel nous souhaitons revenir dans la discussion concerne l'évolution des pratiques selon les différentes composantes. En lien avec la composante cognitive des pratiques, notamment dans le choix des contenus et des tâches, les participantes, dans leurs discours à propos de leurs pratiques « nouvelles », soulignent l'importance de rendre les situations-problèmes accessibles, de les utiliser à des fins autres que l'évaluation et de s'éloigner de l'approche étapiste de la résolution. À notre avis, ces ajustements ne relèvent pas d'une simplification didactique, mais traduisent plutôt une volonté de recentrer l'attention des élèves sur des apprentissages porteurs de sens, en lien avec le développement de la compétence mathématique. Ce repositionnement en faveur de la construction des concepts s'oppose aux orientations des programmes officiels, que Lajoie et Bednarz (2016) décrivent comme valorisant une complexité des situations-problèmes fondée sur la gestion de contraintes, la mobilisation de connaissances en contexte et le traitement de données multiples, parfois au détriment d'une conceptualisation plus approfondie.

Sur le plan de la composante personnelle des pratiques (connaissances, expériences, représentations de l'enseignant·e), nous avons cité plusieurs extraits qui témoignent de l'évolution de leurs conceptions de la SP. Avant le début de la recherche, elles caractérisaient la SP comme étant composée d'un texte long, représentant un défi au niveau du vocabulaire, mettant en jeu plusieurs concepts et associée à une méthode de résolution unique. À l'issue des rencontres, les enseignantes ne décrivent plus la SP avec ces éléments et de nouvelles caractéristiques permettent désormais de redéfinir la SP. Les participantes considèrent qu'elle doit être accessible aux élèves, qu'elle peut se résoudre à l'aide de multiples méthodes et qu'elle dépend de la triade énoncé-enseignant·e-élève. Ce changement dans la composante personnelle se traduit par une modification au niveau de la composante médiative de pratiques (choix de déroulements des séances chez les enseignant·es) dans leurs pratiques déclarées. Par exemple, une enseignante indique qu'elle permet et accepte plusieurs démarches de résolution dans sa classe.

Cette évolution de la composante personnelle est également liée à la composante cognitive. Par exemple, les enseignantes déclarent utiliser la SP tant à des fins de construction, d'intégration et d'évaluation des connaissances, contrairement à leurs pratiques passées, où l'évaluation était le principal objectif de la SP. Concernant la composante institutionnelle de pratiques (prise en compte de programmes, horaires, instructions, etc.), c'est la libération du poids des évaluations et des contraintes relatives à l'utilisation du cahier qui témoigne le plus de l'évolution des pratiques. Enfin, du côté de la composante sociale, la prise en compte des élèves en difficulté dans la planification de la mise en place des SP et la démocratisation de la manipulation sont représentatives des pratiques nouvelles.

Ces évolutions de leurs pratiques peuvent être mieux comprises lorsqu'on les replace dans le contexte institutionnel dans lequel elles prennent forme. Dans une première étape de notre projet, les enseignantes avaient exprimé des conceptions instables de la situation-problème, ainsi que des difficultés à la mettre en œuvre, en raison de l'accumulation de références conceptuelles diverses influençant leur mémoire (Deschênes, 2016; Lessard et al., 2020). Nous avions alors identifié trois sources principales influençant ces conceptions : le rôle structurant des cahiers d'apprentissage, des formations ministérielles, et de la culture de rendement propre au système scolaire (Lessard et al., 2020). Comme l'ont souligné Sarrazy (2008) et Gosselin (2001), une telle instabilité peut mener à des pratiques soit extrêmement rigides, soit très imprécises, en s'appuyant sur des caractéristiques qui finissent par entraîner une forme de « démathématisation » de l'activité de résolution de problèmes. Dans ce contexte, la culture dominante — marquée par la recherche d'efficacité, la pression aux résultats et la valorisation de l'évaluation — oriente l'usage des SP vers des finalités essentiellement évaluatives. Or, la participation des enseignantes à notre recherche collaborative (Lessard et al., 2020) semble avoir permis un déplacement progressif de ces conceptions initiales, mais aussi de leurs pratiques. Les changements décrits précédemment ne s'inscrivent pas dans une simple logique d'ajustement, mais traduisent, pour nous, un déplacement plus large dans la posture professionnelle des enseignantes. En redéfinissant leur rapport aux SP, elles affirment une volonté de reprendre une part de contrôle sur les choix didactiques et pédagogiques, en s'écartant d'une approche centrée sur l'évaluation pour investir la SP comme levier de réflexion, de compréhension et de construction des apprentissages.

En posant notre regard sur les pratiques déclarées des enseignantes, nous avons également pu constater à quel point les différentes composantes se nourrisent mutuellement. Plus particulièrement, nous avons observé qu'au fil de la recherche collaborative, l'évolution de la compréhension de la SP a influencé les pratiques nouvelles des enseignantes. D'autres travaux se sont penchés sur le poids important de la composante personnelle sur les pratiques des enseignant·es. Par exemple, Sayac (2020) a montré que la dimension personnelle des pratiques des enseignantes impliquées dans une recherche-formation portant sur l'évaluation a été un facteur crucial à considérer dans le but de favoriser leur développement professionnel. De la même manière, nous pensons que les échanges au sein de groupes d'enseignant·es, leur permettant de confronter leurs croyances et représentations, sont bénéfiques pour leur développement professionnel en permettant d'améliorer et d'enrichir leurs pratiques (Sayac, 2020). C'est d'ailleurs ce qui semble se traduire dans les propos de Constance :

> Ce que j'aimais le plus par rapport à la façon qu'on a fait, c'est que vous ne nous imposiez pas une façon de penser, vous veniez nous former et c'est ça qui est bon. C'est sûr qu'il y a plein d'autres affaires bonnes aussi, l'espace était large. Vous avez mis cinq, six, prof. ensemble qui avaient une vision différente et on finit par avoir quelque chose de commun qui va faire surtout avancer nos élèves. (Constance)

Cependant, selon nous, ce n'est pas seulement l'espace d'échanges qui a permis cette évolution, mais aussi le fait que les enseignantes allaient faire de l'observation dans les classes de leurs collègues. Josée mentionne à cet effet que « même si au départ j'étais stressée que vous veniez observer dans ma classe, j'ai beaucoup aimé cette partie. Une de mes parties préférées c'était d'aller en classe et observer ». À ce sujet, Constance a d'ailleurs renchéri :

> Le fait d'aller voir les autres et de réaliser qu'on soit en premier, en deuxième, en trois en quatre [niveaux scolaires au primaire], on s'est rendu compte qu'on avait les mêmes peurs, les mêmes angoisses. C'était le fun de voir ça et de pouvoir se rajuster après en salle de classe. (Constance)

Si nous empruntons le concept de ZPDP (zone proximale de développement des pratiques) à Rogalski et Robert (2015), nous constatons que, pour permettre l'évolution des pratiques plutôt que simplement des connaissances liées aux exercices ou aux processus, il est nécessaire de travailler sur des éléments dont les participant·es ont conscience et sur lesquels ils ressentent des besoins (Robert et Vivier, 2013). Il est essentiel de maintenir la continuité des expériences tout en naviguant à travers des repères incohérents en ce qui concerne la SP afin de favoriser une transformation de leurs pratiques déclarées. Nous pensons que l'évolution des pratiques a été rendue possible, en somme, grâce à des moments de (ré)organisation et de (ré)interprétation des différentes expériences (Giordan, 1996) vécues simultanément entre praticiennes et chercheuses, inscrites dans la réalité des enseignantes à travers une approche de recherche collaborative où enseignantes et chercheuses occupent une posture horizontale et où leurs champs d'expertise sont continuellement mis à contribution (Lessard et al., 2017). Cette reconnaissance a été maintenue tout au long du processus de recherche dans la préservation de la « double vraisemblance » (Dubet, 1994) afin que « le savoir produit par la recherche [demeure] crédible pour le chercheur et pour le praticien (p.128) » (Pépin et Desgagné, 2017).

Conclusion

Cette étude, menée en réponse à une demande spécifique d'une école primaire confrontée à des besoins liés à la compréhension des enseignant·es de situations-problèmes en mathématiques, met en lumière des enjeux récurrents et toujours d'actualité, tant pour les milieux de pratique que pour la recherche. Bien qu'elle repose sur une rencontre-bilan unique, elle révèle l'évolution des pratiques déclarées des enseignantes quant aux situations-problèmes, les interrelations entre les différentes composantes de la pratique (Robert et Rogalski, 2002) ainsi que le rôle central de la composante personnelle dans la transformation de leur posture professionnelle.

Au-delà du contexte singulier dans lequel cette recherche s'inscrit, elle illustre plus largement les conditions systémiques et épistémiques du développement professionnel des enseignant·es. Elle met en évidence les tensions entre des prescriptions institutionnelles souvent normatives (évaluation, rendement, injonctions curriculaires) et la possibilité, pour les praticien·nes, de redéfinir leurs pratiques à partir de leurs savoirs d'expérience. Dans cette perspective, elle renforce la légitimité des dispositifs collaboratifs qui soutiennent une professionnalité enseignante réflexive, critique et située.

Références

Astolfi, J. (1993). Placer les élèves en « situation-problème »? *Probio-Revue*, 16(4), 311-321.

Aurousseau, E., Jacob, E., Laplume, J., Coté, C. et Couture, C. (2020). Recherche collaborative : défis relevés de chercheuses en herbe. Revue hybride de l'éducation, 4(1), 132–149. https://doi.org/10.1522/rhe.v4i1.975

Barabé, G. (2022). *Étude de l'évolution de tâches mathématiques routinières à travers leur exploitation collective en classe* [thèse de doctorat, Université du Québec à Montréal]. Archipel. https://archipel.uqam.ca/16441/

Beaulieu, J., Lessard, G., Deschênes, G. et Bergeron, J. (2016). Complexité des textes : Un obstacle à la résolution de problèmes mathématiques? *Vivre le primaire*, *29*(2), 66–68.

Benedict, A. E., Williams, J., Brownell, M. T., Chapman, L., Sweers, A., et Sohn, H. (2023). Using lesson study to change teacher knowledge and practice: The role of knowledge sources in teacher change. *Teaching and Teacher Education, 122,* 103951. https://doi.org/10.1016/j.tate.2022.103951

Boublil-Eskimova, H. (2010). Analyse des compétences et des contenus mathématiques proposés par la réforme pour l'enseignement de la géométrie, en regard de la théorie des situations didactiques. *Bulletin AMQ*, *50*(4), 27-48.

Brousseau, G. (2005). Recherches en éducation mathématique. *Bulletins de l'APMEP*, *457*, 213-224.

Brun, J. (1997). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes. CM1, Cycle 3.* Hatier Ermel.

Clanet, J. et Talbot, L. (2012). Analyse des pratiques d'enseignement : éléments de cadrages théoriques et méthodologiques. *Phronesis*, *1*(3), 4–18. https://doi.org/10.7202/1012560ar

Demonty, I. et Fagnant, A. (2014). Tâches complexes en mathématiques : difficultés des élèves et exploitations collectives en classe. *Éducation et francophonie*, 42(2), 173-189. https://doi.org/10.7202/1027912ar

Deschênes, G. (2016). *Les conceptions relatives à la notion de situation-problème en mathématiques chez des enseignantes du primaire en Outaouais* [mémoire de maitrise, Université du Québec en Outaouais]. Dépôt institutionnel de l'UQO. https://di.uqo.ca/id/eprint/837/

Desgagné, S. (1994). *À propos de la discipline de classe : analyse du savoir professionnel d'enseignantes expérimentées du secondaire en situation de parrainer des débutants.* [thèse de doctorat inédite]. Université Laval.

Desgagné, S. (1998). La position du chercheur en recherche collaborative: illustration d'une démarche de médiation entre culture universitaire et culture scolaire. *Recherches qualitatives*, *18*, 77-105. https://doi.org/10.7202/000305ar

Desgagné, S. (2001). La recherche collaborative : nouvelle dynamique de recherche en éducation. Dans M. Anadón (dir.), *Nouvelles dynamiques de recherche en éducation* (p. 51-76). Les presses de l'Université Laval.

Desgagné, S., Bednarz, N., Couture, C., Poirier, L. et Lebuis, P. (2001). L'approche collaborative de recherche en éducation : un rapport nouveau à établir entre recherche et formation. *Revue des sciences de l'éducation*, 27 (1), 33-64. https://doi.org/10.7202/000305ar

Douady, R. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire et de surface plane. *Educational Studies in Mathematics, 20(4),* 387-424.

Dubet, F. (1994). *Sociologie de l'expérience*. Éditions du Seuil.

Fagnant, A. et Vlassis J. (2010). Le rôle de la résolution de problèmes dans les apprentissages mathématiques : questions et réflexions. *Education Canada*, 50(1), 50-52.

Fortin, M. F. et Gagnon, J. (2010). *Fondements et étapes du processus de recherche : Méthodes quantitatives et qualitatives (2e éd.)*. Chenelière Éducation.

Giordan, A. (1996). Les conceptions de l'apprenant comme tremplin pour l'apprentissage. *Sciences Humaines*, 12, 48-50.

Gosselin, M. (2001). *Les conceptions du rôle d'enseignants associés lors d'une supervision de stage au secondaire* [thèse de doctorat inédite]. Université du Québec à Montréal.

Gouvernement du Québec. (1988). *Fascicule K.* Ministère de l'Éducation.

Gouvernement du Québec. (2001). *Programme de formation de l'école québécoise. Éducation préscolaire, enseignement primaire.* Ministère de l'Éducation.

Lajoie, C. et Bednarz, N. (2014). La résolution de problème en mathématiques au Québec : évolution des rôles assignés par les programmes et les conseils donnés aux enseignants. *Éducation et francophonie, 42*(2), 7-23. https://doi.org/10.7202/1027903ar

Lajoie, C. et Bednarz, N. (2016). La notion de situation-problème en mathématiques au début du XXIe siècle au Québec : rupture ou continuité? *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies, 16*(1), 1-27. https://doi.org/10.1080/14926156.2014.993443

L'Écuyer, R. (1990). *Méthodologie de l'analyse développementale du contenu. Méthode GPS et concept de soi*. Presses de l'Université du Québec.

Lessard, G., Bergeron, J., Demers, S. et Anwandter Cuellar, N. S. (2017). L'approche écocollaborative en éducation : En quête d'homéostasie et de self-empowerment. *Phronesis*, *6*(1–2), 177–188.

Lessard, G., Deschênes, G., Anwandter Cuellar, N., Bergeron, J. et Leroux, M. (2020). La situation-problème mathématique à l'école primaire : ce que les conceptions d'enseignantes nous révèlent. *Revue des sciences de l'éducation, 46*(3), 7-37. https://doi.org/10.7202/1075986ar

Lessard, G. (2011). *Acculturation institutionnelle du chercheur, de l'enseignant et des élèves de 1re secondaire présentant des difficultés d'apprentissage dans la conception et la gestion de situations-problèmes impliquant des nombres rationnels* [Thèse de doctorat, Université de Montréal]. Papyrus. https://doi.org/10.71781/5050

Martin, V. et Theis, L. (2008). Rôle de l'élève à risque au sein d'une équipe hétérogène dans la résolution d'une situation-problème liée aux probabilités. Dans L. Theis (dir.), *Enseignement des mathématiques et interdisciplinarité. Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec* (p. 97-110). Université de Sherbrooke.

Masselot P. et Robert A. (2007) Le rôle des organisateurs dans nos analyses didactiques de professeurs enseignant les mathématiques. *Recherche et formation* 56, 15-32.

Paillé, P. et Mucchielli, A. (2012). *L'analyse qualitative en sciences humaines et sociales*. Armand Colin. https://doi.org/10.3917/arco.paill.2012.01

Pallascio, R. (2005). Les situations-problèmes : un concept central du nouveau programme de mathématique. *Vie pédagogique*, 136, 32-35.

Pépin, M. et Desgagné, S. (2017). La double vraisemblance au fondement de la collaboration de recherche : retour sur la démarche de coconstruction d'un projet entrepreneurial à l'école primaire. *Phronesis*, *6*(1-2), 126–139. https://doi.org/10.7202/1040223ar

Robert, A. et Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : Une double approche. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 2(4), 505-528. https://doi.org/10.1080/14926150209556538

Robert A. et Vivier L. (2013) Analyser des vidéos sur les pratiques des enseignants du second degré en mathématiques, *Éducation et didactique* 7-2, 115-144.

Rogalski, J. et Robert, A. (2015). De l'analyse de l'activité de l'enseignant à la formation des formateurs : Le cas de l'enseignement des mathématiques dans le secondaire. Dans V. Lussi Borer (dir.), *Analyse du travail et formation dans les métiers de l'éducation* (p. 93-113). De Boeck Supérieur. https://doi.org/10.3917/dbu.lussi.2015.01.0093

Sarrazy, B. (2003). Le problème d'arithmétique dans l'enseignement des mathématiques à l'école primaire de 1887 à 1990. *Carrefours de l'éducation, 1*(15), 82-101. https://doi.org/10.3917/cdle.015.0082

Sarrazy, B. (2008). Différencier les hétérogénéités dans l'enseignement des mathématiques : tenants idéologiques et enjeux didactiques. Dans A. Rouchier (dir.), *Perspectives en didactique des mathématiques* (p. 115-134). Éditions La pensée sauvage.

Sayac, N. (2020). Poids de la composante personnelle dans le développement professionnel d'enseignants engagés dans des dispositifs de recherche-formation. *Mesure et évaluation en éducation, 43*(1), 95–122. https://doi.org/10.7202/1076967ar

Schoenfeld, H. (1985). *Mathematical Problem Solving.* Academic Press.

Theis, L. et Gagnon, L. (2013). *L'apprentissage à travers des situations-problèmes mathématiques, bases théoriques et situations pratiques.* Presses de l'Université du Québec.

Vlassis, J., Mancuso, G. et Poncelet, D. (2014). Le rôle des problèmes dans l'enseignement des mathématiques : analyse des croyances d'enseignants du primaire. *Cahiers des sciences de l'éducation*, 36(1), 143-175.

Raisonner, conceptualiser, représenter et leurs rapports dialectiques : la pensée fonctionnelle comme une totalité dynamique

Virginie ROBERT
Université de Sherbrooke
Virginie.Robert2@usherbrooke.ca

Résumé : Cet article propose une caractérisation opératoire de la pensée fonctionnelle qui permet de rendre compte de la richesse et de la complexité de son déploiement dans l'activité. En nous appuyant sur la théorie de l'objectivation (Radford, 2011, 2021a) et sur des éléments d'un cadre conceptuel de la pensée fonctionnelle (Robert, 2024), nous proposons une caractérisation de cette dernière qui s'appuie sur ses principales manières d'agir et de réfléchir en activité et les rapports dialectiques qui les unissent. Nous illustrons ensuite les résultats de sa première mise à l'épreuve empirique (Robert, 2024). Ces derniers révèlent non seulement de nouvelles subtilités de la pensée fonctionnelle, mais aussi la richesse de notre approche consistant à traiter la pensée qui se déploie en activité comme une totalité dynamique.

Mots-clés : pensée fonctionnelle, raisonner, conceptualiser, représenter, totalité dynamique

Functional thinking as a dynamic totality : reasoning, conceptualizing, representing and their dialectical relationships

Abstract: This article proposes an operational characterization of functional thinking that accounts for its richness and complexity as it unfolds within activity. Drawing on the Theory of Objectification (Radford, 2011, 2021a) and elements of a conceptual framework for functional thinking (Robert, 2024), we propose a characterization based on the principal ways of acting and reflecting as they unfold within activity, along with the dialectical relationships that bind them. We then discuss the results of an initial empirical trial (Robert, 2024). The results reveal not only subtle nuances of functional thinking but also the value of conceiving thought as a dynamic totality.

Keywords: functional thinking, reasoning, conceptualizing, representing, dynamic totality

Revue québécoise de didactique des mathématiques, 2025, *vol 6*(1), p. 61-91.
https://doi.org/10.71403/qp71gr97

Introduction

Depuis plusieurs années, la pensée fonctionnelle occupe une place grandissante dans les recherches. Toutefois, elle est le plus souvent abordée à partir de contextes d'étude spécifiques (p. ex. des activités de généralisation), ce qui rend difficile l'élaboration d'une définition de cette forme de la pensée mathématique qui fasse consensus. Cet article vise à présenter une caractérisation opératoire de la pensée fonctionnelle offrant une manière de l'étudier qui rende compte du déploiement de ses principales manières d'agir et de réfléchir dans l'activité. Cette caractérisation opératoire s'appuie sur les résultats de notre recherche doctorale (Robert, 2024) dont l'objectif principal était de documenter la pensée fonctionnelle qui émerge et se déploie dans des activités d'enseignement-apprentissage.

Pour en arriver à présenter notre manière d'approcher la pensée fonctionnelle, il importe d'abord de bien saisir les enjeux qui nous ont poussés à la développer. Nous entamons donc cet article par la présentation des points de tension qui ont motivé sa construction, dont l'absence d'un consensus sur une caractérisation de la pensée fonctionnelle dans les travaux existants, le manque d'ancrage théorique permettant notamment de distinguer pensée et raisonnement, ainsi que le besoin de disposer d'une caractérisation apte à saisir la pensée fonctionnelle dans toute la richesse de son déploiement dans l'activité.

1. Pourquoi une caractérisation opératoire de la pensée fonctionnelle?

Prenant appui sur les fondements de la théorie de l'objectivation, Radford (2021a) définit la pensée mathématique comme un système complexe de manières d'agir et de réfléchir en accord avec des formes mathématiques de pensées culturellement et historiquement constituées. La pensée fonctionnelle est ici conçue comme l'une des formes de la pensée mathématique se distinguant de ses autres formes par la nature des activités dans lesquelles elle est mobilisée. Le déploiement de la pensée étant indissociable de l'activité (Radford, 2021a), nous nous intéressons d'emblée à ces activités qui peuvent provoquer le déploiement de la pensée fonctionnelle. Pour ce faire, il est intéressant de se référer au développement historique du concept de fonction. Selon Freudenthal (1983/2002) et Comin (2005), le concept de fonction est issu de réflexions et de questionnements sur les phénomènes de changement et les lois de variation qui régissent le monde. D'ailleurs, c'est notamment grâce à la modélisation fonctionnelle que nous arrivons à comprendre et décrire le changement en y dégageant les différentes variables et les relations de dépendances qui les unissent (Freudenthal, 1983/2002). Ainsi, la pensée fonctionnelle ne se restreint pas à l'usage explicite du concept de fonction, mais réfère davantage aux manières de penser les relations fonctionnelles. D'ailleurs, selon Smith (2008), elle émerge et se déploie dès qu'une personne s'engage dans une activité et fait le choix de s'intéresser à la relation entre deux ou plusieurs quantités variables. Par conséquent, à l'instar de Smith (2008), nous adoptons la posture selon laquelle la pensée fonctionnelle peut se développer dans des activités mettant en jeu une ou plusieurs relations fonctionnelles, et ce, même avant l'introduction du concept de fonction comme objet explicite d'apprentissage. Nous pouvons ainsi définir sommairement la pensée fonctionnelle comme des manières d'agir et de réfléchir dans des activités mettant en jeu une ou plusieurs relations fonctionnelles.

Récemment, la pensée fonctionnelle a fait l'objet de plusieurs recherches (p. ex. Ben Nejma,2020; Blanton et Kaput, 2004, 2011; Carraher et Schliemann, 2007; Cooper et Warren, 2011; Moss et al., 2020; Robert, 2018; Stephens et al., 2017) qui nous ont permis d'en apprendre davantage quant à son importance ainsi que sur les différents enjeux relatifs à son développement. Toutefois, malgré ces recherches, il n'existe pas de consensus quant à une définition ou à une caractérisation de la pensée fonctionnelle (Pitallis et al., 2020; Robert, 2018).

Jusqu'ici, la plupart des recherches qui se sont intéressées à la pensée fonctionnelle ont été menées dans le contexte des recherches du courant Early Algebra[1] visant à promouvoir le développement de la pensée algébrique (p. ex. Beatty et al., 2013; Blanton et al., 2015; Pinto et Cañadas, 2021; Stephens et al., 2017). Ces recherches, faites principalement auprès d'élèves du primaire, mobilisent la pensée fonctionnelle davantage comme une approche favorisant le développement de la pensée algébrique. Autrement dit, la pensée fonctionnelle y est invoquée par l'entremise de tâches (souvent des tâches de généralisation de suites à motifs croissants ou de situations contextualisées) considérées comme étant propices au développement de la pensée algébrique. Les résultats de ces différentes recherches sont pertinents pour nous permettre de bien comprendre les enjeux liés au développement de la pensée fonctionnelle en plus de mettre en lumière le potentiel des élèves face à des tâches fonctionnelles. Toutefois, les définitions ou les caractérisations de la pensée fonctionnelles proposées dans ces recherches demeurent partielles : elles sont tantôt spécifiquement adaptées aux tâches de généralisation de relations fonctionnelles, tantôt adaptées à celles de modélisation de situations spécifiques mettant en jeu une relation fonctionnelle. De plus, elles se déclinent généralement sous la forme d'une liste de raisonnements qui peuvent émerger dans l'activité ou des registres de représentations mobilisés par les élèves, laissant de côté toute la dimension conceptuelle de la pensée fonctionnelle. Par

[1] Selon Squalli (2015), *Early Algebra* est un courant qui réfère à la fois à un domaine de recherche, à une approche curriculaire, mais aussi à un domaine de formation des personnes enseignantes.

exemple, dans leur recherche de 2011, Blanton et Kaput mentionnent de manière explicite :

> Nous concevons la pensée fonctionnelle de manière générale comme « englobant la construction et la généralisation de patterns et de relations à l'aide d'outils linguistiques et de représentations variés, ainsi que le traitement des relations généralisées des fonctions comme des objets mathématiques à part entière, utiles en elles-mêmes (p. 8, traduction libre[2]).

Ces auteurs opérationnalisent ensuite cette définition par trois manières typiques de traiter les relations fonctionnelles qui sont utilisées pour catégoriser les raisonnements des élèves dans des activités de généralisation : les raisonnements récursif, covariationnel et par correspondance. Dans un même ordre d'idées, la définition de Smith (2008), utilisée dans différentes recherches (p. ex. Blanton et Kaput, 2004; Tanışlı, 2011; Warren et al., 2006), conçoit la pensée fonctionnelle comme une « pensée représentationnelle qui met l'accent sur la relation entre deux ou plusieurs quantités variables et plus spécifiquement les modes de pensée qui permettent de passer de cas spécifiques vers la généralisation de la relation » (p. 143, traduction libre[3]). Cette définition, adaptée elle aussi davantage à des activités de généralisation, n'offre pas de précision théorique sur ce qui est entendu par « modes de pensée ». Le cadre de référence qui l'accompagne expose plutôt six étapes consécutives de ce qu'il nomme être la construction des fonctions : 1) s'engager dans une activité de nature conceptuelle; 2) identifier deux ou plusieurs quantités qui varient et porter son attention sur la relation entre ces quantités variables; 3) extraire des couples de données de cette situation et les consigner dans un registre de représentation (tabulaire, graphique ou iconique); 4) identifier les régularités de ces données; 5) coordonner ces régularités avec les actions nécessaires à la réalisation de l'activité; 6) utiliser cette coordination pour créer une représentation de la régularité de la relation (Smith, 2008). De son côté, la définition de Stölting (2008) désigne la pensée fonctionnelle comme étant une manière typique de penser lors du travail sur des dépendances fonctionnelles. L'opérationnalisation de cette définition se décline sous la forme de compétences à détecter, décrire, produire et reproduire des dépendances fonctionnelles dans toutes les représentations usuelles et sur la compétence à faire, à tester et à réviser

---

2 « We broadly conceptualize functional thinking to incorporate building and generalizing patterns and relationships using diverse linguistic and representational tools and treating generalized relationships, of functions, that result as mathematical objects useful in their own right » (Blanton et Kaput, p. 8).

3 « representational thinking that focuses on the relationship between two (or more) varying quantities, specifically the kinds of thinking that lead from specific relationships (individual incidences) to generalizations of that relationship across instances » (Smith, 2008, p. 143).

des hypothèses sur la nature de la relation et plus spécifiquement sur l'influence de changements dans une variable. Ici, c'est la modélisation de phénomènes qui est prise davantage en considération et certains concepts centraux de la pensée fonctionnelle sont nommés comme ceux de dépendance et de covariation. Toutefois, l'opérationnalisation proposée semble surtout offrir un cadre pour reconnaitre certaines étapes du travail avec les relations fonctionnelles, sans pour autant offrir des balises pour comprendre ce qui anime cette activité de l'élève avec les relations fonctionnelles et donc le déploiement de sa pensée fonctionnelle. Il apparait ainsi qu'aucune définition ne parvienne à englober l'ensemble des manières d'agir et de réfléchir de la pensée fonctionnelle qui ont le potentiel de se déployer dans la diversité des activités mettant en jeu une relation fonctionnelle.

En réponse à ceci et dans une perspective de proposer un modèle praxéologique de référence de la pensée fonctionnelle pour procéder à l'analyse de tâches de manuels scolaires, nous avions développé, en 2018, une première caractérisation de la pensée fonctionnelle qui comprenait trois composantes : la mobilisation d'un ensemble de raisonnements particuliers, un rapport aux concepts et une manière de communiquer. Cette caractérisation s'appuyait notamment sur la manière tridimensionnelle d'opérationnaliser la pensée algébrique de Squalli et al. (2020), les quelques définitions de la pensée fonctionnelle trouvées dans les recherches, dont celles citées ci-haut, et un cadre conceptuel du concept de fonction (Robert, 2018). Or, bien que pertinente pour les besoins de notre recherche de l'époque, cette caractérisation était insuffisante pour répondre à nos nouvelles questions de recherche, celles-ci nécessitant une définition permettant de mieux saisir et de documenter la pensée qui se déploie « dans » l'activité. Entre autres, pour répondre à nos objectifs de recherche doctorale, nous avions besoin d'une définition qui puisse rendre compte du mouvement de la pensée dans l'activité d'enseignement-apprentissage puisque l'un de nos objectifs était de documenter les rapports dialectiques qu'entretiennent les principales manières d'agir et de réfléchir de la pensée fonctionnelle qui se déploient dans celle-ci. Par conséquent, nous souhaitions que notre caractérisation rende possible l'étude des raisonnements qui émergent et se transforment dans l'activité et qu'elle ne se limite pas à la mobilisation de raisonnements prédéterminés théoriquement. Dans un même ordre d'idées, nous voulions qu'elle nous permette de décrire et de comprendre la manière dont les élèves conceptualisent, comment évoluent leurs processus de conceptualisation et comment elles et ils appréhendent et mobilisent les différents concepts rencontrés dans l'activité. Finalement, il était important que notre nouvelle caractérisation permette d'aller au-delà d'une vérification de la capacité des élèves à utiliser certains registres de représentation dont ils ont préalablement appris les principales caractéristiques par un enseignement formel.

Nous souhaitions qu'elle offre l'opportunité de documenter, au fil de l'activité, les manières dont les élèves mobilisent, appréhendent et développent leur compréhension des divers registres de représentation qui apparaissent dans l'activité ou qui sont imposés par la tâche.

Enfin, la dernière raison qui a motivé notre choix de produire notre propre caractérisation de la pensée fonctionnelle est que les recherches sur cette dernière ne semblent pas s'appuyer sur un cadre théorique qui rendrait explicite ce qui est entendu par « pensée » ou encore par « pensée mathématique ». Entre autres, certaines recherches utilisent pensée fonctionnelle et raisonnement fonctionnel comme des synonymes. C'est le cas de la recherche de Stephens et al. (2017) où les expressions « pensée fonctionnelle », « pensée par correspondance » et « pensée covariationnelle » sont utilisées tout autant et dans les mêmes contextes que « raisonnement fonctionnel », « raisonnement par correspondance » et « raisonnement covariationnel ». Considérant ceci, nous avions la volonté que notre caractérisation de la pensée fonctionnelle s'appuie sur des fondements théoriques et que les références à ce que nous entendons notamment par pensée, par raisonnement et par activité soient explicites. Ce sont ces fondements que nous présentons dans la section suivante.

2. Les assises théoriques de notre caractérisation

Dans cette section, nous exposons d'abord les principaux concepts de la théorie de l'objectivation (TO) qui constituent les assises théoriques de notre caractérisation. Nous abordons ensuite certains piliers d'un cadre conceptuel du concept de fonction qui permet de cerner davantage ce que celle-ci recouvre. Cette mise en place théorique permettra de soutenir la présentation de notre caractérisation opératoire de la pensée fonctionnelle.

2.1 La théorie de l'objectivation : les concepts essentiels

La théorie de l'objectivation de Radford (2011, 2021a) s'inscrit à l'intérieur des théories éducatives socioculturelles et se dote d'une vision de l'apprentissage qui met en valeur la formation d'individus critiques, réflexifs et éthiques qui se positionnent dans des pratiques mathématiques historiquement et culturellement constituées. Dans notre quête de caractérisation de la pensée fonctionnelle, nous nous appuyons d'abord sur les définitions que nous offre la TO de la pensée mathématique, de la pensée anthropologique et de la pensée subjective.

La pensée est conçue ici comme étant non mentaliste au sens où penser n'est pas vu comme un acte privé, purement intracérébral et indépendant de tout facteur externe (Radford, 2011). Pour Radford (2011), la pensée est sociale, culturelle et sensible. Elle peut être décrite comme un mouvement dialectique entre la réalité qui est construite historiquement et culturellement et l'individu qui s'y inscrit, la réfléchit et la modifie en fonction de ses propres interprétations et sa subjectivité. À ce titre, la pensée mathématique est définie par la TO comme un système complexe de manières d'agir et de réfléchir en accord avec des formes mathématiques de pensées culturellement et historiquement constituées (Radford, 2021a). La pensée fonctionnelle peut alors y être traitée comme étant l'une des formes de la pensée mathématique.

Plus précisément, la pensée mathématique, en son sens anthropologique, surpasse l'individu. Elle correspond à une synthèse culturellement et historiquement constituée du labeur humain et elle n'est que pure possibilité (Radford, 2011). En ce sens, la pensée fonctionnelle au sens anthropologique correspond à une entité historico-culturelle et elle existe comme une possibilité toujours latente d'agir et de réfléchir de certaines manières dans une activité invoquant une relation fonctionnelle. Cette pensée, que nous qualifions d'idéelle au sens où elle relève de l'idée et qu'elle est inatteignable, a un caractère général et elle continue d'évoluer alors que de nouvelles activités humaines l'enrichissent. De son côté, la pensée subjective correspond à l'actualisation de la pensée anthropologique dans l'activité (Radford, 2011). Elle est ce qui apparait, la matérialisation d'une potentialité culturelle. C'est d'ailleurs par la médiation offerte par une activité qu'un individu peut rencontrer la pensée fonctionnelle historico-culturelle et que la pensée fonctionnelle subjective peut apparaitre et se développer. Ainsi, comme la pensée subjective correspond à une actualisation de la pensée au sens anthropologique, nous définissons la pensée fonctionnelle subjective comme ces manières d'agir et de réfléchir qui se déploient dans des activités mettant en jeu une ou plusieurs relations fonctionnelles.

Pour bien saisir le caractère unique de la pensée subjective, il est important de rendre explicite la manière dont la TO conçoit le sujet comme un être-dans-le-monde en perpétuel développement et l'activité d'enseignement-apprentissage. D'abord, la TO conçoit le sujet, qu'il s'agisse des personnes enseignantes ou des élèves, comme une entité en perpétuel développement qui est indissociable de sa culture et du monde social (Radford, 2021a). En effet, selon Radford (2022), c'est par la relation qu'il entretient avec le monde et tout ce qui le constitue que le sujet arrive à développer sa compréhension de ce dernier. En contexte d'étude d'un phénomène d'enseignement-apprentissage, les élèves et les personnes enseignantes sont considérés comme des sujets singuliers en constante transformation qui sont aux prises avec des savoirs culturels, vivent, souffrent et apprennent avec d'autres. La pensée fonctionnelle subjective que les sujets développent de manière active est donc toujours unique puisqu'elle est empreinte de toute la singularité du sujet, de sa culture et de toutes ses expériences passées.

Enfin, l'activité et plus particulièrement l'activité d'enseignement-apprentissage, est l'unité d'analyse à partir de laquelle documenter et expliquer l'apprentissage (Radford, 2024). Plus particulièrement, l'activité d'enseignement-apprentissage est conçue comme un système dynamique et complexe qui se révèle dans le temps et l'espace et qui est mis en mouvement par l'énergie des sujets qui s'y engagent (Radford, 2019). C'est un système qui est « à la fois sensible, matériel, idéel, affectif et émotionnel que forment les individus et qui, en même temps les enveloppe et les dépasse » (Radford, 2019, p. 323). Pour bien mettre en valeur l'essence de l'activité d'enseignement-apprentissage, Radford renvoie au concept de travail conjoint (qu'il traduit de l'expression anglaise *joint labour*) qui réfère à une manière de voir l'enseignement et l'apprentissage comme une seule et même activité que la personne enseignante et les élèves mettent en œuvre ensemble et dans laquelle tous les participants s'affirment et se réalisent en tant qu'humains (Radford, 2020). Enseigner dépasse ainsi la simple transmission de savoirs puisque l'activité d'enseignement-apprentissage est imprégnée des intentions et des personnalités des sujets qui s'y impliquent, mais aussi de toutes les possibilités cognitives et matérielles qu'offrent le langage, les signes et les artéfacts (Radford, 2021a). Puisque la pensée se déploie et se développe en activité, ceci signifie que la pensée fonctionnelle subjective qui émerge dans l'activité d'enseignement-apprentissage est nécessairement teintée par les spécificités de l'activité et des sujets qui s'y impliquent. Notre caractérisation vise ainsi à offrir une manière d'aborder la pensée qui permette d'en saisir toute la richesse et la dynamique, en mettant notamment en lumière les diverses prises de conscience qui l'animent.

2.2 Quelques éléments d'un cadre conceptuel de la fonction

La pensée fonctionnelle au sens anthropologique étant idéelle et impossible à atteindre, elle est aussi difficile à définir. Or, certains éléments issus d'une analyse épistémologique du concept de fonction et des recherches s'y étant intéressées nous permettent de poser quelques piliers théoriques pour soutenir notre caractérisation. Ici, l'idée n'est pas de proposer une grille pour pouvoir évaluer la pensée fonctionnelle en fonction de la présence ou de l'absence d'éléments théoriques prédéfinis, mais plutôt de nous assurer que notre caractérisation permette d'étudier ce qui a déjà été documenté dans les recherches.

2.2.1 Les raisonnements

D'entrée de jeu, nous adoptons la posture selon laquelle les raisonnements sont considérées comme des manières particulières d'agir et de réfléchir de la pensée fonctionnelle. Ainsi, cette dernière les englobe tout en ne s'y restreignant pas. Les recherches qui se sont intéressées à l'enseignement-apprentissage des fonctions, à la pensée fonctionnelle ou qui ont plus spécifiquement portées sur l'épistémologie du concept de fonction ont permis de mettre en lumière certains raisonnements qui émergent dans le travail avec et sur les relations fonctionnelles. Nous abordons ici le raisonnement covariationnel, le raisonnement par correspondance et le raisonnement récursif qui ont notamment été identifiés par Confrey et Smith (1991).

D'abord, le raisonnement covariationnel est défini par (Carlson et al., 2002) comme une activité cognitive qui consiste à coordonner deux grandeurs qui varient en même temps en considérant la manière dont celles-ci évoluent l'une par rapport à l'autre. L'une des spécificités du raisonnement covariationnel consiste en la nécessité d'envisager la variation simultanée de deux quantités variables (Thompson et Carlson, 2017). Concrètement, le raisonnement covariationnel peut être décrit comme un processus dynamique qui se déploie par l'observation de la variation que la variable dépendante subit lors de la variation de la variable indépendante (Doorman et al., 2012). Différentes recherches soulignent d'ailleurs que le raisonnement covariationnel doit être considéré comme un processus puisqu'il se développe de manière progressive à travers le travail sur et avec une ou plusieurs relations fonctionnelles (p. ex. Carlson et al., 2002).

De son côté, le raisonnement par correspondance consiste à chercher comment obtenir une valeur de la variable dépendante à partir de la valeur correspondante de la variable indépendante. La correspondance est associée au lien interne entre les grandeurs (Passaro, 2015) et nécessite ainsi de prendre en considération la relation entre les paires correspondantes de variables indépendante et dépendante (Smith, 2008). Ce raisonnement se manifeste notamment par la recherche de la règle de correspondance.

Le troisième raisonnement identifié par Confrey et Smith (1991) est le raisonnement récursif. Ce type de raisonnement se déploie par la recherche de la régularité dans la variation d'une seule variable (Warren et Cooper, 2006), comme lorsque la régularité est recherchée dans une suite de nombre sans qu'un lien ne soit fait avec le rang des différents termes (p. ex. 1, 3, 5, 7…). Pour différentes personnes chercheures le raisonnement récursif serait constitutif de la pensée fonctionnelle (Beatty et al., 2013; Moss et McNab, 2011; Stephens et al., 2017). Selon nous, dans le cas d'un travail explicite avec les relations fonctionnelles, il est nécessaire de s'intéresser à la relation entre les variables impliquées (par exemple entre le terme et son rang) et ne pas seulement chercher à déterminer la régularité dans la variation de la variable dépendante. Ainsi, bien que le raisonnement récursif ne soit pas négligeable pour le développement de la pensée fonctionnelle, nous le considérons plutôt comme une forme primitive de la pensée fonctionnelle puisqu'il ne prend pas appui sur la relation fonctionnelle qui lie les deux quantités variables impliquées.

2.2.2 Les concepts

Un second aspect essentiel à considérer dans notre caractérisation relève de la prise en considération des différents concepts qui sous-tendent celui de fonction. Mentionnons d'abord que selon Radford (2021a), un concept doit être considéré comme une entité à la fois subjective et objective, matérielle et idéale qui s'exprime dans l'activité pratique et concrète du sujet et ne devrait ainsi pas être conçu comme une reproduction mentale de l'essence d'un objet. Un concept est quelque chose qui s'applique à une gamme de situations et qui doit entrer en dialogue avec de réelles possibilités d'actions pour permettre au sujet d'agir et de réfléchir en activité (Radford, 2021b). Par ailleurs, les concepts ne doivent pas être considérés comme des entités isolées puisqu'ils s'organisent sous la forme de systèmes de concepts (Radford, 2015b). À cet effet, Benoit (2022) mentionne que « prendre conscience d'un concept, c'est en partie l'insérer progressivement en rapport dialectique avec ses autres concepts, c'est développer le réseau conceptuel global » (p. 86).

Pour Dreyfus et Eisenberg (1982), la fonction ne pourrait être un concept en soi que si l'ensemble des concepts fondamentaux qui la constituent sont pris en considération. Il est ici question notamment des concepts de variable, de variation, de covariation, de dépendance et de correspondance. Au sens anthropologique, la pensée fonctionnelle s'appuie ainsi sur un système de concepts qui comprend notamment les concepts mentionnés. Dans notre recherche doctorale, nous avons représenté ce système de concepts par la schématisation suivante (figure 1) en nous inspirant du modèle atomique.

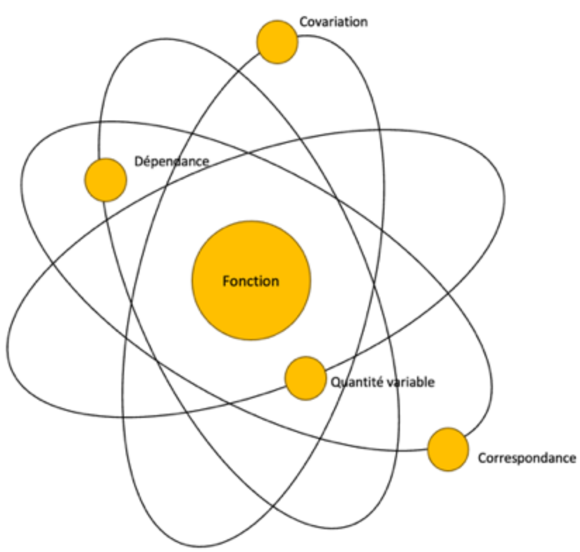


Figure 1. Schématisation du système de concepts de fonction (Robert, 2024, p. 88)

Cette représentation du système de concept de fonction permet de rendre compte (sans toutefois en révéler toutes les subtilités) de la manière dont certains concepts gravitent autour et influencent le concept de fonction. Ici, le concept de fonction est vu comme un système complexe de concepts qui sont mis en mouvement d'une manière ou d'une autre dans l'activité et qui entretiennent entre eux des liaisons complexes.

À l'image de ce que nous avons fait pour les raisonnements, voici quelques définitions des concepts inhérents à la pensée fonctionnelle. D'abord, le concept de variation renvoie à ce qui varie, au changement entre deux ou différents états. Il s'ancre dans une vision dynamique de transformation (Castillo-Garsow et al., 2013) et sa compréhension requiert d'être en mesure de se représenter une quantité pour laquelle les valeurs varient (Thompson, 2011). Le concept de covariation, quant à lui, désigne la manière dont deux (ou plusieurs) quantités varient simultanément en relation l'une avec l'autre (Confrey et Smith, 1995). C'est sur ce concept que s'appuie le raisonnement covariationnel. Dans cette même logique, la correspondance est le concept sur lequel s'appuie le raisonnement par correspondance et il réfère à la relation qui unit des paires correspondantes de variables indépendantes et dépendantes, généralement exprimée à l'aide d'une règle (Smith, 2008). Finalement, le concept de dépendance renvoie à la relation d'interdépendance entre deux ou plusieurs quantités variables qui deviennent alors quantités dépendantes et quantités indépendantes (Stephens et al., 2017).

2.2.3 Les représentations

Dans le cadre de l'étude du concept de fonction ou du déploiement de la pensée fonctionnelle, il est finalement nécessaire de s'intéresser aux signes et aux registres de représentations puisque selon Yavuz (2010), la compréhension des propriétés des fonctions ne serait atteignable que par la prise en considération de ses multiples représentations. Plus précisément, il est question ici des registres de représentations sémiotiques qui peuvent être mobilisés à des fins de représentation, de conversion ou de traitement de relations fonctionnelles (Duval, 1993), c'est-à-dire le registre tabulaire, le registre algébrique, le registre analytique et le registre graphique. Nous ajoutons que ces registres peuvent être institutionnels ou personnels comme les représentations spontanées (Hitt et González-Martin, 2015).

La tâche de modélisation fonctionnelle (qui sera présentée à la section 4.2 – Tâche de bouteilles) de laquelle découlent les données qui serviront à illustrer notre caractérisation de la pensée fonctionnelle s'appuie principalement sur le registre graphique. Selon Passaro et al. (2023), pour interpréter adéquatement la représentation graphique d'une fonction, il faut savoir en discriminer les éléments signifiants pour ensuite leur donner un sens au regard du phénomène étudié. Concrètement, il faut donc s'approprier tant le graphique cartésien et ses caractéristiques (deux axes, l'un horizontal et l'autre vertical, se coupant en un point aux coordonnées (0, 0) (Dufour, 2019) que la représentation de la fonction qui y est représentée et ses propriétés (son domaine, son codomaine, ses signes, ses extrémums, ses points d'inflexion, etc.). En ce sens, le registre graphique joue un rôle central dans l'apprentissage du concept de fonction en rendant visibles certaines de ses propriétés et spécificités en lien avec un phénomène donné.

3. La pensée fonctionnelle : une caractérisation opératoire

Nous en arrivons maintenant à proposer notre caractérisation de la pensée fonctionnelle qui se déploie en activité. Pour tenter d'en rendre compte le plus fidèlement possible, nous avons fait le choix de la décliner sous une forme opératoire en proposant une caractérisation qui reflète concrètement les principales manières d'agir et de réfléchir de la pensée fonctionnelle, mais qui tient aussi compte des rapports dialectiques qui les unissent, préservant ainsi la richesse de son dynamisme et de son mouvement dans l'activité. En concordance avec ce que nous avons exposé dans les éléments de notre cadre conceptuel de la pensée fonctionnelle, nous avons cerné les trois principales manières d'agir et de réfléchir dans des activités mettant en jeu une ou plusieurs relations fonctionnelles comme étant : « raisonner », « conceptualiser » et « représenter ». La terminologie employée, sous la forme de verbes d'action et de réflexion, est un reflet de notre ancrage dans la TO et permet de mettre en valeur le déploiement de la pensée dans l'activité.

D'entrée de jeu, nous conceptualisons « raisonner » comme les manières particulières d'agir et de réfléchir qui se déploient dans un processus de production de sens et qui peuvent permettre d'aboutir ou du moins d'amorcer le chemin vers un raffinement du sens et des idées. Comme pour Passaro (2015), nous sommes d'avis que pour étudier les raisonnements qui émergent en activité, il ne faut pas se limiter au repérage d'unités prédéterminées théoriquement puisque celles-ci ne permettent pas de rendre compte de la richesse de ces manières d'agir et de réfléchir et de leur évolution dans l'activité. Dans la littérature, il existe différentes définitions du raisonnement ou du raisonnement mathématique. Jeannotte (2015) en fait d'ailleurs une recension exhaustive dans sa thèse avant de proposer son propre modèle conceptuel. Dans ce dernier, le raisonnement mathématique est conceptualisé comme un processus commognitif à partir duquel de nouveaux énoncés mathématiques sont inférés à partir d'énoncés déjà établis. Dans un même ordre d'idées, pour Blanché (s. d), un raisonnement est « une certaine activité de l'esprit, une opération discursive par laquelle on passe de certaines propositions posées comme prémisses à une proposition nouvelle, en vertu du lien logique qui l'attache aux premières » (s. p.). De son côté, Mason (1994) mentionne que le raisonnement consiste en un « processus dynamique qui permet de manipuler des idées de plus en plus complexes et, par-là, d'étendre la compréhension » (p. 133). Dans cette définition, c'est l'idée de processus qui rejoint davantage notre perspective puisque pour nous, la production du sens se fait dans un processus dynamique et complexe de manières d'agir et de réfléchir qui peut relever autant, par exemple, de la généralisation d'idées (conjecturer, généraliser, etc.) que de la validation (justifier, prouver, etc.). Bien évidemment, raisonner englobe également les raisonnements identifiés comme étant associés à la pensée fonctionnelle (p. ex. raisonnements covariationnel et par correspondance), mais il ne s'y limite pas au sens où raisonner réfère aussi à l'émergence et au développement de tout processus de raisonnements dans l'activité.

De son côté, « conceptualiser » est défini comme des manières d'agir et de réfléchir de la pensée fonctionnelle qui renvoient notamment aux processus de rencontre, de tâtonnements et de mobilisation de concepts en activité. Selon Vygotski (1934/2019), peu importe le stade de son développement, le concept est en soi un acte complexe de la pensée; un acte de généralisation. Nous avons discuté dans la section 2.2.2 de l'organisation des concepts sous la forme de systèmes de concepts. À cet effet, Vygotski (1934/2019) mentionne que « [c]'est seulement lorsqu'il est intégré dans un système que le concept peut devenir conscient et volontaire » (p. 328). Dans le cadre de la pensée fonctionnelle, ceci implique que les rencontres avec le concept de fonction sont en quelque sorte dépendantes d'une certaine familiarité avec les concepts de son système. D'ailleurs, il est aussi intéressant de souligner que les processus de conceptualisation sont sans fin. En effet, pour Radford (2021a), peu importe leur niveau de sophistication, les concepts n'arriveront jamais à rendre compte en totalité du savoir qu'ils tentent de révéler. Ainsi, la manière dont les individus entrent en contact avec les concepts doit être envisagée en mouvance : les concepts se développent à mesure que les individus qui s'en saisissent, affrontent et réfléchissent de nouvelles situations (Radford, 2021a). Conceptualiser renvoie donc encore une fois à des processus que nous pouvons appeler plus généralement des processus de conceptualisation associés à différents concepts. Ceux-ci sont empreints de cette vision des concepts et des individus comme étant intimement liés et même indissociables dans l'activité. Ce sont des processus qui contribuent chacun à leur manière au développement de la pensée fonctionnelle et plus largement de la pensée mathématique.

Finalement, « représenter » englobe les manières d'agir et de réfléchir qui réfèrent au travail sur et avec les représentations, considérées, encore une fois, comme des processus. Sachant que le langage et plus particulièrement le signe est en fait un construit social ou une entité sans laquelle il serait impossible pour une société de se développer (Radford, 1998), représenter implique d'abord et avant tout de s'inscrire dans un système de signifiés culturels qui, en mathématiques, est constitué de différents registres de représentation. Il est notamment question ici de l'appréhension et la mobilisation de différents registres de représentation. À l'image de raisonner et conceptualiser, représenter ne se limite pas à la capacité des élèves à utiliser adéquatement ou non un certain registre de représentation. Ici, représenter renvoie aux manières d'agir et de réfléchir que les élèves déploient quand elles et ils appréhendent, s'approprient et mobilisent différents registres de représentations sémiotiques dans l'activité.

Dans l'activité, « raisonner », « conceptualiser » et « représenter » coexistent et se coordonnent sans cesse. Des développements dans les processus de conceptualisation peuvent être réinvestis dans les raisonnements qui trouvent ensuite écho dans l'appréhension des registres de représentations mobilisés. À l'inverse, la prise de conscience d'une propriété du registre graphique peut enclencher un remaniement des raisonnements et alimenter les processus de conceptualisation. C'est à travers les rapports dialectiques qu'ils entretiennent et leur constante mouvance que conceptualiser, raisonner et représenter se déploient dans l'activité mathématique. Pour illustrer cette idée, nous représentons notre caractérisation de la pensée fonctionnelle par la schématisation suivante :

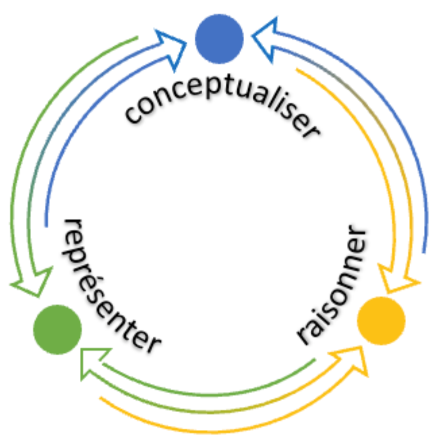


Figure 2 : Raisonner, conceptualiser, représenter et leurs rapports dialectiques

Dans la schématisation de la figure 2, les doubles flèches et les transitions entre leurs couleurs exposent les effets transformatifs des rapports dialectiques qui unissent raisonner, conceptualiser et représenter dans l'activité.

4. La pensée fonctionnelle qui se déploie en activité : une mise à l'épreuve de notre caractérisation

La caractérisation avancée a été mise à l'épreuve dans le cadre de notre recherche doctorale. Pour montrer comment celle-ci peut être mobilisée pour documenter le déploiement de la pensée fonctionnelle dans l'activité et mettre en évidence la richesse des résultats qu'elle permet de faire émerger, nous présentons dans cette section des éléments méthodologiques éclairant la recherche menée, ainsi que des extraits de la thèse qui ont permis de révéler de nouvelles subtilités de la pensée fonctionnelle.

4.1 Éléments de méthodologie

La majorité des recherches sur la pensée fonctionnelle ayant été menées auprès d'élèves du primaire, nous avons fait le choix de nous intéresser aux élèves du premier cycle du secondaire, à l'aube de rencontrer le concept de fonction comme objet explicite d'apprentissage. L'activité présentée dans cet article a été réalisée auprès d'un groupe de la première année du secondaire (élèves de 12 et 13 ans) et a été enregistrée en vidéo et en audio. Ces élèves avaient très peu d'expériences avec le registre graphique et n'avaient pas encore étudié en profondeur les situations de proportionnalité. Dans les pages qui suivent, nous exposons la tâche présentée aux élèves, les particularités de l'activité menée qui sont susceptibles d'avoir influencé le déploiement de la pensée fonctionnelle ainsi que la démarche adoptée pour analyser les données recueillies.

4.2 La tâche des bouteilles

Inspirée notamment des travaux de Carlson (1998) et de Passaro (2015), la tâche des bouteilles avait pour objectif de provoquer le déploiement de manières d'agir et de réfléchir de la pensée fonctionnelle en contexte de modélisation fonctionnelle d'un phénomène. Ici, le phénomène en question est la modélisation du remplissage, à débit constant, de bouteilles de différentes formes. Les quantités variables impliquées y étaient la hauteur de l'eau (h) en fonction du temps (t). L'activité se déclinait en quatre sous-tâches. La première sous-tâche consistait en une initiation au registre de représentation graphique. Elle invitait les élèves à produire l'allure de la courbe représentant la hauteur de l'eau (h) en fonction du temps écoulé (t), après avoir visionné un extrait vidéo montrant le remplissage, à débit constant, d'un bécher gradué de 400 ml. Pendant le visionnement, la chercheure réalisait la production graphique, en suivant les indications fournies par les élèves. La sous-tâche 2 reposait sur la modélisation du remplissage de bouteilles coniques (voir figure 3) et visait à ce que les élèves associent les bouteilles (1 et 2) aux fonctions qui modélisent leur remplissage (A et B). L'association devait aussi être accompagnée d'une explication.

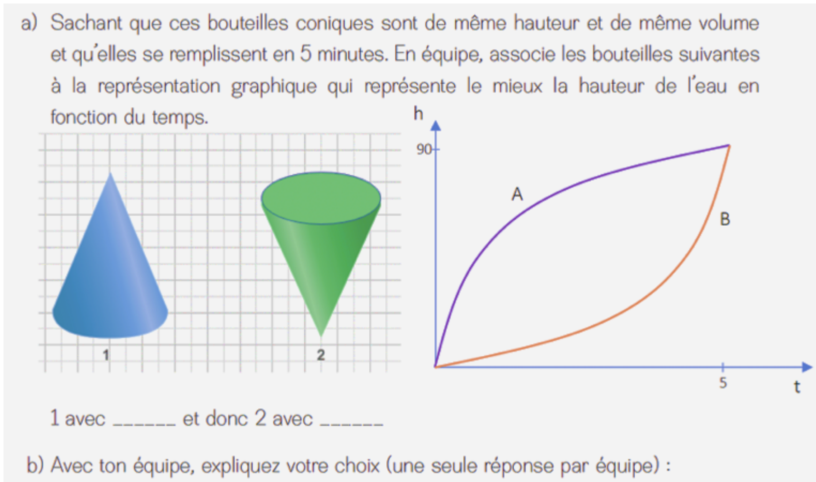


Figure 3. Tâche des bouteilles : sous-tâche 2 (Robert, 2024, p. 105)

La sous-tâche 3 (figure 4), elle, avait pour objectif de provoquer un travail sur la représentation graphique et d'amener les élèves à comparer l'allure des courbes modélisant le remplissage de quatre bouteilles de formats différents sur un même repère graphique.

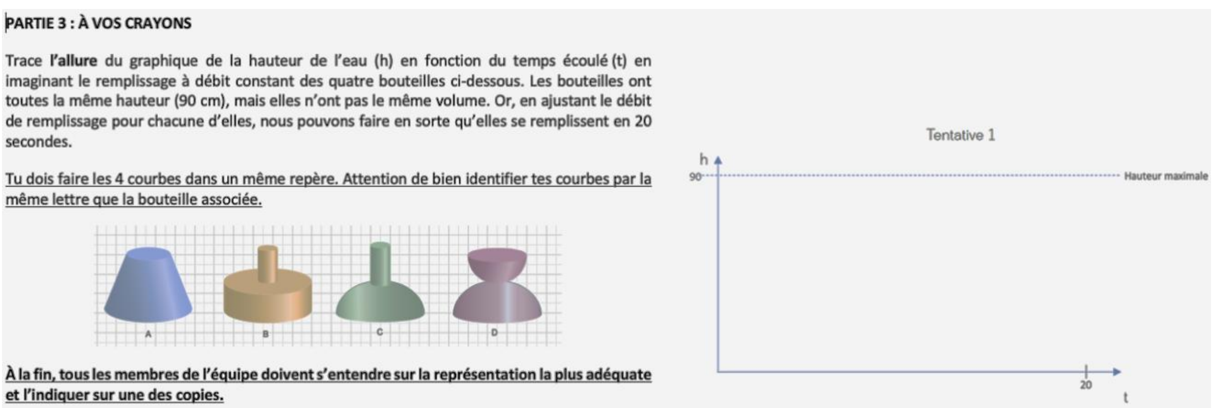


Figure 4. Tâche des bouteilles : sous-tâche 3 (Robert, 2024, p. 106)

Finalement, la quatrième sous-tâche avait pour objectif de susciter l'analyse d'une courbe illustrant le remplissage d'une bouteille inconnue, en invitant les élèves à en déduire la forme (figure 5). Concrètement, les élèves devaient interpréter la courbe tracée dans un graphique cartésien, puis dessiner une bouteille dont la modélisation pourrait correspondre à la fonction représentée.

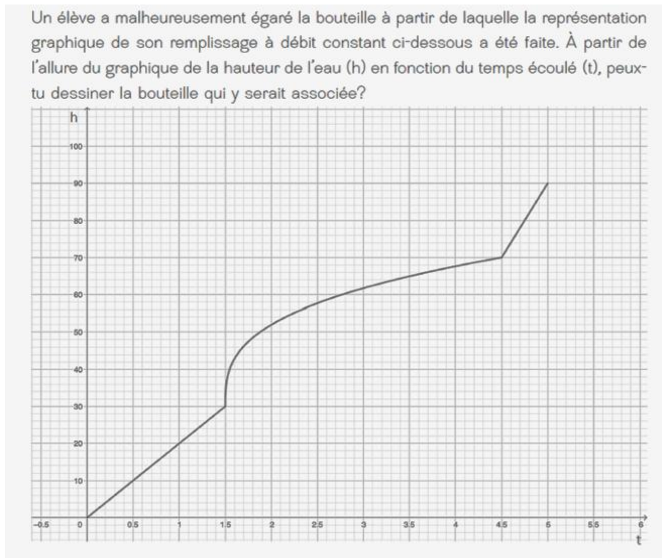


Figure 5. Tâche des bouteilles : sous-tâche 4 (Robert, 2024, p. 108)

4.3 Les spécificités de l'activité menée

Dans la classe, les élèves étaient regroupé·es en équipes de 3 à 5 élèves de manière à favoriser les échanges entre pairs et le débat des idées. Dans cette expérimentation, c'est la chercheure qui a pris la responsabilité du pilotage des tâches. L'enseignante régulière du groupe participait aux activités d'enseignement-apprentissage et elle était responsable d'aider la chercheure dans la gestion de la classe. La chercheure est ainsi partie prenante de l'activité d'enseignement-apprentissage qui s'est déployée. Une autre spécificité de l'activité menée est que les élèves étaient explicitement invité·es à débattre de leurs idées. Elles et ils devaient d'ailleurs s'entendre sur la meilleure réponse aux différentes questions des tâches. Cette consigne a suscité des échanges riches, car les élèves devaient débattre de chaque idée en s'appropriant le phénomène représenté. C'est d'ailleurs en cherchant la meilleure manière d'expliquer les variations de courbure que les membres des équipes ont été amenés à raffiner progressivement leurs explications, ce qui a contribué à une véritable sophistication de leur pensée, comme nous le verrons dans la section 4.5.1. Il est important de souligner que plusieurs espaces de réponse étaient présents pour chacune des sous-tâches sous la forme de « tentatives ». Cette organisation visait à encourager les élèves à être critiques envers leurs réponses et leurs représentations de manière à les améliorer d'une tentative à l'autre sans effacer leurs traces précédentes. Il s'agit pour nous d'un élément significatif de nos activités puisqu'au fil des tentatives, nous avons pu voir les élèves peaufiner leurs représentations et verbaliser des raisonnements de plus en plus sophistiqués. Une telle organisation des espaces de réponse pour les différentes sous-tâches ne nous semble donc pas être négligeable pour le développement de la pensée fonctionnelle. Par ailleurs, la chercheure circulait dans la classe pour répondre aux différentes questions des élèves et travailler conjointement avec les membres des équipes pour les amener, par exemple, à mieux se représenter le phénomène ou à préciser leur propos. Puisque l'activité ne s'est déroulée qu'en une séance de 65 minutes, nos résultats reflètent uniquement l'évolution de la pensée fonctionnelle des élèves ayant eu lieu dans cette période. C'est la raison pour laquelle nous privilégions le terme déploiement plutôt que celui de développement.

4.4 Le devis méthodologique et la démarche d'analyse des données

Le devis méthodologique général de notre recherche doctorale s'est appuyé sur les pistes que fournissent la TO (Radford, 2015a) pour ses deux premiers moments : 1) l'anticipation et la configuration de l'activité et 2) son implantation. À ceux-ci, nous avons ajouté un troisième moment qui consistait à réaliser des 3) autoconfrontations simples ou croisées au sens de Benoit (2022) avec certain·es élèves de la classe pour mettre à l'épreuve nos premières hypothèses et mieux comprendre le déploiement de la pensée fonctionnelle dans l'activité première. Pendant ces autoconfrontations, des extraits vidéos étaient présentés aux élèves de manière à ce qu'elles.ils puissent nous décrire leur propre perception de leur activité. La recherche adoptant un devis descriptif et qualitatif, nous avons procédé à une analyse des enregistrements vidéos des activités en classe et des autoconfrontations et de leur verbatim. Pour réaliser ces analyses, nous avons développé un devis d'analyse multisémiotique (Robert, 2024) en huit étapes s'inspirant de la TO et du modèle d'analyse pour le développement des idées mathématiques de Powell et al. (2003). Guidé par le cadre théorique et nos questions de recherches, le devis permettait d'identifier des unités d'analyse correspondant à des moments pendant lesquels l'apparition ou le déploiement de la pensée fonctionnelle était rendu apparent à travers l'activité ostensible. Le codage de ces unités d'analyse a été fait à partir d'une grille déclinant les principales manières d'agir et de réfléchir de la pensée fonctionnelle. Par exemple, des codes généraux ont été rédigés pour les unités d'analyse relatives à raisonner, conceptualiser et représenter, puis des codes plus fins ont été créés au fil de l'analyse de manière à cerner davantage les subtilités associées à chacune de celles-ci. De nombreuses descriptions ont été rédigées sous forme de vignettes descriptives tout au long de l'analyse pour rendre compte de la finesse des processus ou encore du contexte historico-spatio-temporel des différentes unités d'analyse. Notons que le devis est qualifié de multisémiotique puisque la pensée est considérée dans la TO comme étant sensible puisqu'elle invoque nos sens, notre perception, notre corps et les signes. Ces différents moyens sémiotiques d'objectivation ne sont pas considérés comme des manifestations extérieures ou des aides à la pensée : ils en sont des parties constitutives dans la saisie des objets et ils opèrent à des niveaux différents de signification, nous dévoilant la manière dont la production de sens se réalise (Radford, 2022). Dans cette perspective, l'analyse multisémiotique nous a permis de prendre en considération le discours, les gestes, les traces écrites, les éléments prosodiques (intonation, volume, rythme) et les comportements non verbaux. Certains de ces éléments sont donc intégrés dans les verbatims qui parsèment l'illustration que nous faisons de notre caractérisation de la pensée fonctionnelle.

4.5 Les résultats de cette mise à l'épreuve

Grâce à certains résultats spécifiques de la thèse, nous explorons dans les sections qui suivent la portée de notre caractérisation et les subtilités de la pensée fonctionnelle qu'elle permet de révéler.

4.5.1 Les inter-actions entre les systèmes de concepts

Le premier résultat que nous voulons faire ressortir relève de l'évolution des processus de conceptualisation et de ce que nous avons nommé les inter-actions entre les systèmes de concepts (Robert, 2024). Plus précisément, comme la modélisation fonctionnelle du phénomène de remplissage des bouteilles impliquait la rencontre entre deux systèmes de concepts principaux, soit celui de capacité et celui de fonction, nous avons pu observer les influences mutuelles de leurs processus de conceptualisation. Ces inter-actions ont non seulement favorisé le développement conceptuel et le raffinement des raisonnements, mais elles ont aussi suscité des prises de conscience de propriétés du registre graphique. Pour illustrer ce résultat, voici des extraits de l'activité d'équipe dans laquelle les élèves travaillent conjointement pour trouver la meilleure explication possible à la sous-tâche 2 qui consistait à associer les cônes A et B, représentés dans le registre figural, à leur fonction respective représentée dans le registre graphique.

> Dan : Le 1 et le B commencent doucement et finissent rapidement…
>
> […]
>
> Coralie : On pourrait dire comme le 1 commence plus gros, ça va aller…
>
> Élisabeth : Ça va aller […] plus lent.
>
> Coralie [termine son idée] :… ça va moins courber.
>
> Élisabeth [pointe Coralie] : Ouais, moi je dis qu'on prend ça, ça l'a plus de sens.
>
> Coralie : Comme le 1 commence plus épais [elle place deux doigts de chaque côté de la base du cône 1], ça va être le B parce que ça courbe moins au début [elle trace en même temps la courbe avec son crayon] et après ça monte comme ça.

Dans son intervention initiale, Dan appréhende simultanément les courbes et les cônes, articulant son interprétation de la vitesse (doucement et rapidement) à travers les deux registres de représentation. L'accord du verbe « finissent » au pluriel laisse entendre qu'il perçoit le remplissage du cône et la fonction représentée graphiquement comme deux objets distincts, mais exprimant une même variation de vitesse. De son côté, Coralie établit un lien entre le diamètre du cône, qu'elle traduit d'abord par sa « grosseur » puis son « épaisseur », et la courbure de la fonction. Pour elle, un diamètre plus grand correspond à une courbure moins prononcée. Ici, le système de concept de capacité trouve une première traduction dans le registre graphique. Les échanges se poursuivent ensuite :

> Élisabeth : Moi je dis qu'on écrit ça, ça marche mieux. On arrête tout, on écrit ce que Coralie a proposé.
>
> [Dan hoche la tête et pointe Coralie en signe d'approbation.]
>
> Malix : Mais non, […] il faut écrire une seule réponse par équipe.
>
> Élisabeth : Ben, c'est ça, on est une équipe.
>
> Malix : Ben moi je dis que, […] le 1 commence doucement, car il y a une plus grosse surface à remplir, donc ça peut prendre plus de temps au début et moins de temps à la fin, comme on peut voir avec le diagramme B.
>
> Élisabeth [acquiesce tout de suite] : Ok ça c'est bien [fait l'emblème du pouce levé].
>
> Dan : Moi aussi je mettrais ça.

À travers leurs échanges, nous pouvons voir les membres de l'équipe en arriver à raffiner leur sélection des quantités variables impliquées dans le phénomène. Concrètement, c'est notamment grâce au raffinement des processus de conceptualisation relatifs au concept de capacité qui se produit par une prise de conscience des différentes dimensions des bouteilles qui peuvent influencer la vitesse du remplissage qu'un raffinement conceptuel de la relation fonctionnelle impliquée a pu prendre forme.

L'évolution conceptuelle de la capacité semble aussi avoir été influencée par la reconnaissance des changements dans la courbure de la représentation graphique et par une prise de conscience progressive de certaines propriétés de celle-ci. En effet, c'est notamment en tentant de donner un sens à la variation de la courbure que les élèves en sont venus à conceptualiser la capacité comme une accumulation de surfaces. De plus, comme les élèves étaient peu familières et peu familiers avec le registre graphique, il était nécessaire de l'explorer pour se familiariser avec cette nouvelle manière de représenter des phénomènes. Par exemple, certains élèves ont pris conscience tardivement de la graduation des axes du graphique cartésien. C'est notamment le cas de Malix qui remet en question l'une de ses tentatives de la sous-tâche 3 dans laquelle il a représenté le remplissage de la bouteille B formée d'une superposition de deux cylindres de diamètres différents (figure 6).

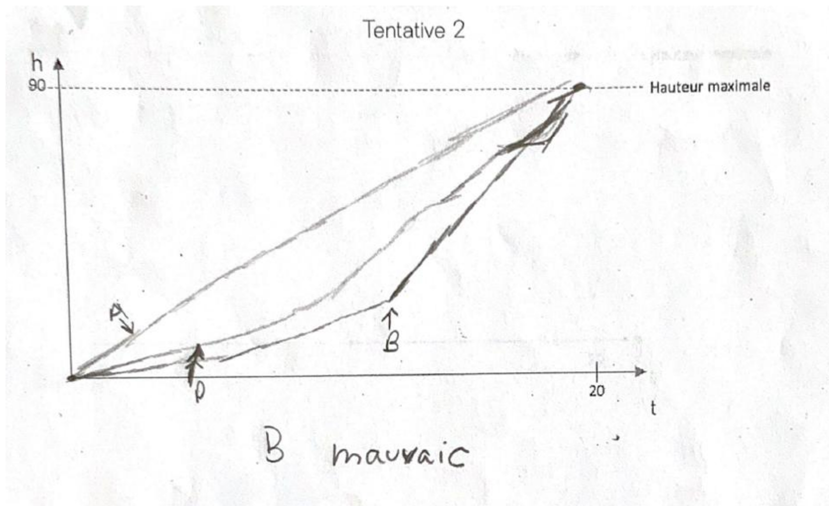


Figure 6. Tentative 2 de Malix dans la sous-tâche 3 (Robert, 2024, p. 182)

Dans sa tentative 2, Malix a représenté chaque partie du cylindre par une courbe (B) qui s'approche d'une courbe rectiligne, mais sans tenir compte de la position du moment critique où le changement de pente a lieu. Ici, son hypothèse initiale semble reposer sur une conception en deux parties de la bouteille dont les vitesses de remplissage distinctes peuvent être représentées par des courbes rectilignes de pentes différentes. L'extrait de verbatim suivant met en évidence le moment où il réalise que sa représentation graphique ne correspond pas au phénomène étudié.

> Malix [s'adressant à la caméra] : […] J'ai fait une erreur dans le B parce que ça devrait durer plus de temps [le remplissage du bas de la bouteille], mais là [ça] dure seulement 10 secondes. Mais étant donné qu'ici on va plus vite [pointe le cylindre du haut], je pense pas que ça dure 10 secondes le petit tuyau de remplissage, donc je pense que je me suis trompé, alors on va recommencer, caméra.
>
> [Malix se remet au travail.]
>
> Malix [quelques secondes plus tard, s'adressant toujours à la caméra] : Donc selon moi, si on fait un petit calcul mental, ça devrait durer 16 secondes pour le remplissage du début du B et à la fin, comme ça, ça va monter hyper vite, ça va prendre 4 secondes.
>
> Malix : Ah c'est magnifique ! [inaudible] [Il montre son repère à la caméra] plus de temps avec une augmentation de la vitesse vers la fin.

Par l'étude du moment critique de cette courbe, Malix prend conscience d'une propriété essentielle du graphique cartésien : la graduation des axes et sa signification. Ceci le pousse à se questionner puisque son modèle mathématique entre en contradiction avec sa compréhension conceptuelle de la capacité. Le fait de prendre en considération le temps nécessaire pour remplir les différentes parties de la bouteille enclenche de nouveaux processus de conceptualisation, notamment par la comparaison de la capacité et du temps de remplissage des différentes parties des bouteilles. Nous pouvons donc voir ici comment les processus de conceptualisation sont intimement liés à la manière dont les élèves appréhendent les représentations.

4.5.2 Des raisonnements variationnels aux raisonnements covariationnels

Un second résultat qui ressort de notre manière de rendre compte du déploiement de la pensée fonctionnelle à travers la lunette de notre caractérisation opératoire concerne les raisonnements qui ont émergé dans l'activité. Nous avons répété que pour nous, l'appréhension des raisonnements ne peut se limiter à tenter de déterminer si oui ou non les sujets mobilisent des raisonnements théoriquement prédéterminés. Grâce à ce regard plus ouvert sur le déploiement des raisonnements dans un processus de production de sens, trois types de raisonnements ont été observés : des raisonnements basés sur l'évaluation de la vitesse moyenne, des raisonnements basés sur l'évaluation de la vitesse instantanée et des raisonnements covariationnels faisant intervenir diverses quantités variables. Notons d'emblée que dans la tâche des bouteilles, en raison du dynamisme du phénomène étudié et de la place accordée au temps comme variable indépendante, la vitesse a eu une part importante à jouer dans l'étude des relations fonctionnelles en jeu. En effet, même si le débit de remplissage est constant, la vitesse à laquelle la hauteur de l'eau monte est variable et c'est souvent à cette variation de la vitesse que les élèves référaient pendant l'activité comme nous avons déjà pu l'entrevoir avec les extraits présentés jusqu'ici. Mentionnons aussi que comme l'objectif des sous-tâches n'était pas de trouver la règle ou de quantifier précisément la valeur des accroissements, les raisonnements qui se sont manifestés dans l'activité étaient de nature descriptive et qualitative.

Le premier type de raisonnement que nous avons relevé est un raisonnement variationnel basé sur l'évaluation de la vitesse moyenne. Concrètement, il consistait à évaluer et à attribuer une vitesse moyenne aux différentes parties de la bouteille ou à différentes parties des courbes dans le registre graphique. Par exemple, ce type de raisonnement est apparu quand les élèves décrivaient les vitesses moyennes associées aux différentes parties des bouteilles de la sous-tâche 4 par une description qualitative comme étant « lent », « vite », « constant » comme nous pouvons notamment le voir dans la figure 7.

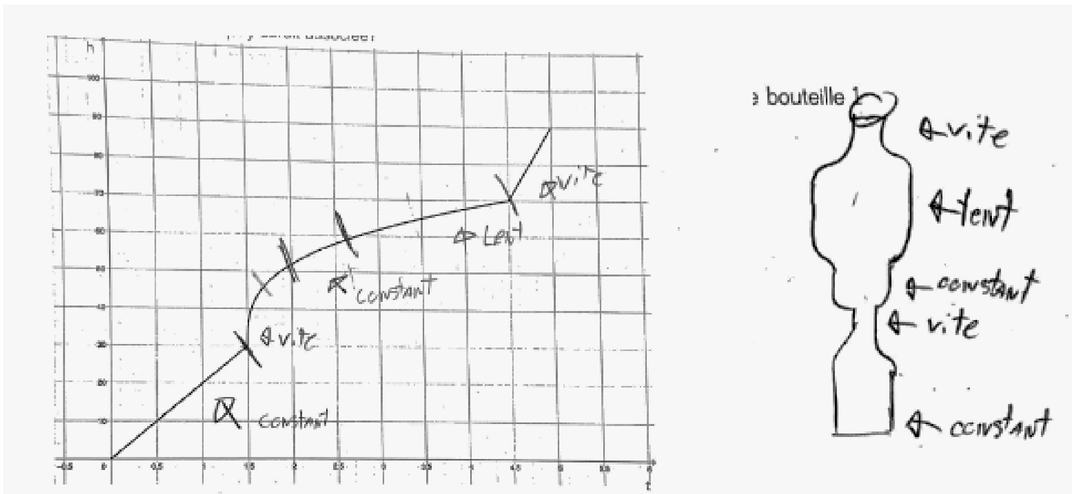


Figure 7. Traces écrites de Maël (Robert, 2024, p. 197)

Ces raisonnements basés sur l'évaluation des vitesses moyennes s'appuient sur une conceptualisation de la variation qui évolue par intervalles à l'image de ce que Castillo-Gaslow et al. (2013) appellent la *chunky image of change* et sont donc intimement lié aux processus de conceptualisation de la capacité et de la fonction. Dans l'activité, nous avons pu constater que ce type de raisonnement provoque certaines difficultés puisque la hauteur et le temps n'y sont pas traités de manière explicite. Ceci représente notamment un défi lors du passage à la représentation graphique qui met explicitement la hauteur et le temps en relation.

Le second type de raisonnement que nous avons pu observer relève des raisonnements basés sur l'évaluation de la vitesse instantanée. En comparaison avec les raisonnements qui précèdent, ceux-ci exposent la prise en considération d'une variation continue de vitesses instantanées. Dans les réponses des élèves, ces raisonnements se traduisent dans des formulations comme « ça va être progressivement plus vite » ou encore « ça commence très lentement, pis ça s'en va de plus en plus vite ». Ici, bien que la vitesse soit encore exprimée avec un référent absent ou implicite, l'idée de progression est nommée explicitement et la variation a un caractère continu. Ces raisonnements partagent des similitudes avec ce que Castillo-Gaslow et al. (2013) appellent la *smooth image of change*.

Au fil des analyses, nous avons pu dégager divers raisonnements covariationnels mettant en jeu une variété de quantités variables puisque les élèves se sont intéressés à différentes relations fonctionnelles. Des élèves se sont notamment intéressés à la covariation entre la vitesse de remplissage et les différentes dimensions des bouteilles, ou encore la covariation entre la « surface à remplir[4] » et la vitesse de remplissage. Comme nous pouvions nous y attendre, la vitesse est apparue dans la grande majorité des raisonnements covariationnels, jouant tantôt le rôle de variable dépendante (la vitesse de la montée de la hauteur de l'eau dépend des dimensions de la surface à remplir) et tantôt le rôle de variable indépendante (le diamètre de la bouteille dépend de sa vitesse de remplissage).

Comme pour la conceptualisation, le travail avec le registre graphique est apparu comme étant essentiel pour provoquer une progression des raisonnements puisqu'il offre une représentation ostensible d'un phénomène dynamique. En effet, au fil des unités d'analyse, les élèves confrontaient leur interprétation du phénomène de remplissage et de la covariation, en les mettant à l'épreuve à la fois dans le registre figural et dans le registre graphique. C'est d'ailleurs ce que nous pouvons capter dans les extraits présentés dans la section précédente.

En somme, en mobilisant notre caractérisation opératoire, nous avons été en mesure de documenter la multiplicité des raisonnements qui se déploient dans l'activité. Ceci met de l'avant la richesse de ne pas se limiter au repérage de raisonnements prédéterminés théoriquement pour étudier les raisonnements qui émergent en activité (Passaro, 2015) puisqu'il ne permet pas de rendre compte de la richesse de l'évolution des manières dont les élèves appréhendent le phénomène des élèves. Par ailleurs, le fait de faire un traitement chronologique des raisonnements tout au long de l'activité permet de rendre compte de la progression des raisonnements qui peuvent être provoqués tant par une évolution conceptuelle que par une évolution dans la manière dont les élèves appréhendent les registres de représentation. C'est précisément là que réside la richesse de la prise en compte des rapports dialectiques entre raisonner, conceptualiser et représenter.

5. Discussion et conclusion

L'objectif principal de cet article était de proposer une caractérisation opératoire de la pensée fonctionnelle qui se déploie en activité. Concrètement, notre caractérisation propose d'appréhender celle-ci à travers ses principales manières d'agir et de réfléchir indissociables que sont raisonner, conceptualiser et représenter et des rapports dialectiques qu'elles entretiennent. Tel qu'exposé dans cet article, les définitions recensées sur la pensée fonctionnelle (p. ex. Blanton et Kaput, 2004; Smith, 2008; Stölting, 2008) demeurent partielles. En effet, elles sont

---

[4] Dans de tels cas, la capacité de la bouteille était conceptualisée comme une accumulation de surfaces. Bien qu'une surface ne puisse se remplir, les élèves qui ont utilisé cette quantité variable semblent conceptualiser lesdites surfaces comme ayant une certaine épaisseur, aussi petite soit-elle.

généralement adaptées pour des activités de généralisation de relations fonctionnelles ou sur la modélisation de situations et ne s'appliquent donc pas à toute activité fonctionnelle. Selon nous, la caractérisation que nous proposons permet de dépasser les frontières de la généralisation et de la modélisation fonctionnelle puisqu'elle peut s'appliquer à l'ensemble des activités mettant en jeu une relation fonctionnelle. Par ailleurs, en prenant appui sur les assises théoriques de la théorie de l'objectivation, notre caractérisation est empreinte d'une manière précise de considérer notamment la pensée, les raisonnements, la conceptualisation, l'enseignement et l'apprentissage, ce qui la distingue des définitions existantes, souvent dépourvues d'un ancrage théorique explicite.

De plus, nous avançons que notre caractérisation permet d'enrichir les définitions existantes par son opérationnalisation en trois principales manières d'agir et de réfléchir, tout en préservant le caractère dynamique de la pensée en considérant aussi les rapports dialectiques entre raisonner, conceptualiser et représenter. En effet, nous avons exposé que les recherches recensées (p. ex. Blanton et al., 2015; Stephens et al., 2017; Pinto et Cañadas, 2021) déclinent généralement leur définition par deux composantes traitées de manières distinctes : 1) les raisonnements mobilisés par les élèves (par une comparaison avec des raisonnements théoriques prédéterminés) et 2) les registres de représentation utilisés par les élèves. La conceptualisation était donc absente des recherches alors qu'elle est pour nous essentielle pour documenter finement la pensée fonctionnelle. De son côté, notre caractérisation opératoire met en évidence l'importance de la conceptualisation en la plaçant parmi l'une des trois principales manières d'agir et de réfléchir de la pensée fonctionnelle, ce qui en constitue l'un de ses principaux apports. Par ailleurs, à l'instar de Passaro (2015), nous avons réitéré que l'étude de la pensée fonctionnelle ne devrait pas se limiter au repérage d'unités prédéterminées théoriquement puisque celles-ci ne permettent pas de rendre compte de la richesse de son déploiement dans l'activité. En opérationnalisant notre caractérisation par des manières d'agir et de réfléchir qui sont formulées sous la forme de verbe d'action, nous ouvrons la porte à l'observation et à la documentation de raisonnements intermédiaires, des subtilités impliquées dans les processus de conceptualisation et des différentes manières dont les élèves appréhendent les divers registres de représentation. Ceci reflète de plus près le dynamisme et le mouvement de la pensée en activité, ce qui est généralement absent des définitions traditionnellement utilisées dans les recherches.

Ces apports de notre caractérisation se sont manifestés dans sa mise à l'épreuve et les résultats qu'elle a permis de mettre en lumière dans la thèse. En effet, en ayant la volonté de nous intéresser à la conceptualisation, nous avons pu documenter les effets des inter-actions entre les systèmes de concepts. Ce résultat fait écho aux propos de Radford (2021a) qui mentionne que les concepts, comme les sujets, doivent être considérés comme étant en mouvement et non pas statique. Les concepts ont des frontières qui évoluent, et par cette évolution, les individus qui les incarnent changent aussi (Radford, 2021a, p. 104). Dans l'activité, et donc dans le déploiement de la pensée, les concepts inter-agissent, se transforment et influencent les manières dont les élèves appréhendent les phénomènes. Dans un cas comme celui de la tâche des bouteilles, ceci a permis de montrer notamment que les processus de conceptualisation impliqués dépassent le concept de fonction et sont indissociables de la conceptualisation des autres concepts en jeu.

Par ailleurs, la mise à l'épreuve de notre caractérisation a permis de révéler l'émergence et le déploiement de raisonnements variationnels qui pourraient constituer des précurseurs du raisonnement covariationnel. Ayant des similitudes avec les conceptions de la variation définies par Castillo-Garsow et al. (2013) (*chunky image of change* et *smooth image of change*), ces raisonnements que nous pouvons qualifier d'intermédiaires nous offrent une vitrine privilégiée sur la manière dont les élèves appréhendent la variation. En faisant un traitement chronologique des raisonnements à travers l'activité, nous avons pu documenter plus finement les différentes tentatives et hypothèses que les élèves émettent dans leur processus de production de sens. C'est notamment dans ce regard transversal que s'est révélée l'évolution des raisonnements.

Finalement, les courts extraits présentés de l'activité réalisée autour de la tâche des bouteilles illustrent les subtilités des manières dont la pensée fonctionnelle se révèle dans l'activité à travers les rapports dialectiques existants entre raisonner, conceptualiser et représenter. En ce sens, nous entrevoyons des pistes prometteuses pour la recherche par la mise à l'épreuve de notre caractérisation opératoire non seulement dans d'autres recherches sur la pensée fonctionnelle, mais également dans l'étude du déploiement d'autres formes de pensée mathématique. En effet, raisonner, conceptualiser et représenter n'étant pas rattachés spécifiquement à la pensée fonctionnelle, nous croyons que notre caractérisation apporte aussi aux réflexions sur la pensée mathématique en elle-même puisque c'est précisément la richesse et la complexité de la pensée, vue comme une totalité dynamique, que notre caractérisation vise à promouvoir.

Remerciements

Ce travail s'inscrit dans la continuité des réflexions menées avec mon équipe de direction dans le cadre de ma recherche doctorale. Je tiens donc à les remercier chaleureusement, tout comme les membres du jury de la thèse, pour la richesse de leurs questionnements et de nos échanges tout au long de ce parcours. Cette recherche a été rendue possible grâce au soutien d'une bourse du Conseil de recherches en sciences humaines du Canada (CRSH).

Références

Beatty, R., Day-Mauro, M. et Morris, K. (2013). Young students' explorations of growing patterns: developing early functional thinking and awareness of structure. Dans M. Martinez et C. Superfine (dir.), *Proceedings of the 35th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 103-110). University of Illinois.

Ben Nejma, S. (2020). Exploitation de l'histoire dans une analyse didactique du développement de la pensée fonctionnelle au début de l'enseignement tunisien. *Revue québécoise de didactique des mathématiques,* 1, 38-69.

Benoit, D. (2022). *La clinique didactique de l'activité en classe d'accueil de mathématiques : provoquer le développement de la pensée didactique* [thèse de doctorat, Université de Sherbrooke]. Savoirs UdeS. https://savoirs.usherbrooke.ca/handle/11143/19193

Blanché, R. (s. d). Raisonnement. Dans *Encyclopædia Universalis*. https://www.universalis-edu.com/

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. et Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-Year-Olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511-558. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.5.0511

Blanton, M. et Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. Dans M. J. Høines et A. B. Fugelstad (dir.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, p. 135-142). Bergen University.

Blanton, M. et Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. Dans J. Cai et E. Knuth (dir.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (p. 5-23). Springer.

Carlson, M. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. *CBMS Issues in Mathematics Education*, *7*, 114-162.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. et Hsu, E. (2002). Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events: A Framework and a Study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352-378. https://doi.org/10.2307/4149958

Carraher, D. W. et Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. Dans F. Lester (dir.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 669-705). Information Age Publishing.

Castillo-Garsow, C., Johnson, H. L. et Moore, K. C. (2013). Chunky and smooth images of change. *For the Learning of Mathematics, 33*(3), 31-37.

Comin, E. (2005). Variables et fonctions, du collège au lycée, *Petit x*, 67, 33-61.

Confrey, J. et Smith, E. (1991). A framework for functions: Prototypes, multiple representations, and transformations. Dans R. Underhill et C. Brown (dir.), *Proceedings of the thirteenth annual meeting of the north American chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (p. 57-63). Blacksburg.

Confrey, J., et Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(1), 66-86.

Cooper, T. et Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalise: models, representations and theory for teaching and learning. Dans J. Cai et E. Knuth (dir.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (p. 187-214). Springer.

Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P. et Reed, H. (2012). Tool use and the development of the function concept: from repeated calculations to functional thinking. *International Journal of Science et Mathematics Education, 10*(6), 1243-1267.

Dreyfus, T., et Eisenberg, T. (1982). Intuitive functional concepts: A baseline study on intuitions. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*(5), 360-380. https://doi.org/10.2307/749011

Dufour, S. (2019). *Des processus de compréhension sous l'angle des représentations : un Teaching Experiment autour de la dérivée* [thèse de doctorat, Université du Québec à Montréal]. Archipel. https://archipel.uqam.ca/12668/

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 5*, 37-65.

Freudenthal, H. (1983/2002). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Springer.

Hitt, F. et González-Martín, A. S. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(2), 210-219. https://doi:10.1007/s10649-014- 9578-7

Jeannotte, D. (2015). *Raisonnement mathématique : proposition d'un modèle conceptuel pour l'apprentissage et l'enseignement au primaire et au secondaire* [thèse de doctorat, Université du Québec à Montréal]. Archipel. https://archipel.uqam.ca/8129/

Mason, J. (1994). *L'esprit mathématique*. Modulo.

Moss, J. et McNab, S. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. Dans J. Cai et E. Knuth (dir.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (p. 277-301). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_16

Moss, D. L., Boyce, S. et Lamberg, T. (2020). Representations and conceptions of variables in students' early understandings of functions. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 15*(2), 1-14. https://doi.org/10.29333/iejme/6257

Passaro, V. (2015). *Analyse du raisonnement covariationnel favorisant le passage de la fonction à la dérivée et des situations qui en sollicitent le déploiement chez des élèves de 15 à 18 ans* [thèse de doctorat, Université de Montréal]. Papyrus. https://doi.org/10.71781/5371

Passaro, V., Saboya, M. et Venant, F. (2023). Émergence de signes personnels chez des élèves de 3e secondaire dans un contexte d'interprétation graphique avec le capteur de distance CBR. *Revue québécoise de didactique des mathématiques, 1*(2), 66-105.

Pinto E. et Cañadas, M. (2021). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra, *Mathematics Education Research Journal,* 33 113-134.

Pitalis, M., Pitta-Pantazi, D. et Christou, C. (2020). Young students' functional thinking modes : the relation between recursive patterning, covariational thinking, and correspondence relations. *Journal for Research in Mathematics Education, 51*(5), 631-674.

Powell, A. B., Francisco, J. M. et Maher C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *Journal of Mathematical Behavior,* 22, 405-435.

Radford, L. (1998). On culture and mind, a post-Vygotskian semiotic perspective, with and example from greek mathematical thought. Dans M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger et V. Cifarellli (dir.) *Proceedings of the 23rd Annual Meeting of the Semiotic Society of America* (p. 1-30). University of Toronto.

Radford, L. (2011). Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage: la théorie de l'objectivation. *Éléments,* 1, 53-87.

Radford, L. (2015a). Methodological aspects of the theory of objectification. *Perspectivas da Educação Matemática, 8*(18), 547-567.

Radford, L. (2015b). The epistemological foundations of the theory of objectification. Dans L. Branchetti (dir.), *Teaching and learning mathematics. Some past and current approaches to Mathematics Education* (p. 127-149). Isonomia Epistemologica.

Radford, L. (2019). Une théorie vygotskienne de l'enseignement-apprentissage : la théorie de l'objectivation. Dans J. Pilet et C. Vendeira (dir.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM 2018* (p. 314-332). Université Diderot.

Radford, L. (2020). Le concept de travail conjoint dans la théorie de l'objectivation. *Cahier du laboratoire de didactique André Revuz,* 1-19.

Radford, L. (2021a). *The theory of objectification, a Vygotskian perspective on knowing and becoming in mathematics teaching and learning*. Brill. https://doi.org/10.1163/9789004459663

Radford, L. (2021b). Davydov's concept of the concept and its dialectical materialist background. *Educational Studies in Mathematics, 106*(3), 327–342. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09959-y

Radford, L. (2022). Corps, matière et signes dans la constitution du sens en mathématiques. Dans C. Houdement, C. Hache, et C. de Hosson (dir.), *Sémiotique et apprentissages scientifiques* (p. 245-280). ISTE Editions.

Radford, L. (2024). The dialectic between knowledge, knowing, and concept in the theory of objectification. *Éducation et didactique, 18*(2), 147-159. https://doi.org/10.4000/11xa9

Robert, V. (2018). *Le développement de la pensée fonctionnelle dans les manuels scolaires du 3e cycle du primaire québécois : une analyse praxéologique* [mémoire de maitrise, Université de Sherbrooke]. Savoirs UdeS. https://savoirs.usherbrooke.ca/handle/11143/12608

Robert, V. (2024). *La pensée fonctionnelle : une analyse multisémiotique de l'activité d'enseignement-apprentissage visant son déploiement avant l'introduction formelle du concept de fonction* [thèse de doctorat, Université de Sherbrooke]. Savoirs UdeS. http://hdl.handle.net/11143/21653

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. Dans J. Kaput, D. Carraher et M. Blanton (dir.), *Algebra in the early grades* (p. 95-132). National Council of Teachers of Mathematics.

Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes du colloque EMF2015* (p. 346-356). Université d'Alger.

Squalli, H., Larguier, M., Bronner, A. et Adihou, A. (2020). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 22*(1), 36-62. https://doi.org/10.7202/1070024ar

Stephens, A., Fonger, N., Strachota, S., Isler, I., Blanton, M., Knuth, E. et Murphy Gardiner, A. (2017). A learning progression for elementary students' functional thinking. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal, 19*(3), 143-166. https://doi.org/10.1080/10986065.2017.1328636

Stölting, P. (2008). *La pensée fonctionnelle des élèves de 10 à 16 ans - Analyse comparative et études empiriques de son enseignement en France et en Allemagne* [thèse de doctorat inédite]. Université Denis Diderot et Universität Regenseburg.

Tanışlı, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *Journal of Mathematical Behavior, 30*(3), 206-223. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.08.001

Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. Dans L. Hatfield, S. Chamberlain et S. Belbase (dir.), *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education* (vol. 1, p. 33-57). WISDOMe Monographs.

Thompson, P. W., et Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. Dans J. Cai (dir.), *Compendium for research in mathematics education* (p. 421-456). National Council of Teachers of Mathematics.

Vygotski, L. S. (1934/2019), *Pensée et langage* (F. Sève, trad., 3e éd.). La Dispute.

Warren, E. et Cooper, T. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom, 11*(1), 9-14.

Warren, E., Cooper, T. et Lamb, J. (2006). Investigating functional thinking in the elementary classroom: Foundations of early algebraic reasoning. *Journal of Mathematical Behavior, 25*(3), 208-223. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.09.006

Yavuz, I. (2010). What does a graphical representation mean for students at the beginning of function teaching? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41*(4), 467-485. https://doi.org/10.1080/00207390903477442